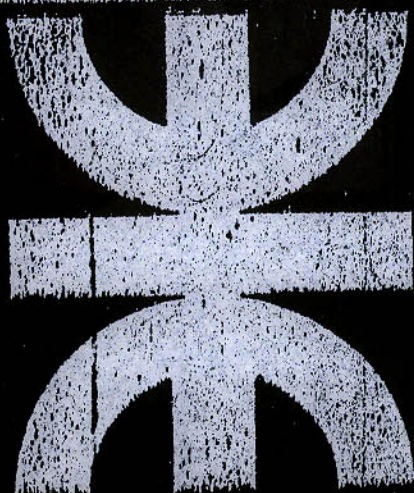
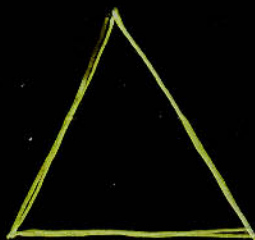
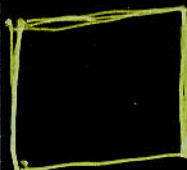


(4)



FOTOCOPIADORA CEUT
APUNTE N.º 1

U.T.N
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA
NACIONAL
Fac. Rep. Sta. Fe



Cátedra :

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Cuaderno N° 1

Temas :

Vectores.
Recta en el plano.
Plano.
Recta en el espacio.
Cónicas.
Superficies.

Carreras :

Ingeniería Mecánica , Eléctrica , Civil e Industrial

Material elaborado por :

Ing. Elio PASCUAL
Ing. Carlos J. TONIOLO
Ing. Alberto R. GONCEBATT

(Edición preliminar)

Año 1999

ALGEBRA y GEOMETRÍA ANALÍTICA- Parcial I – 08/09/06 (Mec. – Eléc. – Civ. e Ind.)

Ejercicio N° 1: A) Un viaje con boleto de avión incluido, tiene cierto costo por persona. Si se desea permanecer un tiempo mayor en el lugar debe pagarse una cuota adicional por noche. Con permanencia de 2 (dos) noches adicionales, el pago total es de \$ 6400 y con 6 (seis) noches adicionales es de \$ 8200, los alimentos no están incluidos.

- a) Encontrar el costo total del viaje con "x" noches adicionales, suponiendo que está dado por la ecuación de una recta.
- b) Cual es el costo sin noches adicionales.
- c) Cuanto cuesta cada noche adicional.

B) Encontrar la ecuación del plano que contiene al eje "x" y a la recta $L) \begin{cases} y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$

Ejercicio N° 2: A) Definir parábola y deducir su ecuación, cuando el vértice coincide con el origen de coordenadas y su eje focal coincide con el eje "x".

B) Encontrar la ecuación de la elipse, que tiene como uno de sus vértices principales el centro de la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$, además se sabe, que la elipse tiene su centro en el punto $C(10, 0)$ y $e = 1/3$

Ejercicio N° 3: A) Definir superficie cilíndrica y superficie cónica. Dar como ejemplo una ecuación de cada una de ellas con su gráfica correspondiente.

B) Identificar y graficar el lugar geométrico que representan cada una de las siguientes ecuaciones en R^3 :

b-1) $x^2 + y^2 - z^2 = 4$, analizar su extensión con respecto a los ejes "z" e "y"

b-2) $z^2 - 2z = 0$

b-3) $(x-1)^2 = -12y$, determinar su intersección con el plano $z = 5$

Ejercicio N° 4: A) a-1) Enunciar y demostrar la interpretación geométrica del producto mixto entre tres vectores.

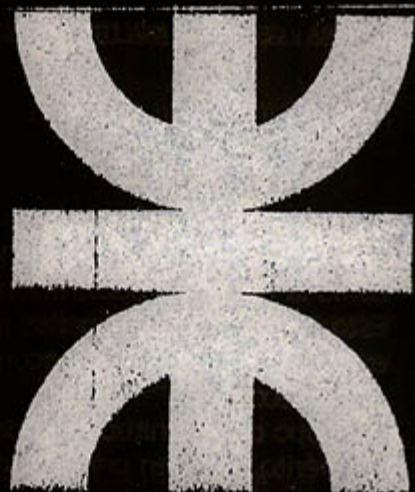
a-2) ¿ En que casos puede ocurrir que el producto mixto entre tres vectores sea igual a cero?

B) Encontrar el o los puntos de la recta $L) \begin{cases} x = 2 \\ y = 1+t \\ z = 3-t \end{cases}$, cuya distancia al plano $2x + 2y - z = 0$, sea

igual a 10.

PUNTAJE:

EJERCICIO	1	2	3	4
A	6-2-2	10	5 - 5	10
B	15	15	7- 3 - 5	15



VECTORES

Redactó : Ing. Alberto R. GONCEBATT

U.T.N.
Fac. Reg. Sta. Fe

VECTORES

En el campo de la Física, como así también de otras ciencias, para representar ciertas magnitudes como la fuerza, la aceleración, la velocidad, etc se usan segmentos de rectas orientados. Esto se debe a que aquellas magnitudes no quedan perfectamente determinadas mediante la sola expresión de un número acompañado de la unidad correspondiente, sino que además necesitan de una dirección.

Este tipo de magnitudes se denominan magnitudes vectoriales.

En mérito a ello en primer lugar y con la intención de introducirnos en la definición de vector, vamos a definir que es lo que se entiende por segmento de recta orientado

Segmento de recta orientado :

Dados dos puntos **A** y **B**, LA Geometría elemental considera como un mismo segmento el **AB** o el **BA**, es decir :

$$\overline{AB} = \overline{BA}$$



Pero si entre los extremos de un segmento, se fija un cierto orden, llamando a uno de ellos origen y al otro simplemente extremo, estamos en presencia de lo que la Geometría Analítica denomina segmento de recta orientado, cuya notación es la siguiente :

$$\overrightarrow{AB}$$

Donde la primer letra representa el origen del segmento y la segunda su extremo. Gráficamente se lo representa, agregando al segmento una punta de flecha en su extremo.



De todo lo anterior resulta evidente que las características esenciales de un segmento de recta orientado son : su longitud y su dirección.

De esta definición surge evidente que : $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

Dos segmentos de rectas orientados se dicen que *son equivalentes*, si y solo si, tienen igual longitud y dirección.

Definición geométrica de vector:

Llamamos vector al conjunto de todos los segmentos de recta orientados de igual longitud y dirección, es decir al conjunto de todos los segmentos de rectas dirigidos equivalentes

Los vectores suelen simbolizarse por medio de letras minúsculas :



Cualquier segmento de recta dirigido en ese conjunto puede tomarse como un representante del vector.

Todos los segmentos de rectas dirigidos de la figura son representantes del mismo vector. Entonces, dos segmentos de recta dirigidos de longitud no nula representan el mismo vector si, y solo si, tienen la misma longitud e igual dirección. De la definición puede deducirse que un vector dado \vec{v} , se puede representar de diferentes manera, siempre que se mantenga inalterable su longitud y dirección.

Esta definición corresponde a la de vector "libre", lo cual significa que un vector puede ser desplazado en el plano o en el espacio, sin modificar su longitud ni su dirección, no interesándonos para nada su punto de aplicación o su recta de acción.

Módulo o Norma de un vector :

Llamamos módulo de un vector \vec{a} , al número no negativo que corresponde a la longitud del segmento orientado que lo define. Se simboliza como $|\vec{a}|$

Si el módulo de un vector toma el valor cero, el vector se reduce a un punto, en consecuencia no podemos hablar de dirección, por lo tanto no existirá vector, pero por comodidad de expresión se conviene en que el punto también es un vector, al que se lo denomina **vector nulo**.

Vector opuesto.

Dado un vector \vec{a} , se llama vector opuesto de \vec{a} , a aquel vector que tiene igual longitud (módulo) que el vector \vec{a} , pero su dirección es contraria a la del vector dado.

Su notación es la siguiente : $-\vec{a}$

Operaciones con vectores en forma geométrica :

Suma : Dados dos vectores \vec{a} y \vec{b} la suma de ambos que simbolizamos como $\vec{a} + \vec{b}$, geoméricamente se obtiene, llevando a partir de un punto cualquiera un vector a continuación del otro, luego el vector que une el origen del primero con el extremo del último vector es el vector suma o resultante de la suma.



Esta definición de suma de vectores, se generaliza para el caso de n vectores.

Resulta evidente que la suma de vectores es conmutativa, es decir:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Teniendo en cuenta que de la geometría elemental surge que la longitud del lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados, al sumar geoméricamente vectores puede observarse que:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Producto de un vector por un escalar (nº Real)-Definición :

El producto de un vector \vec{v} por un escalar k (nº Real) nos da por resultado otro vector \vec{w} , cuyo módulo es igual al producto del valor absoluto del escalar k por el módulo del vector dado y su dirección coincide con la del vector dado si $k > 0$ y es de dirección contraria a la del vector dado si el escalar $k < 0$.

En símbolos:

$$k \cdot \vec{v} = \vec{w}$$

Módulo de \vec{w} :

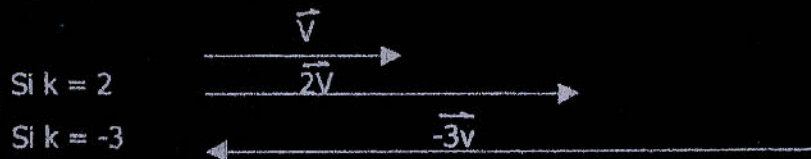
$$|\vec{w}| = |k| |\vec{v}|$$

Dirección:

Dirección de \vec{w} = dirección de \vec{v} si $k > 0$

Dirección de \vec{w} = dirección de \vec{v} si $k < 0$

Ejemplo :



Resta o diferencia de vectores:

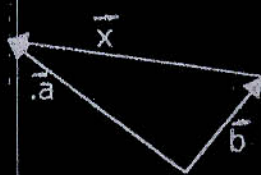
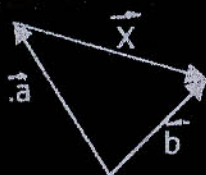
Teniendo en cuenta la definición de las dos operaciones anteriores, la resta o diferencia de dos vectores \vec{a} y \vec{b} , que simbolizamos como $\vec{a} - \vec{b}$, es igual a la suma del vector minuendo más el opuesto del vector sustraendo.

En símbolos :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$$

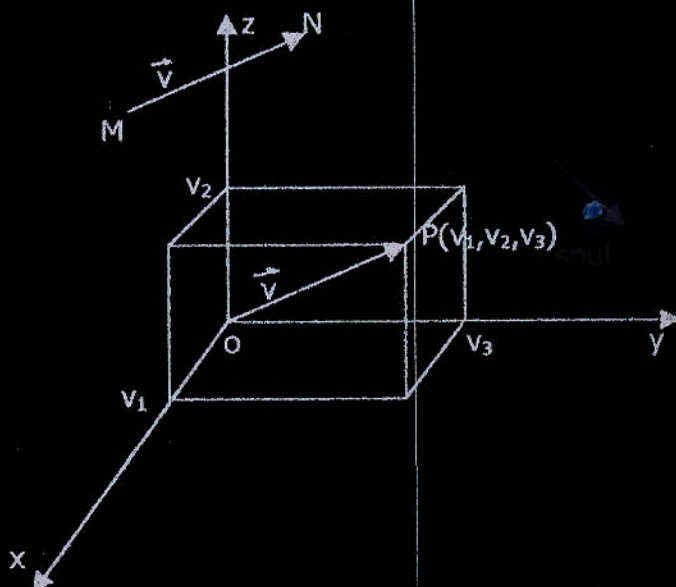


Ejercicio : Determinar en cada caso a que es igual el vector \vec{x} :



EXPRESIÓN DE UN VECTOR EN COORDENADAS

Para llegar a la noción algebraica de vector, vamos a introducir un sistema de ejes coordenados cartesianos $Oxyz$ en el espacio tridimensional o R^3 y vamos a considerar en el, al vector \vec{v}



Como \vec{v} es un vector libre vamos a considerar un representante de el , cuyo origen coincide con el origen de coordenadas, ubicándose en consecuencia su extremo en el punto P .

Si las coordenadas del punto P , referidas al sistema $Oxyz$ es la terna (v_1, v_2, v_3) , entonces se dice que v_1, v_2, v_3 son las componentes del vector \vec{v} .

Geoméricamente puede observarse que v_1, v_2, v_3 representan las proyecciones del vector \vec{v} sobre los ejes x, y y z respectivamente.

Simbólicamente podemos expresar el vector \vec{v} de la siguiente manera .

$$\vec{v} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

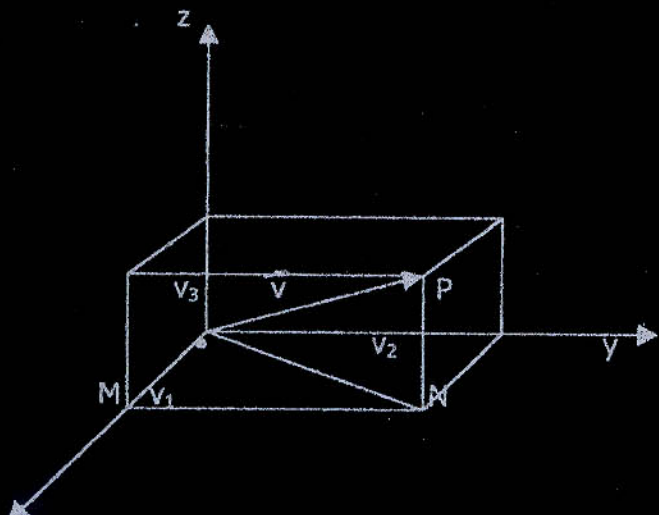
Definición algebraica de vector:

Un vector \vec{v} en R^3 , es una terna ordenada de números reales (v_1, v_2, v_3) , los números v_1, v_2, v_3 son las componentes del vector \vec{v} . El vector nulo está representado por la terna $(0,0,0)$.

Determinación de un vector en función de sus componentes:

Sea

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$



Módulo de \vec{v} :

En la figura consideramos en primer lugar el triángulo ONP :

Por T. de Pitágoras

$$|\vec{v}|^2 = |ON|^2 + v_3^2$$

Aplicando nuevamente Pitágoras, ahora en el triángulo OMN .

$$|ON|^2 = v_1^2 + v_2^2$$

Reemplazando en la anterior, resulta :

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

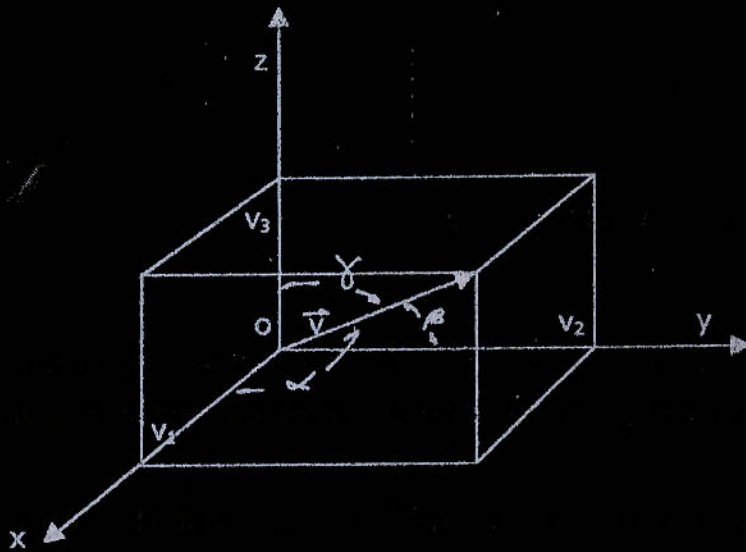
Expresión que nos dice que **"el módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes"**

Dirección:

Ángulos directores :

Se llaman ángulos directores de un vector a los ángulos que el vector forma con las direcciones positivas de los ejes coordenados. Estos ángulos deberán ser tomados entre 0 y π .

Si $\vec{v}(v_1, v_2, v_3) \in R^3$, tiene tres ángulos directores : α , β y γ



Cosenos directores:

Se llaman cosenos directores de un vector $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ a los cosenos de los ángulos que el mismo forma con las direcciones positivas de los ejes x , y y z respectivamente, es decir a los cosenos de sus ángulos directores.

Como los ángulos directores varían entre 0 y π , entonces los cosenos directores podrán ser positivos o negativos.

De la figura puede observarse que :

$$\cos \alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \beta = \frac{v_2}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{v_3}{|\vec{v}|}$$

De las tres anteriores :

$$v_1 = |\vec{v}| \cos \alpha$$

$$v_2 = |\vec{v}| \cos \beta$$

$$v_3 = |\vec{v}| \cos \gamma$$

Elevando al cuadrado y sumando m. a m.

$$v_1^2 = |\vec{v}|^2 \cos^2 \alpha$$

$$v_2^2 = |\vec{v}|^2 \cos^2 \beta$$

$$v_3^2 = |\vec{v}|^2 \cos^2 \gamma$$

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = |\vec{v}|^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

o sea:

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}|^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

finalmente:

$$(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 1$$

que es la relación fundamental entre los cosenos directores de un vector ,que expresa:

"la suma de los cuadrados de los cosenos directores de un vector es igual a la unidad"

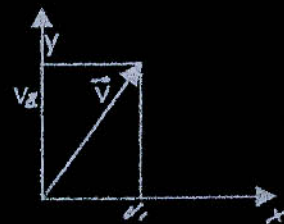
Conclusión:

Conocidas las componentes de un vector , puede calcularse su módulo, como así también sus cosenos directores, con lo cual el vector queda perfectamente determinado en longitud y dirección.

En el caso particular de los vectores en el plano o \mathbb{R}^2 , por ejemplo $\vec{v} = (v_1, v_2)$ su dirección también puede ser definida como el ángulo que el mismo forma con la dirección positiva del eje x , pudiendo tomar los siguientes valores : $0 \leq \alpha < 2\pi$

Pudiendo calcularse el mismo si $v_1 \neq 0$ a través de

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc.} \operatorname{tg} \frac{v_2}{v_1}$$



En cuanto a su módulo , con un razonamiento igual al anterior, puede demostrarse que :

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

¡Inténtelo !

Igualdad de vectores:

Dos vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ son iguales si y solo si , son iguales sus componentes homólogas o correspondientes.

En símbolos $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1 ; a_2 = b_2 , a_3 = b_3$

Operaciones con vectores dados por sus componentes :

Suma. Definición :

La suma de dos vectores dados por sus componentes nos da por resultado otro vector cuyas componentes son iguales a la suma de las componentes de los vectores sumandos.

En símbolos : Sean

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in R^3 \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio : Dado los vectores $\vec{a} = (-2, 4)$ y $\vec{b} = (3, 5)$ efectuar su suma y verificar gráficamente el resultado.

Propiedades de la suma de vectores:

Dado tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de R^2 o $R^3 \Rightarrow$

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (Conmutativa)
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (Asociativa)
3. $\exists! \vec{v}^* / \vec{v} + \vec{v}^* = \vec{v} \therefore \vec{v}^* = \vec{0}$ (Existencia del vector nulo)
4. $\exists! \vec{v}^* / \vec{v} + \vec{v}^* = \vec{0} \therefore \vec{v}^* = -\vec{v}$ (Existencia del vector opuesto)

Producto de un vector por un escalar (nº Real) :

Definición: El producto de un vector $\vec{v} (v_1, v_2, v_3)$ por un escalar k (nº real), nos da por resultado otro vector cuyas componentes resultan de multiplicar cada componente del vector dado por el escalar k .

En símbolos :

$$k \cdot \vec{v} = k \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ kv_3 \end{bmatrix}$$

Su **módulo** es igual al producto entre el valor absoluto del escalar k y el módulo del vector \vec{v}

D)

$$|k\vec{v}| = \sqrt{(kv_1)^2 + (kv_2)^2 + (kv_3)^2} = |k| \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = |k| \cdot |\vec{v}|$$

Su dirección coincide con la del vector \vec{v} si $k > 0$ y tiene dirección contraria a la del vector \vec{v} si $k < 0$

D) Si llamamos con α, β y γ a los ángulos directores del vector \vec{v} , de acuerdo a lo visto anteriormente sus cosenos directores son :

$$\cos \alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \beta = \frac{v_2}{|\vec{v}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{v_3}{|\vec{v}|}$$

Si α^* , β^* y γ^* son los ángulos directores del vector $k\vec{v}$, entonces :

Si $k > 0$

$$\cos \alpha^* = \frac{kv_1}{|k\vec{v}|} = \frac{kv_1}{|k||\vec{v}|} = \frac{v_1}{|\vec{v}|} = \cos \alpha$$

$$\cos \beta^* = \frac{kv_2}{|k\vec{v}|} = \frac{kv_2}{|k||\vec{v}|} = \frac{v_2}{|\vec{v}|} = \cos \beta$$

$$\cos \gamma^* = \frac{kv_3}{|k\vec{v}|} = \frac{kv_3}{|k||\vec{v}|} = \frac{v_3}{|\vec{v}|} = \cos \gamma$$

Tienen los mismo ángulos directores por lo tanto tienen igual dirección.

Si $k < 0$

$$\cos \alpha^* = \frac{kv_1}{|k\vec{v}|} = \frac{kv_1}{|k||\vec{v}|} = \frac{v_1}{|\vec{v}|} = -\cos \alpha = \cos(\alpha + \pi)$$

$$\cos \beta^* = \frac{kv_2}{|k\vec{v}|} = \frac{kv_2}{|k||\vec{v}|} = \frac{v_2}{|\vec{v}|} = -\cos \beta = \cos(\beta + \pi)$$

$$\cos \gamma^* = \frac{kv_3}{|k\vec{v}|} = \frac{kv_3}{|k||\vec{v}|} = \frac{v_3}{|\vec{v}|} = -\cos \gamma = \cos(\gamma + \pi)$$

Sus ángulos directores difieren en π , por lo tanto los vectores tienen direcciones contrarias

Propiedades:

Dados dos vectores cualesquiera \vec{u} y \vec{v} y los escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v}) = \beta(\alpha\vec{v})$ (Asociativa)
2. $(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$ (Distributiva con respecto a la suma de escalares)
3. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ (Distributiva con respecto a la suma de vectores)
4. $1\vec{v} = \vec{v}$ (Identidad multiplicativa)

Condición de paralelismo :

De acuerdo a lo visto anteriormente puede decirse que " *dos vectores son paralelos si, y solo si, uno de ellos es múltiplo escalar del otro*"

En símbolos : Si \vec{u} y \vec{v} son dos vectores distintos del vector nulo

$$\Rightarrow \vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = k \cdot \vec{v} \text{ para } k \neq 0$$

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

De acuerdo a lo anterior :

$$\text{Si } \vec{u} // \vec{v} \Rightarrow (u_1, u_2, u_3) = k \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

$$\text{Es decir } (u_1, u_2, u_3) = (kv_1, kv_2, kv_3)$$

Por igualdad de vectores:

$$u_1 = kv_1$$

$$u_2 = kv_2$$

$$u_3 = kv_3$$

de donde :

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = k$$

Que es la condición de paralelismo entre dos vectores , la que puede ser enunciada de la siguiente forma : " **la condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean paralelos es que exista proporcionalidad entre sus componentes homólogas o correspondientes , pudiendo observarse que si la constante de proporcionalidad (k), es mayor que cero los vectores son paralelos y de igual dirección y si $k < 0$ los vectores son paralelos y de direcciones contrarias.**"

Si $k > 0$



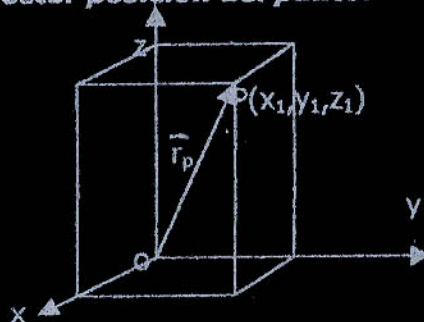
Si $k < 0$



Vector posición de un punto :

Sabemos que en coordenadas cartesianas un punto cualquiera de R^2 o R^3 queda determinado por un par o una terna ordenada de números reales respectivamente, en Algebra vectorial un punto cualquiera de R^2 o R^3 , también puede determinarse por medio de un vector cuyo origen coincida con el origen de coordenadas y cuyo extremo se encuentre en el punto considerado, a este vector se lo denomina **vector posición del punto.**

Vector posición de $P_1 = \vec{r}_p = \vec{OP}_1 = (x_1, y_1, z_1)$



Determinación de un vector en función de los vectores posición de sus extremos :

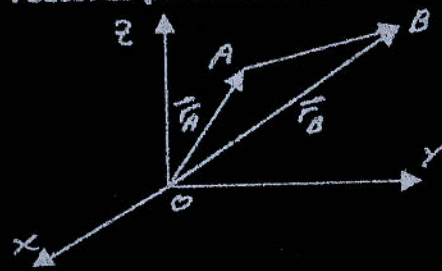
Sea el vector \overline{AB} , cuyo origen es el punto

$A(x_A, y_A, z_A)$ y su extremo $B(x_B, y_B, z_B)$

Para obtener las componentes de \overline{AB} ,

Vamos a tener en cuenta que por definición de

suma geométrica de vectores, de la figura resulta :



$$\vec{r}_A + \overline{AB} = \vec{r}_B \Rightarrow \overline{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

donde \vec{r}_A y \vec{r}_B , son los vectores posición de los puntos A y B respectivamente, entonces trabajando con sus componentes resulta :

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix}$$

Conclusión : Las componentes de un vector pueden obtenerse haciendo la diferencia entre las coordenadas de su extremo y las de su origen.

Vector unitario o versor. Definición :

Llamamos vector unitario o versor a todo vector de módulo

(norma) igual a la unidad.

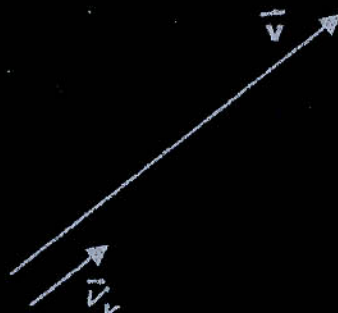
Propiedad :

- ♦ Todo vector $\vec{v} \neq \mathbf{0}$ tiene un versor, que simbolizamos con \vec{v}_v y denominamos versor del vector \vec{v} .
- ♦ El versor del vector \vec{v} , es igual al cociente entre \vec{v} y el recíproco del módulo o norma de \vec{v} .

$$\vec{v}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$$

Si

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_v = \begin{bmatrix} \frac{v_1}{|\vec{v}|} \\ \frac{v_2}{|\vec{v}|} \\ \frac{v_3}{|\vec{v}|} \end{bmatrix}$$



Geoméricamente \bar{v} , es un vector que tiene la misma dirección que el vector dado \vec{v} , y su modulo (norma) es igual a la unidad.

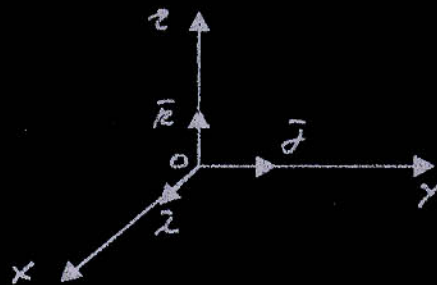
Ejercicio :

- ◆ Dado el vector $\vec{v} = (-3, 5, 7)$ calcular su versor.
- ◆ ¿ De que modo puede fundamentar que el vector hallado en el inciso anterior es realmente el versor del vector dado ?.

