R1 Considere la curva plana sinusoidal, cuya descripción matemática en coordenadas cartesianas es:

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

A: amplitud.
L: periodo

A y L son parámetros arbitrarios ctes.
Se pide determinar la curvatura de la curva en sus vértices superior o inferior (por ejemplo en $x = L/4$, $y = A$) y el radio de curvatura.-

Rta.

Radio de Curvatura $R = \dfrac{1}{\left|\dfrac{d\check{t}}{ds}\right|}$;

Curvatura $\kappa = \left|\dfrac{d\check{t}}{ds}\right|$

Vamos a expresar primero en forma cartesiana, el valor del versor tangente a la curva en forma genérica:

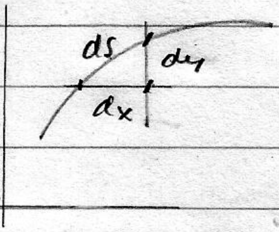
$\check{t} = \cos\theta\,\check{i} + \sin\theta\,\check{j}$ (su módulo es $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

θ es el ángulo de la tangente a la curva con el eje x

Como: $tg\,\theta = \dfrac{dy}{dx}$ podemos derivar la función $y = f(x)$ del enunciado e igualar con la tangente:

$$\frac{d}{dx}\left\{A\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right\} = \frac{2\pi A}{L}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) = tg\,\theta$$

finalmente, falta establecer la función $x(s)$: en general:



$\dfrac{dx}{ds} = \cos\theta$ entonces:

$\dfrac{d\check{t}}{ds} = \left(\dfrac{d\check{t}}{d\theta}\right)\left(\dfrac{d\theta}{dx}\right)\left(\dfrac{dx}{ds}\right)$ entonces hallamos los valores de cada paréntesis

$$\check{t} = \cos\theta\,\check{i} + \sin\theta\,\check{j} \rightarrow \frac{d\check{t}}{d\theta} = -\sin\theta\,\check{i} + \cos\theta\,\check{j}$$

$$tg\,\theta = \frac{2\pi A}{L}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \rightarrow \theta = tg^{-1}\left\{\frac{2\pi A}{L}\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right\} \rightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \left\{-A\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right\}\cos^2\theta$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta$$

reemplazando los 3 valores:

$$\frac{d\breve{t}}{ds} = \left(-\sin\theta\,\breve{i} + \cos\theta\,\breve{j}\right)\left\{-A\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right\}\cos^3\theta$$

Resultados:

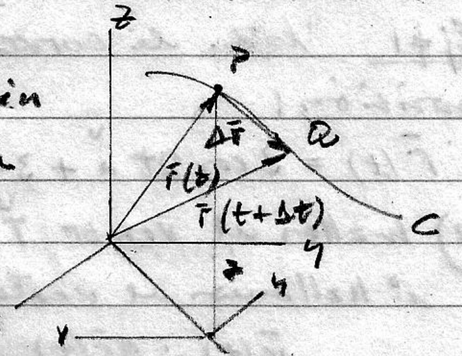
Curvatura en $x = \frac{L}{4} \rightarrow \tan\theta = 0 \rightarrow \theta = 0$

$$\left|\frac{d\breve{t}}{ds}\right| = \frac{A(2\pi)^2}{L^2} = \varkappa \rightarrow R = \frac{L^2}{A(2\pi)^2}$$

- Módulo 2 -

1. Mov. Intrínseco de un pto. en el espacio

- Terna dextógira y levógira



- Mov de un punto (ó partícula puntual sin masa) se mueve sobre una curva en el espacio 'C', si la:
- posición P está definida por $\bar{r}(t)$ y la pos Q " " " $\bar{r}(t+\Delta t)$ siendo $\bar{r}(t+\Delta t)=\bar{r}(t)+\Delta\bar{r}$ definimos
- Velocidad de la partícula en P

$$\bar{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\bar{r}(t+\Delta t)-\bar{r}(t)}{\Delta t}=\frac{d\bar{r}}{dt}$$

Cuando $\Delta t\to 0$ $\Delta\bar{r}\to 0$ y $\bar{v}\neq 0$ resulta tg a 'C' en P, en coord.

$$\bar{r}(t)=x(t)\,\check{i}+y(t)\,\check{j}+z(t)\,\check{k}\ \to$$

$$\bar{v}(t)=\frac{dx(t)}{dt}\check{i}+\frac{dy(t)}{dt}\check{j}+\frac{dz(t)}{dt}\check{k}$$

y el módulo de la v se define como:

$$\left|\bar{v}(t)\right|_t=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\Bigg|_t=\frac{ds}{dt}\Big|_t$$

donde s es la long del arco a lo largo de C y se lo denomina:

- Coordenada intrínseca
- Aceleración

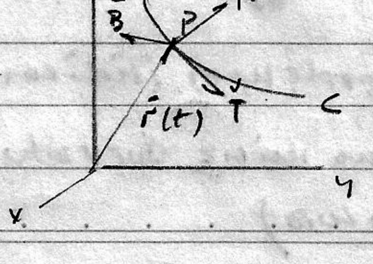
$$\bar{a}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\bar{v}(t+\Delta t)-\bar{v}(t)}{\Delta t}=\frac{d\bar{v}(t)}{dt}=\frac{d^2r(t)}{dt^2}$$

el módulo de la aceleración es

$$\left|a(t)\right|_t=\sqrt{\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z(t)}{dt^2}\right)^2}=\frac{d^2s}{dt^2}\Big|_t$$

- Aceleración Normal y Tangencial

En cada punto P sobre C podemos asociar la terna de tres vectores unitarios $\check{T}$ $\check{N}$ y $\check{B}$ que son $\check{T}$ tangente $\check{N}$ Normal y $\check{B}$ binormal los 3 normales entre sí; veremos algunas propiedades de estos versores; los versores se indican con una flecha cortada.



- Propiedades de los Vectores $\check{T}$; $\check{N}$ y $\check{B}$ lo veremos a través de un ejemplo: "un punto no material recorre el espacio según

Ej #1 ... la curva C en el espacio definida por su posición:

$\bar{r}(t) = 3\cos 2t\,\check{i} + 3\sin 2t\,\check{j} + (8t-4)\check{k}$

a) hallar el versor $\check{T}$ tangente a la curva para todo pto:

1° hallamos el vector velocidad

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = -6\sin 2t\,\check{i} + 6\cos 2t\,\check{j} + 8\check{k}$$

2° hallamos el módulo o magnitud del vector $\bar{v}$

$$v = \left|\bar{v}(t)\right| = \sqrt{(-6\sin 2t)^2 + (6\cos 2t)^2 + 8^2} = 10 = \frac{ds}{dt}$$

definimos versor tangente como:

$$\check{T} = \frac{\bar{v}(t)}{|\bar{v}(t)|} = -0{,}6\sin 2t\,\check{i} + 0{,}6\cos 2t\,\check{j} + 0{,}8\check{k}$$

b) verificar que para cualquier posición sobre 'C' se cumple:

$\bar{v}(t) = v\check{T}$

Efectivamente de los resultados de $\bar{v}(t)$ y v obtenidos

$$v\check{T} = (-0{,}6\sin 2t\,\check{i} + 0{,}6\cos 2t\,\check{j} + 0{,}8\check{k})\,10 =$$
$$6\sin 2t\,\check{i} + 6\cos 2t\,\check{j} + 8k = \bar{v}(t)$$

T1

c) Si $\check{T}$ es el versor tangente unitario para todo punto sobre 'C', demostrar que $d\check{T}/ds$ es normal a $\check{T}$.

Puesto que $\check{T}$ es un vector unitario → $\check{T}\circ\check{T} = 1$, diferenciando con respecto a s tenemos:

$$\frac{d}{ds}(\check{T}\circ\check{T}) = \check{T}\circ\left(\frac{d\check{T}}{ds}\right) + \left(\frac{d\check{T}}{ds}\right)\circ\check{T} = 2\check{T}\circ\left(\frac{d\check{T}}{ds}\right) = 0 \quad (\text{por } \check{T}\circ\check{T} = \text{cte} = 1)$$

→ $\check{T}\circ\left(\frac{d\check{T}}{ds}\right) = 0$ → $\check{T}$ es $\perp$ con $\left(\frac{d\check{T}}{ds}\right)$ entonces $\left(\frac{d\check{T}}{ds}\right)$ es $\perp$ a $\check{T}$

y lo podemos indicar como: $\left(\frac{d\check{T}}{ds}\right) = k\check{N}$ siendo $k = \left|\frac{d\check{T}}{ds}\right|$ se denomina curvatura y su inversa $\frac{1}{k} = R$ (radio de curvatura)

NOTA

d) Hallar la curvatura para todo punto del ejemplo #1 y el radio de curvatura:

Como: $\bar{T} = -0{,}6 \sin 2t\, \breve{i} + 0{,}6 \cos 2t\, \breve{j} + 0{,}8\, \breve{k}$

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = \frac{d\bar{T}/dt}{ds/dt} = \frac{-1{,}2 \cos 2t\, \breve{i} - 1{,}2 \sin 2t\, \breve{j}}{10} =$$

$$= -0{,}12 \cos 2t\, \breve{i} - 0{,}12 \sin 2t\, \breve{j}$$

y la curvatura k es:

$$k = \left|\frac{d\bar{T}}{ds}\right| = \sqrt{(-0{,}12 \cos 2t)^2 + (-0{,}12 \sin 2t)^2} = 0{,}12$$

