



Ejercicio 1. Hallar el área de la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2y, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$

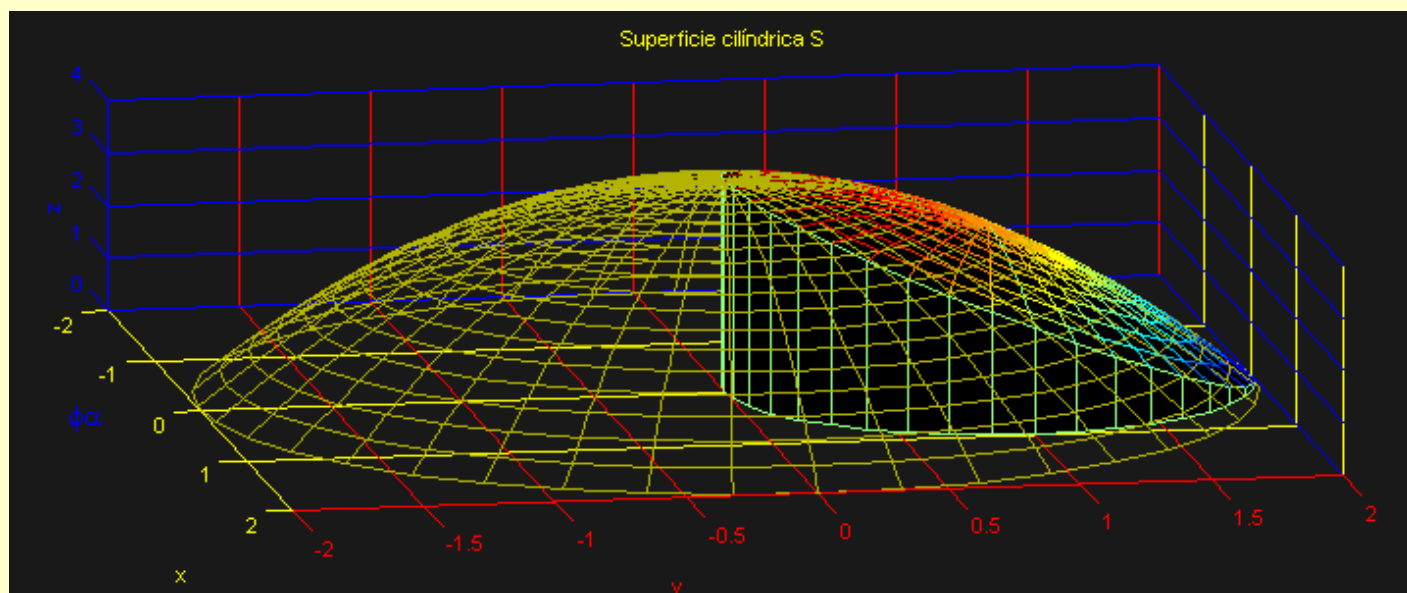


Figura 1. Muestra la superficie cilíndrica S de ecuación $x^2 + y^2 = 2y$ limitada superiormente por el paraboloide de ecuación $z = 4 - x^2 - y^2$, inferiormente por el plano de ecuación $z = 0$. Se grafican todas las superficies para apreciar su posición relativa.

S puede parametrizarse en $\mathcal{R}_{uv} \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 4 - 2(1 + \sin(u))\}$ como $S = \bar{T}(\mathcal{R}_{uv})$, con $T : \mathcal{R}_{uv} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{T}(u, v) = (\cos(u), 1 + \sin(u), v)$, campo de normales dado por el producto vectorial $\bar{N}(u, v) = \bar{T}_u(u, v) \times \bar{T}_v(u, v) = (\cos(u), \sin(u), 0)^i$, vector cuya norma es constantemente 1. Ahora todo se reduce al cálculo mismo del área, que resulta ser $4\pi^i$.

