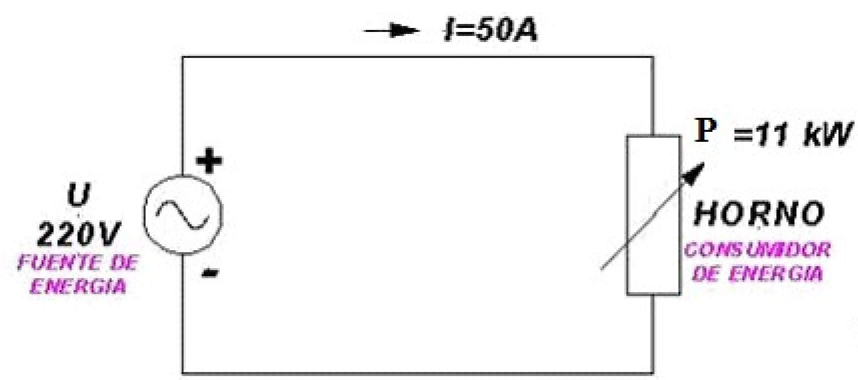
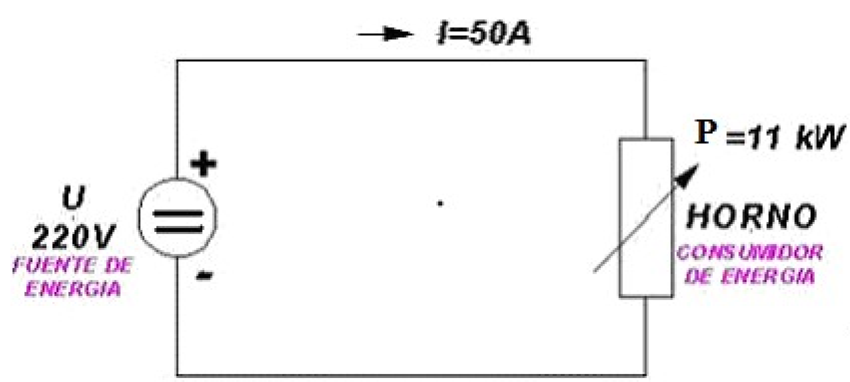
UNIDAD 1. **FUNDAMENTOS,**
CIRCUITOS ELECTRICOS
CORRECCIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA

Conceptos Previos

El circuito eléctrico

Las variables eléctricas de un sistema que alimenta una lámpara, un motor o un edificio pueden ser analizadas mediante un modelo denominado "CIRCUTO ELECTRICO" el cual se puede ver, en dos versiones, en la siguiente figura. La primera con una fuente de energia de Corriente Alterna y la otra por una fuente de energia de Corriente Continua, en ambos casos suponemos que la carga representada por el horno es una resistencia pura, en consecuencia los parámetros tendran identicos valores.





Se puede identificar:
La fuente de energía eléctrica cuyo voltaje es 220 V
El consumidor de energía, en este caso un horno de 11.000 W o lo que es lo mismo 11 Kw
Los conductores que forman un circuito cerrado, los cuales conducen una corriente de 50 A

Las variables para analizar el consumo de energía eléctrica son las siguientes:

La intensidad de corriente eléctrica (I)

Es definida como el flujo ordenado de cargas eléctricas que transporta la energía desde la fuente al "consumidor", denominada también como "intensidad de corriente" es definida por la expresión:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

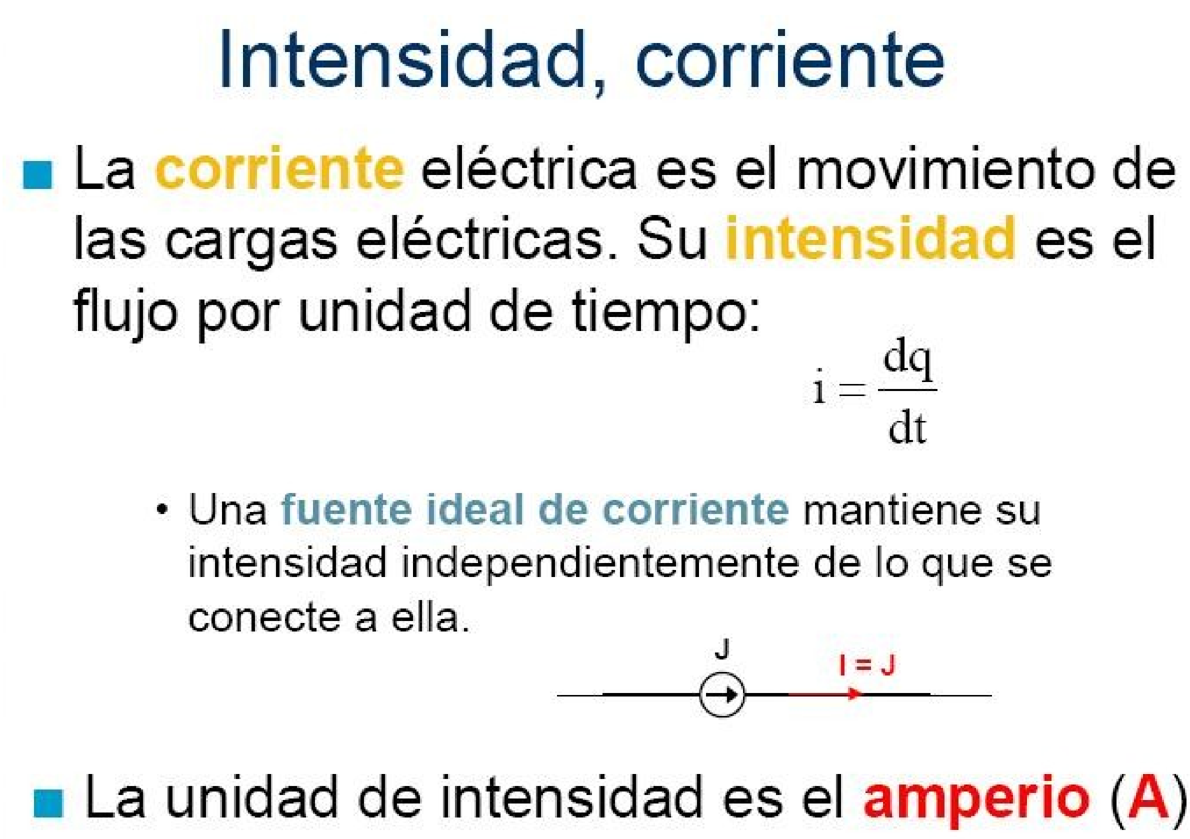
La unidad de la intensidad de corriente en el sistema internacional es el Ampere (A). De acuerdo a su magnitud se utilizan los siguientes múltiplos:

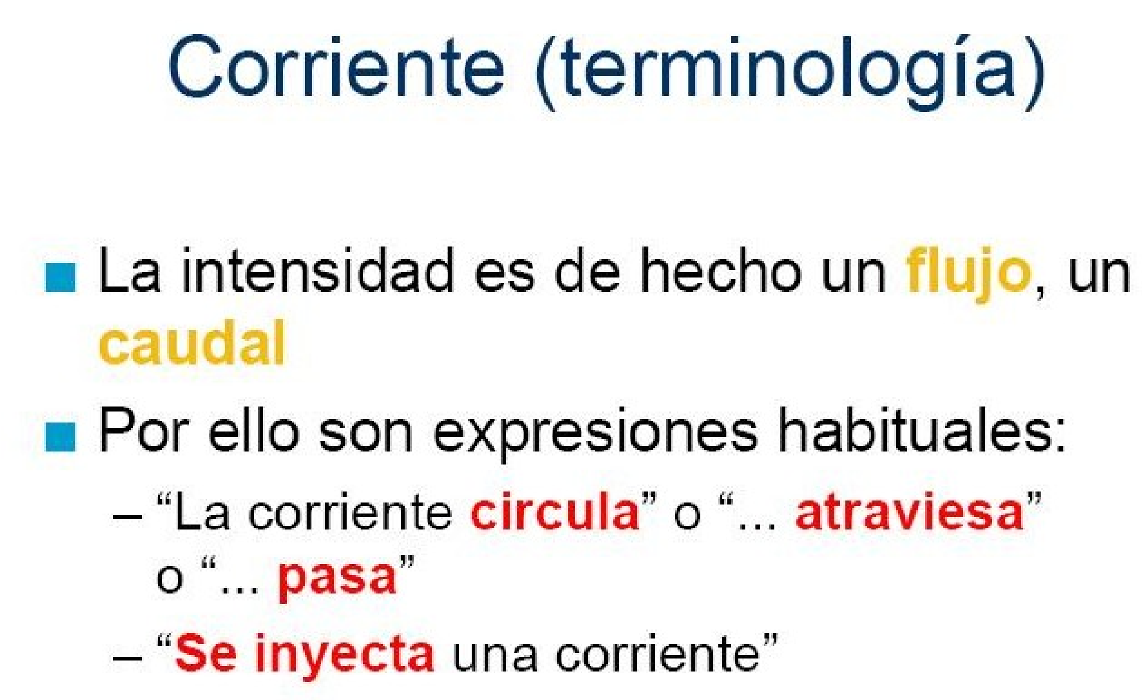
1 microampere (uA) = 0,000 001 A (Ejemplo: corriente en las memorias de PC)

1 miliampere (mA) = 0,001 A (Ejemplo: 250 mA muerte de una persona)

1 kiloampere (kA) = 1.000 A (Ejemplo: Maquinas de soldar, hornos de fusión, etc)

En el ejemplo, el horno "consume" una corriente de 50 Amperes.





La Tensión eléctrica (V = U)

La capacidad de transporte de carga eléctrica (energía) que tiene toda fuente eléctrica. El voltaje entre dos puntos "a" y "b" del circuito se define como la diferencia en el nivel de energía de una unidad de carga localizada en dichos puntos. Se define por la expresión:

La unidad del sistema internacional es el Voltio (V), tambien aquí se puede trabajar con multiplicadores.

1 microvoltio (uV) = 0,000 001 V (Ejemplo: voltajes inducidos)

1 milivoltio (mV) = 0,001 V (Ejemplo: voltajes en circuitos electrónicos)

1 kilovoltio (kV) = 1.000 V (Ejemplo: voltajes de transmisión y distribución)

Los voltajes industriales más usados en nuestro país son 220 V, 380 V, 440 V y 660 V. En la transmisión y distribución 10 kV, 13,2 kV, 60 kV y 220 kV. En el caso del ejemplo, tenemos una fuente de 220 V

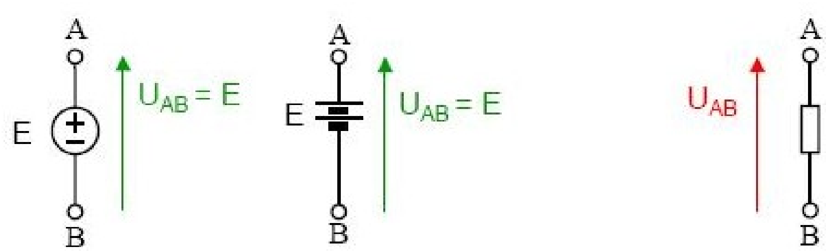
Tensión, ddp, voltaje

- **Definición**: u_{AB}, **diferencia de potencial** entre dos puntos A y B:
  - Trabajo necesario para desplazar una unidad de carga $\oplus$ desde A hasta B dentro de un campo eléctrico $\overline{E}$

$$u_A - u_B = u_{AB} = -\int_A^B \overline{E} \cdot \overline{dl}$$

- La unidad de tensión es el **voltio** (**V**)

- La tensión entre dos puntos puede ser:
  - La **fuerza electromotriz** (f.e.m.) que se genera en una fuente;
    - Una **fuente ideal de tensión** mantiene su d.d.p. independientemente de lo que se le conecte.
  - La **caída de tensión** que se produce en un receptor



La potencia eléctrica (P)

La potencia eléctrica es la capacidad que tiene la electricidad de producir un trabajo o de transformar la energía en un tiempo dado. Se define por la siguiente expresión:

P = U * I

En el sistema internacional, la unidad de potencia es el Watt (W) y se cumple la siguiente relación:

1 Watt = 1 Ampere x 1 Voltio

1 kilowatt (kW) = 1.000 Watts (Ejemplo: Fuerza motriz en general, planchas, etc)

1 Megawatt (MW) = 1.000.000 Watts (Ejemplo: Plantas industriales, ciudades)

Los niveles de potencia con los cuales se trabaja normalmente son del orden de 150 kW para pequeñas plantas industriales y por encima de 1 MW las grandes instalaciones. En el acaso del ejemplo, se tieneuna potencia que se transforma en un flujo de calor de 11 kW.