Versores fundamentales. Descomposición canónica de un vector :

Dado un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares **Oxyz** en R^3 , a partir del origen de coordenadas y en forma coincidente con las direcciones positivas de los ejes **x**, **y**, **z**, vamos a considerar los versores : **i**, **j**, **k** respectivamente, que se denominan **versores fundamentales** y que atendiendo a la definición de versor tendrán por componentes :

$$\bar{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Si en este sistema de coordenadas consideramos también al vector

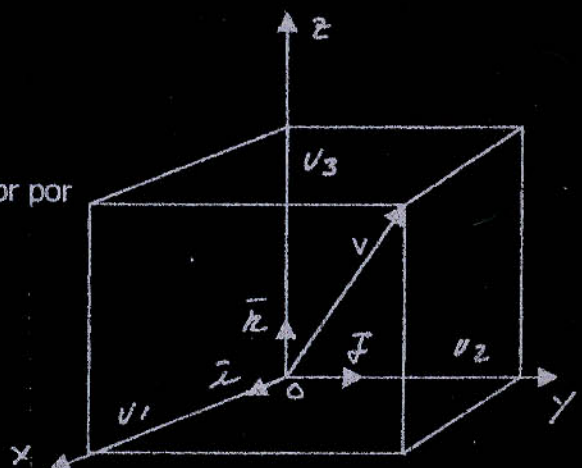
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Por definición de suma de vectores, el mismo puede ser escrito en la forma :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Teniendo presente la definición de producto de un vector por un Escalar, también puede ser escrito en la forma :

$$\vec{v} = v_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Finalmente :

$$\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$$

Esta descomposición de un vector de R^3 como una suma de tres vectores cuyas direcciones coinciden con las direcciones positivas de los ejes coordenados, la llamamos **descomposición canónica de un vector**.

Debe destacarse, que en general cuando un vector \vec{v} , se obtiene como la suma de otros vectores previamente multiplicados por escalares, se dice que \vec{v} es una **combinación lineal** de aquellos vectores.

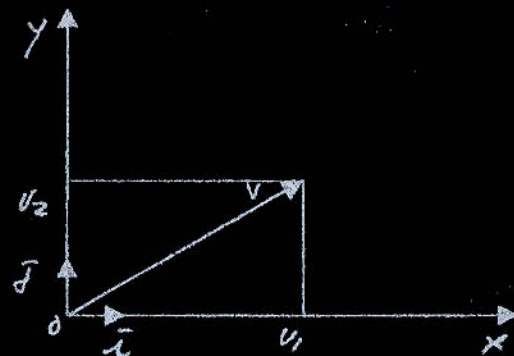
En el caso que nos ocupa , la última expresión nos está indicando que \vec{v} es una combinación lineal de los versores fundamentales de R^3 .

En el caso particular, de que $\vec{v} = (v_1, v_2)$ R^2 , su descomposición canónica toma la siguiente expresión :

$$\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$$

Donde :

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Son los versores fundamentales de R^2 .

Producto escalar o interno entre dos vectores :

Definición : Se llama producto escalar o interno entre dos vectores \vec{u} y \vec{v} , que simbolizamos como $\vec{u} \cdot \vec{v}$, al escalar (n^o Real) que se obtiene como la suma de los productos de sus componentes homólogas o correspondientes.

Solo se puede calcular el producto escalar entre vectores que tengan igual número de componentes.

En símbolos : Si

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}; \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in R^3 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = n^o R$$

Ejercicio : Calcular el producto escalar o interno entre los vectores $\vec{u} = (-2,3)$ y $\vec{v} = (5,8)$

Propiedades :

Si \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} son vectores de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (Conmutativa)

2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (Distributiva)

3) $\alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v})$

El producto escalar no goza de la propiedad asociativa, dado que no tiene sentido la siguiente igualdad : $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ ¿Por qué?

También se cumple que :

♦ $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$

♦ $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$

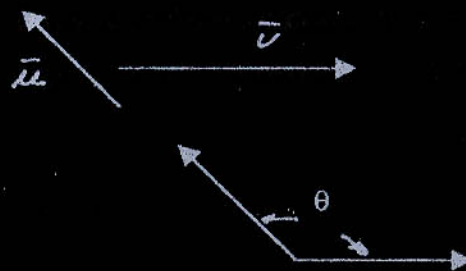
♦ $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ (El producto escalar de un vector por si mismo es igual al modulo del vector al cuadrado) **¡ Compruébelo !**

Angulo entre dos vectores. Definición :

Dados dos vectores \vec{u} y \vec{v} distintos del vector nulo, se llama ángulo de los vectores \vec{u} y \vec{v} , al ángulo positivo θ más pequeño formado entre ellos una vez llevados a partir de un punto común.

De la definición se desprende que

$$0 \leq \theta \leq \pi$$



Calculo del ángulo entre dos vectores :

Dados los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de \mathbb{R}^3 pretendemos calcular el ángulo θ formado entre ellos.

Para ello vamos a introducir un sistema de coordenadas cartesianas coordenadas rectangulares en \mathbb{R}^3 y vamos a llevar a partir del origen de coordenadas a los representantes de \vec{u} y de \vec{v} .

Aplicando ahora el teorema del coseno al triángulo de la figura resulta:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

Pero, teniendo en cuenta las propiedades del producto escalar :

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

o esa :

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

reemplazando en la primera :

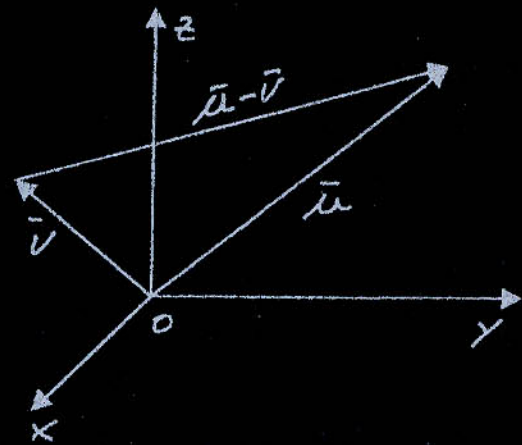
$$|\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

cancelando se tiene :

$$-2\vec{u} \cdot \vec{v} = -2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

finalmente :

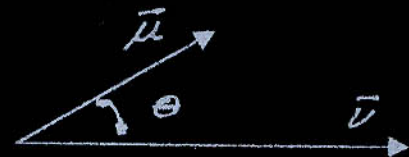
$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$



Fórmula que nos dice que: " **el coseno del ángulo formado entre dos vectores es igual al cociente entre el producto escalar de ambos vectores y el producto de sus normas.** "

La expresión anterior, nos permite definir de otra forma el producto escalar o interno entre dos vectores :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$



" **El producto escalar o interno entre dos vectores es igual al escalar (nº Real) que se obtiene como el producto de las normas de ambos vectores por el coseno del ángulo formado entre los mismos.** "

Condición de perpendicularidad :

Se dice que dos vectores \vec{u} y \vec{v} distintos del vector nulo son perpendiculares u ortogonales si el ángulo entre ellos $\pi/2$.

Para determinar la condición de perpendicularidad, vamos a tener en cuenta la definición de producto escalar :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

Supongamos ahora que $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \theta = \pi/2$

Reemplazando en la anterior :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \frac{\pi}{2} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cdot 0 = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Es decir que **"la condición necesaria y suficiente para que dos vectores sea perpendiculares es que su producto escalar sea nulo"**.

Si tenemos en cuenta nuestra primer definición de producto escalar, podemos afirmar que : **"La condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares es que la suma de los productos de sus componentes homólogas o correspondientes sea igual a cero."**

Es decir

a) Si \vec{u} y $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \wedge \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow$

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$$

b) Si \vec{u} y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \wedge \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow$

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$$

Ejercicio : Dados los vectores $\vec{a} = (4, -3, 9)$ y $\vec{b} = (2, 5, b_3)$, determinar el valor de b_3 para que ambos vectores sean perpendiculares.

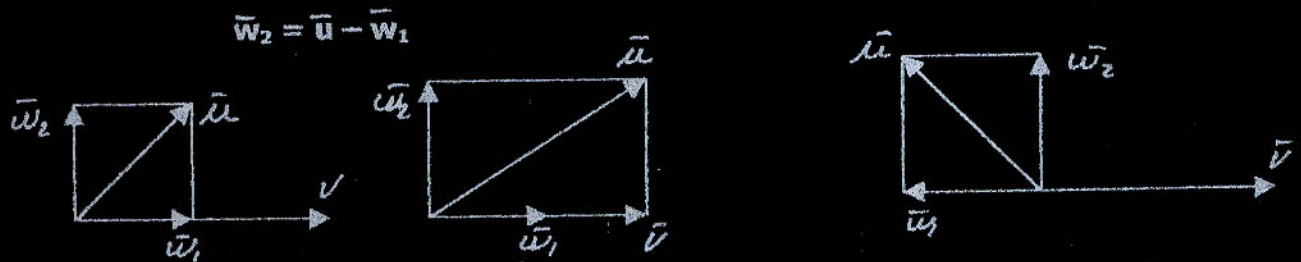
Proyecciones ortogonales :

Proyecciones ortogonales :

Dados dos vectores \vec{u} y \vec{v} distintos del vector nulo, a veces resulta de mucho interés descomponer a uno de ellos , por ejemplo \vec{u} , en una adición de dos sumandos , uno paralelo al segundo vector dado \vec{v} y el otro perpendicular a \vec{v} .

Geoméricamente esto es posible a través del siguiente procedimiento :

- ◆ Se llevan ambos vectores a partir de un punto cualquiera.
- ◆ Por el extremo de \vec{u} se traza una perpendicular hasta la recta de acción de \vec{v} , de esta forma se obtiene el vector \vec{w}_1 , que va desde el punto común a ambos vectores al pié de esta perpendicular.
- ◆ Luego la componente \vec{w}_2 del vector \vec{u} , perpendicular a \vec{v} se obtiene haciendo la diferencia



Pudiendo observarse , que el vector \vec{w}_1 es paralelo al vector \vec{v} y que el vector \vec{w}_2 es perpendicular a \vec{v} .

Cumpléndose que : $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{u}$

El vector \vec{w}_1 se denomina **proyección ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v}** , o también , **componente vectorial de \vec{u} a lo largo de \vec{v}** y lo simbolizamos en la forma : $\vec{w}_1 = \text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$

El vector \vec{w}_2 , se denomina **componente vectorial de \vec{u} ortogonal a \vec{v}** , que en función de la notación anterior , se puede escribir como : $\vec{w}_2 = \vec{u} - \text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$

Cálculo de los vectores : $\vec{w}_1 = \text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$ y $\vec{w}_2 = \vec{u} - \text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$

Sean $\vec{w}_1 = \text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$ y $\vec{w}_2 = \vec{u} - \text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}$

Como \vec{w}_1 es paralelo a \vec{v} , entonces es múltiplo escalar de \vec{v} , o sea $\vec{w}_1 = k\vec{v}$

Reemplazando en : $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = k\vec{v} + \vec{w}_2$

Efectuando el producto escalar de ambos miembros por \vec{v}

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (k\vec{v} + \vec{w}_2) \cdot \vec{v}$$

aplicando las propiedades del producto escalar :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = k\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{w}_2 \cdot \vec{v} = k|\vec{v}|^2 + \vec{w}_2 \cdot \vec{v}$$

teniendo en cuenta que $\vec{w}_2 \cdot \vec{v} = 0$ dado que $\vec{w}_2 \perp \vec{v}$, resulta :

$$k = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}$$

Como $\vec{w}_1 = \text{proy}_{\vec{v}}\vec{u} = k\vec{v}$

Se obtiene :

$$proy_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

En consecuencia \vec{w}_2 (la componente vectorial de \vec{u} ortogonal a \vec{v}) será igual a :

$$\vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

Módulo del vector proyección de \vec{u} a lo largo de \vec{v} : $|proy_{\vec{v}} \vec{u}|$

Según vimos anteriormente :

$$proy_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

Entonces :

$$|proy_{\vec{v}} \vec{u}| = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} \right| = \left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right| |\vec{v}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|^2} |\vec{v}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Expresión que nos indica que el módulo o la norma del vector proyección de un vector sobre otro es igual **"al módulo del producto escalar entre ambos vectores sobre el módulo del vector sobre el cual se proyecta"**.

Si θ es el ángulo formado entre \vec{u} y \vec{v} , entonces de acuerdo a la definición de producto escalar

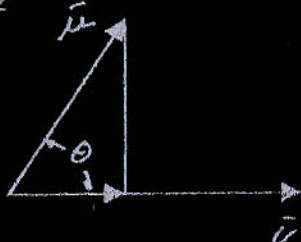
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

Reemplazando en la anterior resulta :

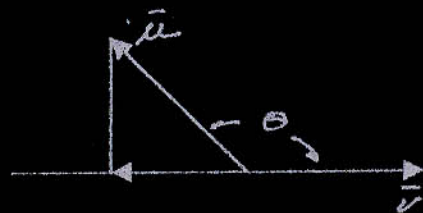
$$|proy_{\vec{v}} \vec{u}| = |\vec{u}| |\cos \theta|$$

Expresión que nos indica que el módulo o la norma de la proyección de un vector sobre otro también es igual : **"al producto entre el módulo del vector que se proyecta y el valor absoluto del coseno del ángulo formado entre ambos vectores."**

Si $0 \leq \theta < \pi/2$



Si $\pi/2 < \theta \leq \pi$



Producto vectorial o Producto cruz entre dos vectores :

En muchas ocasiones resulta de sumo interés encontrar en el espacio tridimensional un vector que sea perpendicular a otro dos vectores dados, esta situación puede ser resuelta mediante la aplicación de la siguiente definición.

Definición : Si $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ y $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ son dos vectores del espacio tridimensional o R^3 , entonces se llama **producto vectorial o producto cruz** entre ambos vectores en el orden dado y que simbolizamos como $\vec{u} \times \vec{v}$, a un nuevo vector cuyas componentes se definen del siguiente modo :

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

pudiendo obtenerse también las componentes de este nuevo vector, mediante la resolución del siguiente determinante :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

¡Verifiquelo!

Este nuevo vector goza de las siguientes propiedades :

- ♦ $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ es decir $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$
- ♦ $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ es decir $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$
- ♦ $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ Identidad de LAGRANGE

INTENTE DEMOSTRARLO

Propiedades del producto cruz o producto vectorial :

Si \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son vectores cualesquiera en el espacio tridimensional y k es un escalar cualquiera, entonces :

- ♦ $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
- ♦ $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + (\vec{u} \times \vec{w})$
- ♦ $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$
- ♦ $k \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (k \cdot \vec{v})$
- ♦ $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$
- ♦ $\vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$

INTENTE SU DEMOSTRACIÓN A PARTIR DE LA DEFINICIÓN DE LAS COMPONENTES DEL PRODUCTO CRUZ Y DE LAS PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Ejercicio :

Calcular el producto cruz entre los versores fundamentales :

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $\vec{i} \times \vec{i} =$ | $\vec{j} \times \vec{i} =$ | $\vec{k} \times \vec{i} =$ |
| $\vec{i} \times \vec{j} =$ | $\vec{j} \times \vec{j} =$ | $\vec{k} \times \vec{j} =$ |
| $\vec{i} \times \vec{k} =$ | $\vec{j} \times \vec{k} =$ | $\vec{k} \times \vec{k} =$ |

Módulo y dirección del vector resultante del producto vectorial entre dos vectores \vec{u} y \vec{v} :

Si bien, al ser definido el vector resultante del producto vectorial entre dos vectores \vec{u} y \vec{v} a través de sus componentes, este queda completamente determinado en longitud y dirección, no deja de ser de suma importancia demostrar que **"El módulo del producto vectorial entre dos vectores es igual al producto de los módulos de ambos vectores por el seno del ángulo formado entre ellos."**

En símbolos :

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } \theta$$

D) Teniendo en cuenta que la identidad de LAGRANGE establece que :

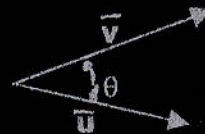
$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

si θ es el ángulo formado entre \vec{u} y \vec{v} , entonces de acuerdo a lo visto anteriormente :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{cos } \theta$$

reemplazando en la anterior, se tiene :

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \text{cos}^2 \theta = \\ &= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot (1 - \text{cos}^2 \theta) = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \text{sen}^2 \theta \end{aligned}$$



finalmente :

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } \theta$$

Dirección de $\vec{u} \times \vec{v}$:

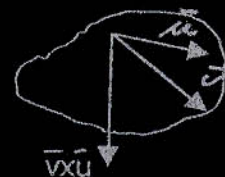
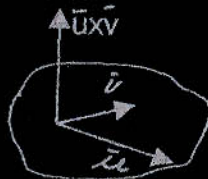
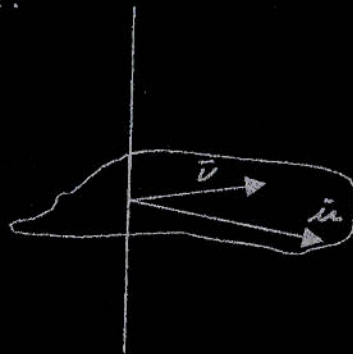
De las propiedades de $\vec{u} \times \vec{v}$, enunciadas anteriormente surge que :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) &= 0 \\ \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) &= 0 \end{aligned}$$

lo cual nos indica que el vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular tanto a \vec{u} como a \vec{v} , o dicho de otro modo, $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular (normal) al plano que determinan los vectores \vec{u} y \vec{v} .

Como es evidente que en el espacio tridimensional hay dos direcciones que son perpendiculares a dicho plano, definimos a la dirección del vector $\vec{u} \times \vec{v}$ como aquella tal que la terna $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$, tenga la misma orientación que el espacio **Oxyz** que es nuestro sistema de referencia adoptado.

Esta dirección puede ser determinada mediante la aplicación de la "regla de la mano derecha" que sintéticamente consiste en lo siguiente : Se colocan los dedos índice y medio de la mano derecha de modo tal que tomen la dirección de los vectores \vec{u} y \vec{v} respectivamente, luego el dedo pulgar extendido nos indica la dirección del vector $\vec{u} \times \vec{v}$.



Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial entre dos vectores :

"El módulo del producto vectorial o cruz entre dos vectores \vec{u} y \vec{v} , es igual al área del paralelogramo que tiene por lados a ambos vectores."

D) De la Geometría elemental sabemos que :

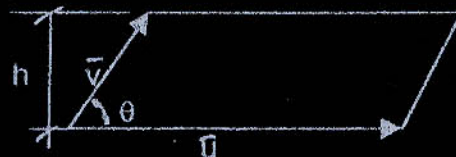
Área del paralelogramo = Base x Altura

Base = Módulo de $\vec{u} = |\vec{u}|$

Altura = $h = |\vec{v}| \cdot \text{sen } \theta$

Reemplazando en la anterior :

Área del paralelogramo = $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } \theta = |\vec{u} \times \vec{v}|$



Condición de paralelismo :

De la definición del producto vectorial podemos establecer de otro modo la condición de paralelismo entre dos vectores.

Para ello vamos a tener en cuenta en primer lugar, que de acuerdo a lo visto anteriormente:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen } \theta$$

Si \vec{u} y \vec{v} son dos vectores paralelos, entonces el ángulo formado entre ellos es $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, siendo que : $\text{sen } 0 = \text{sen } \pi = 0$

Reemplazando en la anterior resulta :

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot 0 = 0 \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0$$

que representa también la condición de paralelismo entre dos vectores y que podemos enunciar del siguiente modo : **La condición necesaria y suficiente para que dos vectores, distintos del vector nulo, sean paralelos, es que su producto vectorial sea nulo.**

Producto mixto o triple producto escalar entre vectores .Definición :

Si \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son tres vectores del espacio tridimensional, entonces llamamos producto mixto o triple producto escalar entre ellos, al producto escalar de $\vec{u} \times \vec{v}$ por el vector \vec{w} . Su resultado es un escalar (n° Real).

En símbolos : $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = n^\circ \text{R}$

Puede observarse que en la expresión anterior, los paréntesis carecen de sentido, puesto que la expresión: $\vec{u} \times (\vec{v} \cdot \vec{w})$ representa el producto vectorial de un vector por un número, operación que no está definida.

En consecuencia el producto mixto o triple producto escalar entre tres vectores, simplemente puede simbolizarse por : $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$

Cálculo del producto mixto o triple producto escalar :

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$; $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

Para calcular : $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$

Procedemos del siguiente modo :

1) Efectuamos el producto vectorial de $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

2) Calculamos el producto escalar de $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \cdot w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot w_3$$

El desarrollo anterior que representa el producto mixto entre \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} , puede ser expresado también en como un determinante de la forma :

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Determinante este último, que por propiedades de los determinantes es equivalente al siguiente :

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = n^\circ R$$

Interpretación geométrica del producto mixto o triple producto escalar :

" El valor absoluto del producto mixto o triple producto escalar entre tres vectores es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los mismos, una vez llevados a partir de un origen común. "

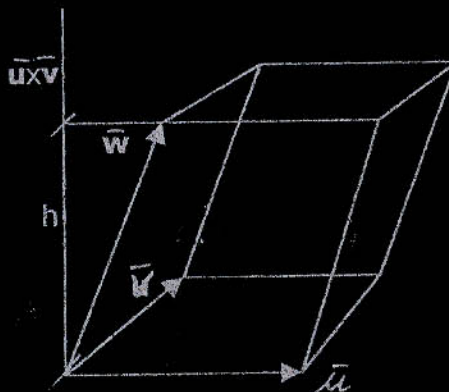
D) De la Geometría elemental conocemos que :

Vol. Paralelepípedo = Área base x Altura

Según vimos anteriormente :

Área base = $|\vec{u} \times \vec{v}|$

y la altura :



$$h = |\text{proy}_{\vec{u} \times \vec{v}} \vec{w}| = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

reemplazando en la primera resulta :

$$\text{Vol. paralelepípedo} = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$$

En el caso particular del que no siendo los vectores paralelos y tampoco ninguno de ellos igual al vector nulo el producto mixto sea nulo, ello en principio de acuerdo a lo anterior significaría que no existe paralelepípedo, por lo cual los tres vectores se ubicarán sobre un mismo plano, siendo esta la condición de coplanaridad de tres vectores, que podemos enunciar de la siguiente manera.

"La condición necesaria y suficiente para que tres vectores sean coplanares es que su producto mixto o triple producto escalar sea igual a cero."

Cátedra : ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA



LA RECTA EN EL PLANO

Redactó : Ing. Alberto R. GONCEBATT

U.T.N.
Fac. Reg. Sta. Fe

La recta en el plano

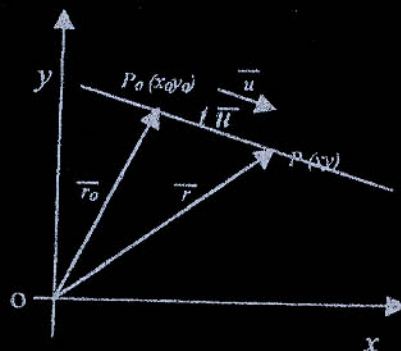
❖ Ecuación de la recta determinada por un punto y una dirección:

Datos:

$P_0(x_0, y_0) \in l$, vector posición $\vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$

$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ vector dirección

Vamos a considerar además un punto genérico $P(xy)$, de coordenadas variables, perteneciente a la recta l . Es un punto móvil que se mueve en el plano sobre la recta; según su posición, genera un lugar geométrico sobre la recta.



La recta estará determinada por

$$l = \{P(xy) / \vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{u}\}$$

donde \vec{r} = variable dependiente

t = variable independiente (t es un número real, $-\infty < t < +\infty$)

de donde $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{u}$

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

Reemplazando cada vector por sus componentes

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

operando

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + t u_1 \\ y_0 + t u_2 \end{bmatrix}$$

por igualdad de matrices

$$\begin{cases} x = x_0 + t u_1 \\ y = y_0 + t u_2 \end{cases} \quad \text{ECUACIONES PARAMÉTRICAS}$$

donde t es el parámetro, $t \in \mathbb{R}$, $-\infty < t < +\infty$

Despejando t e igualando:

$$t = \frac{x - x_0}{u_1}; \quad t = \frac{y - y_0}{u_2}$$

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$$

ECUACIÓN CARTESIANA
 O FORMA SIMÉTRICA

Válida siempre que $u_1 \neq 0$ y $u_2 \neq 0$.

Ecuación cartesiana en donde (x_0, y_0) son las coordenadas del punto fijo P_0 , y u_1 y u_2 son las componentes del vector dirección de la recta: \vec{u} .

A las componentes que dan la dirección de la recta se las denomina **números directores de la recta**.

Multiplicando medios y extremos, tenemos:

$$\begin{aligned}u_2 \cdot (x - x_0) &= u_1 \cdot (y - y_0) \\u_2 x - u_2 x_0 &= u_1 y - u_1 y_0 \\u_2 x - u_1 y + (u_1 y_0 - u_2 x_0) &= 0\end{aligned}$$

Llamando con

$$\begin{aligned}a &= u_2 \\b &= -u_1 \\c &= (u_1 y_0 - u_2 x_0)\end{aligned}$$

se obtiene

$$ax + by + c = 0 \quad \text{ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA}$$

Forma General o IMPLÍCITA

Interpretación vectorial de los coeficientes: a y b

Vamos a demostrar que si el vector dirección de la recta es

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

a y b serán las componentes de un vector normal a la recta.

Es decir que si $ax + by + c = 0$ es la ecuación de la recta, su vector normal \vec{n} tendrá por componentes $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ y se cumplirá que $\vec{n} \perp \vec{u}$.

O sea que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow au_1 + bu_2 = 0$
como $a = u_2$; $b = -u_1$, sustituyendo, resulta: $u_2 u_1 - u_1 u_2 = 0$.

❖ Ecuación de la recta en el plano determinada por dos puntos

Datos:

$$P_0(x_0, y_0) \in l \rightarrow \vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$$

$$P_1(x_1, y_1) \in l \rightarrow \vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$$

Vamos a considerar además un punto cualquiera

$$P(xy) \rightarrow \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \text{ perteneciente a la recta } l.$$

Para deducir la ecuación de la recta en este caso vamos a considerar la ecuación vectorial de la misma:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{u}$$

expresión en la cual no se conoce el vector dirección \vec{u} , pero estamos en condiciones de determinarlo dado que $\vec{u} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$; reemplazando en la anterior

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \quad \text{ECUACIÓN VECTORIAL}$$

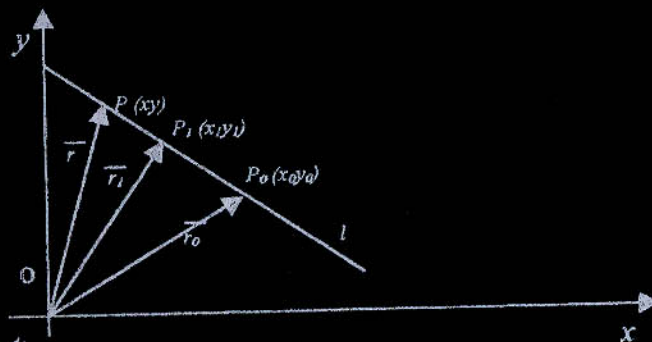
donde $t \in \mathbb{R}$ es el parámetro, o también

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix}$$

operando
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y_0 + t(y_1 - y_0) \end{bmatrix}$$

Por igualdad de matrices :

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \text{ ECUACIONES PARAMÉTRICAS}$$



Eliminando el parámetro t :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \text{ ECUACIÓN CARTESIANA}$$

Operando:

$$(x - x_0) \cdot (y_1 - y_0) = (y - y_0) \cdot (x_1 - x_0)$$

$$(x - x_0) \cdot (y_1 - y_0) - (y - y_0) \cdot (x_1 - x_0) = 0$$

lo cual se puede expresar como:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0$$

que por propiedades de los determinantes, es equivalente a:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ambas representan la ecuación de la recta determinada por dos puntos en forma de determinante.