$$\text{área}(S) = \iint_S dS = \iint_{\mathcal{R}} \|N(u, v)\| du dv = \int_0^{2\pi} du \int_0^{4-2\sin(u)} dv = 4\pi$$

Ejercicio 2. Calcular la masa del macizo $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - y^2, 0 \leq x, 0 \leq y\}$, sabiendo que su densidad δ toma el valor 1 en el origen de coordenadas y su campo de gradientes es $\nabla \delta(x, y, z) = (2xy, x^2, 0)$

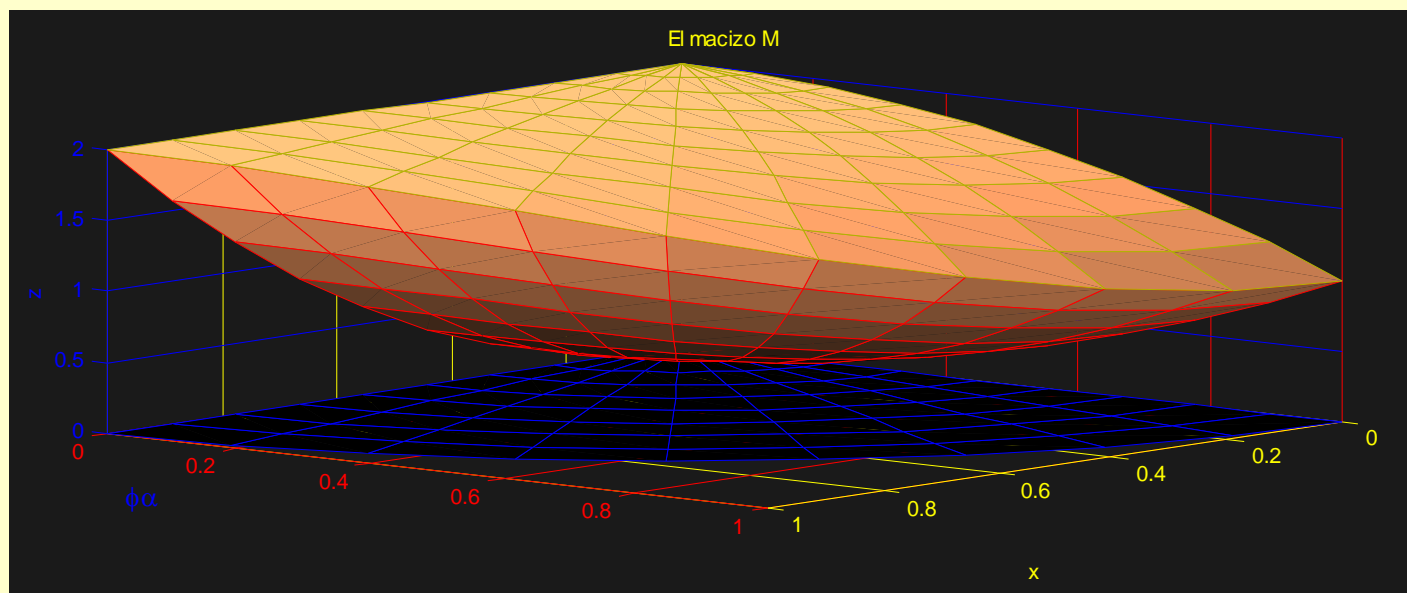


Figura 2. El macizo M . Su proyección sobre el plano $z = 0$ se indica mediante la grilla azul (círculo de radio 1 centrado en el origen)

ⁱ Es inmediato que esta parametrización es $C^\infty(\mathcal{R})$, y que la normal es nunca nula, de modo que se trata de una parametrización regular en \mathcal{R} . Por otra parte, la parametrización es inyectiva en casi todas partes (creo un ejercicio muy instructivo la prueba de esta afirmación, siempre que lo haga uno mismo).