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{0{,}12} = 8{,}33$$

e) Hallar la ecuación del versor normal para todo punto del problema #1:

Como del T1 $\rightarrow \left(\frac{d\bar{T}}{ds}\right) = k\breve{N}$, comparando con el resultado d:

$$\breve{N} = -\cos 2t\, \breve{i} - \sin 2t\, \breve{j}$$

$\boxed{T2}$ Demostrar que la aceleración $\bar{a}$ para todo punto de una partícula que viaja a lo largo de una curva 'C' con velocidad $\bar{v}$ está dada por:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}\breve{T} + \frac{v^2}{R}\breve{N}$$

Como:

$$\bar{v} = v\breve{T} \rightarrow \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\breve{T}) = \frac{dv}{dt}\breve{T} + \frac{d\breve{T}}{dt}v$$

$$\frac{d\breve{T}}{dt} = \frac{d\breve{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = k\breve{N}\frac{ds}{dt} = k\breve{N}v = \frac{v\breve{N}}{R}$$ Reemplazando:

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\breve{T} + \frac{v^2}{R}\breve{N}$$

Esto demuestra que la aceleración tiene una componente tangencial y una normal o centrípeta.

NOTA

f) Cálculo de la aceleración Tangencial en el problema 1

$$\bar{a}_t = a_t \breve{T} = \frac{dv}{dt} \breve{i}$$

como $v = 10 \rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \rightarrow \bar{a}_t = 0$

g) Cálculo de la aceleración Normal en el problema 1

$$\bar{a}_N = \frac{v^2}{R} \breve{N}$$

$v^2 = 100$

$R = 8,33$

$\breve{N} = -\cos 2t\, \breve{i} - \sin 2t\, \breve{j} \rightarrow$

$$\bar{a}_N = -12 \cos 2t\, \breve{i} - 12 \sin 2t\, \breve{j}$$

h) Cálculo de la expresión general de la aceleración:

$$\bar{a} = a_T \breve{T} + a_N \breve{N} = -12 \cos 2t\, \breve{i} - 12 \sin 2t\, \breve{j}.$$

i) Expresión del versor Bi-normal

por definición:

$\breve{B} = \breve{T} \times \breve{N} =$

$$\breve{B} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos 2t & -\sin 2t & 0 \end{vmatrix} = \bar{O}$$

El plano $\breve{N}\breve{B}$ se llama plano "osculador"

Cinemática en Coord. Cilíndricas

En el espacio el punto $\bar{P}$, queda definido por las coord (ρ, θ, z) y los versores respectivos ($\breve{e}_r$, $\breve{e}_\theta$, $\breve{e}_z$), un caso particular son las coord polares para el espacio plano.

NOTA. lo cual aplicando las ec.

$\boxed{1}$ El movimiento de una partícula viene definido por la función $x = f(t)$ siguiente:

$x = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$

donde x está expresado en [m] y t en [seg] se pide calcular:

a) t para $v = 0$

b) posición, aceleración y distancia total recorrida cuando $t = 5$ seg

RTA:

$x = t^3 - 6t^2 + 9t + 5 \rightarrow$

$\dot{x} = 3t^2 - 12t + 9 \rightarrow$

$\ddot{x} = 6t - 12$

Entonces:

a- $\dot{x} = 0 = 3t^2 - 12t + 9 \rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \rightarrow t = \dfrac{+4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$

$t_1 = 4$ seg ; $t_2 = 1$ seg

b- Posición: $x = 5^3 - 6 \cdot 25 + 9 \cdot 5 + 5 = 125 - 150 + 45 + 5 = 25$ m

aceleración: $\ddot{x} = 30 - 12 = 18$ m/s²

Distancia:

$$e = \int_0^5 \dot{x}\, dt = \int_0^5 (3t^2 - 12t + 9)\, dt = \frac{\cancel{3}t^3}{\cancel{3}} - \frac{12t^2}{2} + 9 \cdot t =$$

$e = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 9 = 125 - 150 + 45 = 20$ m

4 Un mecanismo de freno consiste de un émbolo que se mueve en un cilindro lleno de aceite. El émbolo posee orificios de modo que cuando se mueve con una velocidad inicial v_0 el aceite es forzado a pasar a través de los orificios, resultando una desaceleración proporcional del émbolo

$a = -kv$

Se pide

a - Expresar la velocidad instantánea en función del tiempo

b - El espacio x en función del tiempo

c - La velocidad en función del espacio

Rta.

a - Velocidad instantánea del pistón o émbolo:

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv \rightarrow \frac{dv}{v} = -k\,dt \text{ integrando queda:}$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\int_{t_0}^{t} k\,dt = -k\int_{0}^{t} dt \rightarrow \ln v - \ln v_0 = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -kt \rightarrow$$

$$\underline{v = v_0 e^{-kt}}$$

b - Espacio recorrido por el émbolo como f. del tiempo:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} \rightarrow dx = v_0 e^{-kt} dt \rightarrow x = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt =$$

$$= v_0 \int_0^t e^{-kt} dt \quad \text{como } \int e^x dx = e^x \text{ hacemos}$$

$$= \frac{v_0}{-k}\int_0^t e^{-kt}(-k\,dt) = -\frac{v_0}{k} e^{-kt}\Big|_0^t = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} + \frac{v_0}{k} =$$

$$\underline{x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$

c - Velocidad en término de espacio recorrido por el émbolo:

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \rightarrow \frac{dv}{dx} = -k \rightarrow$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = -k\int_{x_0}^{x} dx \rightarrow v - v_0 = -k(x - x_0) \rightarrow$$

$$\underline{v = v_0 - k(x - x_0)}$$

7 La aceleración de la gravedad a una altura 'y' sobre la superficie terrestre viene expresada como:

$$a = \frac{-g}{(1+y/R)^2}$$ donde R es el radio Terrestre = 6370 km

Se pide calcular la altura que alcanza un proyectil en tiro vertical para los siguientes valores de velocidad inicial:

$V_0 = 200$ m/s

$V_0 = 2000$ m/s

$V_0 = 11,18$ km/s

Rta:

Se puede expresar la aceleración vertical como:

$$a = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d\dot{y}}{dt}\frac{dy}{dy} = \dot{y}\,d\dot{y}\,\frac{1}{dy} = \frac{-g}{(1+y/R)^2} \rightarrow$$

$$\dot{y}\,d\dot{y} = \frac{-g}{(1+y/R)^2}\,dy$$ integrando:

$$\int_{V_0}^{0} \dot{y}\,d\dot{y} = \int_0^h \frac{-g\,dy}{(1+y/R)^2} \rightarrow \left.\frac{\dot{y}^2}{2}\right|_{V_0}^{0} = -\frac{V_0^2}{2} = -g\int_0^h \frac{dy}{(1+y/R)^2}$$

los signos se cancelan, y resolvemos la integral por el método de sustitución:

$$u = 1 + \frac{y}{R} \rightarrow du = \frac{1}{R}\,dy \ : \text{ entonces } \begin{matrix} y=0 & u=1 \\ y=h & u=1+h/R \end{matrix}$$

$$-g\int_0^h \frac{R\,du}{u^2} = -gR\int_0^h \frac{du}{u^2} = -gR\int_0^h u^{-2}du = -gR\,\frac{u^{-2+1}}{-2+1} = \left.\frac{gR}{u}\right|_1^{1+\frac{h}{R}}$$

$$gR\left(\frac{1}{1+h/R} - 1\right) = gR\cdot\frac{1-(1+h/R)}{(1+h/R)} = \left(\frac{gh}{1+h/R}\right)$$ igualando:

$$-\frac{V_0^2}{2} = \left(\frac{gh}{1+h/R}\right) \rightarrow -\frac{V_0^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}\frac{h}{R} = gh \rightarrow h = \left(\frac{V_0^2}{2g - V_0^2/R}\right)$$

Reemplazando valores, si

$V_0 = 200\ \frac{m}{s}$ $h = 2039.4$ m

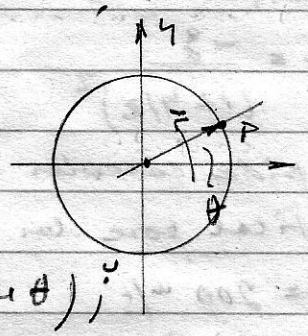
$V_0 = 2000\ \frac{m}{s}$ $h = 0,2106\ 10^{+6} = 210.6$ km

$V_0 = 11,18$ km/s $h \rightarrow \infty$ (con $g = 9.81\ m/s^2$)

$\boxed{8}$ Determinar la velocidad y aceleración de una partícula que se mueve sobre una circunferencia de radio r sobre el plano (x,y) siendo el ángulo que forma el vector posición: $\theta = ct^2$. Expresar $\bar{v}$ y $\bar{a}$ en coords: cartesianas, polares, intrínsecas.