❖ Otras formas cartesianas:

a) En la ecuación

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2}$$

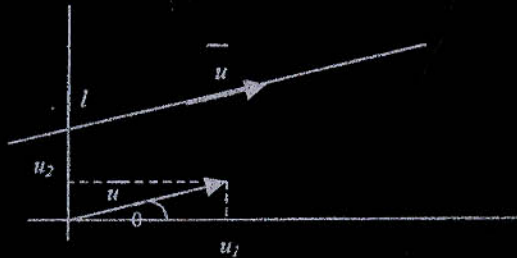
por ser u_1 y u_2 componentes del vector u (dirección de la recta):

$$u_1 = |u| \cdot \cos \theta; \quad u_2 = |u| \cdot \sin \theta$$

Si $u_1 \neq 0$, tenemos que: $\frac{u_2}{u_1} = \operatorname{tg} \theta$

donde θ será denominado **ángulo de inclinación de la recta**, que es el ángulo formado por la recta y el semieje positivo de las x .

$\operatorname{tg} \theta$ es la pendiente de la recta o coeficiente angular de la misma $\Rightarrow \operatorname{tg} \theta = m$.



Luego:

$$y - y_0 = \frac{u_2}{u_1} \cdot (x - x_0)$$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

que es la ecuación de la recta determinada por un punto de paso y su pendiente.

b) Forma explícita.

Supongamos ahora que

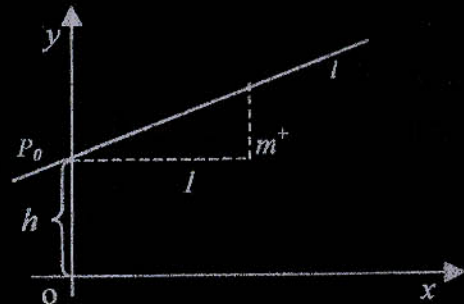
$$P_0 \in \begin{cases} l \\ \text{eje } y \end{cases} \Rightarrow P_0(0, h)$$

Sustituyendo en la anterior:

$$\begin{aligned} y - h &= m \cdot (x - 0) \\ y &= mx + h \end{aligned}$$

donde h es la ordenada al origen y m es la pendiente de la recta.

En la figura se indica la forma de representar fácilmente la gráfica en el caso en que $m > 0$; si $m < 0$, tomaríamos dicho valor hacia abajo.



c) Forma segmentaria.

Supongamos la ecuación de la recta determinada por dos puntos:

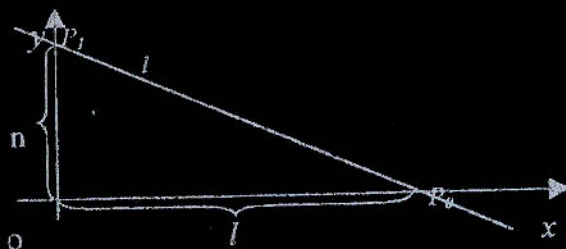
$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Pero esos puntos sean tales que $P_0 \in x$ y $P_1 \in y$, es decir, $P_0(l, 0)$ y $P_1(0, n)$.

Sustituyendo en dicha ecuación:

$$\frac{y - 0}{n} = \frac{x - l}{0 - l}, \quad \frac{y}{n} = \frac{x - l}{-l}$$

$$-l \cdot y = n \cdot x - l \cdot n$$



n : ordenada al origen $\neq 0$.

l : abscisa al origen $\neq 0$.

Dividiendo por ln tendremos:

$$-\frac{y}{n} = \frac{x}{l} - 1$$

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{n} = 1 \quad \text{FORMA SEGMENTARIA}$$

Debe observarse que en esta ecuación siempre los coeficientes de las variables son positivos e iguales a la unidad.

➤ Pasaje de la Forma General a la Forma Segmentaria

Tenemos $l // ax+by+c=0$, y queremos hallar

$$l // \frac{x}{l} + \frac{y}{n} = 1$$

De $ax+by+c=0$, tenemos $ax+by=-c$.

Si $c \neq 0$, dividiendo por $(-c)$:

$$\frac{a*x}{-c} + \frac{b*y}{-c} = 1$$

Pasando a y b al denominador:

$$\frac{x}{-c/a} + \frac{y}{-c/b} = 1; \text{ donde } l = -c/a; n = -c/b$$

➤ Discusión de la Ecuación General o Implícita de la recta:

En el estudio de la ecuación de la recta, habíamos visto que se podían expresar en la forma: $ax+by+c=0$, a la cual llamamos forma explícita, pues es del tipo $f(xy) = 0$ (ecuación de primer grado en dos variables).

Vamos a justificar el porqué de la denominación de ecuación general.

De todas las ecuaciones cartesianas halladas, vimos que tenían alguna restricción a su validez:

1) $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2}$ si $u_1 \neq 0; u_2 \neq 0$

2) $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$ si $x_1 \neq x_0; y_1 \neq y_0$

3) $y = mx + h$ si $m = \frac{u_2}{u_1}; u_1 \neq 0;$ 4) $\frac{x}{l} + \frac{y}{n} = 1$ si $l \neq 0; n \neq 0$

Es decir que ninguna de estas fórmulas es general y siempre hay alguna recta en posición particular que no puede ser expresada mediante estas ecuaciones.

Puede verse que la 1) y la 2) no son válidas cuando $s//x$ ó $s//y$; 3) cuando s es perpendicular al eje x , y 4) cuando s pasa por el origen de coordenadas. Vamos a demostrar que la forma: $ax+by+c=0$ es válida para s en cualquier posición, por eso es **general**.

Es decir vamos a discutir el trinomio de primer grado: $ax+by+c=0$.

1^{er} Caso:

$$\begin{aligned} &\text{Si } a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0 \\ &s) \quad ax+by+c=0 \quad (\text{Inhomogénea, } c \neq 0) \end{aligned}$$

Pasando a la forma explícita:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Comparando con la forma explícita

$$y = mx + h$$

tenemos:

$$m = -\frac{a}{b} : \text{pendiente}; h = -\frac{c}{b} : \text{ordenada al origen}$$

Es decir, representa la recta de pendiente $(-a/b)$ y ordenada al origen $(-c/b)$.
Por lo tanto, una ecuación no homogénea en dos variables, representa una recta.

2^{do} Caso:

$$\begin{aligned} &\text{Si } a \neq 0; b \neq 0; c = 0 \\ &s) \quad ax+by=0 \\ &y = -\frac{a}{b}x \end{aligned}$$

Comparando con la forma explícita

$$y = mx + h$$

tenemos que:

$$m = -\frac{a}{b} : \text{pendiente}; h = 0$$

Por lo tanto, la recta pasa por el origen de coordenadas.

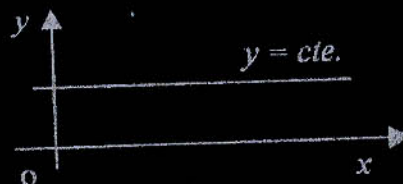
Además, al ser homogénea, se satisface para la solución trivial $x=y=0$; por lo tanto, el punto $O(0,0)$ pertenece a la recta s .

Luego, una ecuación lineal homogénea en dos variables representa también una recta.

3^{er} Caso:

$$\begin{aligned} &\text{Si } a = 0; b \neq 0; c \neq 0 \\ &s) \quad by+c=0, \text{ de donde} \\ &y = -\frac{c}{b} \end{aligned}$$

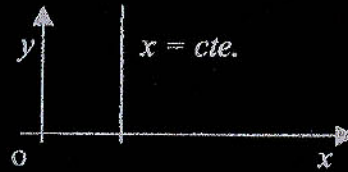
Al ser $a=0 \Rightarrow m=0$, por lo tanto $x=0^\circ$ ó $x=180^\circ$, y donde $h=-c/b$; por lo tanto, $y=cte.$ para todo valor de x . La recta es // al eje x .



4^{to} Caso:

Si $b = 0; a \neq 0; c \neq 0$,
la ecuación queda $ax + c = 0$,
de donde $x = -\frac{c}{a}$

Es decir que $x = cte.$ para todo valor de y .
Es una recta // al eje y .



5^{to} Caso:

Si $a = 0; c = 0; b \neq 0$
la ecuación queda $by = 0 \Rightarrow y = 0 \forall x$

Representa al eje x .



6^{to} Caso:

Si $b = 0; c = 0; a \neq 0$
la ecuación queda $ax = 0 \Rightarrow x = 0 \forall y$

Representa al eje y .



7^{mo} Caso:

Si $a = 0; b = 0; c = 0$
no hay ecuación.

En general: una ecuación de primer grado en dos variables en el plano representa una recta, con la condición de que uno de los dos coeficientes de las variables sea distinto de cero.

Posiciones relativas de dos rectas en el plano

Ángulo que forman dos rectas en el plano:

$$\text{Si } \begin{aligned} l_1 / a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ l_2 / a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

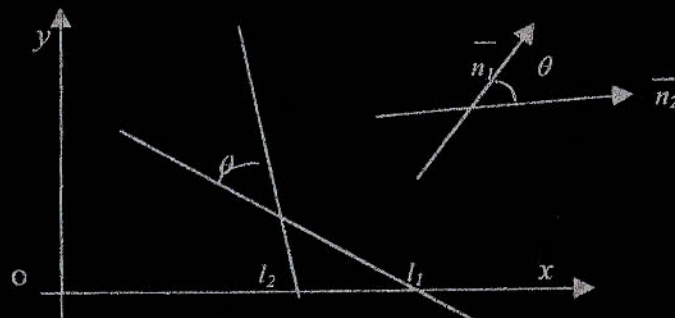
$$\text{tenemos } \vec{n}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \perp l_1$$

$$\vec{n}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \perp l_2$$

por lo tanto $\theta = \widehat{l_1 l_2} = \widehat{n_1 n_2}$
o sea que

$$\cos \theta = \cos(\widehat{n_1 n_2}) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\cos \theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$



Si las rectas están expresadas en la forma explícita:

$$l_1 / y = m_1 x + h_1$$

$$l_2 / y = m_2 x + h_2$$

Del $(M\hat{N}P)$

$$\alpha_1 + \theta + (\pi - \alpha_2) = \pi$$

$$\alpha_1 + \theta + \pi - \alpha_2 = \pi$$

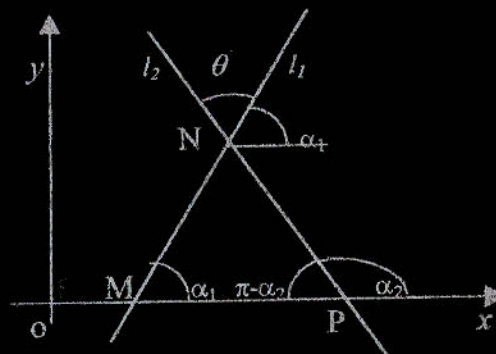
$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

luego

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1}$$

como $\operatorname{tg} \alpha_1 = m_1$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = m_2$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$



Condición de perpendicularidad:

$$\text{Si } l_1 \perp l_2 \Rightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \Rightarrow \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$$

$$l_1) a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$l_2) a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

Entonces la condición necesaria y suficiente para que dos rectas expresadas en la forma general sean **perpendiculares** es que:

$$\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0 \Rightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

Si las ecuaciones de las rectas están expresadas en la forma explícita:

$$\begin{aligned} l_1) & y = m_1 x + h_1 \\ l_2) & y = m_2 x + h_2 \end{aligned}$$

$$\text{tenemos en cuenta } \operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Como la $\operatorname{tg} 90^\circ$ no está definida, trabajamos con la recíproca ($\operatorname{cotg} \theta$).

$$\operatorname{cotg} \theta = \frac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1}$$

$$\text{Si } l_1 \perp l_2 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{cotg} \theta = \operatorname{cotg} 90^\circ = 0 \Rightarrow \frac{1 + m_1 m_2}{m_2 - m_1} = 0$$

$$\text{luego } 1 + m_1 m_2 = 0$$

$$\text{de donde } m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Es decir que la condición necesaria y suficiente para que dos rectas expresadas en la forma explícita sean **perpendiculares** es que sus pendientes sean recíprocas y de signo contrario.

Condición de paralelismo:

Dos rectas se dicen **paralelas** cuando las dos tienen la misma dirección o la misma pendiente.

$$\text{Si } l_1 // l_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 \Rightarrow m_1 = m_2$$

también si

$$l_1 // l_2 \Rightarrow \overline{n_1} // \overline{n_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} a_1 = k \cdot a_2 \\ b_1 = k \cdot b_2 \end{cases}$$

O sea que dos rectas son **paralelas** cuando existe proporcionalidad entre los coeficientes de las incógnitas correspondientes.

Condición de coincidencia:

En general, se dice que dos rectas son **coincidentes** cuando son **paralelas** y tienen **por lo menos un punto común**.

Evidentemente, si son paralelas y tienen un punto común, tendrán todos los puntos comunes y, por lo tanto, serán coincidentes.

$$\text{Sean } \begin{cases} l_1 / a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ l_2 / a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{si } l_1 \equiv l_2 \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ) l_1 // l_2 \\ 2^\circ) \exists P_0(x_0, y_0) / \begin{cases} P_0 \in l_1 \\ P_0 \in l_2 \end{cases} \end{cases}$$

$$1^\circ) \text{ Si } l_1 // l_2 \text{ se cumplirá que } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k; k \neq 0$$

$$\text{o lo que es lo mismo } \begin{cases} a_1 = ka_2 \\ b_1 = kb_2 \end{cases} \otimes$$

$$2^\circ) \text{ Si } P_0(x_0, y_0) \in l_1 \Rightarrow a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \quad (1)$$

$$P_0(x_0, y_0) \in l_2 \Rightarrow a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \quad (2)$$

Sustituyendo en la (1) a_1 y b_1 por las relaciones \otimes , y multiplicando la (2) por $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} ka_2x_0 + kb_2y_0 + c_1 &= 0 \\ ka_2x_0 + kb_2y_0 + kc_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Restando m. a m.:} \quad c_1 - kc_2 = 0 \Rightarrow c_1 = kc_2$$

que junto a la condición de paralelismo \otimes indican cuando $l_1 \equiv l_2$.

Resumiendo:

$$l_1 \equiv l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Para que dos rectas sean **coincidentes** debe existir proporcionalidad entre todos los coeficientes respectivos.

Distancia de un punto a una recta

Datos:

$$l) ax + by + c = 0 \Rightarrow \vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$P_1(x_1, y_1) \notin l$$

Incógnitas:

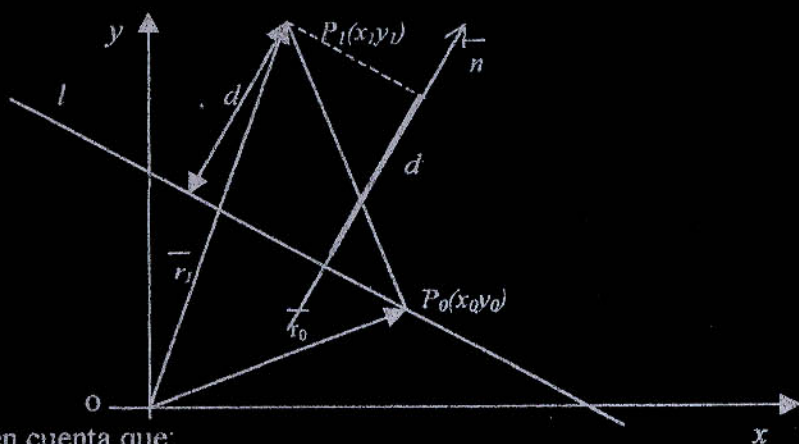
$$\text{distancia } (P_1, l) = d$$

Consideramos además un $P_0(x_0, y_0) \in l$.

Luego:

$$d = \left| \frac{\text{proy } \overline{P_0P_1}}{\vec{n}} \right| = \left| \frac{\overline{P_0P_1} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

$$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 - (ax_0 + by_0)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \quad (1)$$



Teniendo en cuenta que:

$$P_0(x_0, y_0) \in l \Rightarrow ax_0 + by_0 + c = 0$$

$$c = -(ax_0 + by_0)$$

reemplazando en (1)

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Expresión que nos dice que para calcular la distancia de un punto a una recta expresada en la forma general, se reemplazan las variables de la ecuación por las coordenadas del punto al cual se quiere calcular la distancia, y se divide por el módulo del vector normal de la recta.

El valor aquí obtenido, considerado positivo, nos da la distancia buscada.

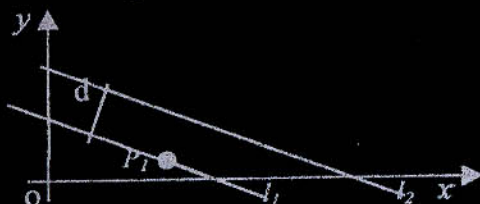
Distancia entre dos rectas paralelas

Sean $l_1) a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$l_2) a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Si se verifica que $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow l_1 \parallel l_2$

Si esto no se cumple, puede ocurrir que se corten o que sean coincidentes.



Elegimos un punto que pertenezca a una de las dos rectas, por ejemplo a (l_1):

$$P_1 \in l_1 \Rightarrow P_1(0, -\frac{c_1}{b_1})$$

Luego se calcula la distancia desde ese punto a la otra recta (l_2), o sea:

$$d = \frac{|a_2x_1 + b_2y_1 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Familias de rectas:

Una recta, según habíamos visto, queda determinada por dos condiciones, es decir, si sólo se establece una condición, habrá infinitas rectas que cumplan con esa única condición. Nuestro problema es hallar una ecuación que represente a esas infinitas rectas que cumplen tal condición. Existen diversos tipos de familias de rectas, pero por su importancia, merecen destacarse:

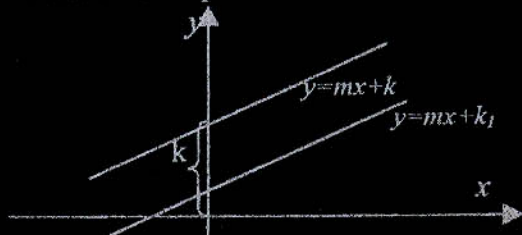
I) Familia de rectas paralelas a una dada:

Si son paralelas a una recta dada, significa que la única condición establecida es su pendiente (m), entonces la ecuación será:

$$y = mx + k$$

donde k es un parámetro real que varía entre $-\infty$ y ∞ . Para cada valor de k tenemos una recta, entonces dándole distintos valores a k tendremos distintas rectas, pero todas ellas cumplen con la condición de tener el (m) dado.

Entonces, dicha ecuación representa la familia de rectas **paralelas** a una dada:



II) Familia de rectas que pasan por el punto de intersección de dos rectas dadas:

$$\text{Sean } s_1 / a_1x + b_1y + c_1 = 0; s_2 / a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$\text{si } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \exists P_0(x_0, y_0) = s_1 \cap s_2$$

Formando una combinación lineal de s_1 y s_2 , tenemos:

$$k_1 \cdot (a_1x + b_1y + c_1) + k_2 \cdot (a_2x + b_2y + c_2) = 0 \quad (1)$$

donde k_1 y k_2 no son simultáneamente nulos.

$$\text{Si } P_0(x_0, y_0) = s_1 \cap s_2 \Rightarrow \begin{cases} P_0 \in s_1 \\ P_0 \in s_2 \end{cases}$$

por lo tanto, satisface las dos ecuaciones.

Sustituyendo en (1) nos queda:

$$k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 = 0$$

independientemente de k_1 y k_2 . Esto nos indica que para cada valor de k_1 y k_2 tenemos distintas rectas, pero todas pasan por $P_0(x_0, y_0)$, pues siempre sus coordenadas satisfacen la ecuación.

Los números reales k_1 y k_2 son parámetros, y (1) es una ecuación **biparamétrica**.

Si suponemos que $k_1 \neq 0$, y dividimos (1) por k_1 , nos queda:

$$a_1x + b_1y + c_1 + k \cdot (a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

Siendo $k = \frac{k_2}{k_1}$, resulta:

una ecuación **monoparamétrica**, que representará todas las rectas (excepto la s_2) que pasan por $P_0(x_0, y_0)$.

Ejemplo:

Dadas las rectas $l_1) 2x+y = 2$ y $l_2) -3x+2y = 1$, hallar la ecuación de (l) tal que pase por el punto de intersección de l_1 y l_2 , y además sea paralela a la recta $l_3) y = 2x+3$.

Solución:

$$1) 2x + y - 2 + k \cdot (-3x + 2y - 1) = 0$$

$$(2 - 3k) \cdot x + (1 + 2k) \cdot y - (2 + k) = 0 \quad \otimes$$

$$\text{Si } l_1 // l_3 \Rightarrow \frac{2 - 3k}{2} = \frac{1 + 2k}{-1} \Rightarrow k = -4$$

$$\text{o también } m_3 = 2 ; m = \frac{-(2 - 3k)}{1 + 2k}$$

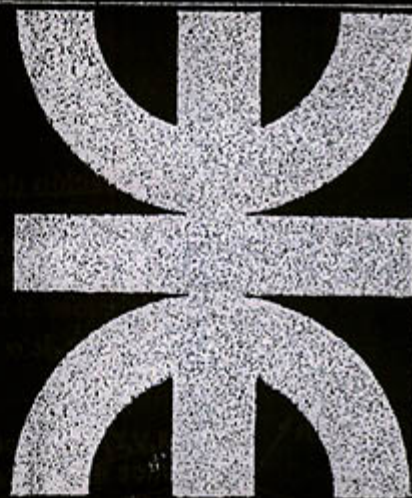
$$\text{Si } l // l_3 \Rightarrow m_3 = m \Rightarrow 2 = \frac{-(2 - 3k)}{1 + 2k} \Rightarrow k = -4$$

Reemplazando k en \otimes :

$$[2 - 3 \cdot (-4)] \cdot x + [1 + 2 \cdot (-4)] \cdot y - [2 + (-4)] = 0$$

$$14x - 7y + 2 = 0$$

Cátedra : ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA



EL PLANO

Redactó : Ing. Ello PASCUAL

U.T.N.
Fac. Rec. Sta. Fe

PLANO

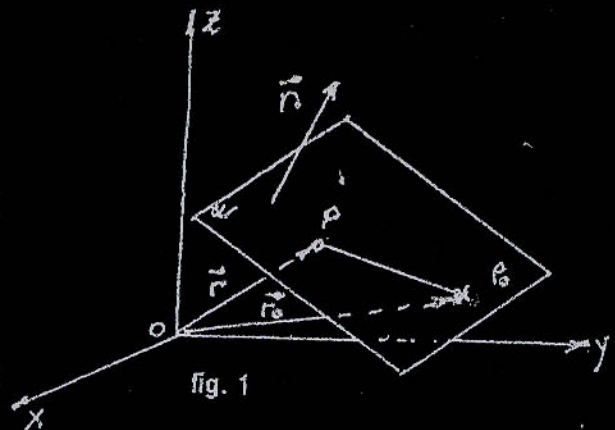
1.-Ecuación de un plano determinado por un punto y una dirección.-

Sea α el plano cuya ecuación queremos obtener; los elementos conocidos serán:

$$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha \quad \text{y} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \perp \alpha$$

$P(x, y, z)$ es un punto cualquiera de los infinitos puntos que pertenecen al plano. Lo llamaremos genérico, es decir que moviéndose en el espacio cumpliendo con una cierta condición geométrica generará dicho plano.

La condición es que en toda posición ese punto determinará con el punto P_0 un vector que tendrá que ser perpendicular al vector \vec{n} .



por lo tanto la ecuación vectorial será: $P \in \alpha \iff \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$ (1)

Llamando \vec{r} y \vec{r}_0 a los vectores posición de los puntos P y P_0 respectivamente tendremos que

$\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0$ por lo tanto substituyendo en (1) tendremos:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0 \quad \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \quad \text{y efectuando el producto escalar indicado:}$$

obtendremos: $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$ (2) ecuación cartesiana

Efectuando las operaciones y ordenando los términos tenemos: $ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$, llamando d al término independiente (entre paréntesis) tenemos:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (3) \text{ ecuación general o implícita}$$

Observemos que es una ecuación de 1er. grado con tres variables en la que los coeficientes de esas tres variables son las componentes de un vector perpendicular a ese plano.-

2.-Ecuación de un plano determinado por tres puntos no alineados.-

Sean $P_0(x_0, y_0, z_0)$ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ tres puntos no alineados y $P(x, y, z)$ un punto genérico como los tres primeros puntos pertenecen al plano α , determinan, tomando uno de ellos como origen dos vectores que pertenecerán al mismo plano. Luego si efectuamos el producto vectorial entre ellos obtendremos una dirección normal a él

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$$

reemplazando en la ecuación (1) tendremos

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} = 0 \quad \text{ecuación vectorial (4)}$$

Recordando como se encuentran las componentes de un vector, conocidas las coordenadas de los extremos y a que es igual un producto mixto tendremos:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (5) \quad \text{o también} \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ecuaciones cartesianas}$$

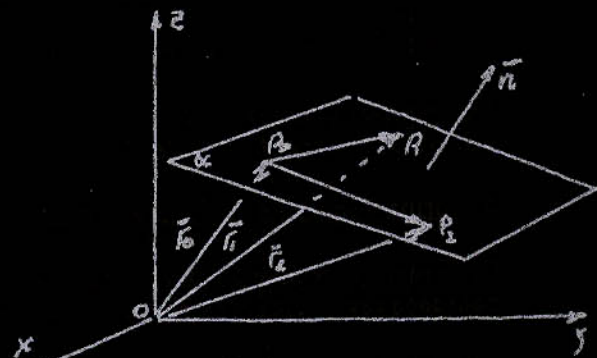


fig.2

Otra forma de llegar a estas ecuaciones es utilizando una aplicación del producto mixto (condición de coplanaridad para cuatro puntos conocidas sus coordenadas).-

3.-Intersecciones con los ejes coordenados y trazas-

Dado el plano α de ecuación $ax+by+cz+d=0$ nos proponemos encontrar los puntos de intersección de ese plano con cada uno de los ejes coordenados y sus trazas que son las rectas de intersección de ese plano con cada uno de los planos coordenados.-

a) Intersecciones con los ejes coordenados

-con el eje x.-

Si P_0 es el punto de intersección del eje x con el plano deberá pertenecer simultáneamente al eje x y al plano.-

si pertenece al eje x sus coordenadas serán: $P_0(m, 0, 0)$ y si el punto pertenece al plano sus coordenadas deberán satisfacer su ecuación

Luego $am + b0 + c0 + d = 0$

de donde $m = -d/a$

Entonces $P_0(-d/a, 0, 0)$

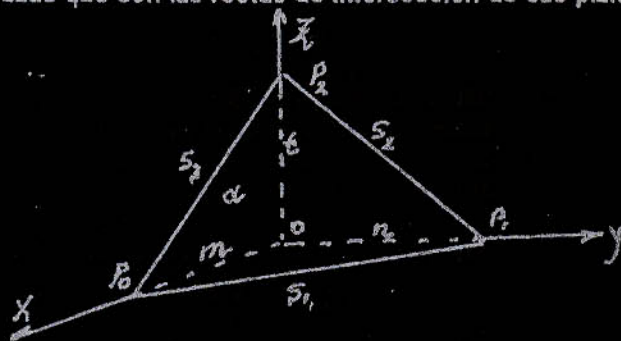


fig.3

Razonando de idéntica forma el alumno deberá verificar que la intersección con el eje y es $P_1(0, -d/b, 0)$ y con el eje z es $P_2(0, 0, -d/c)$

b) Trazas con los planos coordenados.-

con el plano coordenado xy.-

Si la recta s es la traza con el plano xy, es decir la intersección de ambos planos significa que todos los puntos de esa recta deben pertenecer simultáneamente a esos lugares geométricos. Entonces por pertenecer al plano xy deberá ser $z = 0$ para todo valor de y y z.- pero por pertenecer al plano α deberá satisfacer su ecuación.