ⁱⁱ Posiblemente el modo más sencillo de resolver este problema consista en observar su geometría: siendo la curva intersección entre el cilindro y el paraboloide es plana (puesto que se encuentra en el plano de ecuación $z = 4 - 2y$), S tiene la mitad del área del cilindro completo de radio 1 y altura 4, que es $(2\pi)(1)(4) = 8\pi$, y entonces tampoco es necesaria integral alguna para obtener el trivial resultado 4π .



Dado que el campo de gradientes de la densidad es $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, la densidad misma también debe ser $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. En tal caso, tomando el punto $P_0 \stackrel{\text{def}}{=} (0, 0, 0)$, y llamando $P(x, y, z) = 2xy$, $Q(x, y, z) = x^2$, $R(x, y, z) = 0$, sabemos que el campo escalar densidad, definido en el abierto simplemente conexo \mathbb{R}^3 está dado porⁱⁱⁱ

$$\delta(x, y, z) = \int_0^x P(t, 0, 0)dt + \int_0^y Q(x, t, 0)dt + \int_0^z R(x, y, t)dt + \delta(0, 0, 0) = x^2y + 1$$

Obsérvese que si bien el campo δ está definido en \mathbb{R}^3 , sólo tiene sentido su restricción a M (donde es, efectivamente, positiva). Ahora sólo resta integrar la densidad obtenida en el macizo M , para lo que pueden utilizarse coordenadas cilíndricas, cuya conveniencia está sugerida por ser circular y centrada la proyección de M sobre el plano $z = 0$, de modo que se tiene

$$\text{masa}(M) = \iiint_M \delta \, dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r \, dr \int_{r^2(1+\cos^2\theta)}^{2-r^2\sin^2\theta} (r^3 \cos^2\theta \sin\theta + 1) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4}{35} \cos^2\theta \sin\theta + \frac{1}{2} \right) d\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{4}{105}$$

Ejercicio 3. Hallar el número real positivo α tal que la circulación del campo $\bar{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{f}(x, y, z) = (yx^2 + e^x - 5y, 4x - xy^2 + \sin(y))$ sobre la circunferencia C dada por $x^2 + y^2 = \alpha^2$, recorrida en sentido positivo, sea máxima.

La figura, innecesaria pero conveniente, permite adivinar por qué es factible pensar que para algún valor del radio α se pueda alcanzar un máximo de la circulación del campo^{iv}.