RTA

a- Coords Cartesianas



$$\bar{r} = r\cos\theta\,\check{i} + r\sin\theta\,\check{j}$$

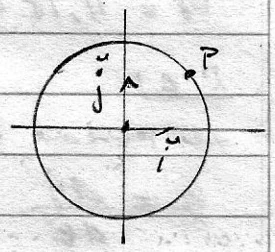
$$\dot{\bar{r}} = -r\dot{\theta}\sin\theta\,\check{i} + r\dot{\theta}\cos\theta\,\check{j}$$

$$\ddot{\bar{r}} = (-r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}\cos\theta)\,\check{i} + (r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta)\,\check{j}$$

Reemplazando con $\theta = ct^2 \rightarrow$

$$\dot{\theta} = 2ct \qquad r = cte$$

$$\ddot{\theta} = 2c$$

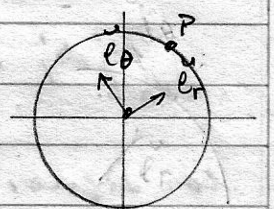


$$\bar{r} = r\cos(ct^2)\,\check{i} + r\sin(ct^2)\,\check{j}$$

$$\dot{\bar{r}} = -r(2ct)\sin(ct^2)\,\check{i} + r(2ct)\cos(ct^2)\,\check{j}$$

$$\ddot{\bar{r}} = -\{r2c\sin(ct^2) + \{r2c\cos(ct^2) - r(2ct)^2\sin(ct^2)\}\,\check{j}$$

b Coords. Polares



$$\bar{r} = r\check{e}_r$$

$$\dot{\bar{r}} = \dot{r}\check{e}_r + r\dot{\theta}\check{e}_\theta = \dot{r}\check{e}_r + r(2ct)\check{e}_\theta$$

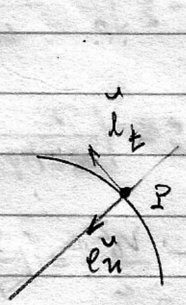
$$\ddot{\bar{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\check{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\check{e}_\theta = \{\ddot{r} - r(2ct)^2\}\check{e}_r + \{r(2c) + 2\dot{r}(2ct)\} \rightarrow$$

con $\dot{r} = \ddot{r} = 0 \rightarrow$

$$\dot{\bar{r}} = r(2ct)\,\check{e}_\theta$$

$$\ddot{\bar{r}} = -r(2ct)^2\check{e}_r + r2c\,\check{e}_\theta$$

c Coords. Intrínsecas



$$\bar{r} = -r\check{e}_n$$

$$\dot{\bar{r}} = v\check{e}_t = r\dot{\theta}\,\check{e}_t$$

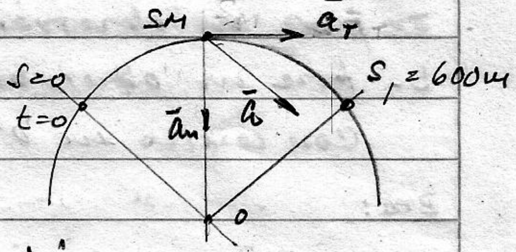
$$\ddot{\bar{r}} = \frac{dv}{dt}\check{e}_t + v\frac{d\check{e}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\check{e}_t + v\frac{de_t}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\check{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\check{e}_n$$

para la trayectoria circular:

$$\ddot{\bar{r}} = r\ddot{\theta}\check{e}_t + \frac{(r\dot{\theta})^2}{r}\check{e}_n = r\ddot{\theta}\check{e}_t + r\dot{\theta}^2\check{e}_n$$

17 Un tren establece un movimiento uniformemente acelerado sobre una vía circular de $R = 800\,m$; después de un recorrido de 600 m alcanza una velocidad de 36 km/h. Se pide determinar la velocidad y aceleración en el punto medio del trayecto.

RTA



$V_0 = 0$

$V_f = 36\ km/h = 10\ m/s$

Como es un 'MUA' las fórmulas de aplicación son:

$v = \cancel{v_0} + at$

$S = \cancel{S_0} + \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2} a t^2$

Eliminando el tiempo entre ambas:

$$t = v/a \rightarrow S = \frac{1}{2} a \left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a} \rightarrow$$

$$a = \frac{v^2}{2S} = cte; \quad \text{Evaluado para } S_1 = 600\,m \rightarrow a = \frac{(10\,m/s)^2}{2 \cdot 600} = 0{,}083\,\frac{m}{s^2}$$

En el punto medio del trayecto:

$a_{TM} = 0{,}0833\ m/s$

$V_M = \sqrt{2aS} = \{2.(0{,}0833).300\}^{1/2} = 7.06\ m/s$

Cálculo de la aceleración normal:

$$a_n = \frac{V_M^2}{R} = \frac{(7.06\ m/s)^2}{800\,m} = 0{,}0625\ m/s^2$$

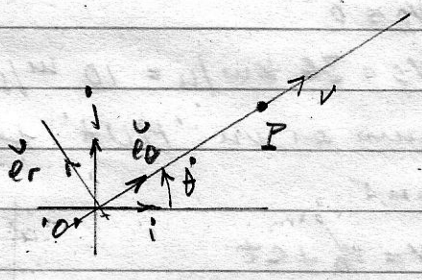
$$|a| = \sqrt{0{,}0833^2 + 0{,}0625^2} = 0{,}1041\ m/s^2$$