Luego la recta s estará formada por todos los puntos cuyas coordenadas satisfagan al sistema de ecuaciones:

$$\{z = 0 ; ax+by+cz+d=0\} \text{ es decir: } \{z = 0 ; ax+by+d=0\} \text{ ecuación de la traza con xy}$$

Razonando de la misma forma el alumno deberá encontrar que las trazas con los planos xz e yz son respectivamente: $\{y = 0 ; ax+cz+d=0\}$ y $\{x = 0 ; by+cz+d=0\}$

4.-Forma segmentaria de la ecuación del plano.-

En la recta de ecuación $ax+by+cz+d=0$ suponiendo que $d \neq 0$ (el plano no pasa por el origen de coordenadas).- Entonces algebraicamente tendremos:

$$ax+by+cz = -d ; \quad \frac{x}{-d/a} + \frac{y}{-d/b} + \frac{z}{-d/c} = 1$$

llamando $-d/a = m$ $-d/b = n$ y $-d/c = t$

y comparando con lo expresado en el punto 3 la ecuación de la recta expresada de esta forma nos dice que los denominadores de cada fracción indican la intersección con los ejes coordenados por eso se la llama segmentaria.

$$\boxed{\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{t} = 1} \quad (6) \text{ ecuación segmentaria}$$

5.-Posiciones relativas entre dos planos.-

a) Ángulo entre dos planos.-

Dados planos $\alpha) ax+by+cz+d=0$ y $\beta) a'x+b'y+c'z+d'=0$ en los que

$$n = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ es } n \perp \alpha ; \quad n' = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \text{ es } n' \perp \beta$$

El ángulo determinado por los dos planos es el mismo que determinan sus vectores normales a ellos es decir $\vartheta = \angle nn'$ luego de acuerdo a lo estudiado en el producto escalar tenemos

$$\cos \vartheta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{|\vec{n}| |\vec{n}'|} = \frac{a a' + b b' + c c'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} \quad (7)$$

conocido el valor del coseno podemos hallar el ángulo.-

b) Condición de paralelismo.-

Si los planos son paralelos sus vectores perpendiculares a ellos también serán paralelos por lo tanto

$$\alpha \parallel \beta \iff a/a' = b/b' = c/c' \text{ o lo que es lo mismo } a=ka' ; b=kb' ; c=kc' \quad k \neq 0 \quad (8)$$

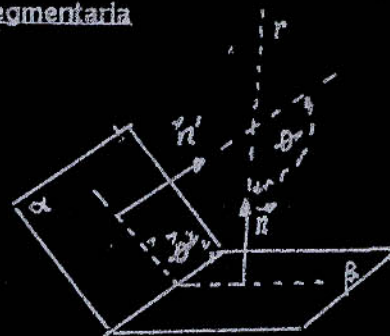


fig.4

En conclusión:

La condición necesaria y suficiente para que dos planos sean paralelos es que exista proporcionalidad entre los coeficientes homólogos de las variables correspondiente de los dos planos.

c) Condición de perpendicularidad.-

Si los planos son perpendiculares el ángulo que forman es de $\pi/2$ y entonces el $\cos \theta = 0$ por lo tanto de (7) se cumplirá que $\alpha \perp \beta \iff a.a'+b.b'+c.c'=0$ (9)

En resumen:

La condición necesaria y suficiente para que dos plano sean perpendiculares es que la suma de los productos de los coeficientes homólogos de las variables de los dos planos sea igual a cero.-

d) Condición de coincidencia.-

Sea $\alpha) ax+by+cz+d=0$ y $\beta) a'x+b'y+c'z+d'=0$

Partimos de la base de que si dos planos son paralelos y tienen un punto común entonces tienen todos los puntos comunes es decir son coincidentes.-

si son paralelos según (8) se cumplirá $a=ka'$ $b=kb'$ $c=kc'$ siendo $k \neq 0$

Suponiendo que si $P_0 \in \alpha$ luego $ax_0+by_0+cz_0+d=0$ (10)

y que si $P_1 \in \beta$ luego $a'x_1+b'y_1+c'z_1+d'=0$ (11)

Por lo tanto para que los dos planos sean coincidentes se deben cumplir las tres condiciones (8) ; (10) y (11)

Substituyendo en la (10) la (8) tendremos $ka'x_0+kb'y_0+kc'z_0+d=0$

multiplicando ambos miembros la (11) por k tenemos $ka'x_0+kb'y_0+kc'z_0+kd'=0$

y restando l.m.a.m. estas dos ecuaciones tenemos que $d-kd'=0$ luego $d=k d'$

En resumen las condiciones para que dos planos coincidan son:

$a=ka'$; $b=kb'$; $c=kc'$; $d=kd'$ o lo que es lo mismo $a/a'=b/b'=c/c'=d/d'=k$ (12) $k \neq 0$

Entonces:

Dos planos son coincidentes si y solo si todos sus coeficientes incluidos los terminos independientes son respectivamente proporcionales.

6.-Discusión de la ecuación general o implícita.-

Vamos a justificar por qué a la ecuación implícita $ax+by+cz+d=0$ le damos el nombre de ecuación general. Para ello debemos probar que para cualquier posición del plano, el mismo estará representado por esa ecuación

Veamos todos los casos particulares posibles.

a) $d=0$; a, b, c no nulos. la ecuación es lineal homogénea es decir $ax+by+cz=0$

evidentemente se satisface para $x=y=z=0$ luego el plano pasa por el origen de coordenadas

por lo tanto:

Toda ecuación lineal homogénea representa en R_3 un plano que pasa por el origen de coordenadas.

b) $c=0$; a, b, d no nulos.- La ecuación queda $ax+by+d=0$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{n} \perp \alpha \quad \text{comparando con el versor } \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{que tiene la dirección del eje } z$$

vemos que el producto escalar $\vec{n} \cdot \vec{k} = 0$ luego son normales entre si, por lo tanto el plano es perpendicular al plano XY .- o paralelo al eje Z (fig. 5)

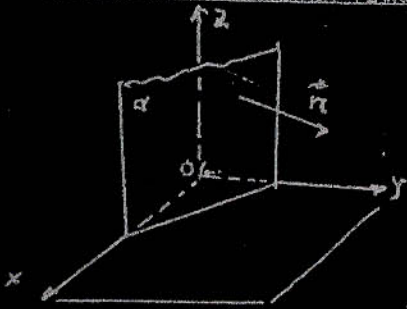
Se deje al estudiante que justifique, razonando de la misma forma que:

si $a=0$; b, c, d no nulos: $by+cz+d=0$ representa un plano perpendicular al YZ o paralelo al eje X (fig.7)

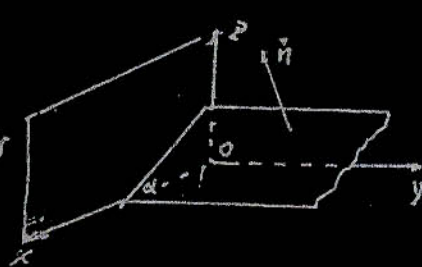
si $b=0$; a, c, d no nulos: $ax+cz+d=0$ representa un plano perpendicular al XZ o paralelo al eje Y (fig.6)

en resumen:

Toda ecuación lineal no homogénea en dos variables representa un plano que es perpendicular al plano coordenado correspondiente a las dos variables que aparecen en la ecuación



$ax+by+d=0 \quad \alpha \parallel XY$
fig.5



$ax+cz+d=0 \quad \alpha \perp XZ$
fig.6



$by+cz+d=0 \quad \alpha \perp YZ$
fig.7

c) $c=d=0$ los restantes no nulos $ax+by=0$

por ser $c=0$ según lo visto en el punto anterior será paralelo al eje z y por ser $d=0$ pasa por el origen por lo tanto el plano pasa por el eje coordenado Z .

Razonando de la misma forma el alumno deberá verificar que si:

$b=d=0$ los restantes no nulos $ax+cz=0$ el plano pasa por el eje Y

$a=d=0$ los restantes no nulos $by+cz=0$ el plano pasa por el eje X

en resumen:

Toda ecuación lineal homogénea en dos variables representa en R^3 un plano que contiene al eje coordenado cuya variable no aparece en la ecuación.

d) $b=c=0$ los restantes no nulos $ax+d=0$ de donde $x=-d/a$ es decir que para todo valor y,z el valor de x es constante, dicho de otra forma todos los puntos del plano distan del plano YZ el mismo valor, por lo tanto el plano es paralelo al YZ ó es perpendicular al eje X .- (fig.8)

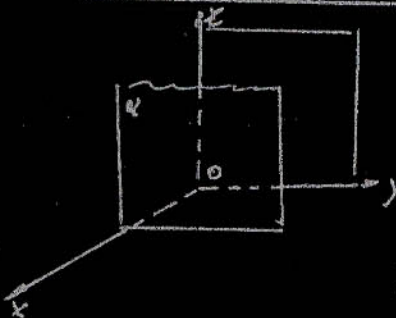
Análogamente el alumno podrá verificar que

si $a=c=0$ los restantes no nulos $by+d=0$ de donde $y=-d/b$ plano paralelo al XZ o normal al eje Y (fig.9)

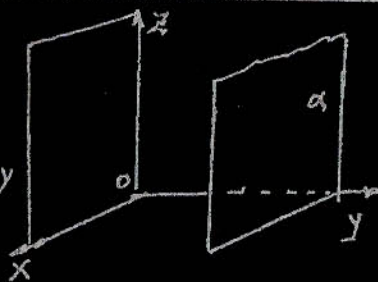
si $a=b=0$ los restantes no nulos $cz+d=0$ de donde $z=-d/c$ plano paralelo al YZ o normal al eje Z (fig.10)

conclusión:

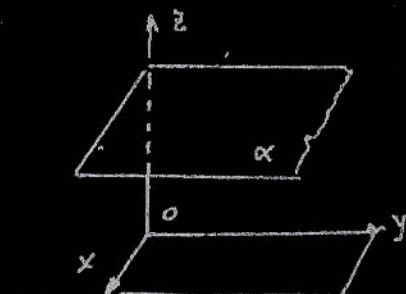
Toda ecuación lineal no homogénea en una variable representa en R^3 un plano paralelo al plano coordenado formado por las dos variables que no aparecen en la ecuación.



$ax+d=0 \quad \alpha \perp YZ$
fig.11



$by+d=0 \quad \alpha \perp XZ$
fig.12



$cz+d=0 \quad \alpha \perp XY$
fig.13

e) $b=c=d=0$ a no nulo $ax=0$ luego $x=0$ representa todos los puntos donde la distancia al plano YZ es nula luego representa el plano coordenado YZ .-

de la misma forma:

si $a=c=d=0$ b no nulo $by=0$ luego $y=0$ representa al plano coordenado XZ

si $a=b=d=0$ c no nulo $cz=0$ luego $z=0$ representa al plano coordenado XY

Por lo tanto:

Toda ecuación lineal homogénea en una variable representa en R^3 el plano coordenado formado por las dos variables que no aparecen en la ecuación

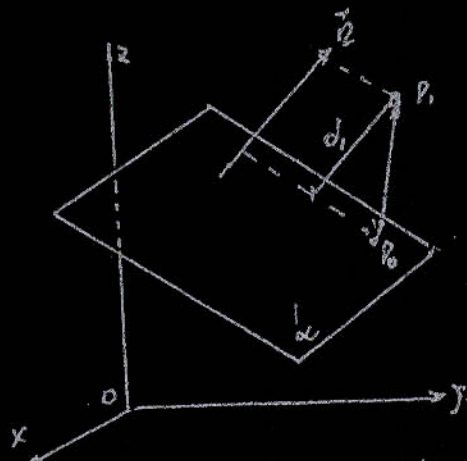
Descartamos el caso en que $a=b=c=0$ por cuanto en ese caso será $d=0$ luego no existe plano.-

7.-Distancia de un punto a un plano.-

Tenemos el plano α) $ax+by+cz+d=0$ y un punto $P_1(x_1,y_1,z_1)$ no perteneciente a ese plano, Queremos calcular la distancia de ese punto al plano. Consideremos un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ perteneciente al plano dado

Conocemos $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ que sabemos es

un vector normal al plano. llamando d_1 a la distancia buscada, de acuerdo a la figura es evidente que esa distancia no es más que la proyección del vector $\vec{P_0P_1}$ sobre la dirección n normal al plano.



Recordando que la $|\text{proy}_v u| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$

Aplicándolo a nuestro caso tendremos:

$$d_1 = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{P_0P_1}|}{|\vec{n}|} = \frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Efectuando el producto y agrupando los términos independientes tenemos:

$$d_1 = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+(-ax_0-by_0-cz_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad \text{como } P_0 \in \alpha \text{ sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de ese plano por lo tanto } ax_0+by_0+cz_0+d=0$$

de donde $d = -ax_0-by_0-cz_0$ luego:

$$d_1 = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \quad (13)$$

Por lo tanto:

Para calcular la distancia de un punto a un plano se substituyen las variables de la ecuación implícita del plano por las coordenadas del punto y se divide por el módulo del vector normal, considerando su valor absoluto.-

8.-Familia de planos.-

Un plano queda determinado por tres puntos no alineados, por una dirección y un punto o por una recta y un punto exterior a ella.

Si falta alguna de esas condiciones el problema es indeterminado, es decir existirán infinitos planos que cumplen con esa condición, esos infinitos planos forman lo que se llama una "familia"

Estudiaremos como resolver el problema de determinar la ecuación que representa a una familia de planos.-

a) Familia de planos que pasan por un punto dado.-

Recordando la ecuación (2) $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$. El único dato que tenemos son las coordenadas del punto P_0 , la indeterminación proviene de no conocer las componentes del vector normal al plano a,b,c , para cada valor que le asignemos a esas componentes tendremos un plano distinto pero todos pasarán por el punto P_0 . Luego la ecuación de esa familia será:

$$k_1(x-x_0)+k_2(y-y_0)+k_3(z-z_0)=0 \quad \text{donde los parámetros } k \text{ no son simultáneamente nulos}$$

Si suponemos que $k_1 \neq 0$ podemos dividir por ese número y queda:

$$(x-x_0) + k'_2(y-y_0) + k'_3(z-z_0) = 0 \quad (14) \text{ (Radiación de planos)}$$

b) Familia de planos paralelos.-

Si todos los planos son paralelos entonces todos serán perpendiculares al vector $n = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
 luego la ecuación de la familia será:

$$ax + by + cz + k = 0 \quad (15) \quad k \in \mathbb{R}$$

Para cada valor que se le asigne al parámetro k se obtendrá un plano y todos serán paralelos entre si por cuanto todos son normales al vector n .-

c) Familia de planos que pasan por la intersección de dos planos dados.-

Sean: $\alpha) ax + by + cz + d = 0$

$\alpha') a'x + b'y + c'z + d' = 0$

Si estos dos planos no son paralelos ni coincidentes la intersección de los mismos determinan una recta.- la llamaremos s .-

Formamos la combinación lineal de las dos ecuaciones:

$$k_1(ax+by+cz+d)+k_2(a'x+b'y+c'z+d')=0 \quad (16) \quad \text{donde } k_1, k_2 \in \mathbb{R} \text{ (parámetros) no simultáneamente nulos; para cada valor que le demos a esos parámetros obtendremos planos.}$$

Vamos a demostrar que los planos así obtenidos pasarán todos por la recta de intersección de α y α'
 Supongamos que un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pertenece a la recta s de intersección de los dos planos, por lo tanto sus coordenadas deben satisfacer simultáneamente las ecuaciones de ambos planos.

reemplazando en (16) obtenemos: $k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 = 0$

es decir la ecuación (16) se satisface por las coordenadas de cualquier punto de la recta s intersección de los dos planos independientemente de los valores que pueda tomar k_1 y k_2 entonces ese punto pertenece a todos los planos de la familia.

La ecuación (16) tiene dos parámetros, podemos trabajar con un sólo parámetro suponiendo que uno de ellos es no nulo; por ejemplo:

si k_2 es distinto de cero $ax+by+cz+d + k_1/k_2 (a'x+b'y+c'z+d') = 0$ llamando $k = k_1/k_2$

resulta: $ax+by+cz+d+k(a'x+b'y+c'z+d')=0 \quad (17)$

que representa los infinitos planos que pasan por s a excepción de α' (por qué?)

Aplicaciones.-

1.-Dados los puntos A(1,-1,0); B(-2,1,-1/2); C(0,1,1/4) se pide:

- a) Hallar la ecuación implícita del plano determinado por esos tres puntos.
- b) Hallar intersecciones con los ejes coordenados.
- c) Hallar trazas de con los planos coordenados.
- d) Hallar la forma segmentaria y comparar resultados con lo obtenido en b).
- e) Calcular el ángulo que forma con el plano XY y con el XZ.
- f) Calcular el ángulo con el plano β) $3x-2y+z-4=0$
- g) Calcular la distancia del punto D(-1,1,2) al plano α obtenido
- h) Calcular la distancia del origen de coordenadas al plano obtenido.

a) por (5)
$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ -2 & 2 & -1/2 \\ -1 & 2 & 1/4 \end{vmatrix} = 0$$
 resolviendo este determinante por los adjuntos de los elementos de la 1ra. fila, eliminando denominadores

y ordenando los términos tenemos α) $3x+2y-4z-1=0$

- b) Intersecciones: con el eje x.- $y = z = 0$ luego $x = 1/3$ P1(1/3,0,0)
- con el eje y.- $x = z = 0$ luego $y = 1/2$ P2(0,1/2,0)
- con el eje z.- $y = z = 0$ luego $x = -1/4$ P3(0,0,-1/4)

- c) trazas: con el plano XY.- $\{z=0 ; ax+by+d=0\}$
- con el plano XZ.- $\{y=0 ; ax+cz+d=0\}$
- con el plano YZ.- $\{x=0 ; by+cz+d=0\}$

d) $3x+2y-4z-1=0$; recordando la ecuación segmentaria (6) paso el término independiente al 2do. miembro $3x+2y-4z=1$ luego:

$$x/3/2 + y/1/2 + z/-1/4 = 1$$

comparemos como centros con el inciso b)

e) Aplicando la fórmula (7) tendremos, sabiendo que $\vec{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$

ángulo con el XY: $k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\cos t = \frac{-4}{\sqrt{29}} = -0,73$ luego $t \simeq 136^\circ 53'$

ángulo con el XZ; $k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\cos t = \frac{2}{\sqrt{29}} = 0,37$ luego $t \simeq 68^\circ 17'$

f) $\vec{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \perp \alpha$ y $\vec{n}' = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \perp \beta$ luego por (7) $\cos t = \frac{9}{\sqrt{29} \sqrt{14}} = 0,447$ luego $t \simeq 63^\circ 27'$

g) α) $3x+2y-4z-1=0$; D(-1,1,2) aplicando (13) tenemos

$$d_1 = \frac{|3(-1)+2(1)+(-4)2-1|}{\sqrt{29}} \simeq 1,51$$

h) Distancia al origen de coordenadas.-

Como las coordenadas del origen son nulas es evidente que $d_0 = \frac{|-1|}{\sqrt{29}} \simeq 0,189$

2.- Dado los planos α) $x+2y-3z+4=0$ y β) $2x+y+z-1=0$ se solicita:

- Verificar primero que los dos planos determinan una recta s y luego aplicando el concepto de familia de planos que pasando por esa recta determinar y que cumplen las siguientes condiciones:
- Pasa por el origen de coordenadas
- Contiene al punto $A(1,2,-1)$
- Perpendicular al plano coordenado XY
- Perpendicular al plano coordenado XZ
- Perpendicular al plano de ecuación γ) $3x-y+z+1=0$
- Paralelo al eje coordenado X

a) Por no existir proporcionalidad entre los coeficientes de las variables de las ecuaciones los planos no son paralelos ni coincidentes (8) y (12) por lo tanto se interceptan en una recta s .- La ecuación de la familia de los planos que pasan por esa recta aplicando (17) será: $x+2y-3z+4+k(2x+y+z-1)=0$ efectuando el producto y agrupando los términos: $(1+2k)x+(2+k)y+(-3+k)z+(4-k)=0$ (18)
comparando con la ecuación general del plano $ax+by+cz+d=0$ tenemos
 $a=1+2k$; $b=2+k$; $c=-3+k$; $d=4-k$ (19)

b) Por pasar el plano por el origen de coordenadas por 6a) $d=0$ luego $4-k=0$ de donde $k=4$ substituyendo en (18) resulta $9x+6y+z=0$

c) Si contiene al punto $A(1,2,-1)$ reemplazando esas coordenadas en (18) y despejando k $k=-6$ y substituyéndolo en (18) tenemos $11x+4y+9z+10=0$

d) Si es perpendicular al plano XY por 6b) será $c=-3+k=0$ luego $k=3$ reemplazando en (18) luego $7x+5y+1=0$

e) Si es perpendicular al plano XZ por 6b) será $b=2+k=0$ luego $k=-2$ reemplazando en (18) tenemos $3x+5z-6=0$

f) Si es perpendicular a $3x-y+z+1=0$ por 5c) será: $3(1+2k)+(-1)(2+k)+1(-3+k)=0$ operando y despejando $k=1/3$ reemplazando en (18) resulta: $5x+7y-z+11=0$

g) Si es paralelo al eje X es normal al plano YZ por lo tanto razonando igual que en d) o e) resulta:
 $a=1+2k=0$ $k=-1/2$ reemplazando en (18) tendremos $3y-7z+9=0$

3.- Dado el punto $P_1(1,-1,2)$ hallar las ecuaciones de los planos que pasando por ese punto cumplen además las siguientes condiciones.-

- Pasa por el punto $P_2(3,2,-1)$ y es perpendicular al plano coordenado XY
- Pasa por el punto $P_3(-1,1,3)$ y es normal al plano β) $x+y-z-1=0$

La ecuación que representa los planos que pasan por el punto dado será: $h_1(x-1)+h_2(y+1)+h_3(z-2)=0$
Suponiendo que $h_1 \neq 0$ y dividiendo por ese número tendremos: $(x-1)+h(y+1)+h'(z-2)=0$ (1)

a) De (1) Si $P_2 \in \alpha$ entonces $3h-3h'=-2$ Si $\alpha \perp XY$ entonces $h'=0$ luego $h=-2/3$ reemplazando los valores de h y h' hallados en (1) y operando tendremos: $3x-2y-5=0$
El alumno podrá verificar este resultado por otro camino.-

b) De (1) Si $P_3 \in \alpha$ entonces $-2+2h+h'=0$.- Si $\alpha \perp \beta$ entonces $h-h'+1=0$ resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas tenemos $h=1/3$; $h'=4/3$ reemplazando en (1) resulta: $3x+y+4z-8=0$.
El alumno puede verificar este resultado por otro camino.-

plano α) $x + y - 2z + 1 = 0$ se pide hallar las ecuaciones de los planos que siendo paralelo a él
otra condición:
pasa por el punto $P_1(2,3,-4)$
por el origen de coordenadas
a una distancia del origen de coordenadas 4 unidades
a $1/\sqrt{6}$ unidades del punto $P_2(3,-1,2)$

que representa los planos paralelos será: $x + y - 2z + h = 0$ (1)
o pertenece al plano resulta de (1) que $h = -13$ luego la ecuación será: $x+y-2z-13=0$

) pertenece al plano $h=0$ luego: $x+y-2z=0$

lo la fórmula para el cálculo de la distancia de un punto a un plano resulta:
de donde $h = \pm 4/\sqrt{6}$ luego tendremos dos planos: $x+y-2z+4/\sqrt{6}=0$; $x+y-2z-4/\sqrt{6}=0$

o igual que en el caso anterior tenemos: $4+k = \pm 4/\sqrt{6}$ luego $k = \pm 1$ por lo tanto
y $x+y-2z-5=0$
se podrá comparar el resultado calculando la distancia entre estos dos planos paralelos hallados.

Cátedra : ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

LA RECTA EN EL ESPACIO

Redactó : Ing. Elio PASCUAL

U.T.N.
Fac. Reg. Sta. Fe

RECTA EN EL ESPACIO

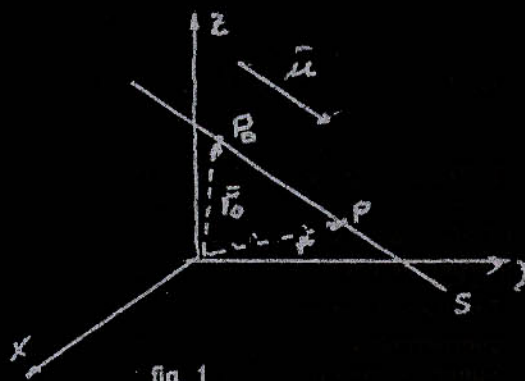
1.-Ecuación de la recta determinada por un punto y una dirección.-

Llamando s a la recta tendremos como datos:

$P_0(x_0, y_0, z_0) \in s$
 $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$; vector dirección de s

y $P(x, y, z)$ el punto genérico y siendo entonces los respectivos vectores posición de esos puntos:

$$\vec{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



De acuerdo a la fig.1 y razonando de igual forma que en el tema recta en el plano podemos definir la recta:

$s = \{P(x,y,z) / \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u}\} \quad t \in \mathbb{R} \quad -\infty < t < \infty$ por lo tanto la ecuación será:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u}} \quad (1) \quad (\text{ec. vectorial})$$

Reemplazando en (1) cada vector por sus componentes y realizando todas las operaciones de la misma forma que hicimos en el estudio de la recta en el plano tendremos:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + t u_1 \\ y = y_0 + t u_2 \\ z = z_0 + t u_3 \end{cases}} \quad (2) \quad (\text{ec. paramétricas}) \quad t = \text{parámetro}$$

Eliminando el parámetro obtenemos:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}} \quad (3) \quad (\text{ec. cartesiana})$$

siendo u_1, u_2, u_3 no nulos

A las componentes del vector dirección de la recta u_1, u_2, u_3 se los llama números directores de la recta.