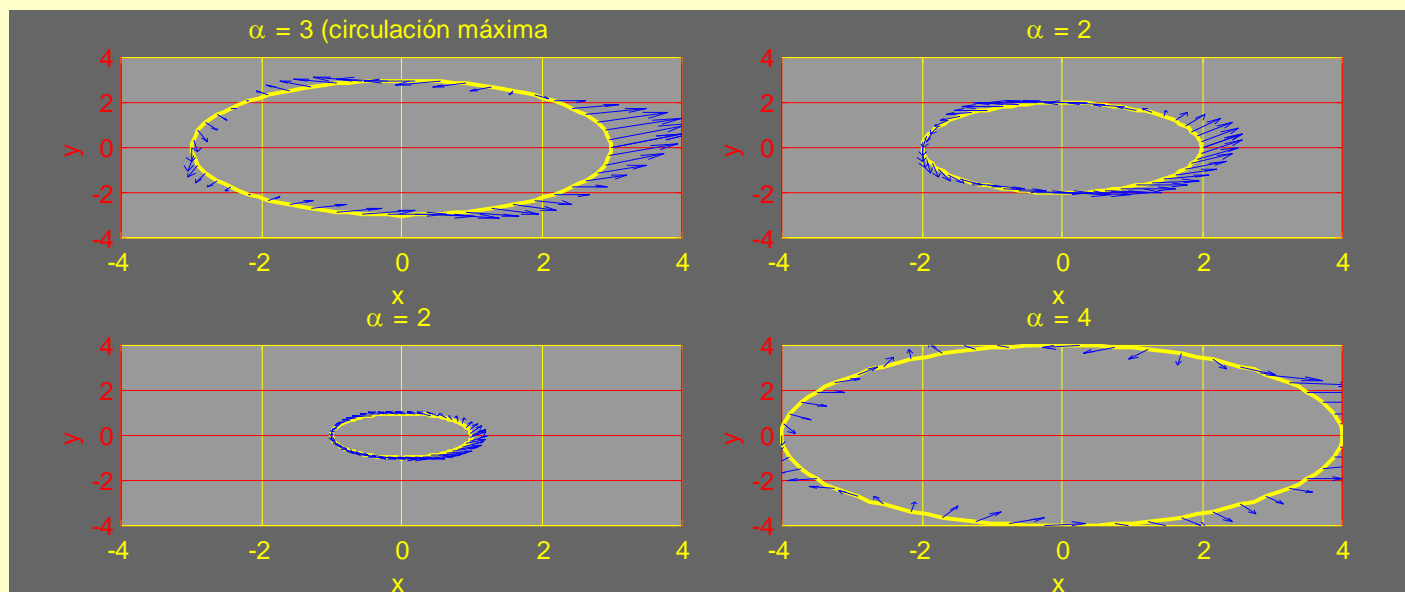


Figura 3. Se muestra la curva C (amarilla) y el campo vectorial (pequeñas flechas azules) para distintos valores de α


Dado que la curva C es un lazo simple de Jordan recorrido en sentido positivo, siendo el campo vectorial \bar{f} de clase C^∞ en \mathbb{R}^3 , podemos ciertamente aplicar el teorema de Green^v al recinto simplemente conexo $\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq \alpha^2\}$, quedándonos $\oint_C \bar{f} \cdot d\bar{l} = \iint_{\mathcal{R}} (Q_x - P_y) dx dy$, siendo $P(x, y) = yx^2 + e^x - 5y$, $Q(x, y) = 4x - xy^2 + \sin(y)$ los campos escalares componentes del campo vectorial dado. Como $P_y(x, y) = x^2 - 5$, $Q_x(x, y) = 4 - y^2$, se tiene que $(Q_x - P_y)(x, y) = 9 - x^2 - y^2$. El cálculo en coordenadas polares es inmediato: $\iint_{\mathcal{R}} (Q_x - P_y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha r (9 - r^2) dr = \frac{\pi}{2} (18\alpha^2 - \alpha^4)$. De esta manera, la circulación es máxima sii es máxima la función $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} 18\alpha^2 - \alpha^4$, lo que sucede en el (único) valor positivo de α que anula $h'(\alpha) = 36\alpha - 4\alpha^3$, esto es $\alpha = 3$. Se prueba sin dificultad que allí h alcanza un máximo puesto que $h''(3) = -72 < 0$ (se supone conocido aquí que si la derivada segunda de una función escalar en un punto estacionario es negativa, entonces allí alcanza un máximo local).

ⁱⁱⁱ El conocido problema de recuperar la función potencial conocido el campo de gradientes puede resolverse de diversas formas, entre las cuales está la que se presenta aquí. Es conveniente consultar la bibliografía acerca de este punto tan esencial a la ingeniería. Por ejemplo, pueden verse ejemplos y fundamentos del procedimiento aquí expuesto en (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1968, §89.3, 491-492, Santaló 1993, §23.2, 175-177, Marsden y Tromba 1991, §8.3, 518, 522, teorema 7 y ejemplo1); alternativamente, y menos directos modos pueden verse en (Apostol 1980, §10.17, 418-419, ejemplos 2 y 3).

^{iv} Esta afirmación es falsa si no se tiene ninguna sensibilidad respecto a significados físicos de la circulación: interpretando el campo como una fuerza, el trabajo desarrollado por esa fuerza a lo largo de C se maximiza según cómo se dispongan los tramos de esa curva respecto del campo de fuerzas.