- Por ello la **potencia** empleada para el desplaz… …terior será:

CC 008.jpg
Tipo: JPG File
Tamaño: 60.7 KB
Dimensión: 764 x 579 píxeles

$$P = \frac{dT}{dt} = u_{AB} \frac{dq}{dt} = u_{AB} i$$

– La unidad de energía es el **julio** (**J**) y la de potencia el **vatio** (**W**)

La Energía Eléctrica (T).

La energía eléctrica es la forma más versátil de las energías manejadas por el hombre. Se define como el trabajo que puede realizar una potencia eléctrica dada en un tiempo dado.

La energía eléctrica se mide en Joules (J), sin embargo en el campo de la electricidad se suele utilizar el kW-h (kilowatt hora). Y esta unidad es la que aparece en las facturas de la empresa eléctrica.

1 kW-h = 3,6 Megajoule

En el ejemplo, si el horno estuviera funcionando 10 horas, la energía consumida sería:

Energía = P.t = 11 kW x 10 horas = 110 kW-h.

- La **energía** necesaria para desplazar una carga elemental **dq** desde A hasta B es:

$$dT = u_{AB} \cdot dq$$

La resistencia eléctrica (R)

Es la oposición que ofrece todo cuerpo al paso de la corriente, depende en mayor o menor grado de su constitución atómica y/o molecular de cada material. La resistencia eléctrica se mide en Ohms (Ω) y los multiplicadores usados son.

1 microohm (uΩ) = 0,000 001 Ohm

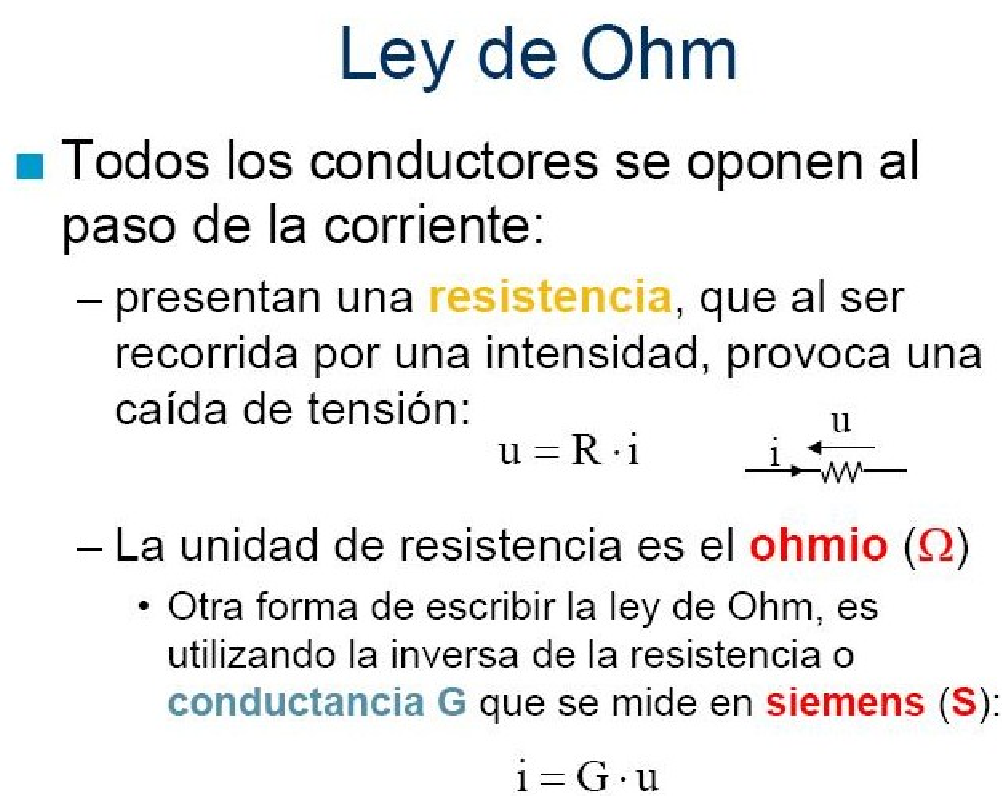
1 miliohm (mΩ) = 0,001 Ohm

1 kiloohm (kΩ) = 1.000 Ohm

1 megaohm (MΩ) = 1.000.000 Ohm

La manifestación de la presencia de una resistencia en el circuito, es la generación de calor, la que ocurre al pasar la corriente a través de ella, de allí su importancia para un auditor energético.

Las leyes y teoremas de la electrotecnia, por brindar mayor facilidad en su comprensión las veremos para CC pero, con alguna diferencia en el concepto, son de aplicación tambien en C.A., la veremos mas adelante, con la aparicion de elementos de carga reactivos que deben su comportamiento a las caractesisticas de la C.A.



Ley de Joule

- Las resistencias **consumen** potencia, que disipan en forma de **calor**
  - Potencia consumida por una resistencia:

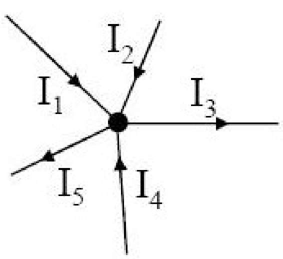
$$P = u \cdot i = R \cdot i^2 = \frac{u^2}{R}$$

  - Energía disipada durante un tiempo t:

$$Q = P \cdot t = R \cdot i^2 \cdot t = \frac{u^2}{R} \cdot t$$

Ley de Kirchhoff de las corrientes

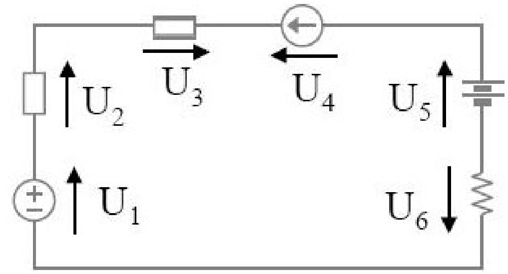
- "La suma de las corrientes que concurren en un nudo (**con su signo**) es igual a cero"



$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

Ley de Kirchhoff de las tensiones

- "La suma de las tensiones a lo largo de un lazo (**con su signo**) es igual a cero"

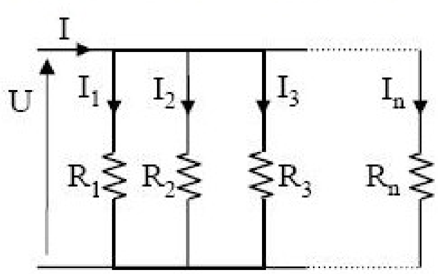


$$U_1 + U_2 + U_3 - U_4 - U_5 + U_6 = 0$$

– Un lazo es un camino cerrado en un circuito

Conexión en paralelo

- Los elementos conectados en **paralelo** se caracterizan por estar sometidos a la **misma tensión**

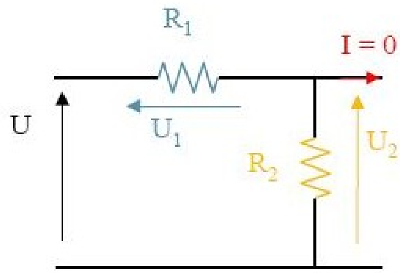


$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n$$
$$= \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \ldots + \frac{U}{R_n}$$
$$= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right) \cdot U$$

$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} \quad \text{o} \quad G_{eq} = \sum_{i=1}^{n} G_i$$

Divisor de tensión

- La tensión se reparte proporcionalmente a la resistencia:



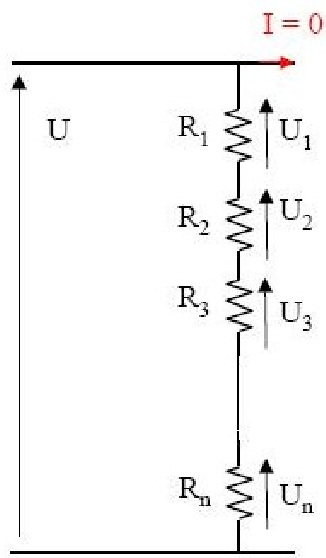
$$U_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

– Es **esencial** que la corriente indicada sea **nula**

Divisor de tensión (II)

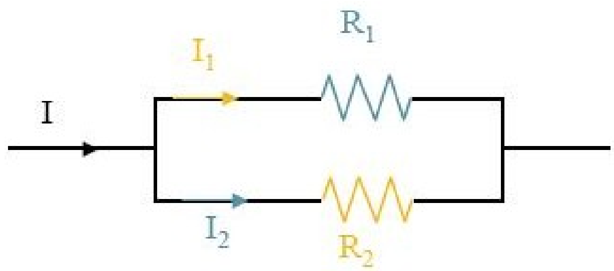
- Las expresiones anteriores se generalizan fácilmente:



$$U_i = U \cdot \frac{R_i}{\sum_{j=1}^{n} R_j}$$

Reparto de corriente

- La corriente se reparte de forma inversamente proporcional a la resistencia:

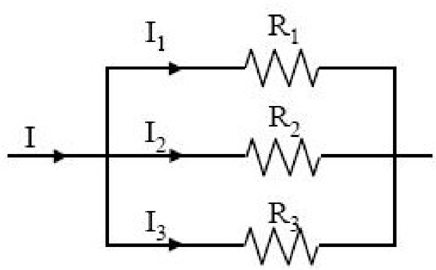


$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Reparto de corriente (II)

- La generalización es más difícil de retener, aunque para tres resistencias:

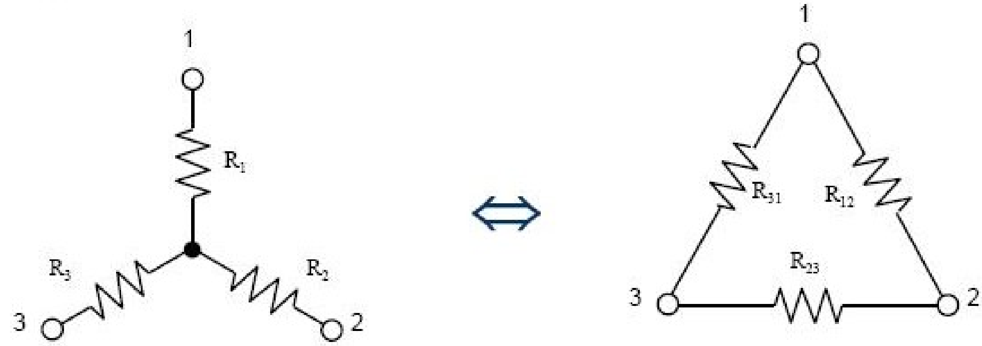


$$I_1 = I \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}$$

$$I_3 = I \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3}$$

Equivalencia estrella-triángulo



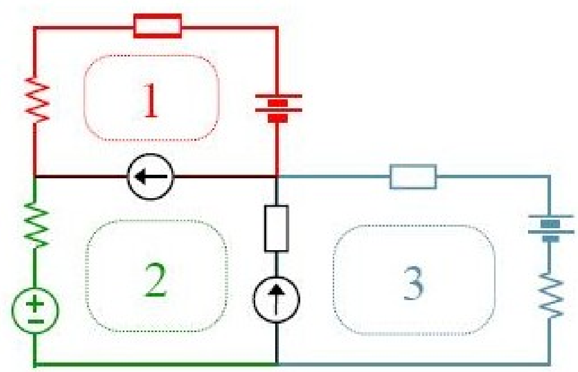
$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \qquad R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_3}$$

$$R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \qquad R_{23} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_1}$$

$$R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \qquad R_{31} = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}{R_2}$$