En el caso particular que el vector u fuese un versor sus componentes serían $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ y las ecuaciones (2) y (3) quedarían respectivamente:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \cos \beta \\ z = z_0 + t \cos \gamma \end{cases} \quad \boxed{\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma}} \quad (4)$$

donde $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ son los cosenos directores de la recta y α, β, γ sus ángulos directores

2.-Ecuación de la recta determinada por dos puntos.-

Datos: $P_0(x_0, y_0, z_0) \in s$ y $P_1(x_1, y_1, z_1) \in s$ (fig.2), donde esos dos puntos no son coincidentes considerando como vector dirección de la recta $\vec{u} = \vec{P}_0P_1$ y razonando de la misma forma que en la recta en \mathbb{R}^2 tendremos:

$$\vec{u} = \vec{P}_0P_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{luego: } u_1 = x_1 - x_0; u_2 = y_1 - y_0; u_3 = z_1 - z_0$$

reemplazando en las fórmulas halladas en el punto 1.-

tendremos: de (1) $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)}$ (1') (ec. vectorial)

$t \in \mathbb{R} \quad -\infty < t < \infty \quad t = \text{parámetro}$

de (2)
$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases} \quad (2') \text{ (ec. paramétrica)}$$

de (3)
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \quad (3') \text{ (ec. cartesiana)}$$

donde $x_1 \neq x_0$; $y_1 \neq y_0$; $z_1 \neq z_0$

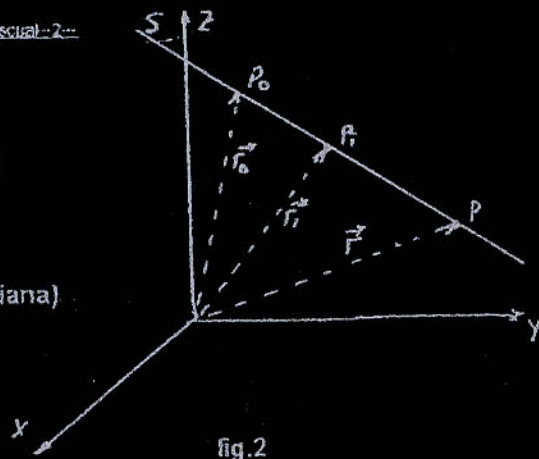


fig.2

3.-Planos proyectantes de una recta.-

"Definimos planos proyectantes de una recta a aquellos planos que conteniendo a dicha recta son perpendiculares a un plano coordenado"

Tendremos entonces tres planos proyectantes π_{xy} ; π_{xz} ; π_{yz} respectivamente normales a los plano coordenados xy , xz , yz .-

Supongamos queremos encontrar el plano proyectante respecto al xy , sabemos que si un plano es perpendicular a un plano coordenado su ecuación debe ser lineal en dos variables y esas dos variables son la que forman el plano coordenado respecto al cual es normal.

Entonces en nuestro caso, si es normal al xy será $ax+by+d=0$

Además como el plano debe contener a la recta, esa ecuación debe ser consecuencia de la ecuación de la recta; es decir debe deducirse de ella.-

Ejemplo:
$$s) \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+4}{-2} \quad \text{hallar el plano proyectante sobre el } xy$$

por lo dicho anteriormente de la ecuación de la recta debemos deducir una ecuación consecuencia donde solamente aparezcan las variables x,y es decir $ax+by+d=0$

Consideramos entonces:
$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-3} \quad \text{operando tenemos } 3(x+1) = 2(y-1)$$

$3x+3-2y+2=0$; luego π_{xy} $3x-2y+1=0$

Razonando de la misma forma el alumno deberá verificar que los otros planos proyectantes son:

π_{zx} $x+z+5=0$; π_{yz} $2y-3z-14=0$

4.-Puntos de penetración de una recta.-

"Se llaman puntos de penetración de una recta a los puntos donde la recta intercepta a los planos coordenados"

Una recta tendrá a lo sumo tres puntos de penetración, con el xy , con el xz y con el yz .- como el punto pertenece simultaneamente a un plano coordenado y a la recta sus coordenadas deberán satisfacer ambas ecuaciones.-

Ejemplo: Hallar el punto de penetración de la recta $s)$ con el plano xy

como la ecuación del plano xy es $z = 0$; sustituimos ese valor en la ecuación de la recta y nos queda:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{4}{-2} \quad \text{de donde } x = -5 \quad y = 7 \quad \text{el punto será } P_0(-5,7,0)$$

El alumno deberá verificar que los puntos de penetración con los planos xz e yz serán respectivamente: $P_1(-13, 0, -14/3)$ y $P_2(0, -7/2, -5)$.-

5.-Forma general de la ecuación de la recta.-

Llamamos forma general de la ecuación de la recta, cuando la misma está determinada por la intersección de dos planos cualesquiera, siempre y cuando éstos no sean ni paralelos ni coincidentes.-

sean dos planos: $\alpha) ax+by+cz+d=0$ y $\beta) a'x+b'y+c'z+d'=0$ donde no existe proporcionalidad entre los coeficientes de las variables por lo tanto su intersección será la recta s

$$s) \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \quad (4) \text{ ecuación general}$$

s) estará formada por los infinitos puntos del espacio cuyas coordenadas sean solución del sistema (4) por ejemplo si quisiéramos hallar el punto de penetración de esa recta con el plano coordenado xy hacemos $z=0$ sustituimos en (4) y resolvemos el sistema $\{ax+by+d=0; a'x+b'y+d'=0\}$ cuya solución x e y nos da las coordenadas que nos falta de ese punto.-

5.-Posiciones relativas entre dos rectas.-

a)Angulo entre dos rectas.-

De las ecuaciones de las dos rectas $s)$ y $s')$ conocemos las componentes de sus respectivos vectores dirección u y v , por lo tanto:

$$\cos \phi = \frac{u \cdot v}{|u| |v|} = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \quad (5) \text{ con el valor del cos. podemos hallar el ángulo}$$

b)Condición de paralelismo.-

Si dos rectas son paralelas sus correspondientes vectores dirección también lo serán, luego deberá cumplirse que:

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} \quad (6)$$

c)Condición de perpendicularidad.-

Si las rectas son perpendiculares sus respectivos vectores dirección también lo serán, por lo tanto: deberá ser:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0 \quad (7)$$

d)Condición de coincidencia.-

Deberán cumplirse las condiciones de paralelismo y demostrar que tienen un punto común es decir que las coordenadas de un punto satisfagan las dos ecuaciones ya que si son paralelas y tienen un punto común tienen infinitos puntos comunes y por lo tanto son coincidentes.-

6.-Posiciones relativas entre recta y plano.-

a)Angulo entre una recta y un plano.-

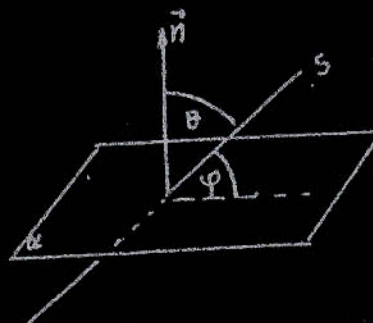
Definimos ángulo entre recta y plano al ángulo formado por la recta y su proyección sobre el plano.-

Sea $ax+by+cz+d=0$ y $s) \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$

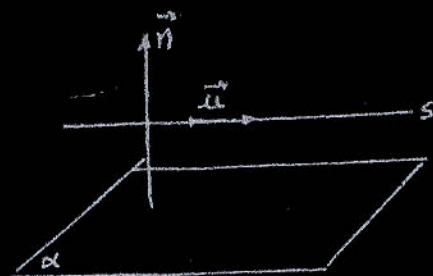
de la fig. $\phi + \theta = \pi/2$ $\cos \theta = \cos(\pi/2 - \phi) = \text{sen } \phi$

$$\text{sen } \phi = \frac{|n \cdot u|}{|n| |u|} = \frac{|a u_1 + b u_2 + c u_3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}} \quad (8)$$

$$0 < \phi < \pi/2$$



a) Condición de paralelismo.-



de la (fig. 3)

$$s // \alpha \iff \vec{n} \perp \vec{u} \quad s // \alpha \iff au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \quad (9)$$

fig. 3

b) Condición de perpendicularidad.-

de la (fig. 4)

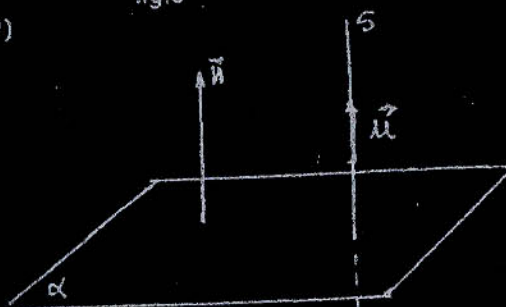


fig. 4

$$s \perp \alpha \iff \vec{n} // \vec{u} \quad s \perp \alpha \iff a/u_1 = b/u_2 = c/u_3 \quad (10)$$

c) El plano contiene a la recta.-

Una recta está contenida en un plano si es paralela a ella y si existe un punto perteneciente a ella que también pertenece al plano.-

Por lo tanto deberán cumplirse que:

$$\text{si } P_0(x_0, y_0, z_0) \in s \implies a/u_1 = b/u_2 = c/u_3 \quad \text{y} \quad ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \quad (11)$$

7.- Posiciones particulares de la recta.-

Recordemos las ecuaciones de la recta s $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$ (12) y $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \\ z = z_0 + tu_3 \end{cases}$ (13)

Sabemos que las componentes del vector dirección de la recta no pueden ser simultáneamente nulas pero que posición tendrá la recta cuando una o dos de esas componentes sean nulas.

a) $u_3 = 0$ las otras dos no nulas.-

de la (12) y (13) la ecuación será: $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2}; z = z_0$

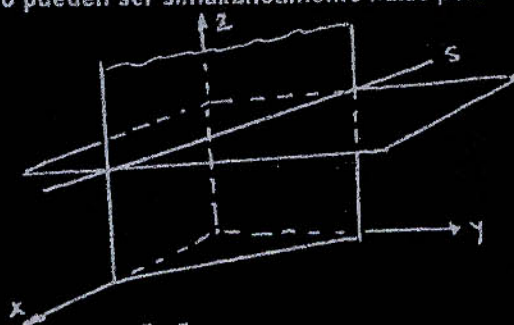


fig. 5

La recta queda determinada por los planos proyectantes respectivamente normal al xy y al eje z (fig. 5)

Por otra parte haciendo el producto escalar de u y k vectores dirección de la recta y normal al plano xy $u \cdot k = u_1 \cdot 0 + u_2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ luego $s \perp z$ o $s // xy$

El alumno deberá justificar que ocurre cuando se anula alguna de las otras componentes del vector dirección de la recta.-

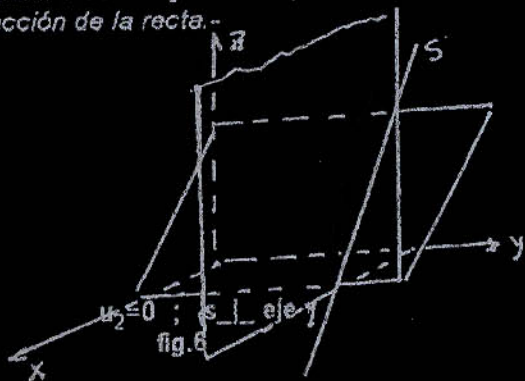


fig. 6

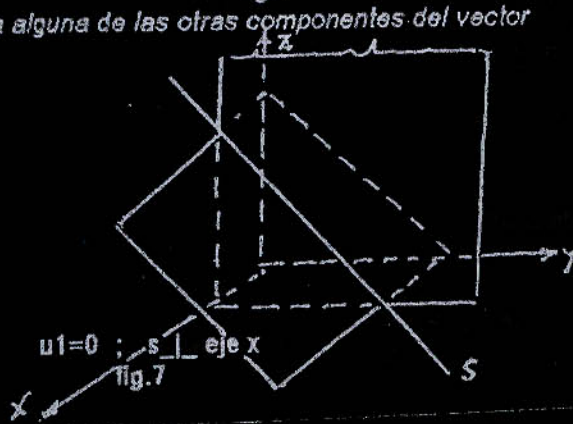


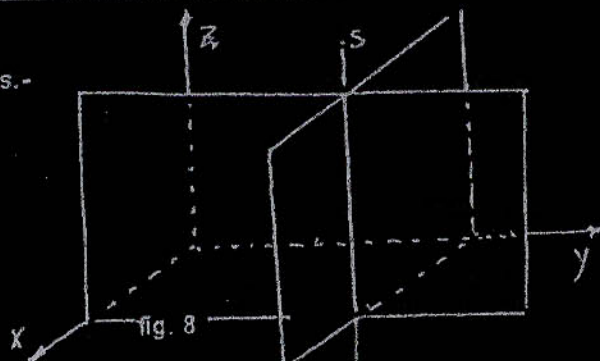
fig. 7

En resumen:

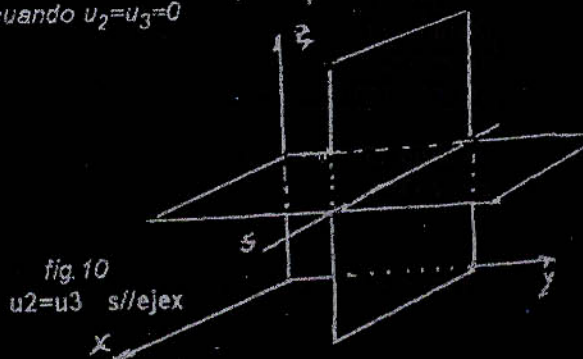
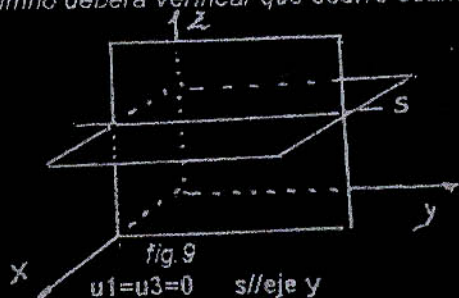
Si una de las componentes del vector dirección de la recta es nula la recta es perpendicular al eje coordenado respecto del cual es nula esa componente.-

b) Dos de las componentes del vector dirección nulas.-

Supongamos $u_1 = u_2 = 0$ la ecuación (13) resulta $x = x_0$; $y = y_0$ planos proyectantes respectivamente paralelos a los planos coordenados yz y xz luego $s //$ al eje z



El alumno deberá verificar que ocurre cuando $u_1 = u_3 = 0$ y cuando $u_2 = u_3 = 0$



En conclusión:

Si dos componentes del vector dirección de la recta son nulas, la recta será paralela al eje coordenado al cual corresponde la componente no nula.-

8.- Distancia de un punto a una recta.-

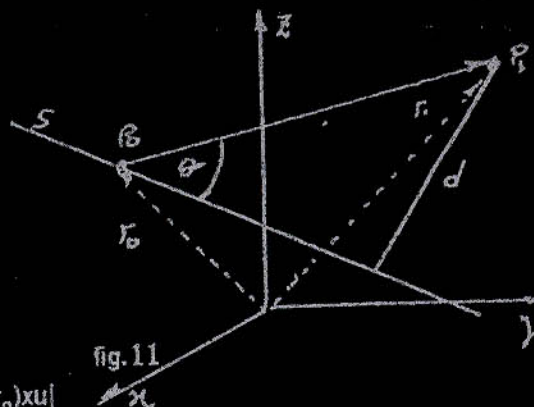
Datos: recta s) $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$
 $P_1(x_1, y_1, z_1)$

Queremos hallar la distancia d del punto P_1 a la recta s

de la fig. 11 tenemos que en el triángulo rectángulo $P_1 P_0 B$ $d = |P_0 P_1 \text{ sen } \theta|$

y como $P_0 P_1 = (r_1 - r_0)$ será $d = |r_1 - r_0| \text{ sen } \theta$ (14) $\frac{|(r_1 - r_0) \times u|}{|r_1 - r_0| |u|}$
 recordando que $|(r_1 - r_0) \times u| = |r_1 - r_0| |u| \text{ sen } \theta$; $\text{sen } \theta = \frac{|(r_1 - r_0) \times u|}{|r_1 - r_0| |u|}$

reemplazando en (14) $d = \frac{|(r_1 - r_0) \times u|}{|u|}$ (15)



9.- Distancia entre rectas paralelas.-

Se elige un punto perteneciente a una de las rectas y se calcula la distancia de ese punto a la otra recta.-

10.-Distancia entre rectas que se cruzan.-

Dos rectas se cruzan en el espacio o son alabeadas cuando no son coplanares, es decir no existe ningún plano que los contenga simultáneamente.-

Datos: Recta s) $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$

Recta s₁) $\frac{x-x_1}{v_1} = \frac{y-y_1}{v_2} = \frac{z-z_1}{v_3}$

de donde conocemos:

$P_0 \in s$; $P_1 \in s_1$ u y v vectores dirección de s y s_1 respectivamente

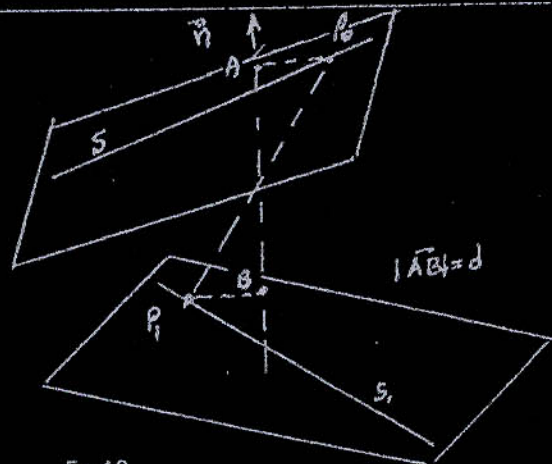


fig.12

Definimos: Distancia entre dos rectas que se cruzan es la menor de las distancia entre ellas y es igual a la proyección de un segmento determinado por dos puntos cualesquiera, uno perteneciente a una de las rectas y el otro a perteneciente a la otra, sobre la la normal a ambas.

de la fig.12 $d = |\text{proy}_n \overline{P_0 P_1}|$
 siendo $\vec{n} \perp s$ y $\vec{n} \perp s_1 \therefore \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ además $\overline{P_0 P_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$

luego $d = |\text{proy}_{\vec{u} \times \vec{v}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)| \therefore d = \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \cdot \vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$ (16)

como consecuencia podemos decir que:

Dos rectas en el espacio son coplanares si y solo si $(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \cdot \vec{u} \times \vec{v} = 0$

Aplicaciones.-

Sea la recta de ecuación s) $\begin{cases} \alpha) & x - y + 2z - 3 = 0 \\ \beta) & 2x - 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ (1) se solicita:

- a) Determinar la recta mediante los planos proyectantes respecto a xy y yz.-
 - b) Hallar la forma simétrica.-
 - c) Verificar el resultado anterior por otro camino.-
 - d) Hallar el ángulo que forma la recta s) con la recta r) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$
 - e) Hallar el ángulo que forma s) con el plano $\gamma) 2x - 3y + 4z - 1 = 0$
 - f) Hallar los puntos de penetración de la recta s)
 - g) Calcular la distancia del punto $P_1(1, -1, 3)$ a la recta s)
 - h) Verificar si la recta s) es o no paralela a la recta h) $\begin{cases} x = 3 - 14t \\ y = -2 - 10t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$ en caso afirmativo calcular la distancia entre ellas.-
 - i) Verificar si las rectas s) y r) son alabeadas y en caso afirmativo calcular la distancia entre ambas.-
- a) De acuerdo a lo estudiado en el inc.3 debemos obtener del sistema de s) una ecuación de la forma $ax + by + d = 0$ (proyectante xy) y de la forma $by + cz + d = 0$ (proyectante yz).
por lo tanto aplicando el método de eliminación por suma o resta tendremos:

$$\pi_{xy}) 5x - 7y - 1 = 0 \quad \pi_{yz}) y + 5z - 7 = 0$$

b) Recordando que la forma simétrica era:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \text{ y utilizando los planos proyectantes hallados, despejamos de ambas ecuaciones la variable común } y \text{ tendremos:}$$

$$\frac{x - 1/5}{7} = \frac{y}{5} = \frac{z - 7/5}{-1} \text{ de donde ahora conocemos } P_0(1/5, 0, 7/5) \in s) \text{ y } \vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

c) De (1) Como $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{n}_1 \perp \alpha$ será también $\perp \vec{u}$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{n}_2 \perp \beta$ será también $\perp \vec{u}$.

luego $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 7i + 5j - k$

En (1) hacemos $y = 0$ y resolviendo el sistema que nos queda obtendremos: $x = 1/5$ y $z = 7/5$ con lo cual queda verificado lo hallado en b).-

d) de s) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ de r) $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = 0,185$; $\theta = 79^\circ,34$

e) De $\gamma) \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \vec{n}$ y de s) $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{u}$; $\sin \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| |\vec{u}|} = 0,1204$; $\phi = 6^\circ,92$

f) Sabemos que para hallar los puntos de penetración de una recta se hace una variable igual a cero se sustituye en el sistema, se resuelve el mismo hallándose el valor de las otras dos variables.

Por lo tanto:

para xy) $z = 0$ entonces $P_1(10, 7, 0)$; para xz) $y = 0$ entonces $P_0(1/5, 0, 7/5)$
para yz) $x = 0$ entonces $P_2(0, -1/7, 10/7)$

g) Tenemos $P_1(1, -2, 3)$ $P_0(1/5, 0, 7/5) \in s$ $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{u}$ (vector dirección de s)

entonces $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -2 \\ 3/5 \end{bmatrix}$ luego $d = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{|-6i + 12j + 18k|}{\sqrt{75}} = \frac{\sqrt{504}}{\sqrt{75}} = 2,592$

h) Tenemos $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{u}$ (vector dirección de s) $\begin{bmatrix} -14 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{v}$ (vector dirección de h)

como las componentes de los dos vectores dirección son proporcionales las rectas son paralelas

Además: $P_0(1/5; 0; 7/5) \in s$ y $P_1(3; 2; -2) \in h$. - por lo tanto $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{bmatrix} 14/5 \\ 2 \\ -17/5 \end{bmatrix}$

Aplicando la fórmula (15) $d = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

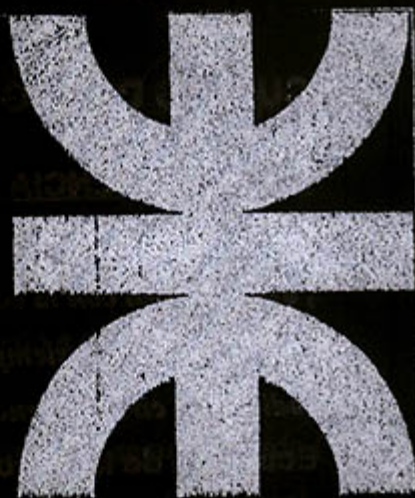
$$d = \frac{|15i - 21j + 0k|}{\sqrt{314}} = \frac{\sqrt{666}}{\sqrt{314}} = 1,456$$

i) De s): $P_0(1/5; 0; 7/5) \in s$; $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{u}$ (vector dirección de s); $P_1(1; -2; 1) \in r$; $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \vec{v}$ (vector dirección de r)

$\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -2 \\ -2/5 \end{bmatrix}$ $d = \frac{|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$ como $|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}| = |-28| = 0$ luego se cruzan

$$d = \frac{|-28|}{\sqrt{824}} = \frac{28}{\sqrt{824}} = 0,975$$

Cátedra : ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA



CURVAS DE SEGUNDO GRADO

Redactó : Ing. Alberto R. GONCEBATT

U.T.N.
Fac. Reg. Sta. Fe

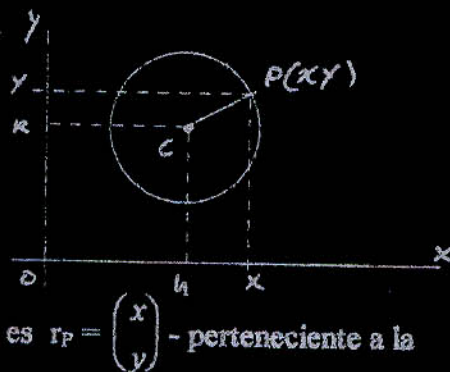
CURVAS DE SEGUNDO GRADO

CIRCUNFERENCIA . Definición :

Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano , que cumplen con la condición de que su distancia a un punto fijo denominado centro permanece siempre constante . A esa distancia constante , se la denomina radio de la circunferencia .

Ecuación de la circunferencia .

Sea una circunferencia de radio r y centro $c(h,k)$, cuyo vector posición es $r_c = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.



Consideremos además

un punto cualquiera $P(x,y)$ -cuyo vector posición es $r_P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ - perteneciente a la circunferencia .

En estas condiciones , como P , es un punto de la circunferencia , deberá cumplirse que :

$$|CP| = \text{cte.} = r$$

$$\text{siendo } CP = r_P - r_c = \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \end{pmatrix} \text{ y } |CP| = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

resulta $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$, o sea

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

que es la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro $C(h,k)$ y radio r . En consecuencia , van a pertenecer a la circunferencia , todos los puntos cuyas coordenadas satisfagan la ecuación de la misma.

Posiciones particulares de la circunferencia

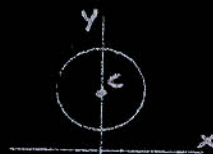
a) Si el centro pertenece al eje $x \Rightarrow C(h,0)$

$$(x-h)^2 + y^2 = r^2$$



b) Si el centro pertenece al eje $y \Rightarrow C(0,k)$

$$x^2 + (y-k)^2 = r^2$$



c) Si el centro coincide con el origen de coordenadas $\Rightarrow C(0,0)$

$$x^2 + y^2 = r^2$$



que es la forma canónica de la ecuación de la circunferencia

Ecuación general o implícita de la circunferencia :

Se llama así , a aquella que se obtiene , desarrollando e igualando a cero su forma ordinaria .

Es de destacar , que las formas generales o implícitas de las curvas de segundo grado (circunferencia , parábola , elipse e hipérbola) , tienen la forma de la ecuación general incompleta de segundo grado en dos variables , es decir :

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

Pero , no toda ecuación de este tipo , representa siempre una curva de segundo grado , para ello deberá cumplir ciertas condiciones necesarias y suficientes .

Vamos a analizar , el caso particular de la circunferencia :

Su ecuación ordinaria es :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

desarrollando , ordenando e igualando a cero :

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

siendo esta , la forma general o implícita de la circunferencia .

Si la comparamos con la (1) , tendremos que

$$A = 1 ; C = 1 ; D = -2h ; E = -2k ; F = h^2 + k^2 - r^2$$

Pudiendo deducirse entonces que , para que una ecuación general incompleta de segundo grado en dos variables represente una circunferencia , es necesario que $A = C$ (condición necesaria) .

Veamos ahora , si es también condición suficiente :

Para ello , partimos de (1) y tratamos de llegar a la forma ordinaria de la circunferencia

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

suponemos , que se cumple la condición necesaria : $A = C$

dividiendo la anterior por A

$$x^2 + y^2 + (D/A)x + (E/A)y + (F/A) = 0$$

$$[x^2 + (D/A)x] + [y^2 + (E/A)y] = - (F/A)$$

empleando el artificio de completar cuadrados .

Completar cuadrados : significa transformar un binomio de segundo grado , en un trinomio cuadrado perfecto .

Para ello , se procede de la siguiente forma :

- 1) En el binomio , el coeficiente de la variable elevada al cuadrado , debe ser igual a uno .
- 2) Se le suma y se le resta al binomio , la mitad de su coeficiente lineal , elevado al cuadrado .

Volviendo a nuestro caso resulta :

$$\left(x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) + \left(y^2 + \frac{E}{A}y + \frac{E^2}{4A^2}\right) = \frac{-F}{A} + \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2}$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4A^2} = M \quad (2)$$

comparando con la forma ordinaria de la circunferencia , tenemos que :

$$h = -\frac{D}{2A} ; k = -\frac{E}{2A} ; R = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4A^2}} > 0$$

por lo tanto , se deduce , que para que la (2) represente circunferencia :

M debe ser mayor que cero

Entonces si :

- M > 0 Circunferencia (condición suficiente)
- M = 0 Un punto
- M < 0 No representa ningún lugar geométrico .

Resumiendo :

La condición Necesaria para que una ecuación general incompleta de segundo grado en dos variables , represente circunferencia , es , que los coeficientes de las variables elevadas al cuadrado, sean iguales (A = C) y la condición Suficiente es que el término independiente una vez completado cuadrados y llevado al segundo miembro , sea mayor que cero (M > 0) , si M = 0 , representa un punto y si M < 0 , no representa lugar geométrico .