^v ¿Qué dice exactamente el teorema? Enunciarlo y explicar por qué se afirma que es aplicable a este caso (esto es mostrar que los objetos que intervienen en el teorema satisfacen sus hipótesis). Ver cualquiera (si todos, mucho mejor) de los siguientes libros de texto. (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1968, §88.6, 484-486, Santaló 1993, §20-21, Marsden y Tromba 1991, §8.1, 491-496, Kurtis 1979, §9.6, 419-426). El teorema de Green también se conoce como Fórmula de Riemann. Una muy clara presentación en (Apostol 1980, §11.19, 462-473), y su correspondiente extensión a recintos múltiplemente conexos en (Apostol 1980, §11.23, 473 ss.)



 Es interesante observar que, en el valor $\alpha = \sqrt{18}$ la circulación se anula, y para valores mayores es negativa. La figura 3, en la situación $\alpha = 4$, todavía presenta una circulación positiva. Es interesante graficar para valores mayores de α para apreciar cómo el campo se va transformando en viento que se opone en la parte al sentido del movimiento antihorario^{vi}.

Ejercicio 4. Determinar una función escalar $h \in C^1(\mathbb{R})$ de manera que el campo vectorial definido como $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}(x, y, z) = (h(x) - x, yh(x) + 4e^{-x}, h(x) - xy)$ tenga flujo nulo sobre cualquier superficie cerrada regular, sabiendo que en $P_0 = (0, 0, 0)$ es $\bar{f}(P_0) = (0, 4, 0)$. Para la función h obtenida, determinar el flujo del campo a través de la superficie dada por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1 + \sqrt{x^2 + z^2}, y \leq 4\}$, indicando la orientación adoptada.

Toda superficie cerrada es orientable, de modo que es lícito orientarla con campo de normales saliente. El teorema de Gauss^{vii} es entonces aplicable, ya que el campo vectorial \bar{f} es de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$, puesto que, por hipótesis, lo es la función escalar h . El teorema de Gauss, entonces, asegura que el flujo del campo vectorial a través de S iguala a la integral de la divergencia del campo, realizada en el macizo acotado M , del que S es frontera. Bastará, entonces, elegir h de modo que el campo vectorial sea solenoidal (divergencia idénticamente nula). Pero la divergencia del campo escalar dado es $\text{div}(\bar{f})(x, y, z) = h'(x) - 1 + h(x)$, y la condición $\bar{f}(P_0) = (0, 4, 0)$ se cumple si $h(0) = 0$, de modo que nos encontramos con el problema de valor inicial lineal de primer orden^{viii}: $h'(x) - 1 + h(x) = 0, h(0) = 0$, cuya solución es inmediata si se lo reescribe como $[e^x h(x)]' = e^x$, de donde la (única) solución es $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 1 - e^{-x}$, función escalar que es $C^\infty(\mathbb{R})$, y por lo tanto, es $C^1(\mathbb{R})$.