Método de las mallas (I)

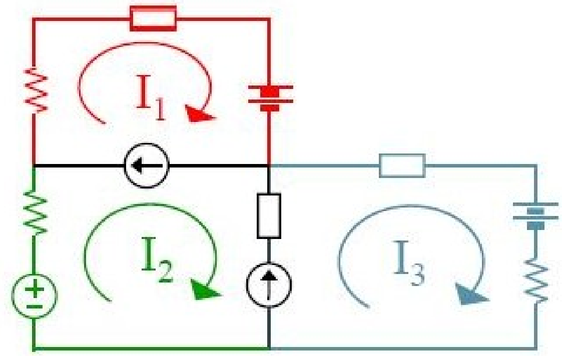
- 1. Localizar las mallas:



  - Una malla es un lazo que no contiene ningún otro
  - El método de las mallas sólo es aplicable en **circuitos planos**

Método de las mallas (II)

- 2. Asignar un sentido a las corrientes de malla (el mismo sentido para todas):



  - Nótese que las corrientes de malla **no existen** como tales: las reales son las **corrientes de rama**

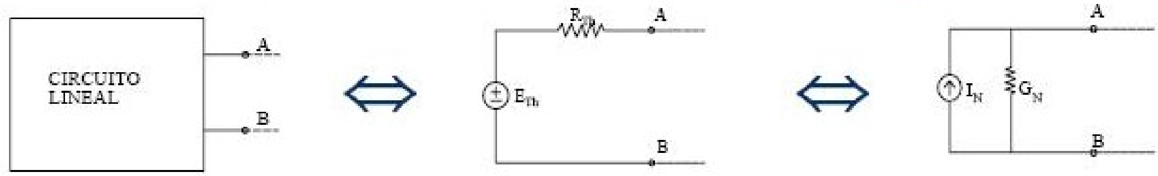
Método de las mallas (III)

- 3. Plantear las ecuaciones en forma matricial:
  - A cada malla le corresponde una fila:

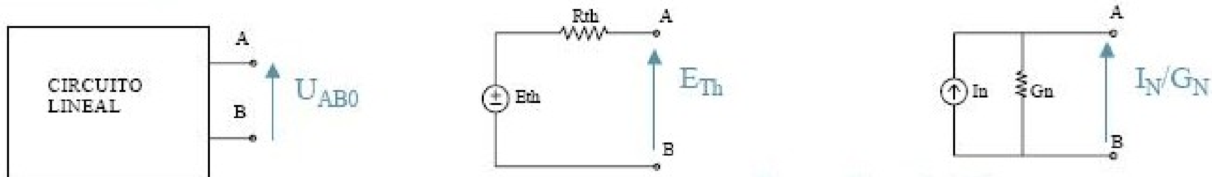
$$\text{Fila i}: \quad \sum E_i = I_i \sum_j R_{ij} - \sum_{j \neq i} I_j R_{ij}$$

- 4. Resolver el sistema de ecuaciones
  - obteniendo I_1, I_2, I_3 ...
- 5. Calcular lo que se quiere:
  - Intensidades de rama ($I_{r1}, I_{r2}, \dots, I_{rn}$)
  - Tensiones en los elementos, etc...

Teoremas de Thévenin y Norton

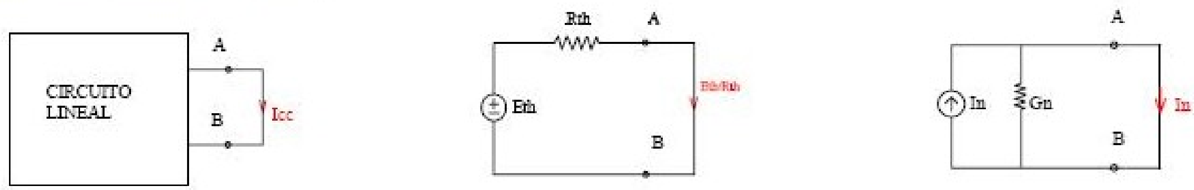


En vacío:



$U_{AB0}=E_{Th}=I_N/G_N$

En cortocircuito:



$I_{cc}=E_{Th}/R_{Th}=I_N$ $\quad$ $R_{Th}=1/G_N=U_{AB0}/I_{cc}$

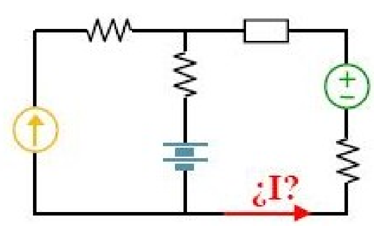
Resistencia de Thévenin

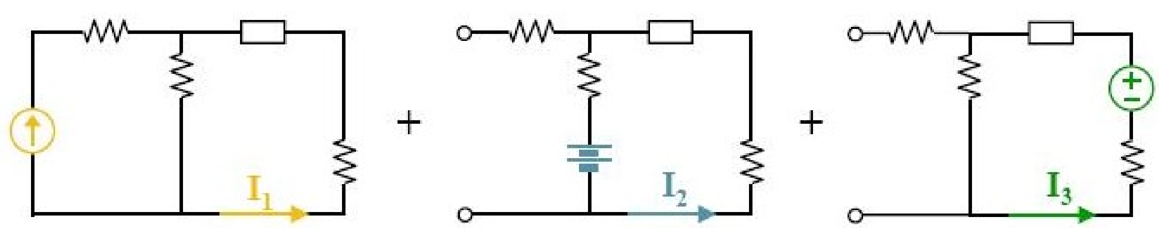
- La R_{Th}, que por definición es U_{AB0} / I_{cc}, también se puede obtener como la **resistencia equivalente entre A y B** cuando se **anulan** todas las **fuentes** independientes
  - Las fuentes de **tensión** se **cortocircuitan**
  - Las fuentes de **corriente** se **abren**

Principio de superposición

- Cualquier variable con dependencia lineal se puede obtener como la **suma** de las contribuciones que **cada fuente por separado** produce sobre dicha variable
  - Se estudia el efecto de cada fuente **cortocircuitando** las demás fuentes independientes de **tensión** y **abriendo** las demás fuentes independientes de **corriente**
  - Es aplicable a **tensiones** y **corrientes**, **no a potencias**, que no tienen dependencia lineal

Superposición. Ejemplo



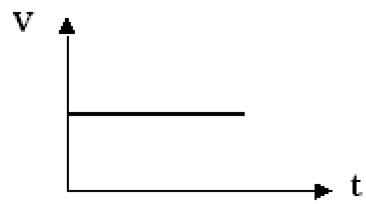


$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3$$

CORRIENTE ALTERNA

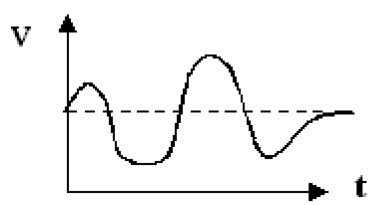
Corriente Continua variable.

Hasta ahora se ha considerado que la corriente eléctrica se desplaza desde el polo positivo del generador al negativo (la corriente electrónica o real lo hace al revés: los electrones se ven repelidos por el negativo y atraídos por el positivo).



Corriente continua

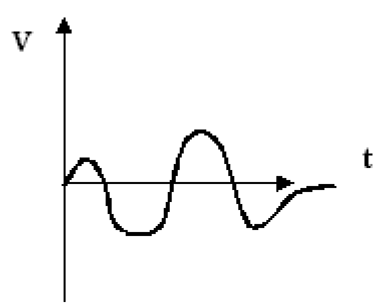
En una gráfica en la que en el eje horizontal se expresa el tiempo y en el vertical la tensión en cada instante, la representación de este tipo de corriente, que llamaremos CORRIENTE CONTINUA, es el de la figura 1, si el valor de la tensión es constante durante todo el tiempo.



Corriente continua variable

La de la figura 2, si dicho valor varía a lo largo del tiempo (pero nunca se hace negativa), la llamaremos corriente contínua variable.

Ahora bien, existen generadores en los que la polaridad está constantemente cambiando de signo, por lo que el sentido de la corriente es uno durante un intervalo de tiempo, y de sentido contrario en el intervalo siguiente. Obsérvese que siempre existe paso de corriente; lo que varia constantemente es el signo (el sentido) de ésta.



Corriente alterna

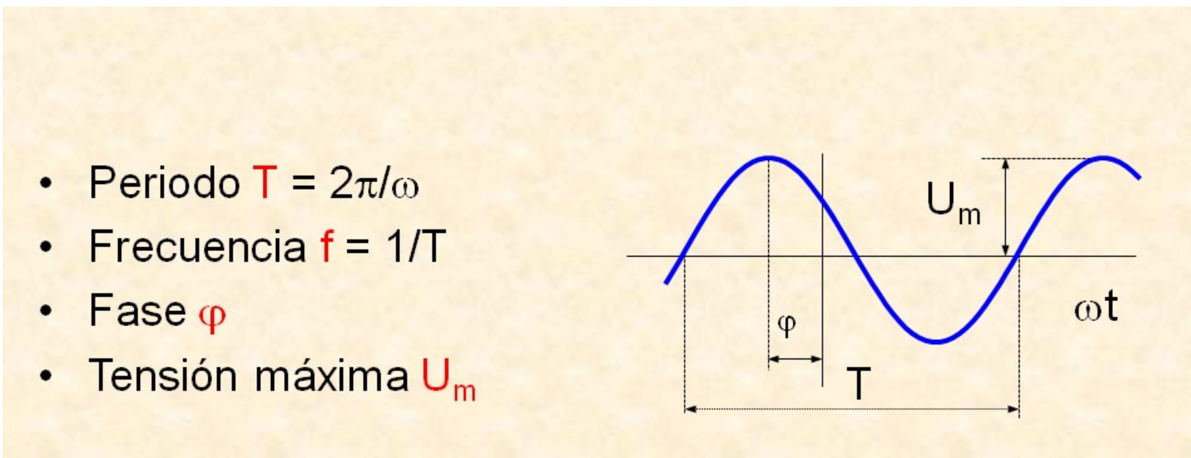
Naturalmente, para cambiar de un sentido a otro, es preciso que pase por cero, por lo que el valor de la tensión no será el mismo en todos los instantes.

A este tipo de corriente se le llama CORRIENTE ALTERNA, y, por el mismo motivo, se habla de TENSION ALTERNA. La figura 3 muestra un ejemplo de corriente alterna.

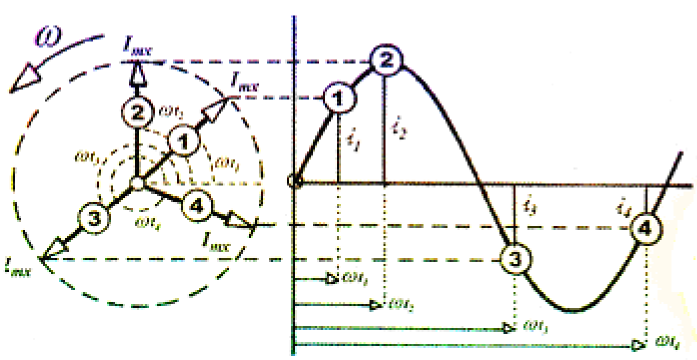
La corriente contínua se abrevia con las letras C.C.(Corriente Continua) o D.C. (Direct Current), y la alterna, por C.A. (Corriente Alterna) o A.C.(Alternated Current)

CORRIENTE ALTERNA PERIODICA

El caso más importante de corrientes alternas son las llamadas **corrientes alternas periódicas:** son aquellas en las que los valores se repiten cada cierto tiempo. El tiempo que tarda en repetirse un valor se llama **PERIODO** de la corriente, se expresa en unidades de tiempo y se representa por la letra **T.**



La más importante de las corrientes alternas periódicas es esta, llamada corriente sinusoidal o senoidal, es la única capaz de pasar a través de resistencias, bobinas y condensadores sin deformarse. Puede demostrarse que cualquier otra forma de onda se puede construir a partir de una suma de ondas sinusoidales de determinadas frecuencias. Se llama sinusoidal porque sigue la forma de la función matemática SENO. Que es la representada en la figura.