PARÁBOLA - Definición

Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano , que equidistan de una recta llamada directriz y de un punto fijo exterior a ella denominado foco .

Elementos geométricos de la parábola

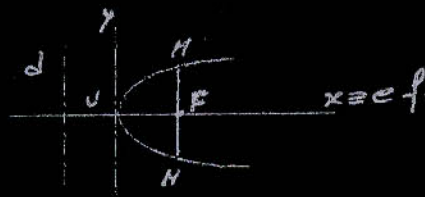
d : recta directriz

F : foco

e.f. : eje focal

V : vértice

|MN| : lado recto



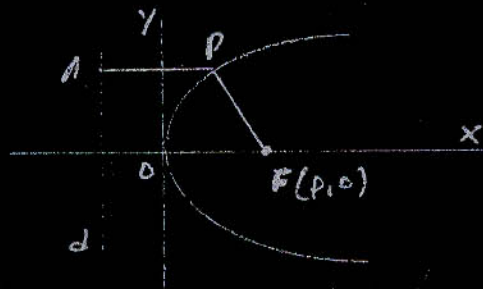
Eje focal : Es la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la recta directriz

Vértice : Se determina por la intersección del eje focal con la curva

Lado recto : Es una cuerda de la parábola , normal al eje focal y que pasa por el foco

Ecuación de la parábola :

Vamos a suponer una parábola , cuyo vértice , coincida con el origen de coordenadas y su eje focal , con el eje de abscisas . En tales condiciones , vamos a asignarle al foco , las coordenadas $F(p,0)$



Consideremos además un punto cualquiera $P(x,y)$ perteneciente a la parábola .

Para que este punto $P(x,y)$, pertenezca a la parábola , deberá cumplir , con la condición geométrica que se desprende de la definición de este lugar geométrico , es decir :

$$|FP| = |AP| \quad (1)$$

$$\text{como } FP = \begin{pmatrix} x-p \\ y-0 \end{pmatrix} \Rightarrow |FP| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

$$\text{y} \quad |AP| = p + x$$

reemplazando en (1) , resulta :

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = p+x$$

desarrollando y simplificando

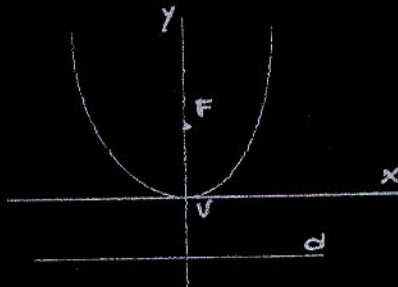
$$(x-p)^2 + y^2 = (p+x)^2$$

$$x^2 + p^2 - 2px + y^2 = p^2 + x^2 + 2px$$

$$y^2 = 4px$$

que, es la ecuación canónica de la parábola, de vértice $V(0,0)$ y e.f. = eje x .
 Si consideramos ahora, una parábola, con vértice en el origen de coordenadas y eje focal coincidente con el eje de las y ; y razonamos en forma análoga a la anterior, se llega a la otra forma canónica de la parábola

$$x^2 = 4py$$



La particularidad de estas ecuaciones, es que las dos variables, no se encuentran elevadas al cuadrado, una si, y la otra no. La variable, que figura en forma lineal, nos indica cual es el eje de coordenadas, que coincide con el eje focal de la parábola.

Extensión de la parábola:

Significa hallar los intervalos de extensión de la curva según los ejes coordenados.

a) Consideremos la curva de ecuación

$$y^2 = 4px$$

1) Respecto al eje x : Llevamos la ecuación a la forma $y = f(x)$ y analizamos para que valores de x , existen valores reales de y .

$$y = \pm 2\sqrt{p \cdot x}$$

habrá valores reales de (y) , siempre que $p \cdot x \geq 0$. Entonces, para que (y) sea real, debe cumplirse que:

$$\text{Sig. } p = \text{Sig. } x$$

por lo tanto, si

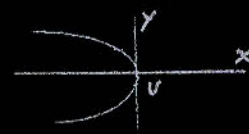
$$p > 0 \Rightarrow 0 \leq x < +\infty$$

$$p > 0$$



$$p < 0 \Rightarrow -\infty < x \leq 0$$

$$p < 0$$



2) Respecto al eje y :

Se estudia $x = f(y)$

o sea
$$x = \frac{y^2}{4p} \Rightarrow x \in \mathbb{R} \quad \forall y \Rightarrow -\infty < y < +\infty$$

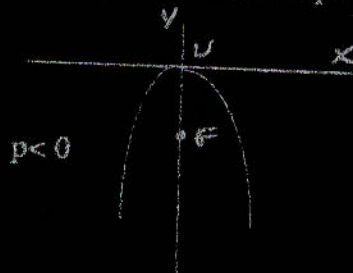
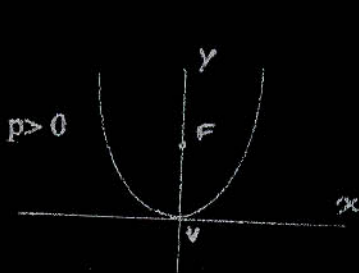
Si consideramos la otra forma canónica:

$$x^2 = 4py$$

y razonamos en forma análoga a la anterior, resulta que:

Si $p > 0 \Rightarrow 0 \leq y < +\infty$ (la parábola , abre las ramas para arriba

$p < 0 \Rightarrow -\infty < y \leq 0$ (la parábola , abre las ramas para abajo)



Ecuación ordinaria de la parábola:

Corresponde a aquellas parábolas, cuyo vértice se encuentra desplazado respecto del origen de coordenadas, y su eje focal, se mantiene paralelo, a uno de los ejes coordenados.

Para deducirla, vamos a proceder de la siguiente manera: Consideramos en un sistema de coordenadas cartesianas Oxy , una parábola de vértice $V(h,k)$ y eje focal paralelo al eje de las x .

Suponemos, que en dicho sistema, un punto P , cualquiera de la misma tiene por coordenadas a (x,y) .

Si efectuamos una traslación de ejes, de forma tal, que su origen O' , coincida con V , y x' con el eje focal de la parábola, es decir, a la posición $O'x'y'$. En este nuevo sistema, $O'x'y'$, el punto P , tiene por coordenadas (x',y') .

Consecuentemente, en este nuevo sistema $O'x'y'$ la ecuación de la parábola es:

$$y'^2 = 4px'$$

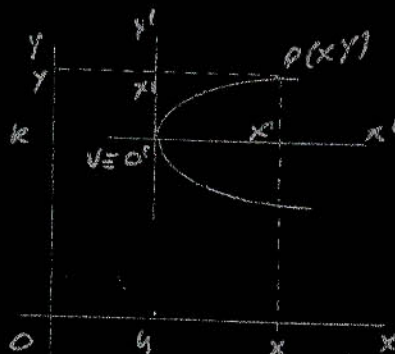
luego para referirla al sistema original Oxy

debemos reemplazar:

$$x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k$$

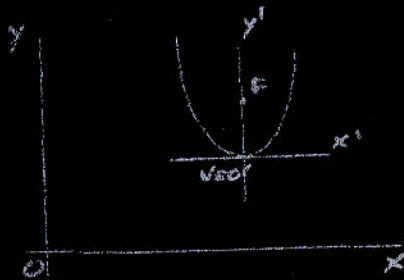
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

que representa la ecuación de la parábola de vértice $V(h,k)$ y e.f. // al eje x



Si consideramos ahora , una parábola de vértice $V(h,k)$ y e.f. // al eje y , razonando en forma análoga a la anterior , se llega a la otra forma ordinaria de la parábola

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$



Calculo de los elementos geométricos de la parábola

Sea la parábola de ecuación

$$y^2 = 4px$$

Vértice : $V(0,0)$

Foco : $F(p,0)$

e.f. : $y = 0$

Directriz : $x + p = 0 \Rightarrow x = -p$

Lado recto : $lr = |MN|$



teniendo en cuenta , que la parábola de e.f. = eje x , es simétrica respecto al eje x , tendremos que : $lr = |MN| = 2 y_p$, donde y_p , es la ordenada del punto M perteneciente a la parábola .

Entonces si $M(p, y_p)$, pertenece a la parábola

$$y_p^2 = 4pp \Rightarrow y_p = \pm 2\sqrt{p^2} = \pm 2p$$

luego $lr = 2 y_p = 4p$

Ecuación general o implícita de la parábola :

Se obtienen , procediendo de igual forma que en la circunferencia .

Entonces , si partimos de la forma ordinaria :

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

desarrollando , ordenando e igualando a cero :

$$y^2 - 4px - 2ky + (k^2 + 4ph) = 0 \quad (1)$$

partiendo de la otra forma ordinaria :

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

efectuando , el mismo proceso , se llega a:

$$x^2 - 2hx - 4py + (h^2 + 4pk) = 0 \quad (2)$$

siendo, estas dos, las formas generales o implcitas de la par3bola .

Si las comparamos, con la ecuaci3n general incompleta de segundo grado en dos variables

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

se observa que :

en (1) $C \neq 0$ y $A = 0$

en (2) $A \neq 0$ y $C = 0$

que son en cada caso, condiciones Necesarias, para que, la ecuaci3n general incompleta de segundo grado en dos variables, represente par3bola .

Veamos ahora, si son condiciones suficientes .

Para ello, partimos de la ecuaci3n general incompleta de segundo grado y suponiendo que se cumple la condici3n necesaria, tratamos de llegar a la forma ordinaria de la par3bola .

Entonces si en $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

suponemos que $C \neq 0$ y $A = 0$ (condici3n necesaria)

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

si en ella, se agrega que : $D = 0$

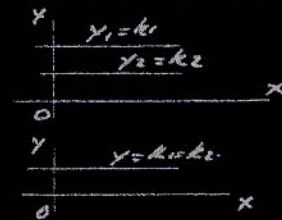
nos queda : $Cy^2 + Ey + F = 0$

que es, una ecuaci3n de segundo grado, en una variable, por lo tanto, no representa una curva de segundo grado . Si le aplicamos la resolvente, tendremos distintas alternativas, de acuerdo al valor que toma su discriminante .

1) Si $\Delta > 0 \Rightarrow y_1 = k_1 ; y_2 = k_2$ (dos rectas // al eje x)

2) Si $\Delta = 0 \Rightarrow y = k_1 = k_2$ (dos rectas =)

3) Si $\Delta < 0$ (no representa N.L.G.)



Como se observa, en ninguno de estos tres casos, representa par3bola, por lo tanto, para que una ecuaci3n general incompleta de segundo grado, represente par3bola, deber3 cumplirse que si $(C \neq 0$ y $A = 0)$, deber3 ser : $D \neq 0$ (condici3n suficiente) y an3logamente si $(A \neq 0$ y $C = 0)$, deber3 ser : $E \neq 0$ (condici3n suficiente), caso contrario, no representa par3bola .

Resumiendo :

Si $A = 0 ; C \neq 0 ; D \neq 0 \Rightarrow$ Par3bola e.f. // eje x

$A = 0 ; C \neq 0 ; D = 0 \Rightarrow$ 1) Si $\Delta > 0 \Rightarrow y_1 = k_1 ; y_2 = k_2$ (dos rectas //al eje x)

2) Si $\Delta = 0 \Rightarrow y = k_1 = k_2$ (dos rectas = ; // al eje x)

3) Si $\Delta < 0$ (no representa N.L.G.)

$A \neq 0; C = 0; E \neq 0 \Rightarrow$ Parábola e.f. // eje y

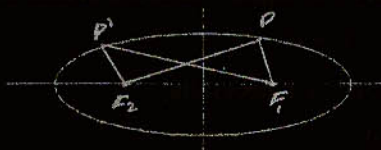
$A \neq 0; C = 0; E = 0 \Rightarrow$ 1) Si $\Delta > 0 \Rightarrow x_1 = k_1; x_2 = k_2$ (dos rectas // al eje y)

2) Si $\Delta = 0 \Rightarrow x = k_1 = k_2$ (dos rectas \equiv ; // al eje y)

3) Si $\Delta < 0$ (no representa N.L.G.)

ELIPSE .Definición

Es el lugar geométrico , de todos los puntos del plano , que cumplen con la condición , de que la suma , de sus distancias a dos puntos fijos denominados focos , permanece siempre constante , positiva y mayor que la distancia entre los focos .



Elementos geométricos :

F_1 y F_2 : Focos de la elipse.

e.f. Eje focal (es la recta que contiene a los focos)

V_1 y V_2 : Vértices principales (resultan de la intersección del e.f. con la curva).

V_3 y V_4 : Vértices secundarios

C : Centro de la elipse (es el punto medio de F_1F_2)

$|F_1F_2|$: Distancia interfocal

$|V_1V_2|$: longitud eje mayor de la elipse.

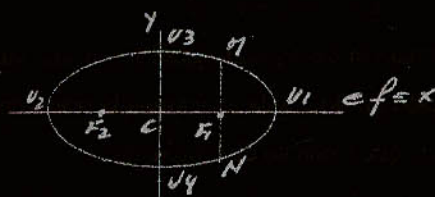
$|V_3V_4|$: longitud eje menor de la elipse.

$|MN| = lr$: lado recto de la elipse.

Ecuación de la elipse :

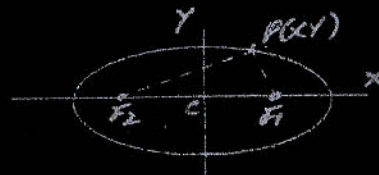
Vamos a considerar una elipse , con centro coincidente con el origen de coordenadas y focos ubicados sobre el eje x .

En tales condiciones ,



amos a asignarle , a los focos
 las coordenadas :

$$F_1(c,0) \text{ y } F_2(-c,0)$$



Vamos a considerar además ,

un punto cualquiera $P(x,y)$ perteneciente a la elipse.

Para que este punto P , pertenezca a la elipse, deberá cumplir, con la condición geométrica ,
 que surge de la definición de este lugar geométrico :

$$(1) \quad |F_1P| + |F_2P| = \text{cte.} = 2a \quad , \text{ siendo } 2a > 2c$$

$$\text{siendo } |F_1P| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$|F_2P| = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$$

reemplazando en (1) :

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado , ambos miembros :

$$\left[\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right]^2 = \left[2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right]^2$$

y desarrollando :

$$x^2 + c^2 - 2cx + y^2 = 4a^2 + x^2 + c^2 + 2cx + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

cancelando todo lo posible , tenemos :

$$-2cx = 4a^2 + 2cx - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

cancelando los 4 , y elevando nuevamente al cuadrado , ambos miembros :

$$\left[a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right]^2 = \left[a^2 + cx \right]^2$$

desarrollando:

$$a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2cx + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 + 2a^2cx$$

llevando todo al primer miembro , e igualando a cero

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - a^4 - c^2x^2 = 0$$

teniendo en cuenta que por definición : $2a > 2c \Rightarrow a > c$

\Rightarrow vamos hacer : $a^2 - c^2 = b^2$ (relación válida únicamente para las elipses)

En consecuencia , vamos a operar en la expresión anterior , de modo tal , de que aparezca como factor : $(a^2 - c^2)$

$$x^2 \cdot (a^2 - c^2) - a^2 \cdot (a^2 - c^2) + a^2 y^2 = 0$$

pero $a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow$

$$x^2 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^2 + a^2 y^2 = 0$$

$$x^2 \cdot b^2 + a^2 y^2 = a^2 \cdot b^2$$

considerando que en la elipse : $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, dividimos ambos miembros de la anterior por : $a^2 \cdot b^2$

$$\frac{x^2 b^2}{a^2 b^2} + \frac{a^2 y^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2}$$

simplificando , todo lo posible , resulta :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

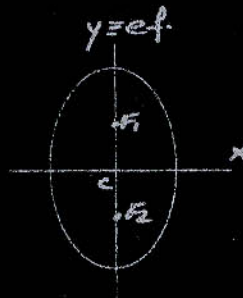
Ecuación CANÓNICA de la ELIPSE , de

centro $C(0,0)$ y e.f. \equiv eje x

Si consideramos ahora una elipse , con centro en el origen de coordenadas y eje focal coincidente con el eje y .

Razonando , en forma análoga a la anterior , se llega a la otra forma CANÓNICA de la ELIPSE .

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1}$$



Recordando que $a^2 - c^2 = b^2$, entonces $a > b$, por lo tanto observando las ecuaciones anteriores , podemos deducir , que el denominador mayor (a), nos está indicando , cual es el eje , que contiene a los focos de la elipse .

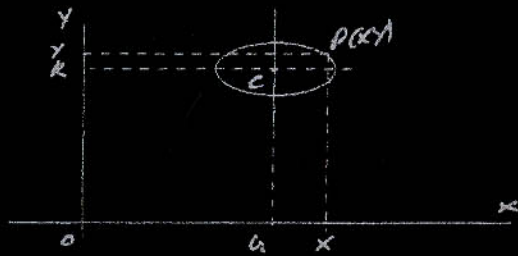
Ecuación ordinaria de la elipse

Corresponde a aquella elipse , cuyo centro , se encuentra desplazado respecto al origen de coordenadas y su eje focal , se mantiene paralelo a uno de los ejes coordenados .

Razonando , en forma análoga a lo que hicimos en parábola , si consideramos ahora , una elipse de centro $C(h,k)$ y e.f. // al eje x , se llega a la expresión de a su forma ORDINARIA

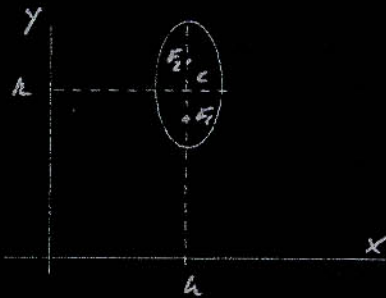
Razonando , en forma análoga a lo que hicimos en parábola , si consideramos ahora , una elipse de centro $C(h,k)$ y e.f. // al eje x , se llega a la expresión de a su forma ORDINARIA

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Si consideramos ahora , una elipse de centro $C(h,k)$ y e.f. // al eje y , se llega a la otra forma Ordinaria de la elipse .

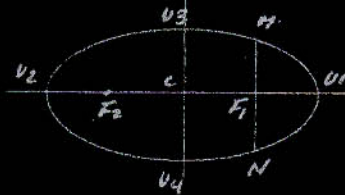
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Calculo de los elementos geométricos de la elipse :

Sea la elipse de ecuación :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Centro : $C(0,0)$

Vértices : $V_1(a,0)$; $V_2(-a,0)$

$V_3(0,b)$; $V_4(0,-b)$

Focos : $F_1(c,0)$; $F_2(-c,0)$

Longitud eje mayor : $|V_1V_2| = 2a$

Longitud eje menor : $|V_3V_4| = 2b$

Distancia interfocal : $|F_1F_2| = 2c$

Lado recto : $lr = |MN| = 2y_c = 2b^2/a$

Cálculo del lado recto de la elipse : razonando en forma análoga , a lo hecho en parábola ,

tenemos que $M(c,y_c) \in \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, entonces :

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y_c^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y_c^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \Rightarrow y_c = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{b^2} = \pm \frac{b^2}{a}$$

luego $l_r = 2y_c = 2b^2/a$

Determinación de las coordenadas , de los vértices y focos , en una elipse de centro C(h,k) y e.f. // eje x :

$V_1(h + a ; k) ; V_2(h - a ; k)$

$V_3(h ; k + b) ; V_4(h ; k - b)$

$F_1(h + c ; k) ; F_2(h - c ; k)$

Excentricidad (e) :

Se llama así , a la relación entre c y a , o sea :

$e = c/a$

teniendo en cuenta que en las elipses $c < a$, resulta :

$$e = c/a < 1 , \text{ para las elipses}$$

Ecuación general o implícita de la elipse :

Se obtiene , desarrollando e igualando a cero , sus formas ordinarias .

Si por ejemplo partimos de

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 ; C(h,k) ; e.f. // eje x$$

tenemos : $b^2(x - h)^2 + a^2(y - k)^2 = a^2b^2$

desarrollando y ordenando :

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + (b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2) = 0$$

que es , la ecuación general o implícita de la elipse y que tiene la forma de la ecuación general incompleta de segundo grado , puesto , que si hacemos :

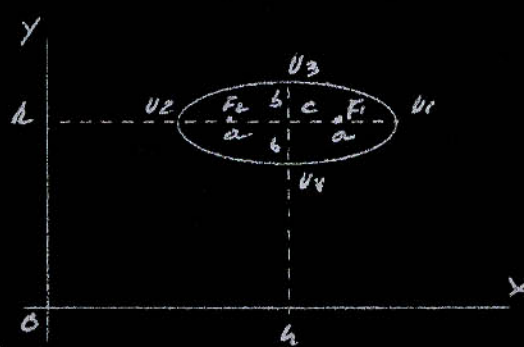
$$A = b^2 ; C = a^2 ; D = -2b^2h ; E = -2a^2k ; F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$$

nos queda : $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Oservándose , que para que esta última , represente elipse , es condición necesaria , que los coeficientes , de las variables elevadas al cuadrado sean de igual signo , es decir : Sig. A = Sig. C

Veamos ahora , si es condición suficiente .

Para ello , partimos de la incompleta de segundo grado y suponiendo , que se cumple la condición necesaria , tratamos de llegar , a la forma ordinaria de la elipse .



$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$(Ax^2 + Dx) + (Cy^2 + Ey) = -F$$

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right) = -F$$

completando cuadrados: $A\left(x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}\right) = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}$

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{D^2C + E^2A - 4ACF}{4AC}$$

suponiendo, que se cumple la condición necesaria: Sig. A = Sig. C

⇒ A ≠ 0; C ≠ 0; dividiendo la anterior por: AC

$$\frac{A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{A \cdot C} + \frac{C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A \cdot C} = \frac{D^2C + E^2A - 4ACF}{4A^2C^2} = M$$

nos queda:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = M$$

expresión, que comparada con la ecuación ordinaria de la elipse, puede deducirse, que representa una elipse si $M > 0$, si $M = 0$ representa un punto y si $M < 0$ no representa N.L.G.

Conclusión:

La condición necesaria, para que una ecuación general incompleta de segundo grado en dos variables, represente elipse, es que los coeficientes de las variables elevadas al cuadrado, sean de igual signo (Sig. A = Sig. C) y la condición suficiente, es que el término independiente, una vez completado cuadrado y llevado al segundo miembro, sea mayor que cero ($M > 0$)

HIPÉRBOLA Definición:

Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano, que cumplen la condición, de que, el valor absoluto de las diferencias de sus distancias, a dos puntos fijos, denominados focos, permanece constante y menor que la distancia entre los focos.

Elementos geométricos

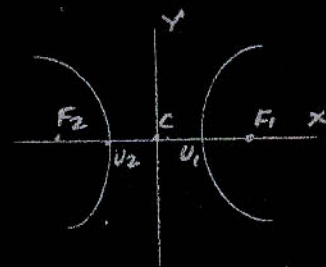
F_1 y F_2 : focos de la hipérbola

C: centro de la hipérbola (pto. medio de F_1F_2)

e.f.: eje focal (recta que contiene a los focos)

V_1 y V_2 : vértices (son determinados por la intersección del e.f., con la curva)

E_n : eje normal (recta que pasa por el centro y



es \perp al e.f.)

$|V_1V_2|$: longitud eje transverso

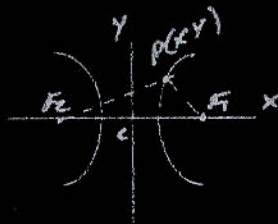
$|F_1F_2|$: distancia interfocal

Ecuación de la hipérbola :

Vamos a considerar una hipérbola , con centro en el origen de coordenadas y e.f. coincidente con el eje x .

En estas condiciones , asignamos a los focos , las siguientes coordenadas : $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$

Vamos a considerar además , un punto cualquiera $P(x,y)$ perteneciente a la hipérbola.



Para que este punto P , pertenezca a la hipérbola , deberá cumplir , con la condición geométrica , que se deduce de la definición de éste lugar geométrico , es decir :

$$\|F_1P\| - \|F_2P\| = cte = 2a \quad ; \text{ siendo } 2a < 2c$$

teniendo en cuenta que :

$$\|F_1P\| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} ; \|F_2P\| = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}$$

reemplazando , en la anterior :

$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \right| = 2a$$

luego , la extracción de las barras de valor absoluto , ofrece dos alternativas :

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = +2a$$

o bien :

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = -2a$$

con cualquiera de las dos expresiones se puede operar , para llegar a la ecuación de la hipérbola . Procediendo , a partir de aquí , en forma análoga que en elipse , con la salvedad , de que en hipérbola , por definición :

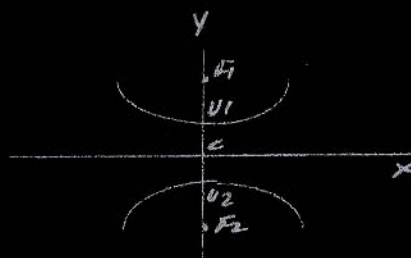
$c > a \Rightarrow c^2 - a^2 > 0$, hacemos : $c^2 - a^2 = b^2$ (válido , solo para las hipérbolas) , se llega a la ecuación canónica de la hipérbola .

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Si se considera una hipérbola , con centro en el origen de coordenadas y eje focal coincidente con el eje y .

Efectuando , un razonamiento análogo al anterior, se llega , a la otra forma canónica de la hipérbola :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



De observar estas ecuaciones , fácilmente puede deducirse , que la variable que figura como positiva , nos está indicando , cual es el eje de coordenadas , que contiene a los focos de la hipérbola .

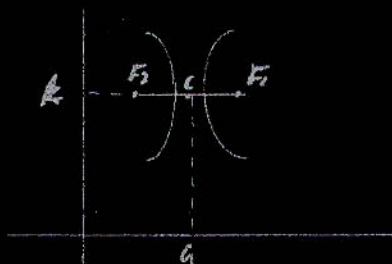
Ecuación ordinaria de la hipérbola .

Corresponden a aquellas hipérbolas que tienen su centro , desplazado , respecto al origen de coordenadas y sus ejes se mantienen paralelos a los ejes coordenados .