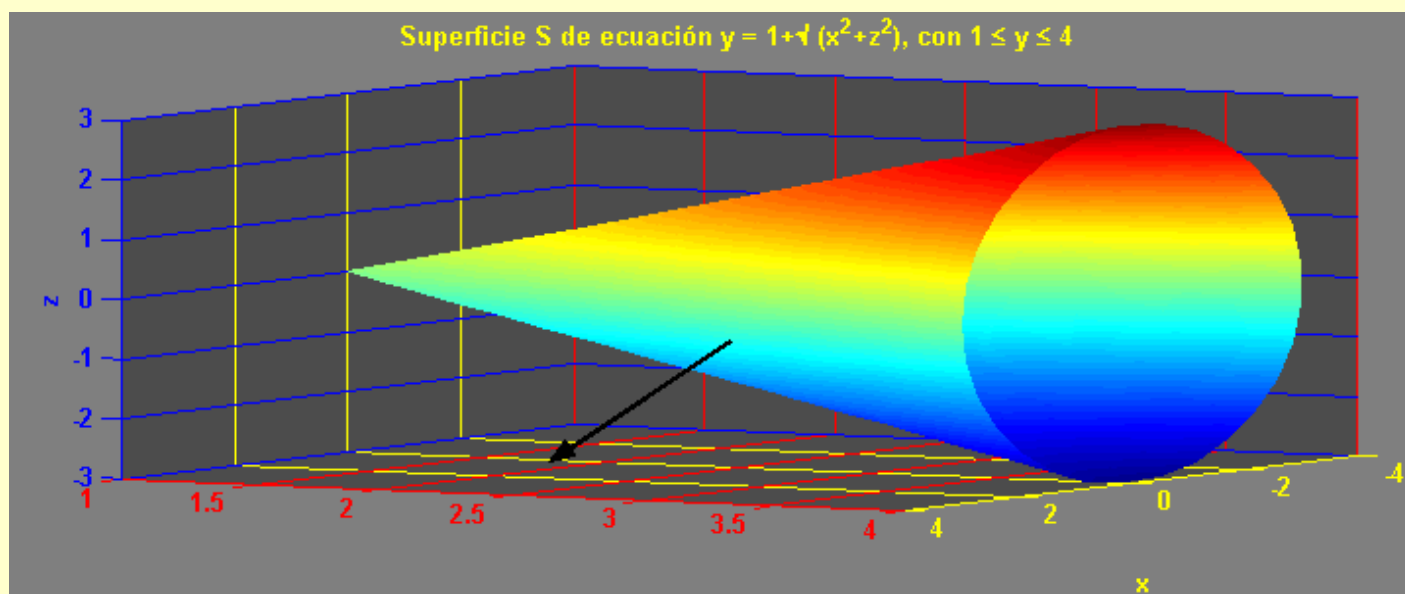


Figura 4. La superficie de ecuación $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1 + \sqrt{x^2 + z^2}, y \leq 4\}$, con campo de normales orientado como lo indica la flecha negra (esto es, que en cualquier punto (x, y, z) del cono, con $N(x, y, z)$ su normal, se tiene $N(x, y, z) \cdot (0, 1, 0) < 0$).

El cálculo del flujo del campo vectorial a través de S orientada como se indica en la figura 4, se simplifica mucho formando el macizo $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \leq 1 + \sqrt{x^2 + z^2}, y \leq 4\}$, cuya frontera es $S^* \stackrel{\text{def}}{=} S \cup S'$, siendo S' el círculo de radio 3 dado por $S' \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 4, x^2 + z^2 \leq 9\}$, que actúa como tapa del cono. El campo de normales de S' es claramente constante, y lo orientamos con $N'(x, 4, z) = (0, 1, 0)$, y entonces (Gauss) es $\iint_{S^*} \bar{f} \cdot \tilde{n} dS = \iint_S \bar{f} \cdot \tilde{n} dS + \iint_{S'} \bar{f} \cdot \tilde{n} dS = \iiint_{\mathcal{M}} \text{div}(\bar{f}) dV = 0$, de donde $\iint_S \bar{f} \cdot \tilde{n} dS = -\iint_{S'} \bar{f} \cdot \tilde{n} dS$. Calculamos: siendo $\bar{f} \cdot \tilde{n} = (h(x) - x, 4h(x) + 4e^{-x}, h(x) - 4x) \cdot (0, 1, 0) = 4h(x) + 4e^{-x} = 4$, es $\iint_S \bar{f} \cdot \tilde{n} dS = -\iint_{S'} \bar{f} \cdot \tilde{n} dS = -4 \iint_{S'} dS = -4 \text{área}(S') = -36\pi$.

^{vi} Los gráficos son muy simples con matlab®, la función necesaria para graficar el campo se llama 'quiver' y recibe dos pares de argumentos: los primeros dos indican el punto en el que se dibuja el vector, dado por la segunda pareja.