Figura

Esta función es (si se trata de tensiones) :

$$\mathbf{v_i = V_p\ sen\ wt}$$

o bien (si se trata de corrientes)

$$\mathbf{i_i = I_p\ sen\ wt}$$

donde:

$\mathbf{v_i}$ es el valor instantáneo de la tensión, es decir, el valor en un determinado instante **t**.

$\mathbf{i_i}$ es el valor instantáneo de la corriente, es decir, el valor en un determinado instante **t**.

$\mathbf{V_p}$ es el valor de pico de la tensión, también llamado amplitud de la tensión

$\mathbf{I_p}$ es el valor de pico de la corriente, también llamado amplitud de la corriente.

t es el tiempo expresado en segundos (para cada instante **t** la tensión tendrá un valor)

w es la denominada velocidad angular, o lo que es lo mismo, es la velocidad angular para barrer 2TT rad (perimertro de una circunferencia) en un tiempo igual a un periodo.

De esta ultima definición se desprende que un movimiento sinusoidal es la proyeccion de un movimieno circular y que aclararemos a continuacion.

RELACION ENTRE EL MOVIMIENTO SINUSOIDAL Y EL CIRCULAR

MOVIMIENTO CIRCULAR = CONCEPTO DE VELOCIDAD ANGULAR

La velocidad se expresa como la relación que existe entre el espacio recorrido y el tiempo empleado en dicho recorrido. Si el espacio recorrido es **e** y el tiempo empleado en recorrerlo es **t** diremos que la velocidad **v = e / t** Del mismo modo, **en un movimiento circular**, es decir, en aquel cuya trayectoria es una circunferencia, se puede definir de otra manera la velocidad.

Ahora nos interesa, más que el camino recorrido, **el ángulo que ha descrito nuestro movimiento durante un tiempo determinado**. Y así diremos que si nuestro móvil se traslada a lo largo de la circunferencia un ángulo de 70º en 2 segundos diremos que se ha movido con una velocidad de 70/2 = 35º en un segundo.

Esta nueva manera de expresar la velocidad se denomina **VELOCIDAD ANGULAR**.

La velocidad angular nos expresa la relación que existe entre el ángulo recorrido por nuestro móvil y el tiempo empleado en recorrer dicho ángulo.

Dado que la unidad natural del ángulo es el RADIAN (La circunferencia tiene **2 TT** radianes). La velocidad angular se expresará en **RADIANES POR SEGUNDO (Rad/seg.).**

La velocidad angular, también llamada PULSACION o FRECUENCIA ANGULAR, se representa por la letra griega **w** (omega).

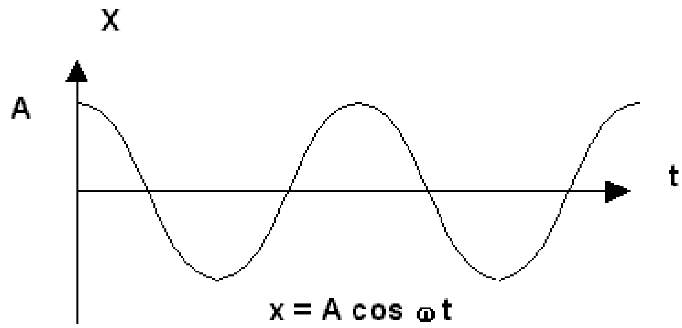
Entonces , si un móvil lleva una velocidad angular **w** (por ejemplo, 4 rad/seg.), al cabo de un tiempo **t** (por ejemplo, 2 segundos), habrá descrito un ángulo (Φ), que será igual al producto de la velocidad angular **w** por el tiempo **t**:

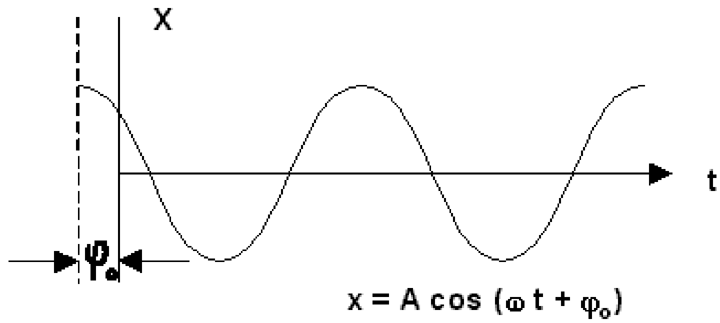
$$\Phi = w\,t = 4 \,.\, 2 = 8 \text{ radianes}$$

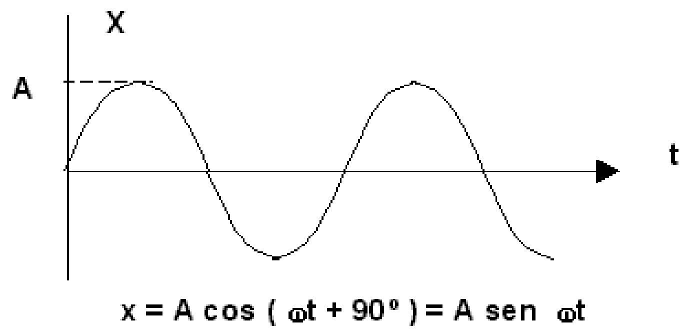
MOVIMIENTO SINUSOIDAL

Sobre el movimiento circular (periódico) se definirán unos conceptos que serán de aplicación en el movimiento sinusoidal:

w = PULSACION : La pulsación del movimiento sinusoidal equivale a la velocidad angular del movimiento circular. Se expresará, por tanto, en radianes por segundo.- (Recordar que una circunferencia tiene **2TT** radianes)
T = PERIODO : es el tiempo que tarda el radio en describir una vuelta completa, que es, a su vez, el tiempo que tarda en repetir su valor.
f = FRECUENCIA : Es el número de vueltas por segundo y, por tanto, el número de periodos por segundo.- (Su valor es la inversa de dicho periodo)
j_0 = FASE : Es el ángulo inicial formado por el radio antes de empezar a contar el tiempo. En el movimiento sinusoidal representa el desplazamiento del eje vertical respecto del comienzo de la sinusoide.
A = AMPLITUD o VALOR MAXIMO de la sinusoide: Es el valor del radio en el movimiento circular.
x(t) = VALOR INSTANTANEO. Es el valor de la sinusoide en cada instante. En el movimiento circular es la proyección del radio sobre el eje horizontal.







Así pues, hay una relación entre frecuencia / periodo y pulsación. En efecto: Si para describir una vuelta se necesitan T segundos (por ejemplo T = 0,5 seg.) ¿ Cuántas vueltas describirá en 1 segundo ? Lógicamente 2 vueltas, es decir:

$$f = \frac{1}{T} \qquad \textbf{o lo que es lo mismo} \qquad T = \frac{1}{f}$$

La frecuencia resulta ser la inversa del período

Cada circunferencia tiene como ya se ha dicho 2π radianes. Por lo tanto si se describen f vueltas por segundo (por ejemplo 2 vueltas por segundo) equivale a decir que la velocidad angular es de $2\pi \cdot 2$ radianes por segundo es decir 4π rad /s.

$$\mathbf{w = 2\pi f = 2\pi / T}$$

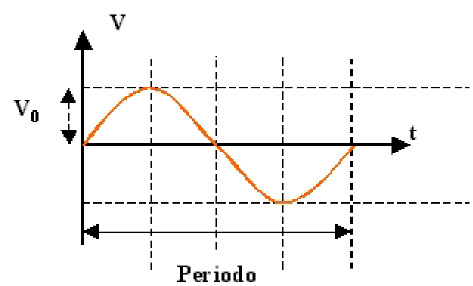
VALOR MEDIO Y VALOR EFICAZ

VALOR MEDIO

Se llama **valor medio** de una tensión (o corriente) alterna **a la media aritmética** de todos los valores instantáneos de tensión (o corriente), medidos en un cierto intervalo de tiempo.

En una corriente alterna sinusoidal, el valor medio durante un período es nulo: en efecto, los valores positivos se compensan con los negativos.

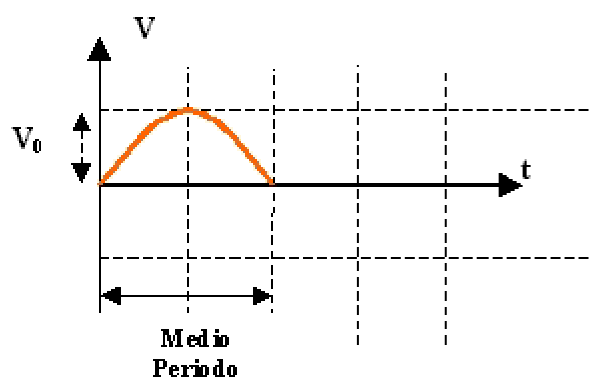
$$Vm = 0$$



En cambio, durante medio periodo, el valor medio es

$$V_m = \frac{2V_0}{\pi}$$

siendo V_0 el valor máximo.



VALOR EFICAZ

Se llama **valor eficaz** de una corriente alterna, al valor que tendría una corriente continua **que produjera la misma potencia** que dicha corriente alterna, al aplicarla sobre una misma resistencia.

Dicho de otro modo, este valor es el que produce el mismo efecto calorífico que su equivalente en corriente continua. Matemáticamente, el valor eficaz de una magnitud variable con el tiempo, se define como la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los valores instantáneos alcanzados durante un período:

Es decir, se conoce el valor máximo de una corriente alterna (I_0). Se aplica ésta sobre una cierta resistencia y se mide la potencia producida sobre ella.

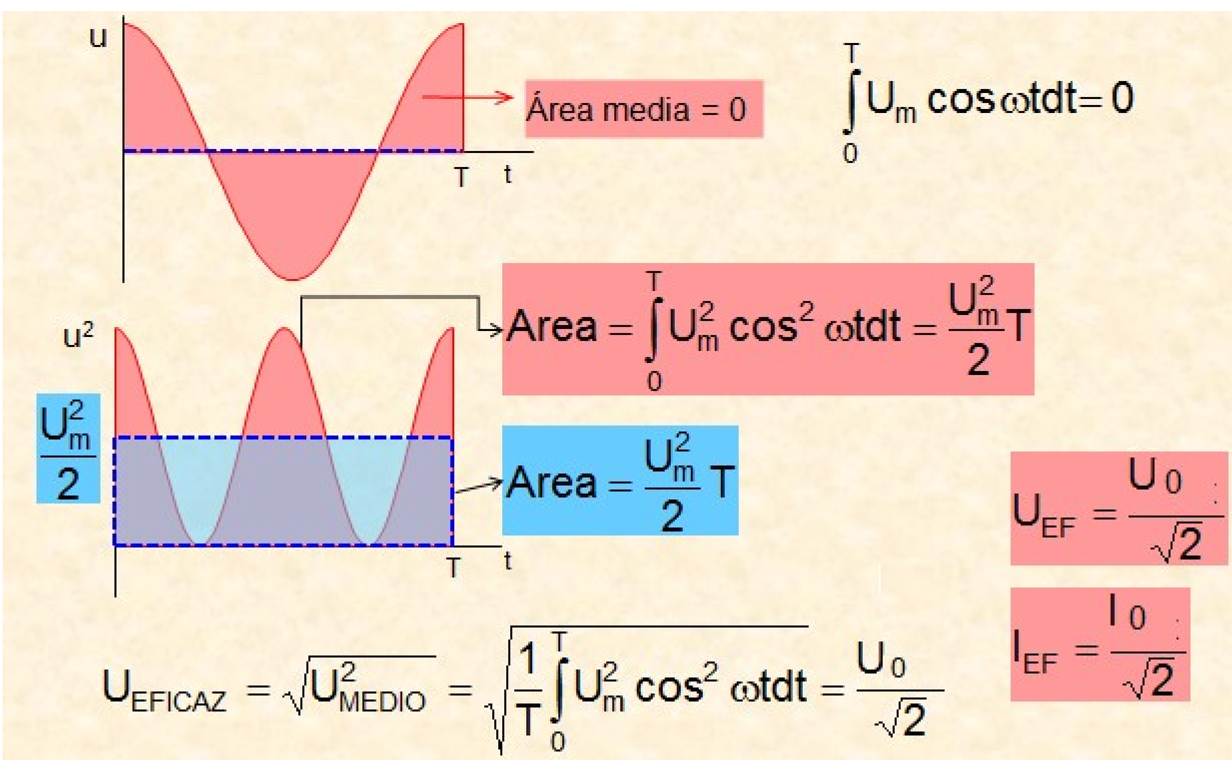
A continuación, se busca un valor de corriente continua que produzca la misma potencia sobre esa misma resistencia. A este último valor, se le llama valor eficaz de la primera corriente (la alterna).