Con un razonamiento , similar , a los anteriores , se llega a la siguientes ecuaciones :

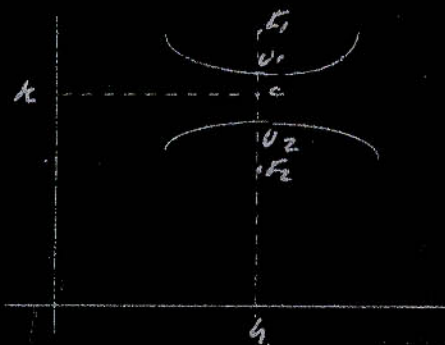
a)
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación Ordinaria de la hipérbola , cuyo centro es C(h,k) y e.f. // eje x .



b)
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

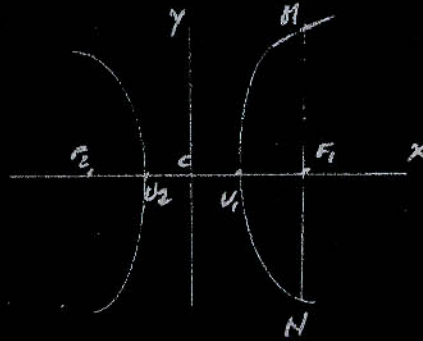
Ecuación Ordinaria de la hipérbola , cuyo centro es C(h,k) y e.f. // eje y



Calculo de los elementos geométricos de la hipérbola :

Sea la hipérbola de ecuación :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Centro : $C(0,0)$

Vértices : $V_1(a,0)$; $V_2(-a,0)$

Focos : $F_1(c,0)$; $F_2(-c,0)$

Longitud eje transverso : $|V_1V_2| = 2a$

Distancia interfocal : $|F_1F_2| = 2c$

Lado recto : $lr = |MN| = 2y_c = 2b^2/a$ (su calculo, se obtiene procediendo en igual forma que en la elipse)

Excentricidad (e) :

Se llama así , a la relación entre c y a , o sea :

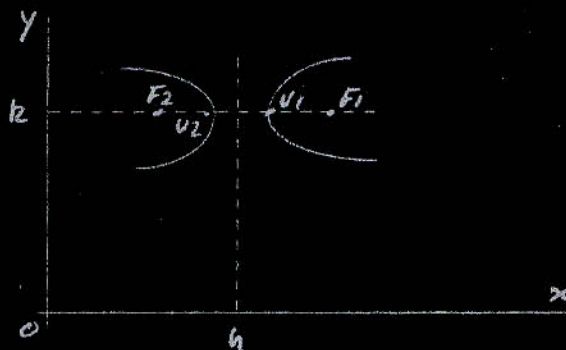
$$e = c/a$$

teniendo en cuenta que en las hipérbolas $c > a$, resulta :

$$e = c/a > 1 , \text{ para las hipérbolas}$$

Determinación de las coordenadas , de los vértices y focos , en una hipérbola de centro $C(h,k)$ y e.f.//eje x :

$V_1(h + a ; k)$; $V_2(h - a ; k)$
 $F_1(h + c ; k)$; $F_2(h - c ; k)$



Asíntotas :

Las hipérbolas , tienen un elemento geométrico más , con respecto a las curvas anteriormente estudiadas y son sus rectas asíntotas .

Las asíntotas de una curva , son recta , que tienen la siguiente particularidad : "se acercan infinitamente a la curva , sin llegar nunca a tocarla .

La " regla practica " , para calcular las asíntotas de la hipérbola , es la siguiente :

Dada la ecuación de la hipérbola :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1) Se opera , tratando de eliminar denominadores :

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

2) Se hace cero, el término independiente :

$$b^2x^2 - a^2y^2 = 0$$

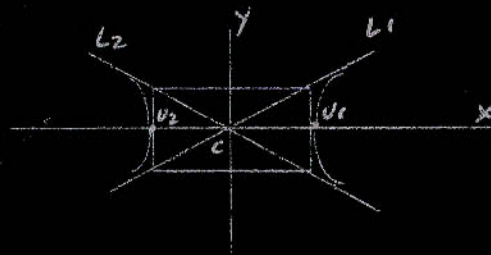
3) Se desarrolla el primer miembro, como una diferencia de cuadrados :

$$(bx - ay) \cdot (bx + ay) = 0$$

4) Cada factor, de la expresión anterior, igualado a cero, representa la ecuación de una recta asíntota

$$bx - ay = 0 \Rightarrow L_1) y = (b/a)x$$

$$bx + ay = 0 \Rightarrow L_2) y = -(b/a)x$$



Observación : Idéntico procedimiento se emplea para determinar las rectas asíntotas, de una hipérbola cuyo centro, se encuentre desplazado, respecto del origen de coordenadas. Obteniéndose en este caso, un par de rectas, que se intersectan en el centro de esa hipérbola.

Ecuación general o implícita de la hipérbola :

Procediendo en forma análoga, a lo realizado con elipse, puede deducirse, que la condición necesaria para que una ecuación general incompleta de segundo grado en dos variables, represente una hipérbola, es que los coeficientes de las variables elevadas al cuadrado, sean de distinto signo (Sig. A \neq Sig. C) , y la condición suficiente, es que el término independiente, una vez completado cuadrados y llevado al segundo miembro, sea distinto de cero ($M \neq 0$), si $M = 0$, la ecuación representa dos rectas que se cortan.

Cátedra : ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA



SUPERFICIES

Redactó : Ing. Carlos TONIOLO

U.T.N.
Fac. Reg. Sta. Fe

Superficies

Dado un sistema de coordenadas ortogonales X, Y, Z se llama superficie al conjunto de puntos del espacio cuyas coordenadas satisfacen solamente a una ecuación de la forma:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

Aunque la ecuación (1) contiene tres variables, la ecuación de una superficie puede contener solamente una ó dos variables. Por ejemplo, vimos que una ecuación de la forma $x=k$, en la cuál k es una constante cualquiera, representa un plano paralelo al plano coordenado YZ . Además veremos más adelante que una ecuación de la forma $x^2 + y^2 = 4$ (2), **considerada en el espacio R^3** , representa una superficie conocida como cilindro circular recto. Por lo tanto debemos tener cuidado, para no confundirla con una circunferencia, de hacer referencia a que estamos trabajando en R^3 .

Podemos acotar también que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ tiene solamente una solución real, que es $x=y=z=0$ y por lo tanto su lugar geométrico está constituido por un solo punto, el origen.

Discusión de la ecuación de una superficie

Para facilitar el trazado de su gráfica, es ventajosa discutir la ecuación de la superficie antes de construirla. Consideraremos en la discusión los cinco pasos siguientes:

- 1-Intersecciones con los ejes coordenados.
- 2-Trazas sobre los planos coordenados.
- 3-Simetrías con respecto a los planos coordenados, ejes coordenados y el origen.
- 4-Secciones por planos paralelos a los planos coordenados.
- 5-Extensión de la superficie.

1-Intersecciones con los ejes coordenados.

Llamamos intersección de una superficie con un eje coordenado a las coordenadas del punto de intersección de la superficie y el plano coordenado.

Si la gráfica G intercepta al eje X : $G \cap X \Rightarrow y=z=0$ y las coordenadas del punto de intersección son $(x, 0, 0)$.

Con igual razonamiento: $G \cap Y \Rightarrow x=z=0$ y el punto de intersección es $(0, y, 0)$

Con igual razonamiento: $G \cap Z \Rightarrow x=y=0$ y el punto de intersección es $(0, 0, z)$

2-Trazas sobre los planos coordenados.

La traza de una superficie sobre un plano coordenado es la curva de intersección de la superficie y el plano coordenado.

Si la superficie es $f(x, y, z) = 0$

La traza sobre el plano XY es: $z=0 \quad f(x, y) = 0$

La traza sobre el plano XZ es: $y=0 \quad f(x, z) = 0$

La traza sobre el plano YZ es: $x=0 \quad f(y, z) = 0$

3-Simetrías con respecto a los planos coordenados, ejes coordenados y el origen.

Dos puntos son simétricos respecto a un plano si el plano es perpendicular al segmento que los une en su punto medio.

Una superficie es simétrica con respecto a un plano si el punto simétrico de cada punto de la superficie, es también un punto de la superficie.

Las pruebas para determinar simetrías de una superficie a partir de su ecuación se resumen así:

Si la ecuación de la superficie no se altera cuando las variables x, y, z son reemplazadas por :

$-x, y, z$

$x, -y, z$

$x, y, -z$

$-x, -y, z$

$-x, y, -z$

$x, -y, -z$

$-x, -y, -z$

La superficie es simétrica con respecto al:

plano YZ

plano XZ

plano XY

eje Z

eje Y

eje X

origen

4-Secciones por planos paralelos a los planos coordenados.

Supongamos que la ecuación de una superficie es $f(x, y, z) = 0$. Se puede obtener una buena idea de las formas de esta superficie estudiando sus secciones planas. Tales secciones pueden determinarse cortando la superficie con una serie de planos paralelos a los planos

coordenados. Por ejemplo, los planos paralelos al plano XY pertenecen a la familia cuya ecuación es $z = k$ en donde k es una constante arbitraria.

Entonces se obtiene

$f(x,y,k)=0 \quad z=k$ que son las ecuaciones de la curva de intersección del plano con la superficie, correspondiendo a cada valor asignado a k una curva determinada.

5-Extensión de la superficie.

Si se conoce la ecuación de una superficie en la forma $f(x,y,z)=0$ se puede despejar una de las variables en función de las otras dos. Por ejemplo: $z=f(x,y)$ La última ecuación nos permite obtener los intervalos de variación de los valores reales que las variables pueden tomar. Esta información es útil para determinar la localización general de la superficie en el espacio coordenado; también indica si la superficie es cerrada indefinida en extensión.

Obviamente, estas consideraciones son de ayuda si debemos reconocer una superficie ó efectuar su trazado "a mano". En las computadoras encontraremos software apropiado que nos trazaran rápidamente las superficies dentro de intervalos determinados.

Ejemplo:

Discutir la superficie cuya ecuación es $x^2+y^2-4z=0$ y construir la superficie.

Solución:

1-Intersecciones: Las únicas intersecciones con los ejes coordenados están dadas por el origen.

2-Trazas:

Con el plano XY $z=0 \Rightarrow x^2+y^2=0$ la traza es el origen $O(0,0,0)$

Con el plano XZ $y=0 \Rightarrow x^2=4z$ parábola

Con el plano YZ $x=0 \Rightarrow y^2=4z$ parábola

3-Simetrías:

La superficie es simétrica con respecto al plano YZ, al plano XZ y al eje Z. (Verifique!!)

4-Secciones:

Los planos $z = k$ cortan a la superficie en las curvas $x^2+y^2 = k, \quad z = k$

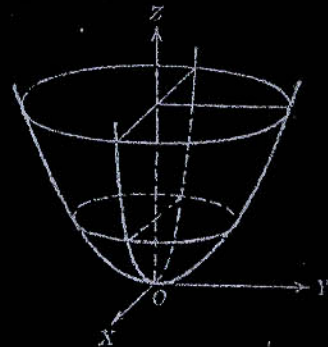
que constituyen una familia de circunferencias, para todos los valores de $k > 0$.

Los planos $y = k$ cortan a la superficies en las parábolas $x^2 = 4(z-k^2/4), \quad y = k$

y los planos $x = k$ cortan a la superficie en las parábolas $y^2 = 4(z-k^2/4), \quad x = k$

5-Extensión:

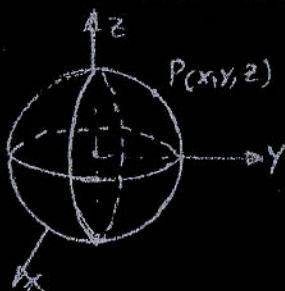
La ecuación $x^2+y^2-4z=0$ muestra que las variables x e y pueden tomar todos los valores reales, pero la variable z está restringida a valores positivos. Por lo tanto ninguna parte de la superficie aparece debajo del plano XY, pero se extiende indefinidamente hacia arriba del plano XY.



Superficie esférica:

Es el lugar geométrico de los puntos del espacio (R^3) que se encuentran a igual distancia de un punto fijo llamado centro.

Si llamamos P a uno de los puntos de la superficie esférica, C al centro de la superficie y r a la distancia del centro a uno de los puntos P , podemos obtener la ecuación de la superficie esférica planteando la ecuación de distancia.



$P(x,y,z)$ Punto genérico, es decir uno de los infinitos puntos de la superficie.

$C(0,0,0)$ Centro de la superficie, que hacemos coincidir con el origen de coordenadas.

$CP=r$

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = r^2 \implies x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

ecuación canónica de la superficie esférica.

Si el centro C de la superficie se encuentra desplazado del origen de coordenadas, siendo sus coordenadas (h,k,l), la ecuación que se obtiene es:

$$CP=r$$

$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2 \implies (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2$ ecuación ordinaria de la superficie esférica. Obviamente, ésta ecuación coincide con la canónica cuando $h=k=l=0$.

Algunas posiciones particulares de la superficie esférica:

Si el centro está en el plano XY, entonces $l=0$ y la ecuación es: $(x-h)^2+(y-k)^2+z^2=r^2$

Si el centro está en el eje Z, entonces $h=k=0$ y la ecuación es: $x^2+y^2+(z-l)^2=r^2$

Ejemplos: Hallar la ecuación de la superficie esférica cuyo centro es C (-1,2,3) y contiene al punto (2,-3,4).

Solución: Sabemos que la ecuación buscada es del tipo $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2$, por lo tanto tenemos cuatro incógnitas, que son h,k,l,r. Siendo h,k,l las coordenadas del centro son datos del problema. Reemplazando:

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=r^2$ Nos falta calcular el radio. Para el cálculo del radio tengamos en cuenta que si el punto (2,-3,4) pertenece a la superficie esférica, las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la superficie, entonces:

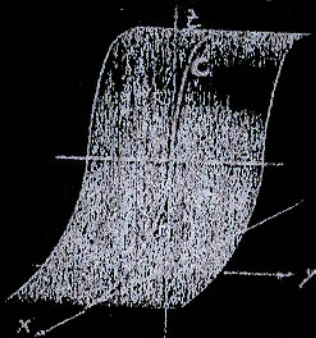
$$(2+1)^2+(-3-2)^2+(4-3)^2=r^2 \implies r^2 = 35$$

y la ecuación buscada es $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=35$

Superficie cilíndrica

Se llama superficie cilíndrica a la generada por una recta que se mueve siempre paralela a una recta fija dada y pasa siempre por una curva plana fija dada.

La recta móvil se llama generatriz y la curva fija directriz de la superficie cilíndrica.



Curva directriz C.

La recta dada intersecta a C.

Cilindro: Las generatrices intersectan a C y son paralelas a la recta dada.

En nuestro estudio consideraremos que la curva directriz se halla contenida en un plano coordenado. Si las generatrices de una superficie cilíndrica son perpendiculares al plano de la directriz, se llaman superficies cilíndricas rectas; caso contrario, superficies cilíndricas oblicuas.

Una ecuación representa una superficie cilíndrica recta, cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado que contiene a la directriz, si y sólo si carece de la variable no medida en ése plano.

En general $f(x,y)=0$; es la ecuación de una superficie cuya directriz está contenida en el plano xy, y sus generatrices son paralelas al eje z.

Ejemplo 1

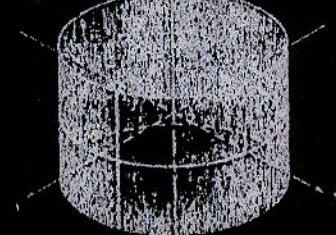
Para el cilindro circular recto de la figura, la ecuación de la curva directriz es:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

La ecuación del cilindro es simplemente la ecuación de su curva directriz:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Las generatrices son paralelas al eje z

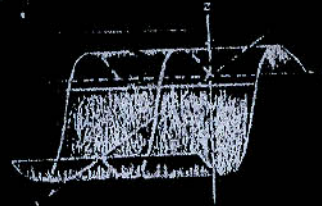


Ejemplo 2



Dibujar la superficie de ecuación $z = y^2$. La gráfica es un cilindro cuya curva directriz $z = y^2$ es una parábola en ese plano YZ. Las generatrices del cilindro son paralelas al eje X, como se ve en la figura.

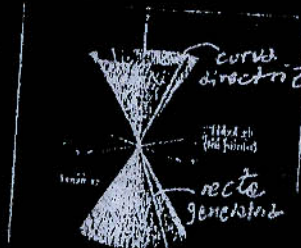
Ejemplo 3: Dibujar $z = \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$
 La gráfica es un cilindro cuya directriz es la curva seno en el plano XZ. Las generatrices son paralelas al eje y, como se ve en la figura.



Superficie cónica

Se llama superficie cónica a la generada por una línea recta que se mueve de tal manera que pasa siempre por una curva plana fija y por un punto fijo, no contenido en el plano de esa curva.

La recta móvil se llama generatriz, la curva fija directriz y el punto fijo vértice de la superficie.
 El vértice divide a la superficie en dos hojas ó ramas.



Considerando el vértice en el origen de coordenadas no se pierde generalidad. Toda superficie cónica tiene por ecuación una homogénea de segundo grado en tres variables. (La recíproca no es cierta, por ejemplo la ecuación $x^2+y^2+z^2=0$ representa un punto). Una superficie cónica con vértice en el origen tiene su eje sobre el eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es de signo distinto a las otras dos.

Ejemplo 1: La ecuación $x^2+y^2-2z^2=0$ corresponde a una superficie cónica con vértice en el origen y eje de simetría en z.

Ejemplo 2: La ecuación $x^2-2y^2+4z^2=0$ es de una superficie cónica con vértice en el origen y eje de simetría en y.

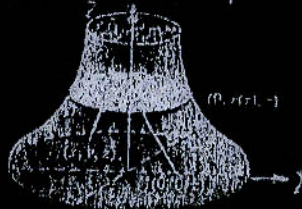
Superficie cónica con vértice desplazado: La ecuación $(z-h)^2+(y-k)^2-(z-l)^2=0$ corresponde a una superficie cónica con vértice en (h,k,l) y eje de simetría paralelo al eje x.

Ejemplo 3: La ecuación $x^2+y^2-(z-l)^2=0$ corresponde a una superficie cónica con vértice en $V(0,0,l)$ y cuyo eje de simetría es el eje z.

NOTA: EN LAS SUPERFICIES CILINDRICA Y CONICAS ESTUDIADAS, LA GENERATRIZ ES UNA RECTA.

Superficie de revolución

Una superficie de revolución es generada por la rotación de una curva plana en torno de una recta fija contenida en el plano de esa curva.



La curva plana se llama generatriz y la recta fija eje de revolución ó de rotación ó, simplemente, eje de la superficie.

En la determinación de la ecuación de una superficie de revolución no se pierde generalidad si se toma la generatriz en uno de los planos coordenados y como eje de revolución uno de los ejes coordenados contenidos en ese plano.

Si conocemos cuál es el eje de rotación y la ecuación de la curva generatriz, para obtener la ecuación de la superficie de revolución se debe reemplazar en la ecuación de la generatriz (tiene solo dos variables) la variable no correspondiente al eje de rotación por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las dos variables no medidas a lo largo del eje.

La curva generatriz contenida en el plano XY tiene por ecuaciones $f(x,y)=0$; $z=0$ y si el eje de revolución es X entonces la ecuación de la superficie de revolución es $F(x, \sqrt{y^2+z^2}) = 0$

Si la curva generatriz, como en el párrafo anterior, está contenida en el plano XY pero ahora el eje de rotación es el eje Y, entonces la ecuación de la superficie de revolución es

$$F(\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0$$

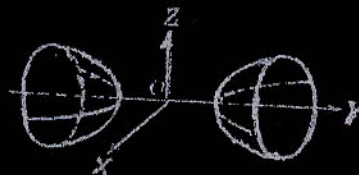
Observar: Para saber si una ecuación representa una superficie de revolución, se debe cortar con planos perpendiculares al eje de rotación, debiéndose obtener todas circunferencias cuyos centros estarán sobre dicho eje.

Ejemplo: Hallar la ecuación de la superficie generada por la rotación de la hipérbola $y^2 - 4x^2 = 4$; $z=0$ en torno al eje Y

Solución: La variable no medida a lo largo del eje Y en la ecuación de la generatriz es x, por lo tanto, sustituimos x por $\sqrt{x^2+y^2}$ en la ecuación de la hipérbola:

$$\begin{aligned} \text{Sustituimos en } y^2 - 4x^2 &= 4 \\ \text{entonces } y^2 - 4(\sqrt{x^2+z^2})^2 &= 4 \\ y^2 - 4(x^2+z^2) &= 4 \\ y^2 - 4x^2 - 4z^2 &= 4 \end{aligned}$$

A ésta superficie se la llama hiperboloide de revolución de dos hojas.



Traslación

Por traslación de los ejes coordenados en el espacio entendemos la operación de mover los ejes coordenados a una posición diferente, de manera que los nuevos ejes sean paralelos a los originales, respectivamente, y de la misma dirección.

Consideremos una traslación de los ejes tal que el origen $O(0,0,0)$ tome la nueva posición $O'(h,k,l)$ y que los ejes x,y,z tomen nuevas posiciones x',y',z' , respectivamente. Designemos por (x,y,z) y (x',y',z') , respectivamente, las coordenadas de un punto cualquiera P del espacio referido a los ejes originales y a los nuevos ejes. Bajo estas condiciones las ecuaciones de transformación de las coordenadas originales a las nuevas son:

$$x = x' + h \quad y = y' + k \quad z = z' + l$$

Por ejemplo:

Si consideramos que la ecuación de una esfera en un sistema coordenado $O'(x',y',z')$ está dada por la ecuación $x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2$ (1) y queremos referir dicha ecuación al sistema $O(x,y,z)$ tal que las coordenadas de O' en dicho sistema son $O'(h, k, l)$, la ecuación de la superficie esférica es:

si $x=x'+h$ entonces $x'=x-h$ de igual manera $y'=y-k$ $z'=z-l$ reemplazando en (1) se obtiene: $(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$ ecuación de la superficie esférica de radio r y centro (h,k,l)

Ecuación general de segundo grado con tres variables

Llamamos ecuación general completa de segundo grado con tres variables, a:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0 \quad (1)$$

Uno por lo menos de los coeficientes A,B,D,C,E,F deben ser distintos de cero.

Una superficie cuya ecuación es de la forma (1) se llama **superficie cuádrica**. Las superficies esféricas, cilíndricas y cónicas, son cuádricas.

La ecuación (1) mediante operaciones apropiadas con coordenadas, se puede transformar de manera que tome una de las dos formas siguientes:

$$I) \quad Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$$

$$II) \quad Mx^2 + Ny^2 = Sz$$

Las superficies del tipo I, tienen un centro de simetría, que es el origen y por ello se las llama cuádricas con centro.

Las superficies del tipo II no tienen centro de simetría y por lo tanto se las llama cuádricas sin centro.

A continuación en forma de tabla, damos una clasificación de las superficies representadas por ecuaciones de los tipos I y II. La naturaleza de las superficies dependerá del valor de los coeficientes.

Clasificación de las cuádricas

Tipo I : $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$

Coeficiente		Lugar geométrico
R	M,N,P	
>0	Todos positivos	Elipsoide
	Todos negativos	Ningún lugar geométrico
	Dos positivos, uno negativo	Hiperboloide de una hoja
	Uno positivo, dos negativos	Hiperboloide de dos hojas
	Uno cero, dos positivos	Cilindro elíptico (ó circular) recto
	Uno cero, dos negativos	Ningún lugar geométrico
	Uno cero, uno positivo, uno negativo	Cilindro hiperbólico recto
	Dos cero, uno positivo	Dos planos paralelos diferentes
	Dos cero, uno negativo	Ningún lugar geométricos
=0	Todos del mismo signo	Un solo punto, el origen
	Dos positivos, uno negativo	Cono recto
	Uno cero, dos del mismo signo	Todos los puntos sobre un eje coordenado
	Uno cero, dos de signos contrarios	Dos planos que se cortan
	Dos cero	Un plano coordenado(2 planos coincidentes)

* Cuando $R < 0$, se invierten los signos de los coeficientes M,N,P ; los lugares geométricos correspondientes estarán dados como para $R > 0$

Tipo II : $Mx^2 + Ny^2 = Sz$

Coeficientes		Lugar geométrico
S**	M,N	
>0	Del mismo signo	Paraboloide elíptico
	Signos opuestos	Paraboloide hiperbólico
	Uno ó cero	Cilindro parabólico recto
=0	Del mismo signo	Todos los puntos sobre un eje coordenado
	Signos opuestos	Dos planos que se cortan
	Uno cero	Un plano coordenado(dos planos coincidentes)

** Cuando $S < 0$, se invierten los signos de los coeficientes M y N ; los lugares geométricos correspondientes estarán dados entonces como para $S > 0$.

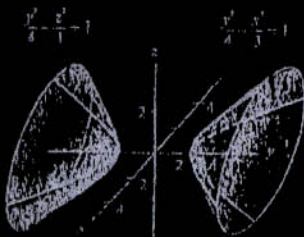
Ejemplo : Describir y dibujar la superficie dada por $4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0$.

Solución. Expresamos la superficie dada en forma canónica, como sigue.

$$\frac{x^2}{-3} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0 \quad \text{Dividir por } -12$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{1} = 1 \quad \text{Forma canónica}$$

De la Tabla ~~1~~ concluimos que la superficie es un hiperboloide de dos hojas, cuyo eje es el eje y. Para ayudar en el dibujo de esta superficie, encontramos las trazas siguientes.



Hiperboloide de dos hojas

$$\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} - z^2 = 1$$

traza xy: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} = 1$ Hiperbola
(z = 0)

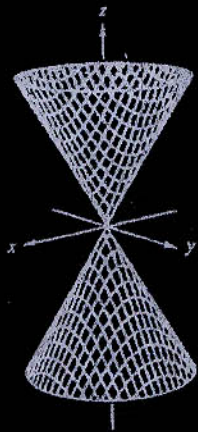
traza xz: $\frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{1} = 1$ No hay traza
(y = 0)

traza yz: $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$ Hiperbola
(x = 0)

TABLA 14.1. Superficies cuadráticas

	<p style="text-align: center;">Elipsoide</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>Traza Plano</p> <p>Elipse Paralelo al plano xy</p> <p>Elipse Paralelo al plano xz</p> <p>Elipse Paralelo al plano yz</p> <p>La superficie es una esfera si $a = b = c \neq 0$.</p>	
	<p style="text-align: center;">Hiperboloide de una hoja</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>Traza Plano</p> <p>Elipse Paralelo al plano xy</p> <p>Hipérbola Paralelo al plano xz</p> <p>Hipérbola Paralelo al plano yz</p> <p>El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.</p>	
	<p style="text-align: center;">Hiperboloide de dos hojas</p> $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p>Traza Plano</p> <p>Elipse Paralelo al plano xy</p> <p>Hipérbola Paralelo al plano xz</p> <p>Hipérbola Paralelo al plano yz</p> <p>El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo. No hay traza en el plano coordenado perpendicular a este eje.</p>	

TABLA 14.1. Superficies cuadráticas

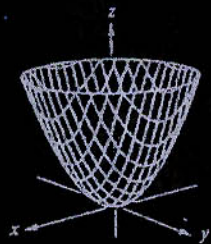
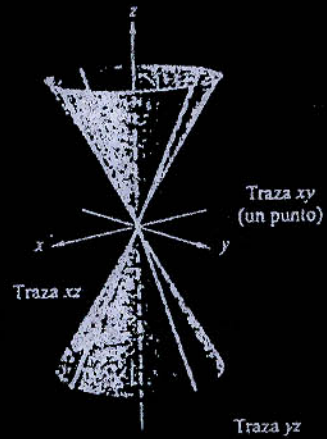


Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

- Traza Plano
 Elipse Paralelo al plano xy
 Hipérbola Paralelo al plano xz
 Hipérbola Paralelo al plano yz

El eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo. Las trazas en los planos coordenados paralelos a ese eje son rectas que se cortan.

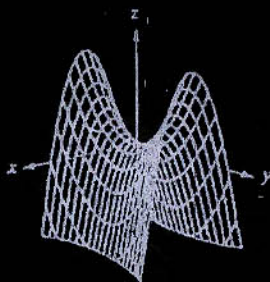
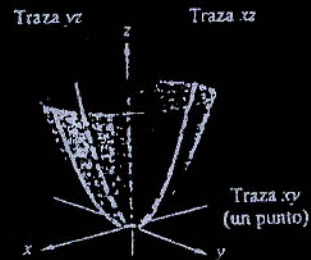


Paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

- Traza Plano
 Elipse Paralelo al plano xy
 Parábola Paralelo al plano xz
 Parábola Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la potencia unidad.

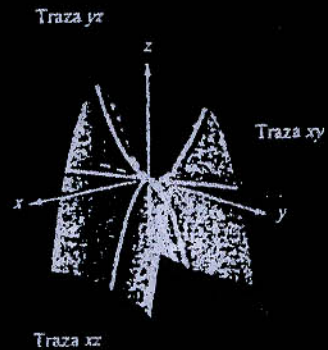


Paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

- Traza Plano
 Hipérbola Paralelo al plano xy
 Parábola Paralelo al plano xz
 Parábola Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la potencia unidad.