^{vii} Se admite conocido el resultado de que, para un campo vectorial en \mathbb{R}^3 , de clase C^1 en un abierto simplemente conexo que contiene a una superficie cerrada S regular por partes, simple y orientada con normal saliente, el flujo del campo a través de S coincide con la integral triple de su divergencia en la región M de la que S es frontera. Las hipótesis pueden debilitarse, y la dimensión del espacio ampliarse, resultando teoremas más generales; puede verse una presentación introductoria en Lang, S. (1990). *Introducción al Análisis Matemático* (Primera edición. [Original 1968, Undergraduate Analysis] ed.). (M. López Mateos, & M. Muñoz Mella, Trads.) Wilmington, Delaware.: Addison Wesley Iberoamericana, Capítulo 20, Formas diferenciales, pp. 442-458. El teorema de Gauss (también suele llamarse 'teorema de la divergencia') se encuentra presentado en una forma compacta en (Santaló 1993, §21.156-166). En (Kurtis 1979, §10.6, 465-472) el tratamiento es simple y de fácil lectura, como también en (Marsden y Tromba 1991, §8.4, 528-541, Apostol 1980, §12.19, 557-567). En (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1968, §92.516-526) se tiene una presentación completa con abundantes comentarios y ejercicios, además de aplicaciones físicas (en §93).

^{viii} Las ecuaciones lineales de primer orden son las más sencillas de resolver; además siendo de coeficientes constantes, anticipamos que la solución será analítica y estará definida en toda la recta real. Ver, por ejemplo, (Apostol 1980, §6.2, Teorema 6.1, 176, Birkhoff y Rota 1989, Zill 2007, §2.5.58-64).