y del mismo modo para la corriente

$$I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Para una señal sinusoidal, el valor eficaz de la tensión es:

$$V_{ef} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$



Interpretación grafica del valor eficaz

la potencia eficaz resultará ser:

$$P_{ef} = V_{ef} \cdot I_{ef} = \frac{V_0 \cdot I_0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{V_0 \cdot I_0}{2}$$

Es decir que es la mitad de la potencia máxima (o potencia de pico)

La tensión o la potencia eficaz, se nombran muchas veces por las letras RMS. O sea, el decir 10 VRMS ó 15 WRMS significarán 10 voltios eficaces ó 15 wats eficaces, respectivamente.

Para ilustrar prácticamente los conceptos anteriores, consideremos, por ejemplo, la corriente alterna en la red eléctrica doméstica en Argentina:

Cuando decimos que su valor es de 220 V CA, estamos diciendo que su valor eficaz (al menos nominalmente) es de 230 V, lo que significa que tiene los mismos efectos caloríficos que una tensión de 220 V de CC, tal cual el ejemplo planteado al comienzo de la unidad.

Así, para nuestra red de 220 V CA, el voltaje de pico es de aproximadamente 311 V y de 622 V (el doble) el voltaje de pico a pico.

Su frecuencia es de 50 Hz, lo que equivale a decir que cada ciclo de la onda senoidal tarda 20 ms en repetirse. El voltaje de pico positivo se alcanza a los 5 ms de pasar la onda por cero (0 V) en su incremento, y 10 ms después se alcanza el voltaje de pico negativo. Si se desea conocer, por ejemplo, el valor a los 3 ms de pasar por cero en su incremento, se empleará la función senoidal:

Corriente alterna vs. Continua

La razón del amplio uso de la corriente alterna viene determinada por su facilidad de transformación, cualidad de la que carece la corriente continua.

La energía eléctrica viene dada por el producto de la tensión, la intensidad y el tiempo. Dado que la sección de los conductores de las líneas de transporte de energía eléctrica dependen de la intensidad, podemos, mediante un transformador, elevar el voltaje hasta altos valores (alta tensión). Con esto la misma energía puede ser distribuida a largas distancias con bajas intensidades de corriente y, por tanto, con bajas pérdidas por causa del efecto Joule. Una vez en el punto de utilización o en sus cercanías, el voltaje puede ser de nuevo reducido para su uso industrial o doméstico de forma cómoda y segura.

Las Matemáticas y la C.A. Senoidal

Algunos tipos de ondas periódicas tienen el inconveniente de no tener definida su expresión matemática, por lo que no se puede operar analíticamente con ellas. Por el contrario, la onda senoidal no tiene esta indeterminación matemática y presenta las siguientes ventajas:

La función seno está perfectamente definida mediante su expresión analítica y gráfica. Mediante la teoría de los números complejos se analizan con suma facilidad los circuitos de alterna. Los mismos permiten resolver fácilmente un circuito en el dominio fasorial sin tener que embarcarse en las operaciones con señales senoidales de distinta fase y amplitud si operasemos en el dominio temporal.

Las ondas periódicas no senoidales se pueden descomponer en suma de una serie de ondas senoidales de diferentes frecuencias que reciben el nombre de armónicos. Esto es una aplicación directa de las series de Fourier.

Se pueden generar con facilidad y en magnitudes de valores elevados para facilitar el transporte de la energía eléctrica.

Su transformación en otras ondas de distinta magnitud se consigue con facilidad mediante la utilización de transformadores.

Números imaginarios

La raiz cuadrada de un numero real negativo es un "*numero imaginario".*

Por ejemplo son numeros imaginarios: $\sqrt{-1}$; $\sqrt{-2}$; $\sqrt{-5}$; $\sqrt{-16}$; etc.

Si hacemos j= $\sqrt{-1}$, que se llame unidad imaginaria.

Se puede escribir lo siguiente: $\sqrt{-2}$ =j$\sqrt{2}$; $\sqrt{-4}$ =j2 ; $\sqrt{-16}$ =j4 ; etc.

El conjunto de los numeros imaginarios se puede colocar como correspondencia biunivoca con los puntos de otra recta que denominaremos eje imaginario, tendremos un par de coordenadas a modo de numero complejo que nos permitira representar un fasor en un par de ejes.

Las sucesivas potencias de la unidad imaginaria son:

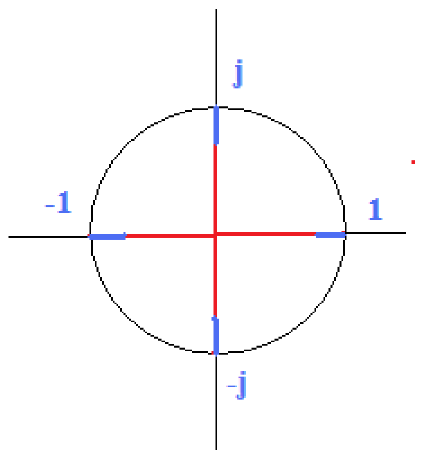
$$j^2 = -1$$

$$j^3 = j^2 \cdot j = -j$$

$$j^4 = j^2 \cdot j^2 = 1$$

$$j^5 = j$$

Como conclusión, lo anterior significa que cada vez que multiplicamos por j estamos girando el versor unidad imaginaria en 90 grados, este concepto será de mucha utilidad a la hora de pasar del dominio temporal al dominio fasorial.



El nombre de imaginario es bastante alejado de la realidad ya que estos numeros tienen tanta existencia como los reales.

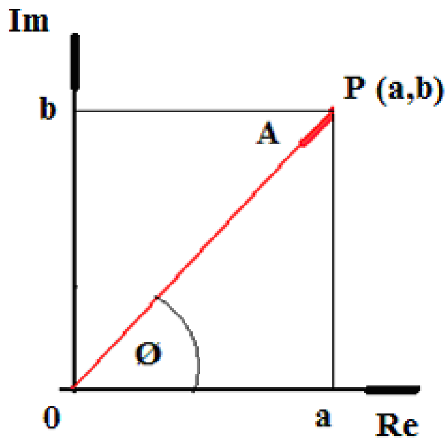
Representación fasorial

Una función senoidal puede ser representada por un vector giratorio al que se denomina fasor o vector de Fresnel, como se dijo anteriormete una funcion senoidal es la proyección de una funcion circular. El fasor tendrá las siguientes características:

- Girará con una velocidad angular ω.
- En nuestro caso, circuitos de C.A., el módulo del fasor será el valor eficaz de la senoidal correspondiente.

La razón de utilizar la representación fasorial está en la simplificación que ello supone. Matemáticamente, un fasor puede ser definido fácilmente por un número complejo, por lo que puede emplearse la teoría de cálculo de estos números para el análisis de sistemas de corriente alterna.

FASORES



$A = |\bar{A}| = \bar{OP}$ Modulo del fasor

Ø = argumento del fasor

$A = \sqrt{a^2 + b^2}$

$Ø = \text{arc tg}\ \frac{b}{a}$

EXPRESIONES MATEMATICAS DE FASORES

binomica $\bar{A} = a + jb$

trigonometrica $\bar{A} = A\ (\cos Ø + j\,\text{sen}Ø)$

exponencial $\bar{A} = A\ e^{jØ}$

polar $\bar{A} = A\ /\underline{\ Ø\ }$

OPERACIONES ALGEBRAICAS CON FASORES

$\bar{A}c$ es el conjugado de $\bar{A}$

$\bar{A} + \bar{A}c = (a + jb) + (a - jb) = 2A$

$\bar{A} - \bar{A}c = (a + jb) - (a - jb) = j2b$

$\bar{A} \cdot \bar{A}c = (a + jb) \cdot (a - jb) = a^2 + b^2$

FASORES ARMONICOS

Es todo favor que gira con velocidad angular constante, alrededor de un eje fijo.

$$\mathring{A} = \bar{A}\ e^{jwt} = A\ e^{jØ} \cdot e^{jwt} = A\ e^{j\,(wt + Ø)}$$

e^{jwt} **representa un "versor giratorio" de modulo 1**

para t = T (periodo)

wT = 2TT

$\mathring{A}$ vuelve a su posición inicial

El favor giratorio resulta periodico T = 2TT / w

w es la velocidad angular con que deberia girar un favor armonico para barrer 2TT radianes en un periodo.

Los favores armonicos cumplen con una relacion de periodicidad similar a las de las funciones trigonometricas, lo que no es casual ya que sabemos que:

$$\mathrm{Re}\ e^{jwt} = \cos wt$$

$$\mathrm{Im}\ e^{jwt} = \mathrm{sen}\ wt$$

lo que tambien se puede interpretar que el movimiento senoidal es una royeccion de movimiento circular.

DERIVADA DE UN FASOR ARMONICO

$$\mathring{A} = \bar{A}\, e^{jwt}$$

$$\frac{d\mathring{A}}{dt} = jw\, \bar{A}\, e^{jwt} = jw\, \mathring{A}$$

$$\frac{d^2\mathring{A}}{dt} = (j\, W)^2\, \bar{A}\, e^{jwt} = (j\, W)^2\, \mathring{A}$$

$$\frac{d^n\mathring{A}}{dt} = (j\, W)^n\, \bar{A}\, e^{jwt} = (j\, W)^n\, \mathring{A}$$

Derivar "n" veces un favor armonico equivale a incrementar su modulo w^n veces y aumentar n TT/2 su argumento (girar el favor n veces 90 grados).

INTEGRAL DE UN FASOR ARMONICO

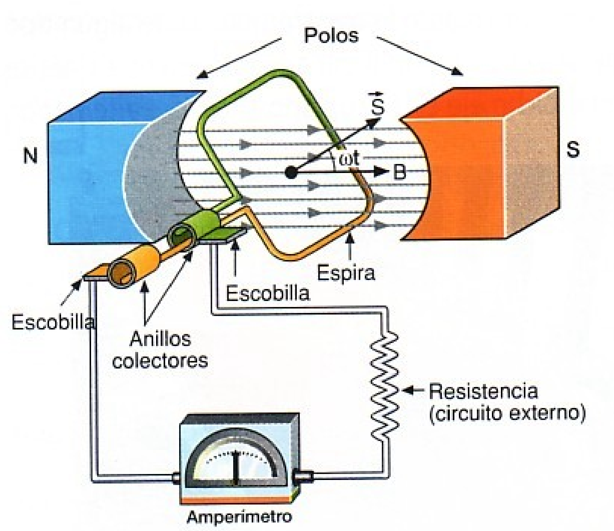
$$\int \mathring{A}\, dt = \int \bar{A}\, e^{jwt}\, dt = \frac{\bar{A}}{jw}\, e^{jwt} = \frac{\mathring{A}}{jw}$$

$$\int^{(n)} \mathring{A}\, dt = \frac{\mathring{A}}{(jw)^n}$$

Integrar "n" veces un favor armonico equivale a disminuir su modulo w^n veces y disminuir n TT/2 su argumento (girar el favor n veces [-90] grados).