$\boxed{21}$ Un vástago con pivote en "O" gira en el plano 'x,y' a una velocidad angular cte de $\omega = 2$ rad/seg. en el sentido de las agujas del reloj; mientras una masa desliza sobre él alejándose del origen a una velocidad cte $V = 2$ m/seg. Cuando $\theta = 60°$ y la distancia $\overline{OP} = 2.5$ m calcular la veloc. y aceleración del CM del cuerpo deslizante

a- para un observador sobre una terna inercial ubicada en 'O'

b- para un observador que usa de referencia coord. polares con centro en 'O'

RTA:



a. para un observador inercial:

$x = \rho\cos\theta$ | $\dot{\rho} = 2$ m/s ; $\ddot{\rho} = 0$

$y = \rho\sin\theta$ | $\dot{\theta} = -2$ 1/seg ; $\ddot{\theta} = 0$

$\bar{\rho} = \rho\cos\theta\,\breve{i} + \rho\sin\theta\,\breve{j}$

$\dot{\bar{\rho}} = (\dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta)\breve{i} + (\dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta)\breve{j}$ Reempl valores:

$\dot{\bar{\rho}} = 5.33\,\breve{i} - 0{,}768\,\breve{j}$ [m/s]

Considerando $\dot{\theta} = $ cte

$\ddot{\bar{\rho}} = (\cancel{\ddot{\rho}\cos\theta} - \dot{\rho}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{\rho}\dot{\theta}\sin\theta - \rho\dot{\theta}^2\cos\theta)\breve{i} +$

$(\cancel{\ddot{\rho}\sin\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\cos\theta + \cancel{\dot{\rho}\ddot{\theta}\cos\theta} - \rho\dot{\theta}^2\sin\theta)\breve{j}$

Reempl valores:

$\ddot{\bar{\rho}} = -14.12\,\breve{i} - 1{,}53\,\breve{j}$ [m/s²]

b para observador en coord. polares (con $\ddot{\rho} = \ddot{\theta} = 0$)

$\bar{\rho} = \rho\breve{e}_r$

$\dot{\bar{\rho}} = \dot{\rho}\breve{e}_r + \rho\dot{\theta}\breve{e}_\theta$

$\ddot{\bar{\rho}} = (\cancel{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\theta}^2)\breve{e}_r + (\cancel{\rho\ddot{\theta}} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\breve{e}_\theta$

Reemplazando valores:

$\bar{\rho} = 2.5\,\breve{e}_r$

$\dot{\bar{\rho}} = 2\breve{e}_r + 2.5(-2)\breve{e}_\theta = 2\breve{e}_r - 5\breve{e}_\theta$

$\ddot{\bar{\rho}} = -2{,}5(4)\breve{e}_r + \{2.2(-2)\} = -10\,\breve{e}_r - 8\,\breve{e}_\theta$

26 Si la aceleración de la gravedad está expresada por $a = -\frac{gR^2}{r^2}$ donde R es el radio terrestre y r la distancia del centro de la tierra a una partícula situada a una altura h sobre la superficie. Calcular la velocidad de escape para tiro vertical.

RTA.

$r = h + R$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\dot y}{dt} = \frac{d\dot y}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{\dot y\, d\dot y}{dy} = -\frac{gR^2}{y^2} \to$$

$$\dot y\, d\dot y = -gR^2 \frac{dy}{y^2}$$; integrando en ambos miembros:

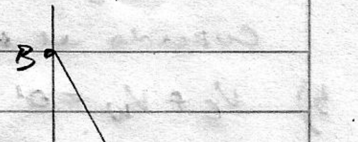
$$\int_{v_0}^{0} \dot y\, d\dot y = -gR^2 \int_R^\infty \frac{dy}{y^2} \to -\frac{v_0^2}{2} = -gR^2 \frac{1}{y}\Big|_R^\infty = +gR^2\frac{1}{R} = gR \to$$

$|v_0| = \sqrt{2gR}$ hacia arriba; Reempl. valores $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ $R = 6370\, 10^3\, m$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6370\, 10^3} = 11.18 \text{ km/seg}$$

27 Una escalera de longitud l está apoyada entre una pared y el piso; las condiciones de roce hace que la escalera se esté deslizando con $V_A = cte$, en la dirección de x. Obtener la velocidad y aceleración del punto 'B'

RTA:



$x^2 + y^2 = l^2$ derivando en forma implícita:

$$2x\dot x + 2y\dot y = 0 \to$$

$$\dot y = -\frac{2x\dot x}{2y} = -\frac{x\dot x}{y}$$

Reemplazando con las condiciones de M.U.:

$x = V_A t \to \dot x = V_A$; Reemplazando queda

$$\dot y = -\frac{V_A^2 t}{(l^2 - V_A^2 t^2)^{1/2}}$$ y la aceleración:

$$\ddot y = \frac{-V_A^2 (l^2 - V_A^2 t^2)^{1/2} - \frac{1}{2}(l^2 - V_A^2 t^2)^{-1/2}\, 2V_A^2 t}{(l^2 - V_A^2 t)}$$

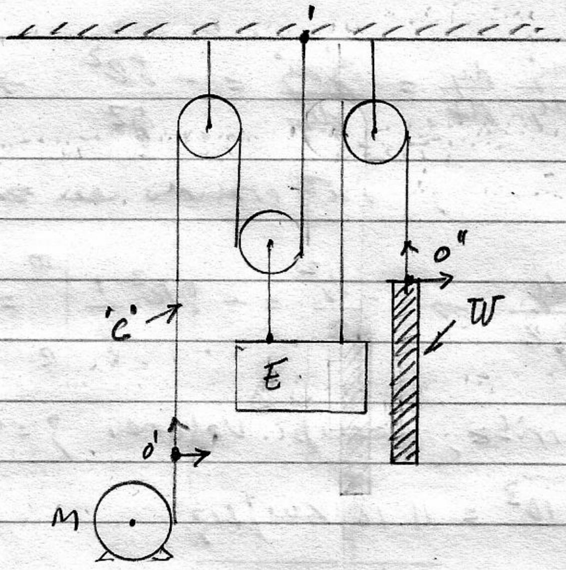
32 El ascensor mostrado en la figura vinculado a un motor y un contrapeso a través de poleas se mueve hacia arriba a una velocidad de 5 m/s calcular:

a.- la velocidad del cable 'C'

b.- la velocidad del contrapeso W

c.- la veloc. relativa del cable 'C' respecto del ascensor

d. la veloc. relativa del contrapeso W resp. del ascensor.



Rta:

a) como hay un empotramiento en 1, la velocidad del ascensor E será la mitad de la veloc. del cable 'C' entonces:

$-V_E = -\frac{1}{2} V_C \rightarrow V_C = -2V_E = -2 \cdot 5\,m/s = -10\,m/s$

cuando el ascensor sube el cable C baja y se enrolla en M

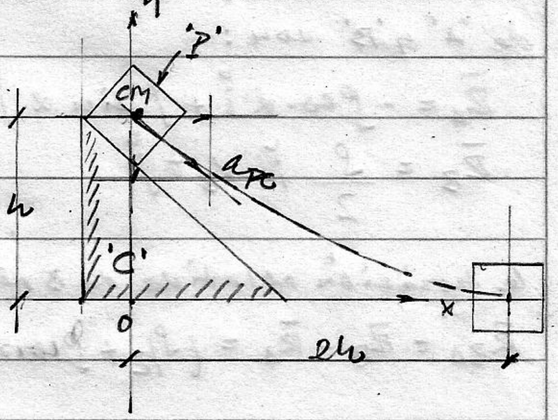
b) $V_E + V_W = 0 \rightarrow V_W = -V_E = -5\,m/s$

c) $V_{C-E} = V_C - V_E = -10\,\frac{m}{s} - 5\,\frac{m}{s} = -15\,\frac{m}{s}$ (observador ubicado en o')

d) $V_{W-E} = V_W - V_E = -5\,m/s - 5\,m/s = -10\,m/s$ (observador ubicado en o")

37 Un plano inclinado $\overline{AB}$ forma con la horizontal un ángulo de 45°, y se mueve en la dirección 'x' con una aceleración de $a_c = 10$ cm/seg². Al mismo tiempo un cuerpo P desciende por el plano inclinado con una aceleración relativa $a_{p-c} = \sqrt{200}$ cm/s². Cuando el cuerpo 'C' está en 'O' el cuerpo P tiene una coord 'h' en una terna fija. Determinar la aceleración, velocidad y trayectoria del mov. absoluto del cuerpo P.