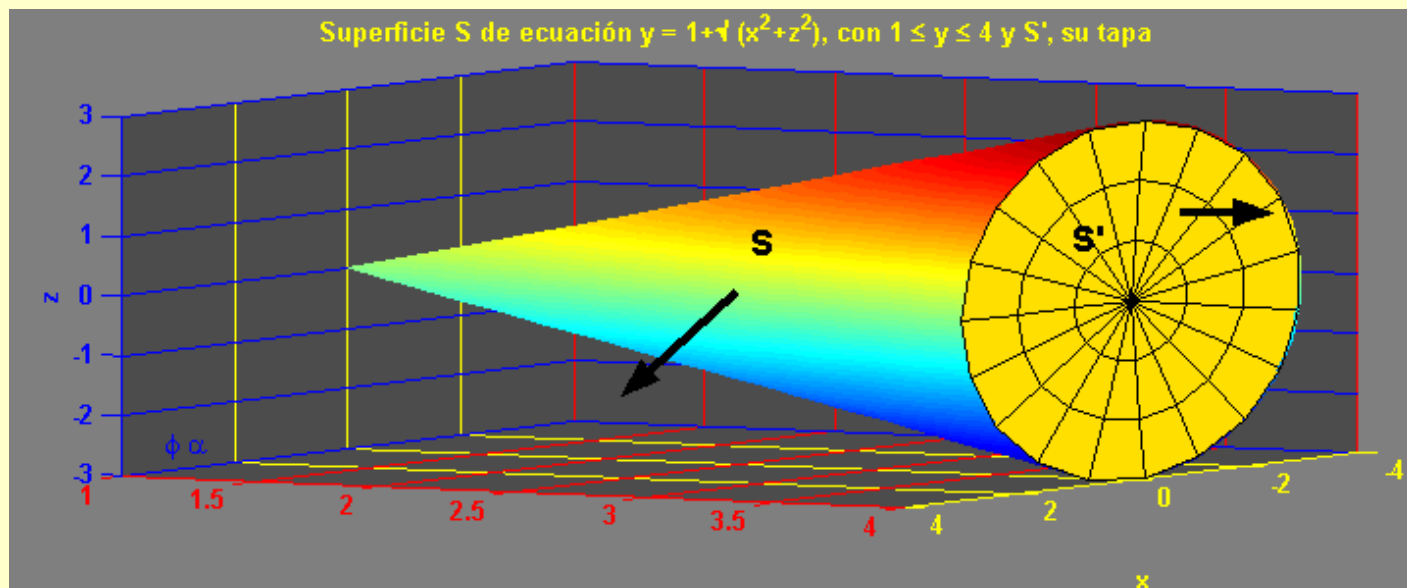


Figura 5. La superficie cónica S , la tapa S' y sus orientaciones respectivas

Ejercicio 5. Llamando $\vec{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r = \|\vec{r}\|$ y siendo $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar $C^1(\mathbb{R})$, con $g(r)$ no nulo para todo r , sea el campo vectorial $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(\vec{r}) = g(r)\vec{r}$. Hallar una expresión para las líneas de campo de \vec{f} y determinar sus trayectorias ortogonales.

El ejercicio es tal que basta la definición de líneas de campo^{ix}: es claro que el campo es radial (es el producto de un escalar, $g(r)$, por el radio vector \vec{r}), de modo que las líneas de campo, *por definición*, son radiales, luego es la familia de rectas de ecuación $a x + b y = 0$, con a y b cualesquiera reales no simultáneamente nulos. Las trayectorias ortogonales son obviamente, la familia de circunferencias de radio k centradas en el origen de coordenadas, de ecuación $x^2 + y^2 = k^2$, con k cualquier real positivo.

Bibliografía citada

- Apostol, Tom. *Calculus volumen 2. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades*. Segunda edición en castellano [Original: Calculus II, Multi-variable calculus and linear algebra. with applications to differential equations and probability]. Traducido por Francisco Vélez Cantarell. Vol. II. 2 vols. Barcelona: Reverté, 1980.
- Birkhoff, Garret, y Gian-Carlo Rota. *Ordinary Differential Equations*. Cuarta edición. Singapore: John Wiley & Sons, 1989.
- Kurtis, Philip. *Cálculo de varias Variables con álgebra lineal*. Primera edición, primera reimpresión. Traducido por María Cristina Sangines de Salinas. México D.F.: Limusa, 1979.
- Marsden, Jerrold E., y Anthony, J. Tromba. *Cálculo Vectorial*. Cuarta edición en español del original Vector Calculus, Third Edition. Traducido por Manuel López Mateos y Sergio Adarve. Wilmington, Delaware, EUA.: Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
- Rey Pastor, Julio, Pedro Pi Calleja, y César Trejo. *Análisis Matemático I. Análisis algebraico. Teoría de ecuaciones. Cálculo infinitesimal de una variable*. Octava edición. Vol. I. III vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1969.
- . *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones*. Séptima edición. Vol. II. III vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1968.
- Santaló, Luis. *Vectores y tensores con sus aplicaciones*. Décimocuarta edición. Buenos Aires: Eudeba, 1993.
- Zill, Dennis. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Segunda Edición en Castellano [Original 1968: A First Course in differential equations with applications]. Traducido por Eduardo Ojeda Peña y Álvaro Cofré Mata. México: Thomson, 2007.

Observación: todos los gráficos incluidos en este documento se han efectuado con matlab®, aplicación que se ha transformado en un estándar en la educación superior, en todas las disciplinas en las que es necesaria la simulación.

^{ix} Se acepta conocida la definición de que $\vec{\gamma}(t)$ es una línea de flujo del campo vectorial $\vec{f}(P)$ en el punto $P = \vec{\gamma}(t)$ si $\vec{f}(\vec{\gamma}(t)) = \vec{\gamma}'(t)$, que puede verse en, por ejemplo, Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (1991). *Cálculo Vectorial* (Cuarta edición en español del original Vector Calculus, Third Edition. ed.). (M. López Mateos, & S. Adarve, Trans.) Wilmington, Delaware, EUA.: Addison-Wesley Iberoamericana, Capítulo 3, Funciones con valores vectoriales, §3.3, Campos vectoriales, p.216, definición. Una definición menos formal y más sugerente en (Santaló 1993, §14, 96-98), con la distinción entre líneas de campo y de corriente, en este ejercicio coincidentes al tratarse de un campo estacionario.