CARACTERÍSTICAS DE LA CORRIENTE ALTERNA

Un circuito de corriente alterna consta de una combinación de elementos: resistencias, condensadores y bobinas y un generador que suministra la corriente alterna.
Un alternador es un generador de corriente alterna que se basa en la inducción de una f. e. m al girar una espira (o bobina) en el seno de un campo magnético debida a la variación de flujo. Según va girando la espira varía el número de líneas de campo magnético que la atraviesan.



Una f. e. m alterna se produce mediante la rotación de una bobina con velocidad angular constante dentro de un campo magnético uniforme entre los polos de un imán.

$$V = V0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Frecuencia

La corriente alterna se caracteriza porque su sentido cambia alternativamente con el tiempo. Ello es debido a que el generador que la produce invierte periódicamente sus dos polos eléctricos, convirtiendo el positivo en negativo y viceversa. Este hecho se repite periódicamente a razón de 50 veces cada segundo (frecuencia de la corriente en Europa 50 Hz o ciclos/seg)
La **frecuencia (f)** es el número de ciclos, vueltas o revoluciones que realiza la espira en 1 segundo.
La unidad de frecuencia son los Hertzios (Hz) o ciclos/seg. Sin embargo, es muy común dar la frecuencia en revoluciones por minuto (r. p. m), para realizar el cambio de unidades correspondiente basta con multiplicar por 2. п (número de radianes de una vuelta completa) y dividir por 60 (número de segundos que hay en un minuto).

Periodo

Existe otra magnitud, inversa a ésta, que es el **periodo (T)** que es el tiempo que invierte la espira es dar una vuelta.

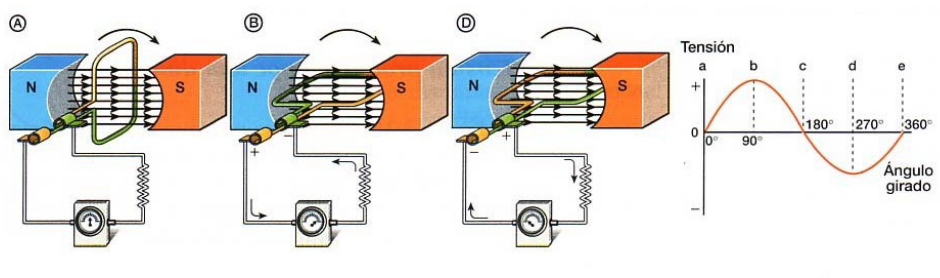
$f = 1 / T$ **$T = 1 / f$**

La unidad del periodo es el segundo.

Velocidad angular

Como verás ambas magnitudes están relacionadas con la velocidad con que gira la espira (ω) y se pueden determinar aplicando la relación:

$\omega = 2. \pi / T$ **$\omega = 2. \pi. f$**



Si analizamos los que ocurre al dar una vuelta la espira veremos que:

En el semiciclo positivo:
- Cuando la espira pemanece paralela a las caras del imán el flujo es máximo y la f. e. m, y por tanto, la tensión e intensidad son nulas.

- Al dar el primer cuarto de vuelta el flujo es mínimo y la f. e. m, tensión e intensidad son máximas.

- En el segundo cuarto de vuelta vuelven a descender hasta cero los valores de f. e. m, tensión e intensidad.

En el semiciclo negativo:
- En el tercer cuarto de vuelta la f. e. m y por tanto la tensión cambia de signo y la corriente cambia de sentido (las cargas que supongamos se movían hacia la derecha lo harían ahora hacia la izquierda). Se vuelve a alcanzar un valor máximo de tensión e intensidad, el mismo que en el primer cuarto de vuelta pero en sentido opuesto.

- Al completarse la vuelta con el útimo cuarto disminuyen de nuevo hasta anularse los valores de f. e. m, tensión e intensidad para volver a comenzar un nuevo ciclo.

Ley de Ohm en corriente alterna

En corriente continua sólo había un valor de V e I constantes ambos, en corriente alterna al aplicar la ley de Ohm lo haremos con los valores máximos de V e I o bien con los valores eficaces.

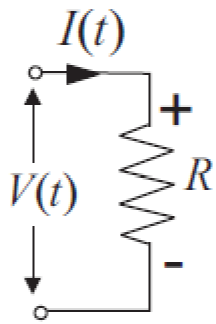
Vo = Io . Z   o bien   Ve = Ie. Z

Impedancia

La resolución de circuitos en corriente alterna se basa, igual que en corriente continua, en la aplicación de la ley de Ohm, salvo que ahora en lugar de resistencia trabajaremos con impedancia (Z).
La impedancia, de alguna forma, se trata de la combinación de las resistencias y reactancias debidas a todos los componentes del circuito.

Resistencia.

Según se dijo en corriente continua la relación que existía entre la caída de potencial V y la intensidad I, en una resistencia caracterizada por R, venía dada por la ley de Ohm, esto es, V = RI. Experimentalmente puede verificarse que la ley de Ohm sigue siendo válida para corrientes alternas y, por tanto puede escribirse que:

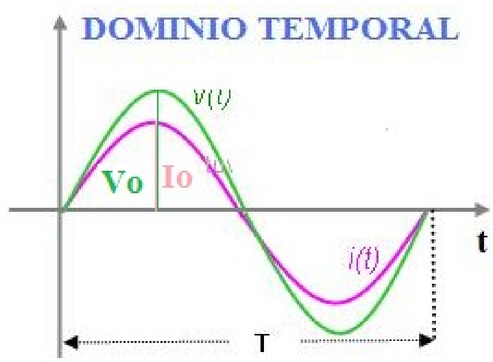


$$I(t) = \frac{V(t)}{R}$$

$$V(t) = Vo \text{ sen } wt$$

$$I(t) = \frac{V(t)}{R}$$

$$I(t) = \frac{Vo \text{ sen } wt}{R}$$



$$Io = \frac{Vo}{R}$$

$$I = \frac{V}{R}$$

$$V = \frac{Vo}{\sqrt{2}} \quad \text{(Valor eficaz)}$$

$$I = \frac{Io}{\sqrt{2}} \quad \text{(Valor eficaz)}$$

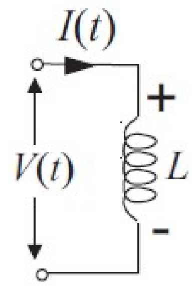
$$\mathring{I} = \frac{V}{R}\, e^{j0}\; e^{jwt}$$

$$\mathring{I} = \frac{\mathring{V}}{R}$$

$$\varphi = 0$$

INDUCTOR Ideal o BOBINA Ideal

El efecto de autoinducción electromagnética de una bobina caracterizada por una inductancia L y recorrida por una intensidad I(t) podía considerarse como una caída de potencial en la bobina, V (t), dada por:



$$V(t) = L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$$

La bobina puede considerarse, por tanto, como un elemento de circuito que relaciona linealmente, mediante el parámetro L, la derivada temporal de la intensidad que circula por ella con la caída de potencial en la misma.

$$I(t) = Io \text{ sen } wt$$

$$V(t) = L\,\frac{dI(t)}{dt}$$

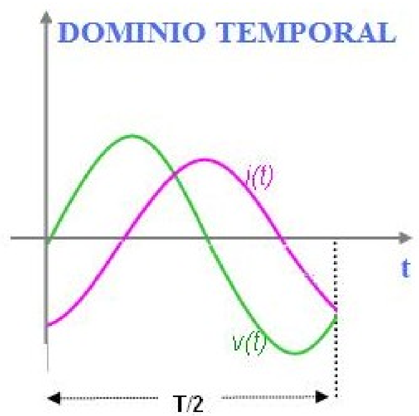
$$V(t) = L\,\frac{dIo}{dt}\text{ sen } wt$$

L = Coeficiente de autoinduccion [Hy]

$$V(t) = L\,Io\,w\,\cos wt = Io\,L\,w \text{ sen } \left(wt + \frac{\pi}{2} \right)$$

$X_L = w\,L$ Reactancia inductiva [Ω]

$$Vo = Io\;X_L$$



$$V = \frac{Vo}{\sqrt{2}} \quad \text{(Valor eficaz)}$$

$$I = \frac{Io}{\sqrt{2}} \quad \text{(Valor eficaz)}$$

$$V = I\,X_L$$

$$\overset{\circ}{V} = I\;e^{j\frac{\pi}{2}}\,e^{jwt}\;X_L \qquad \overset{\circ}{V} = \overset{\circ}{I}\;e^{j\frac{\pi}{2}}\;X_L$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

DOMINIO FASORIAL

$\overset{\circ}{Z}_L = j\,X_L$ Impedancia Inductiva [Ω]

$$\overset{\circ}{V} = \overset{\circ}{I}\;\overset{\circ}{Z}_L$$

Condensador Ideal

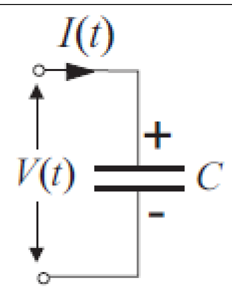
Se define la capacidad C de un condensador como la relación entre la carga Q de las placas y la caída de potencial V entre éstas:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Esta relación se cumple igualmente para corrientes alternas, de donde puede deducirse que la carga variable en el tiempo, Q(t), puede escribirse como:

$$Q(t) = CV(t)$$

Al derivar la expresión anterior respecto al tiempo obtenemos la siguiente relación entre la intensidad I(t) y la caída de potencial entre las placas:

	$I(t) = C\,\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}$

Esta relación indica que la derivada temporal de la caída de potencial entre las placas está relacionada linealmente mediante el parámetro C con la intensidad que llega al condensador.

$$V(t) = Vo \text{ sen } wt$$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} \qquad Q = C\,V$$

$$I(t) = C\,\frac{dV(t)}{dt} \qquad C = \text{Capacidad [F]}$$

$$I(t) = C\,Vo\,w \cos wt = Vo\,w\,C \text{ sen } \left(wt + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$Xc = \frac{1}{wC} \quad \text{Reactancia Capacitiva} \quad [\,\Omega\,]$$

$$Io = \frac{Vo}{Xc} \qquad I = \frac{V}{Xc}$$

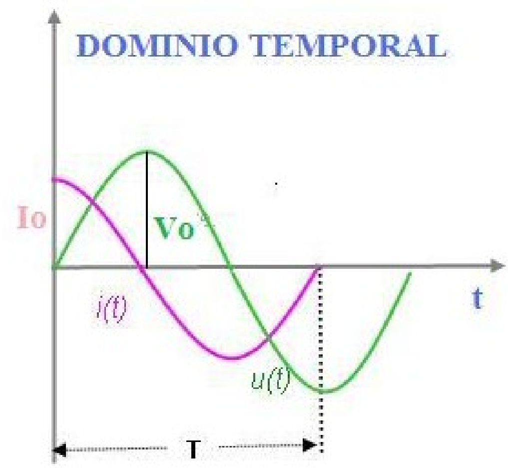
$$\mathring{I} = \frac{V}{Xc}\, e^{j\frac{\pi}{2}}\, e^{jwt} \qquad \mathring{I} = \frac{\mathring{V}}{Xc}\, e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\mathring{I} = \frac{\mathring{V}}{Xc}\; j\; \frac{(-j)}{(-j)}$$

$$\mathring{I} = \frac{\mathring{V}}{-j\,Xc}$$

$$\mathring{Z}c = -j\,Xc \quad \text{Impedancia Capacitiva} \quad [\,\Omega\,]$$

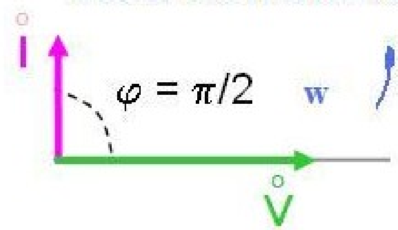
$$\mathring{I} = \frac{\mathring{V}}{\mathring{Z}c}$$