Rta



$$\bar{a}_{PC} = \sqrt{200}\cos 45°\,\breve{i} - \sqrt{200}\sin 45°\,\breve{j}$$

$$\bar{a}_{pc} = 10\,\breve{i} - 10\,\breve{j} \quad [\text{cm/seg}^2]$$
$$\bar{a}_{CO} = 10\,\breve{i} \quad [\text{cm/seg}^2]$$

$$\bar{a}_{PO} = \bar{a}_{PC} + \bar{a}_{CO} = 20\,\breve{i} - 10\,\breve{j}$$

$$a_x = 20 = \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} \rightarrow \dot{x} = \int_0^t 20\,dt = 20t = \frac{dx}{dt} \rightarrow x = \int_0^t 20t\,dt = 10t^2$$

$$a_y = -10 = \ddot{y} \rightarrow \frac{d\dot{y}}{dt} = -10 \rightarrow \int_0^{\dot{y}} d\dot{y} = -\int_0^t 10\,dt = -10t$$

$$\dot{y} = -10t \rightarrow \frac{dy}{dt} = -10t \rightarrow \int_h^y dy = \int_0^t -10t\,dt \rightarrow y - h = -5t^2 \;;$$

$$y = h - 5t^2$$

Trayectoria del Movimiento

En forma paramétrica:

$$x = 10t^2$$
$$y = h - 5t^2$$

eliminando t entre ambas:

$$x/2 = 5t^2 \rightarrow y = h - x/2$$

$$\bar{R}_p = 10t^2\,\breve{i} + (h - 5t^2)\,\breve{j}$$

cuando $t = 0$ $\bar{R}_p = h\,\breve{j}$; el cuerpo llega al piso en $5t^2 = h \rightarrow t = (h/5)^{1/2}$

en ese instante $\bar{R}_p = 10\frac{h}{5} = 2h$

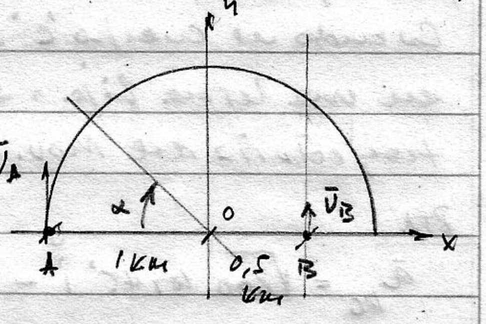
39 En un instante dado, el piloto del avión A inicia un mov. circular uniforme de radio 1km y velocidad 480 km/h. En ese mismo instante divisa otro avión B a 1.5 km a su derecha y cuya velocidad respecto a Tierra es de 200 km/h. Se desea conocer:

a- la veloc. y aceleración relativa de B vista desde A

b- definir si los aviones pueden colisionar.

RTA:

Tomamos una referencia inercial en 'O' respecto de ella, la posición instantánea de 'A' y 'B' son:



$$\bar{R}_A = -\rho\cos\alpha\, \check{i} + \rho\sin\alpha\, \check{j}$$
$$\bar{R}_B = \frac{\rho}{2}\check{i} + v_B t\, \check{j}$$

la posición relativa de B respecto de A es:

$$\bar{R}_{BA} = \bar{R}_B - \bar{R}_A = (\rho/2 + \rho\cos\alpha)\check{i} + (v_B t - \rho\sin\alpha)\check{j} \rightarrow$$

$$\frac{d\bar{R}_{BA}}{dt} = (-\rho\dot{\alpha})\sin\alpha\, \check{i} + \{v_B - (\rho\dot{\alpha})\cos\alpha\}\check{j}$$ como $v_A = (\dot{\alpha}\rho)$

$$\frac{d\bar{R}_{BA}}{dt} = -v_A\sin\alpha\, \check{i} + \{v_B - v_A\cos\alpha\}\check{j}$$ → tomando en cuenta que $\dot{v}_B = \dot{v}_A = 0$

$$\frac{d^2\bar{R}_{BA}}{dt} = -v_A\dot{\alpha}\cos\alpha\, \check{i} + v_A\dot{\alpha}\sin\alpha\, \check{j}$$ con $\dot{\alpha} = v_A/\rho$ →

$$\frac{d^2\bar{R}_{BA}}{dt} = \frac{-v_A^2}{\rho}\cos\alpha\, \check{i} + \frac{v_A^2}{\rho}\sin\alpha\, \check{j}$$

datos: $v_A = 480\,\frac{km}{h} = 133,33\ m/s$; $v_B = 200\,\frac{km}{h} = 55.56\ m/s$

b. Análisis del curso de colisión

los aviones chocarán cuando $\bar{R}_{BA} = 0$ o sea analizando ambas componentes:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\rho}{2} + \rho\cos\alpha = 0 \\ v_B - \rho\sin\alpha = 0 \end{array}\right| \rightarrow \begin{array}{l} \cos\alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 120° \\ 55.56\,\frac{m}{s} - 1000\sin 120° = 55.56 - 866,02 = -810.46 \end{array}$$

el 2° resultado es ≠ de 0 → que los aviones no colisionan