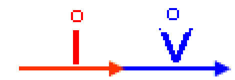
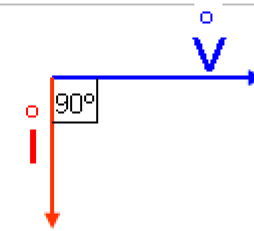
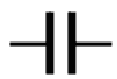
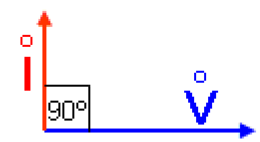
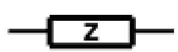
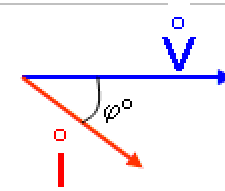


$$V = \frac{Vo}{\sqrt{2}} \quad \text{(Valor eficaz)}$$

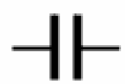
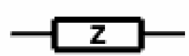
$$I = \frac{Io}{\sqrt{2}} \quad \text{(Valor eficaz)}$$

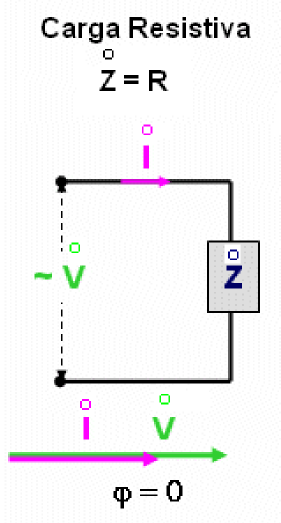
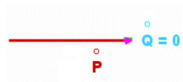
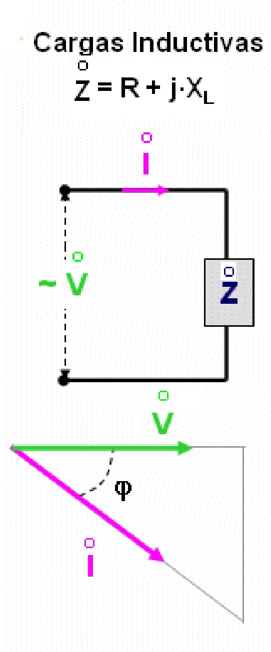
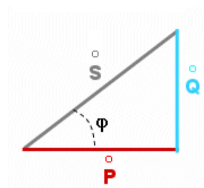
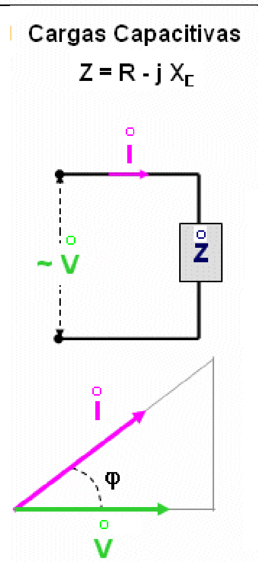
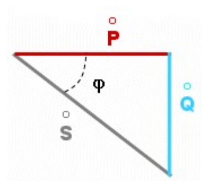
DOMINIO FASORIAL

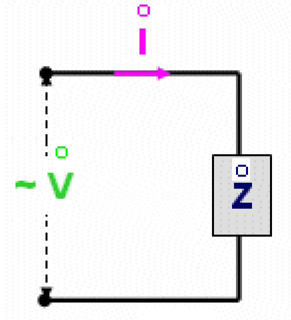


ELEMENTO	SÍMBOLO	IMPEDANCIA	φ *	P	Q	DIAGRAMA
RESISTENCIA		R	0°	I^2R	0	
REACTANCIA INDUCTIVA		$X_L = L\omega$	90°	0	I^2X_L	
REACTANCIA CAPACITIVA		$X_c = 1 / (C\omega)$	-90°	0	$-I^2X_c$	
IMPEDANCIA **R-L-C** EN SERIE		$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$	arccos R/Z	UICosφ	UIsenφ	 **Si φ < 0 → Z Inductivo** **Si φ > 0 → Z Capacitivo**

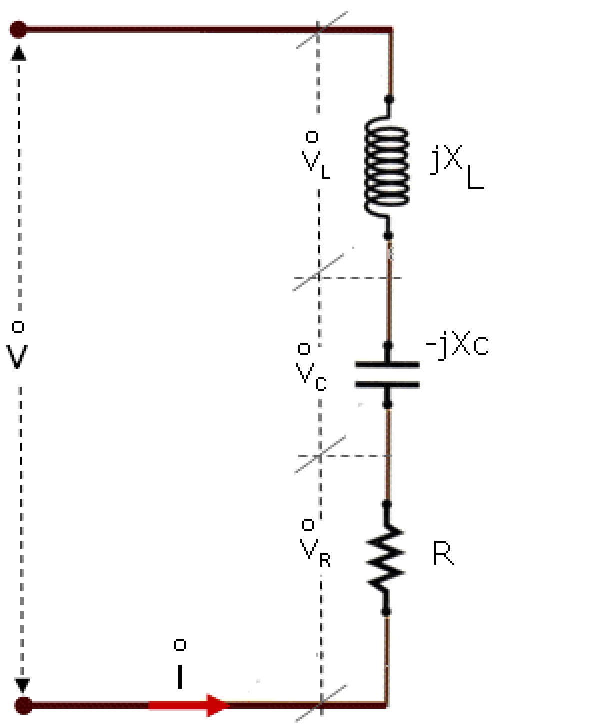
* φ el ángulo de V respecto de I

ELEMENTO PUROS	SIMBOLO	Potencia Activa (P)	Potencia Reactiva (Q)	Potencia Aparente (S)
RESISTENCIA		$P = U\,I \cos \varphi$ $P = \frac{U^2}{R}$ $P = I^2 R$	$Q = 0$	$S = P$
REACTANCIA INDUCTIVA		$P = 0$	$Q = U\,I \operatorname{sen} \varphi$ $Q = \frac{U^2}{X_L}$ $Q = I^2 X_L$	$S = +j\,Q_L$
REACTANCIA CAPACITIVA		$P = 0$	$Q = U\,I \operatorname{sen} \varphi$ $Q = \frac{U^2}{Xc}$ $Q = I^2\,Xc$	$S = -J\,Xc$
IMPEDANCIA **R-L-C** EN SERIE		$P = U\,I \cos \varphi$	$Q = U\,I \operatorname{sen} \varphi$	$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ $S = P \pm jQ$ $S = U\,.\,I^*$

ELEMENTO REALES	DIAGRAMA POTENCIA	Potencia Activa (P)	Potencia Reactiva (Q)	Potencia Aparente (S)
		$P = V I \cos \varphi$	Q= 0	S= P
		$P = V I \cos \varphi$	$Q = V I \operatorname{sen} \varphi$	$S = +j Q_L$
		$P = V I \cos \varphi$	$Q = V I \operatorname{sen} \varphi$	$S = - J Xc$

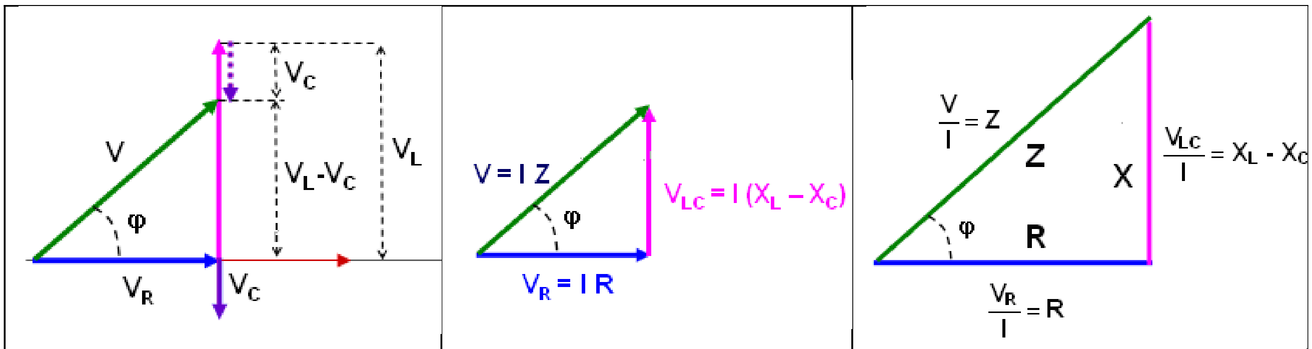
	Depende de cual de los elementos reactivos predomine, la Q será + o -	$P = U\,I\cos\varphi$	$Q = V\,I\,\text{sen}\,\varphi$	$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ $S = P \pm jQ$ $S = U \cdot I^*$

AGRUPAMIENTO DE IMPEDANCIAS EN SERIE

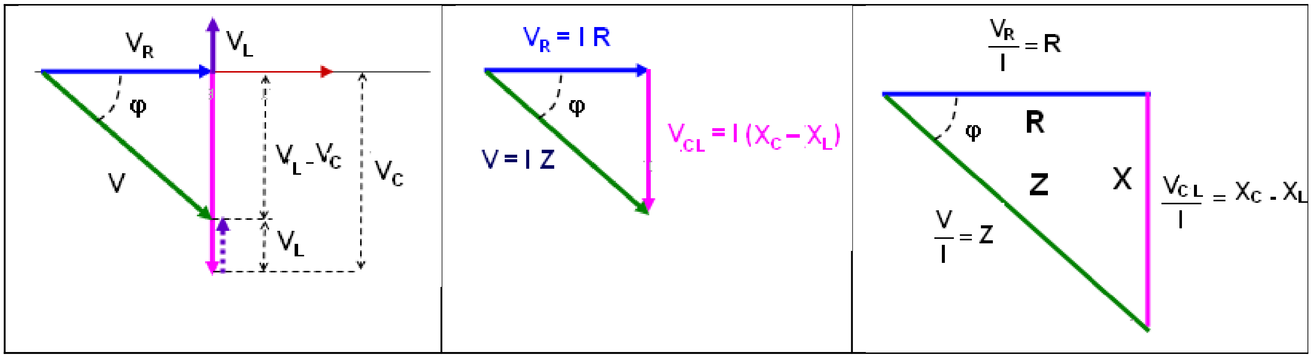
	$\mathring{V}_R = R \cdot \mathring{I}$ $\mathring{V}_L = jX_L \cdot \mathring{I}$ $\mathring{V}_C = -JX_C \cdot \mathring{I}$ $\mathring{V} = \mathring{V}_R + \mathring{V}_L + \mathring{V}_C$ $\mathring{V} = \mathring{I}\,[R + j(XL - Xc)]$ $\mathring{Z} = [R + j(XL - Xc)]$ $\lvert\mathring{Z}\rvert = \sqrt{R^2 + (XL - Xc)^2}$ $\varphi = \text{arc tg}\,\dfrac{XL - Xc}{R}$

Lo anterior permite realizar el diagrama vectorial de tensiones del circuito, y el triángulo de impedancia correspondiente. Este ultimo se obtiene dividiendo los lados del triangulo de tensiones por la intensidad y el triangulo de potencias que se obtiene multiplicando los lados por la intensidad I.

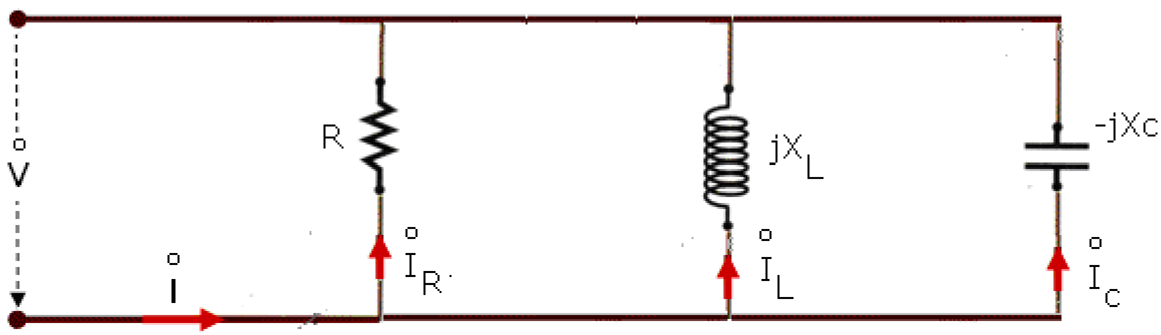
En este caso el efecto inductivo es preponderante sobre el efecto capacitivo.



En este caso el efecto capacitivo es preponderante sobre el efecto inductivo.



AGRUPAMIENTO DE IMPEDANCIAS EN PARALELO



$$\overset{\circ}{I}_R = \frac{\overset{\circ}{V}}{R} \qquad \frac{1}{R} = G \qquad \text{Conductancia}$$

$$\overset{\circ}{I}_L = \frac{\overset{\circ}{V}}{jX_L} \qquad \frac{1}{jX_L} = -jB_L \qquad \text{Suceptancia Inductiva}$$

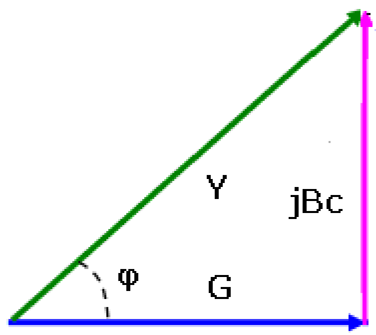
$$\overset{\circ}{I}_C = \frac{\overset{\circ}{V}}{-JXc} \qquad \frac{1}{-JXc} = jBc \qquad \text{Suceptancia Capacitiva}$$

$$\overset{\circ}{I} = \overset{\circ}{I}_R + \overset{\circ}{I}_L + \overset{\circ}{I}_C$$

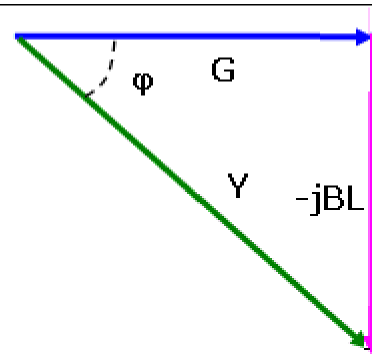
$$\overset{\circ}{I} = \overset{\circ}{V}\,(G - jB_L + jBc)$$

$$\mathring{Y} = \frac{1}{\mathring{Z}} = G - jB_L + jBc$$

Admitancia (Inversa de la Impedancia)



Prepondera efecto capacitivo



Preponderancia efecto inductivo

$$\mathring{I} = \mathring{Y} \cdot \mathring{V}$$

$$|\mathring{Y}| = \sqrt{G^2 + (Bc - BL)^2}$$

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{Bc - BL}{G}$$

FACTOR DE POTENCIA

El factor de potencia se define como el cociente de la relación de la potencia activa entre la potencia aparente; esto es:

$$FP = \frac{P}{S}$$

El factor de potencia es un término utilizado para describir la cantidad de energía eléctrica que se ha convertido en trabajo.

El valor ideal del factor de potencia es 1, esto indica que toda la energía consumida por los aparatos ha sido transformada en trabajo.

Por el contrario, un factor de potencia menor a la unidad significa un mayor consumo de energía necesaria para producir un trabajo útil.

La potencia *efectiva* o *real* es la que en el proceso de transformación de la energía eléctrica se aprovecha como trabajo: es la potencia activa P.

$$P = V\ I\ COS\ j$$

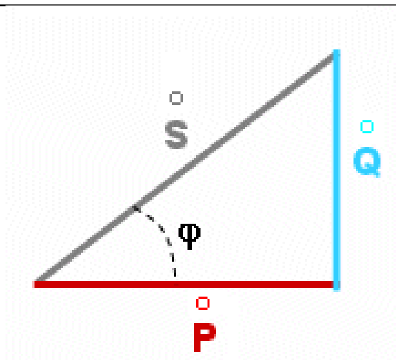
La potencia reactiva Q es la encargada de generar el campo magnético que requieren para su funcionamiento los equipos inductivos como los motores y transformadores:

$$Q = V\ I \text{ sen } j$$

La potencia aparente S es la suma geométrica de las potencias activa y reactiva, o también:

$$S = V\ I$$

Gráficamente estas tres expresiones están relacionadas mediante el "triángulo de potencias".



$$FP = \frac{P}{S}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

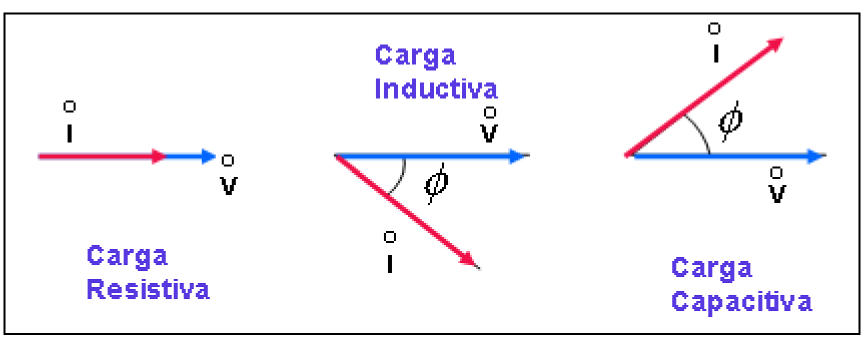
$$FP = \cos \varphi$$

Dependiendo del tipo de carga, el factor de potencia puede ser: adelantado, retrasado, igual a 1.

En las cargas resistivas como las lámparas incandescentes, la tensión y la corriente están en fase, en este caso, se tiene un factor de potencia unitario.

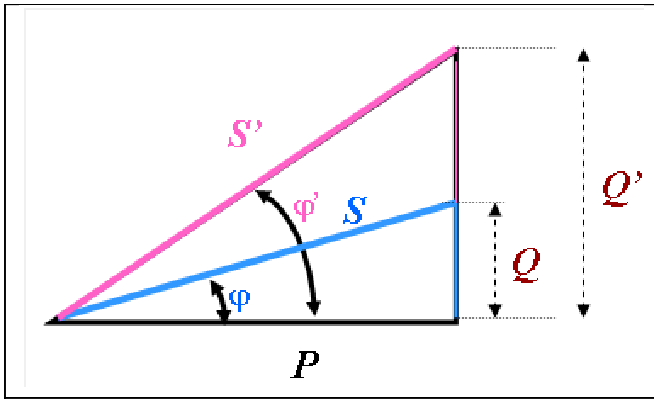
En las cargas inductivas como los motores y transformadores, la intensidad se encuentra retrasada respecto a al tensión, en este caso, se tiene un factor de potencia retrasado.

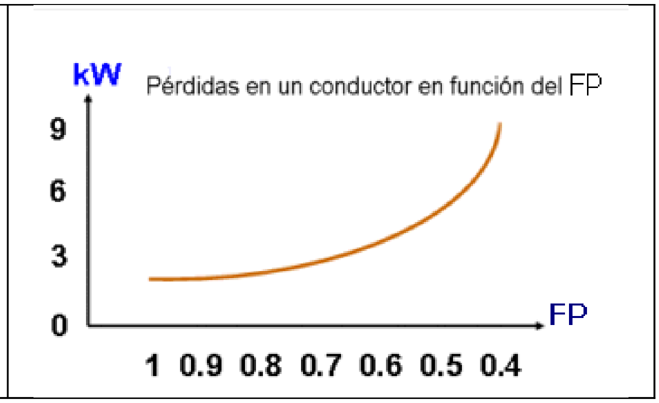
En las cargas capacitivas como los condensadores, la corriente se encuentra adelantada respecto al voltaje. En este caso se tiene un factor de potencia adelantado**.**



Un receptor que debe de producir una potencia P lo puede hacer absorbiendo de la línea una potencia Q o Q' tal como se ve en el esquema de debajo, con Cos φ y Cos φ' respectivamente (**φ < φ'** entonces **Cos φ > Cos φ'**).

Sin embargo en el primer caso la intensidad absorbida es menor que en el segundo (**S = UI** < **S' = UI'** entonces **I** < **I'**) con la consiguiente reducción de las pérdidas por efecto joule.





En definitiva en una instalación electrica nos interesa tener valores altos del factor de potencia (Cos φ).

Problemas en una Instalacion por bajo factor de potencia.

- Mayor consumo de corriente.
- Aumento de las perdidas e incremento de las caidas de tension en los conductores.
- Sobrecarga de transformadores, alternadores y lineas de distribución.
- Incremento de la facturación electrica por mayor consumo de corriente lo cual, por ejemplo en una planta Industrial esta directamente relacionado con los costos de producción.

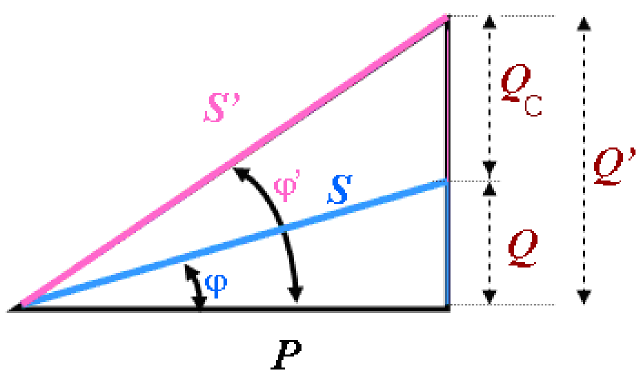
Beneficios al corregir el factor de potencia

- Disminución de las pérdidas en conductores.
- Reducción de las caídas de tensión.
- Aumento de la disponibilidad de potencia en transformadores, líneas y alternadores.
- Incremento de la vida útil de las instalaciones.

- Reducción en los costos por facturación eléctrica.

Compensación del factor de potencia en un circuito monofásico

Las cargas inductivas requieren potencia reactiva para su funcionamiento, esta demanda de potencia reactiva se puede reducir e incluso anular si se colocan condensadores en paralelo con la carga, cuando se reduce la potencia reactiva, se mejora el factor de potencia.



$$Qc = Q' - Q$$

$$tg\ \varphi' = \frac{Q'}{P}$$

$$tg\ \varphi = \frac{Q}{P}$$

$$Qc = P\ (tg\ \varphi' - tg\ \varphi\ )$$

$$Qc = V\ Ic = V^2.w.C$$

$$V^2.w.C = P\ (tg\ \varphi' - tg\ \varphi\ )$$

$$\boxed{C = \frac{P\ (tg\ \varphi' - tg\ \varphi\ )}{V^2.w}}$$

La compensación del factor de potencia se puede realizar elemento por elemento con lo cual se debe calcular un capacitor para cada uno de ellos o también para toda la instalación, en este último caso el capacitor será de mayor tamaño e irá conectado en el tablero general de la Instalación.

En resumen y para clarificar los conceptos adquiridos, la potencia aparente S es la potencia puesta en juego por la fuente de energía, la potencia activa P es la potencia que se consume en la carga y la potencia reactiva Q es una potencia que va y viene entre la fuente y la carga y no se consume, la corriente reactiva igual utiliza sección de conductor.

En los grandes consumos la compañía de electricidad exige la corrección del factor de potencia a los efectos de poder aprovechar mejor la sección de los conductores con mayor cantidad de consumos activos sobre un mismo cable.

Por lo dicho precedentemente, la compañía de electricidad aplica altos punitorios a los consumos que no cumplen con una determinada exigencia de factor de potencia.
En la unidad correspondiente aplicaremos este mismo calculo a los sistemas trifásicos.