Ecuaciones paramétricas

Ya hemos visto que una recta, una línea sobre la que podemos movernos con un sólo grado de libertad (en una orientación ó en la orientación contraria), se puede representar mediante ecuaciones en un sólo parámetro. El parámetro puede tomar cualquier valor real:

Así
$$\begin{aligned} x &= x_0 + t u_1 \\ z &= z_0 + t u_3 \\ y &= y_0 + t u_2 \end{aligned}$$

es la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y tiene la dirección del vector (u_1, u_2, u_3) .

Asimismo, un plano en el espacio, sobre el que nos podemos mover con dos grados de libertad, se puede representar mediante una ecuación biparamétrica.

La ecuación
$$\begin{aligned} x &= x_0 + t u_1 + r v_1 \\ y &= y_0 + t u_2 + r v_2 \\ z &= z_0 + t u_3 + r v_3 \end{aligned}$$

representa al plano que pasa por (x_0, y_0, z_0) y es paralelo al plano que pasa por el origen y contiene a los vectores (u_1, u_2, u_3) y (v_1, v_2, v_3) .

De la misma forma una curva más general en el espacio viene dada por unas ecuaciones paramétricas con un sólo parámetro (un grado de libertad):

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \\ z &= h(t) \end{aligned}$$

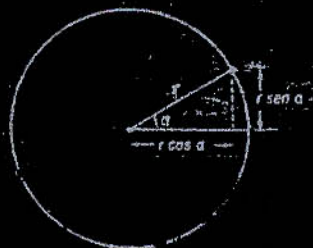
y una superficie en el espacio viene representada por unas ecuaciones paramétricas con dos parámetros:

$$\begin{aligned} x &= f(t, r) \\ y &= g(t, r) \\ z &= h(t, r) \end{aligned}$$

Líneas planas

Circunferencia en paramétricas

La ecuación de una circunferencia que tiene centro en el origen y radio r es $x^2 + y^2 = r^2$. Ahora podemos poner la ecuación de la circunferencia en paramétricas. Vamos a describir el movimiento de un punto sobre la circunferencia mediante la variación de valores de un parámetro.



Tomemos como parámetro el ángulo α mediante el cuál se describen cíclicamente todos los puntos:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha \\ y &= r \sin \alpha \end{aligned}$$

Cuando α varía de 0 a 2π el punto (x, y) gira uniformemente, describiendo una circunferencia y volviendo al mismo punto.

Análogamente, las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de centro (h, k) y radio r son:

$$\begin{aligned} x &= h + r \cos \alpha \\ y &= k + r \sin \alpha \end{aligned}$$

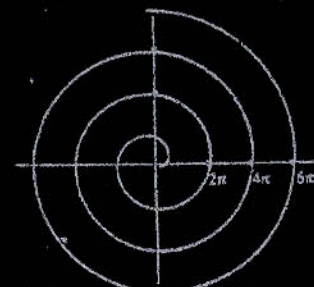
Espiral

Observa que las ecuaciones :

$$\begin{aligned} x &= \alpha \cos \alpha & \alpha &\geq 0 \\ y &= \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

se parecen mucho a las de una circunferencia.

Sin embargo, el radio en lugar de ser fijo va aumentando paulatinamente con el ángulo α .



Para $\alpha < 0$ se obtendría la curva simétrica de ésta respecto al eje Y .

Elipse en paramétricas

La ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas y eje focal en el eje x , es:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

Las ecuaciones paramétricas recuerdan a las de la circunferencia :

$$x = a \cos \alpha$$

$$y = b \sin \alpha$$

Si el centro de la elipse es (h,k) , entonces:

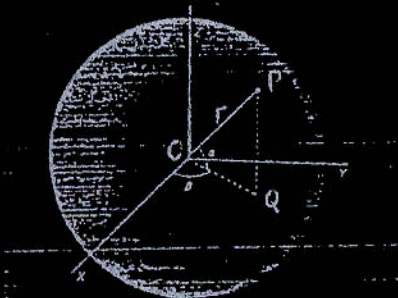
$$x = h + a \cos \alpha$$

$$y = k + b \sin \alpha$$

Superficies

Ecuaciones paramétricas de la esfera

Podemos deducir las ecuaciones paramétricas de la esfera analizando el gráfico.



Del triángulo: OQP

$$z = r \sin \alpha$$

$$r_1 = r \cos \alpha$$

Del triángulo ORQ

$$y = r_1 \sin \beta = r \cos \alpha \sin \beta$$

$$x = r_1 \cos \beta = r \cos \alpha \cos \beta$$

por lo tanto las ecuaciones paramétricas de la esfera, son:

$$x = r \cos \alpha \cos \beta$$

$$y = r \cos \alpha \sin \beta$$

$$z = r \sin \alpha$$

Superficie cónica en paramétricas

Las ecuaciones paramétricas de una superficie cónica de eje z , son:

$$x = \beta \cos \alpha$$

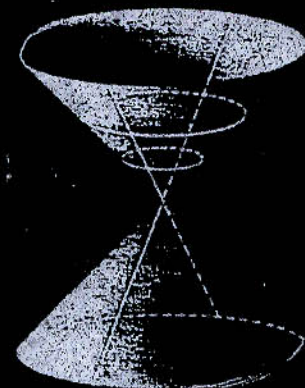
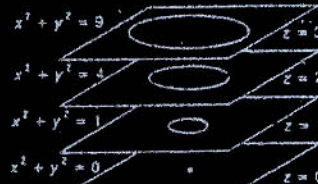
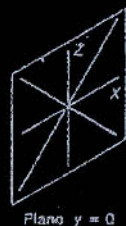
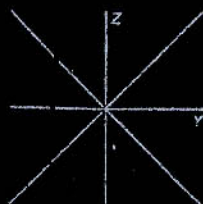
$$y = \beta \sin \alpha$$

$$z = \beta$$

Se corresponde con la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Si se desea representarla, se estudia las secciones que se producen con los planos:

$x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $z = 1$; $z = -1$ $z = k$



La superficie se extiende indefinidamente hacia arriba y hacia abajo. Recordemos que esta superficie cónica es la superficie que cortándola con planos convenientes da lugar a la elipse, la hipérbola, la parábola,..... las cónicas.

Ecuaciones paramétricas del cilindro

Las ecuaciones siguientes corresponden a un cilindro circular recto de eje z:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$$

Si en la ecuación paramétrica del cilindro cambiamos el parámetro α y ponemos:

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

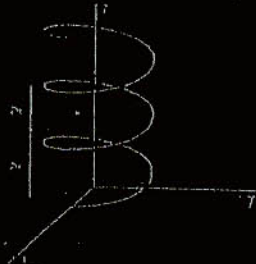
de qué figura se trata? Pensemos si es una superficie ó una curva. Se observa que z aumenta con α , es decir, aumenta cuando se gira.

Hélice

La curva de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \\ z = k\alpha \end{cases}$$

se llama hélice (es realmente la curva que describe un punto de la hélice de un avión cuando éste vuela en línea recta) Al variar k las espiras se aprietan más o menos.



La gráfica corresponde a la ecuación dada por:

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

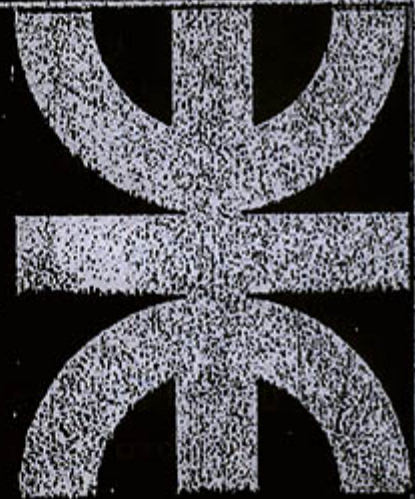
al eje Z se le llama eje de la hélice.

El eje de la hélice puede estar desplazado del origen.

Tener presente: Trabajando con ecuaciones paramétricas debemos recordar que:

- Curvas \rightarrow un parámetro
- Superficies \rightarrow dos parámetros

U.T.N.
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA
NACIONAL
Fac. Reg. Sta Fe



Cátedra :

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Cuaderno N° 2

Temas :

Matrices
Determinantes
Sistemas de ecuaciones lineales

Carreras :

Ingeniería Mecánica, Eléctrica, Civil e Industrial

Material elaborado por :

Redac. Original : Ing. Ello PASCUAL
Modific. : Ing. Alberto R. GONCEBATT

(Edición preliminar)

Año 1999

MATRICES

1- Definición :

Se denomina matriz a una disposición ordenada de números en m filas y n columnas (filas son las horizontales y columnas las verticales), encerrados entre corchetes (pudiéndose utilizar también llaves o paréntesis)

Los números que forman las matrices se denominan sus elementos.

Las filas de una matriz se enumeran desde arriba hacia abajo (1 a m) y sus columnas de izquierda a derecha (1 a n)

Al referirnos a la línea de una matriz, estaremos significando indistintamente fila o columna.

En general los elementos de una matriz se identifican por medio de una misma letra minúscula acompañada de un par de subíndices, el primero de los cuales nos indica la fila a la cual pertenece ese elemento y el segundo la columna en la cual se encuentra ubicado.

Así por ejemplo a_{ij} representa un elemento genérico de una matriz y es el que se encuentra en la intersección de la fila i con la columna j .

Las matrices se simbolizan por medio de letras mayúsculas, o por medio de su elemento genérico encerrado entre corchetes o paréntesis (a_{ij}).

Es decir llamamos matriz a la siguiente expresión :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Orden de una matriz :

Llamamos orden de una matriz a la expresión $m \times n$ donde la primer letra m nos indica el número de filas de la matriz y la segunda n el número de columnas que esa matriz posee. Cuando quiere explicitarse el orden de una matriz suele escribirse :

$$A = A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Las matrices en general se denominan **rectangulares** cuando $m \neq n$ y **cuadradas** cuando $m = n$, en este último caso simplemente se dice que las matrices son de orden n , significando con ello que tienen igual cantidad de filas y columnas.

Ejemplos :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ Es una matriz rectangular de orden } 2 \times 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \text{ Es una matriz cuadrada de orden } 2 \times 2 \text{ o simplemente de orden } 2$$

Si los elementos de una matriz son números reales la matriz se denomina real. Existen matrices imaginarias y también complejas, según lo sean uno o más de sus elementos.

Igualdad entre matrices :

Dos matrices se dice que son iguales, si y solo si, son iguales sus elementos homólogos o correspondientes.

En símbolos : $(a_{ij}) = (b_{ij}) \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i \quad \forall j$

De lo anterior es evidente que para que dos matrices sean iguales necesariamente deben ser del mismo orden.

Matriz transpuesta :

Se llama matriz transpuesta de una matriz dada A a aquella matriz que resulta de la matriz dada, cambiando filas por columnas y la simbolizamos con A^T .

Resulta evidente que si A es de orden $m \times n$ su matriz transpuesta A^T , será de orden $n \times m$ y que el elemento a_{ij} de A es el elemento a_{ji} de A^T .

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

A es de orden 2×3 y A^T es de orden 3×2

Matriz fila : Se llama a aquella matriz que posee una sola fila.

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}) \text{ es una matriz fila de orden } 1 \times n$$

Matriz columna : Se llama a aquella matriz que posee una sola columna.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix} \text{ es una matriz columna de orden } m \times 1$$

Matrices cuadradas : Habíamos llamado matriz cuadrada a aquellas matrices que tienen igual cantidad de filas que de columnas

Diagonal principal : En una matriz cuadrada de orden n llamamos diagonal principal al conjunto ordenado $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ de los elementos que se encuentran en la intersección de filas y columnas que ocupan igual posición

Traza de una matriz: En una matriz cuadrada de orden n llamamos traza de la matriz a la suma de los elementos de su diagonal principal.

$$\text{Tr}A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

Debe destacarse que solo se puede calcular las trazas de matrices cuadradas.

Tipos de matrices cuadradas :

Matriz diagonal :

Se llama **matriz diagonal** a aquella matriz cuadrada en la cual todos los elementos que están por fuera de la diagonal principal son iguales a cero.

En símbolos :

$A = (a_{ij})$ Es **matriz diagonal** $\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$ Ejemplo : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz escalar :

Se llama **matriz escalar** a aquella matriz diagonal en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales entre si.

En símbolos :

$B = (b_{ij})$ Es matriz escalar $\Leftrightarrow \begin{cases} b_{ij} = 0; \forall i \neq j \\ b_{ij} = k; \forall i = j \end{cases}$ Ejemplo : $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz unidad o identidad :

Se llama matriz unidad o identidad a aquella matriz escalar en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales a uno (1). Se la simboliza con la letra I .

Ejemplo : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Es la matriz identidad de orden 3

Matriz triangular superior :

Se llama matriz triangular superior a aquella matriz cuadrada en la cual todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal son iguales a cero.

En símbolos :

$A = (a_{ij})$ de $n \times n$ es M.T.S $\Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

Matriz triangular inferior:

Se llama matriz triangular inferior a aquella matriz en la cual todos los elementos que esta por arriba de la diagonal principal son iguales a cero.

En símbolos :

$$B = (b_{ij}) \text{ Es M.T.I. } \Leftrightarrow b_{ij} = 0 \quad \forall i < j$$

Ejemplos :

Matriz triangular superior

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices :

Vamos a definir esas operaciones utilizando los mismos signos que en la aritmética con números, pero - estrictamente considerado - deberían utilizarse nuevos signos. En Matemática, que se caracteriza por la existencia y unicidad de lo que se define, deberían usarse signos distintos para lo que no es idéntico, ya sea por que no lo son los elementos con que se opera o no lo son las mismas operaciones. Existirán matrices que no cumplirán con las definiciones que daremos. Diremos entonces que tales matrices no son **conformables** frente a la operación definida

Suma de matrices :

Se dice que dos matrices son conformables para la suma cuando ambas son del mismo orden, en caso contrario no puede efectuarse la suma.

Definición :

La suma de dos matrices del mismo orden, nos da por resultado otra matriz de igual orden a las anteriores en la cual, cada uno de sus elementos se obtiene como la suma de los elementos correspondientes de las matrices sumandos.

En símbolos : $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (c_{ij}) / c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i \forall j$

Ejemplo : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$

Propiedades de la suma matrices:

Dada tres matrices **A**, **B** y **C** conformables para la suma \Rightarrow

1. $A + B = B + A$ (Conmutativa)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Asociativa)
3. $\exists! A^* / A + A^* = A \quad \therefore A^* = \varphi$ (Existencia de la matriz nula)
4. $\exists! A^* / A + A^* = 0 \quad \therefore A^* = -A$ (Existencia de la matriz opuesta)

Matriz nula : La identificamos con la letra φ y es aquella matriz de cualquier orden en la cual todos sus elementos son iguales a cero.

Matriz opuesta : Se llama matriz opuesta de una matriz dada **A** a aquella matriz del mismo orden que **A**, en la cual todos sus elementos son iguales a los de **A** en valor absoluto pero con signo contrario. La simbolizamos con : $-A$

Ejemplo : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ su opuesta es $-A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

Producto de una matriz por un escalar ($N^o \mathbb{R}$) :

El producto de una matriz **A** por un escalar α nos da por resultado otra matriz del mismo orden que la matriz dada en la cual cada uno de sus elementos se obtiene de multiplicar el escalar por cada uno de los elementos de la matriz dada.

En símbolos : $\alpha \cdot (a_{ij}) = (c_{ij}) / c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \quad \forall i \forall j$

Ejemplo : $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

Propiedades del producto de una matriz por un escalar :

Dados dos matrices **A** y **B** conformables para las operaciones que mas abajo se indican y los escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$ (Asociativa)
2. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$ (Distributiva con respecto a la suma de escalares)
3. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$ (Distributiva con respecto a la suma de matrices)
4. $1 \cdot A = A$ (Identidad multiplicativa)

Resta o diferencia de matrices :

Teniendo en cuenta la definición de las dos operaciones anteriores la resta o diferencia entre dos matrices **A** y **B**, es igual a la suma de la matriz minuendo mas la opuesta de la matriz sustraendo.

Producto de matrices :

Dos matrices se dicen que son **conformables para el producto** solo si el número de columnas del primer factor es igual al número de filas del segundo factor, en caso contrario no puede efectuarse el producto, el que se define del siguiente modo.

Definición :



Dadas dos matrices $(a_{ij})_{m \times n}$ y $(b_{ij})_{n \times p}$ conformables para el producto, el producto de ambas en ese orden nos da por resultado otra matriz $(c_{ij})_{m \times p}$ de orden $m \times p$, que tiene tantas filas como filas tiene el primer factor y tantas columnas como columnas tiene el segundo factor y en la cual cada uno de sus elementos c_{ij} se obtiene como la suma de los productos de los elementos de la fila i del primer factor por los de la columna j del segundo factor.

En símbolos : $(a_{ij})_{m \times n} \cdot (b_{ij})_{n \times p} = (c_{ij})_{m \times p}$

$$/ c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{i,k} \cdot b_{k,j} \quad \forall i \forall j$$

Ejemplo :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

Cálculo de los elementos de la matriz producto:

$$c_{11} = \sum_{k=1}^3 a_{1,k} \cdot b_{k,1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^3 a_{1,k} \cdot b_{k,2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

$$c_{13} = \sum_{k=1}^3 a_{1,k} \cdot b_{k,3} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^3 a_{2,k} \cdot b_{k,1} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$$

$$c_{22} = \sum_{k=1}^3 a_{2,k} \cdot b_{k,2} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$$

$$c_{23} = \sum_{k=1}^3 a_{2,k} \cdot b_{k,3} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$$

Esquema practico para el cálculo del producto de matrices:

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} \downarrow & & \\ \downarrow & & \\ \downarrow & & \end{pmatrix} = (b_{ij})_{3 \times 3} \\
 \hline
 (a_{ij})_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{21} & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = (c_{ij})_{2 \times 3}
 \end{array}$$

- 1) Se coloca el primer factor en el tercer cuadrante y el segundo factor en el primer cuadrante
- 2) La matriz producto se obtiene en el cuarto cuadrante, ubicándose cada uno de sus elementos en las intersecciones de las prolongaciones de las filas y de las columnas del primer y segundo factor respectivamente.
- 3) El cálculo de cada elemento de esta última matriz, se obtiene mediante la suma de los productos de los elementos correspondientes de la fila del primer factor y de la columna del segundo factor cuyas prolongaciones se intersectan en el.

Así por ejemplo : $c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$

Ejemplo : Calcular el siguiente producto entre matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 15 & 7 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Cálculos auxiliares :

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \\
 \hline
 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 15 & 7 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Observación : El producto de dos matrices puede ser la matriz nula sin que ninguno de los dos factores lo sea.

Ejemplo : $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$

Propiedades del producto entre matrices :

Suponiendo que las matrices dadas son conformables

para las operaciones que a continuación se indican, puede demostrarse que el producto matricial

cumple con las siguientes propiedades:

1) Asociativa : $A.(B.C) = (A.B).C$

2) Distributiva : $A.(B+C) = A.B+A.C$

$(A+B).C = A.C+B.C$

3) $\alpha.(B.C) = (\alpha.B).C = B.(\alpha.C)$

Observación : En general el producto de matrices **no goza de la propiedad conmutativa** : es

decir que **A.B** no necesariamente es igual a **B.A** . Es posible que esta igualdad no se cumpla debido

a tres razones :

a) Puede suceder que **A.B** sea conformable para el producto , pero que **B.A** no lo sea.

b) Puede suceder que **A.B** y **B.A** sean conformables para el producto, pero que sus resultados

sean matrices de distintos ordenes.

c) Finalmente puede ocurrir que A.B y B.A sean conformables para el producto y además ser sus

resultados matrices del mismo orden, pero éstas tener elementos distintos.

Ejemplo : Dadas las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Al multiplicarlas se tiene :

$$A.B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B.A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A.B \neq B.A$$

Producto de matrices como combinaciones lineales :

Las matrices **fila** y las matrices **columna**

ofrecen otra posibilidad de concebir el producto matricial.

Sean por ejemplo : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{n1} \\ x_{m1} \end{pmatrix}$ entonces

$$A.X = \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \dots + a_{1n}x_{n1} + a_{1m}x_{m1} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + \dots + a_{2n}x_{n1} + a_{2m}x_{m1} \\ \dots \\ a_{m1}x_{11} + a_{m2}x_{21} + \dots + a_{mn}x_{n1} + a_{mm}x_{m1} \end{pmatrix} = x_{11} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_{21} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_{n1} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Lo que nos indica que el producto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ de una matriz \mathbf{A} por una matriz columna \mathbf{X} puede determinarse como una combinación lineal de las columnas de la matriz \mathbf{A} cuyos coeficientes numéricos son los correspondientes elementos de la matriz columna \mathbf{X} . En otras palabras, el producto de una matriz \mathbf{A} por una matriz columna \mathbf{X} , es igual a la suma de los productos de las columnas de \mathbf{A} previamente multiplicadas por los correspondientes elementos de la matriz columna \mathbf{X} .

Ejemplo :
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}_{3 \times 1} \quad \text{iverificar!}$$

De igual modo puede demostrarse que el producto $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}$ de una matriz fila \mathbf{Y} por una matriz \mathbf{A} , es igual a la suma de las filas de \mathbf{A} previamente multiplicadas por los correspondientes elementos de la matriz fila \mathbf{Y} .

Antes de abordar otras cuestiones puramente matriciales, vamos a introducir la definición, formas de cálculo y propiedades de la función determinante que tiene como dominio al conjunto de todas las matrices cuadradas.

DETERMINANTES

Definición como función :

Definiremos al determinante como una función que llamaremos *función determinante* y que tendrá como dominio al conjunto de todas las matrices cuadradas y como codominio al conjunto de los números reales.

Consideraremos matrices cuadradas de elementos reales y a cada matriz entonces le corresponderá un único número real como imagen y que llamaremos determinante de esa matriz.

Es decir $f : R_{n \times n} \rightarrow R$

Esta definición es válida también si trabajásemos con matrices con elementos complejos, en cuyo caso el determinante será un número complejo.

Distintas notaciones :

Sea $A \in R_{n \times n} \Rightarrow f(A) = |A| = \det A \in R$

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \in R$$

El orden de un determinante es igual al orden de la matriz de la cual es su imagen.

Previo a definir el operador o ley de correspondencia de la función determinante vamos a introducir la siguiente definición :

Menor - Definición :

Llamamos menor de un elemento a_{ij} de una matriz cuadrada de orden n al determinante de la matriz de orden $(n-1)$ que resulta de eliminar en la matriz dada la fila i y la columna j a la cual pertenece ese elemento .Lo representaremos con M_{ij}

Ejemplo :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad ; \quad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Definición del operador o ley de correspondencia de la función determinante por recurrencia :

El operador o ley de correspondencia de la función determinante lo vamos a establecer del siguiente modo :

$$f: \left\{ \begin{array}{l} |a_{11}| = a_{11} \\ |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k} \end{array} \right.$$

desarrollando la sumatoria :

$$\det A_{n \times n} = |A| = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} - a_{14} M_{14} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n}$$

Esta definición es válida si la aplicamos por recurrencia respecto del orden, lo cual significa que para definir un determinante de orden n es necesario haber definido el de orden (n-1) pues en la sumatoria aparecen M_{1k} que son determinantes de orden (n-1). Es decir cuando $n = 1$ su imagen está perfectamente definida $|a_{11}| = a_{11}$. Entonces aplicando la sumatoria estamos en condiciones de hallar los determinantes para $n = 2$; conocidos los de orden $n = 2$ podemos hallar los de orden $n = 3$ y así sucesivamente los determinantes de matrices de cualquier orden.

De esta forma, a cada matriz cuadrada A le corresponderá invocadamente un único número real (que es su imagen) y que llamaremos determinante de A y entonces existe la función definida, pues cumple las condiciones de existencia y unicidad.

A manera de ejemplo apliquemos la definición al cálculo de determinantes de segundo y tercer orden :

A) De segundo orden :

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{k=2} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k} = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} =$$

$$a_{11} |a_{22}| - a_{12} |a_{21}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Regla practica : *Todo determinante de segundo orden es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.*

B) De tercer orden :

Sea :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{k=3} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k} = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13}$$

Observar que ahora estos menores son de orden 2, entonces :

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

como ya sabemos hallar det. de $n = 2$, resulta :

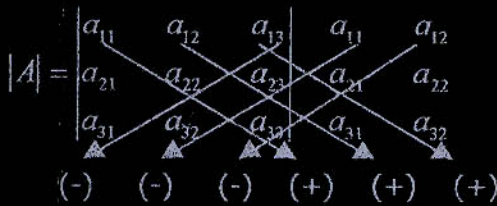
$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) = \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} = \end{aligned}$$

agrupando los términos algebraicamente positivos y los algebraicamente negativos, tenemos:

$$|A| = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})$$

Regla práctica : (SARRUS)

Válida únicamente para el cálculo de determinantes de $n = 3$



- 1) Dado el determinante de orden 3, se agregan a su derecha las dos primeras columnas.
- 2) Luego los 3 términos algebraicamente positivos del desarrollo se obtienen del siguiente modo :
El primero de ellos es igual al producto de los elementos de la diagonal principal y los restantes se obtienen mediante el producto de los elementos que se encuentran en las direcciones paralelas a la diagonal principal (ver esquema).
- 3) Finalmente los términos algebraicamente negativos del desarrollo, se obtienen en forma similar a los anteriores, pero con relación a la diagonal secundaria (ver esquema).

¡Verificar con el desarrollo obtenido anteriormente mediante la aplicación de la definición!

Determinantes de orden superior :

Para el cálculo de determinantes de orden superior ($n > 3$) si bien el cálculo se podría hacer aplicando la definición, es evidente que cuanto mayor sea el orden mas extenso, complicado y tedioso será dicho cálculo. Por ejemplo para calcular un determinante de orden $n = 5$, habría que calcular 5 menores de $n = 4$ y por cada uno de ellos sería necesario calcular 4 de $n = 3$, en conclusión, necesitaríamos calcular 20 determinantes de tercer orden para calcular uno de quinto orden.

Para sintetizar la resolución de los determinantes vamos entonces a estudiar un conjunto de propiedades que se basan en la definición dada y que nos permitirá resolver los determinantes de una forma mucho más simple.

Previo a ello vamos enunciar la siguiente definición, que nos permitirá establecer de otro modo la ley de correspondencia de la función determinante.

Adjunto o Cofactor - Definición:

Se llama Adjunto o Cofactor de un elemento a_{ij} de una matriz cuadrada a su menor M_{ij} precedido del signo más o menos de acuerdo a si la suma de los subíndices del elemento considerado es par o impar. Lo representamos con A_{ij} .

En símbolos : $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Ejemplo :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} ; A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} ; A_{32} = -M_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Definición de determinante en función de los adjuntos :

Anteriormente definimos el operador de la función determinante en la forma :

$$f \left\{ \begin{array}{l} |a_{11}| = a_{11} \\ \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \end{array} \right. = \sum_{K=1}^{K=n} (-1)^{1+K} a_{1K} M_{1K}$$

Si ahora tenemos en cuenta que :

$$A_{1k} = (-1)^{1+k} \cdot M_{1k}$$

La anterior nos queda en la forma, :

$$f : \left\{ \begin{array}{l} |a_{11}| = a_{11} \\ |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{K=1}^{K=n} a_{1K} \cdot A_{1K} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n} \end{array} \right.$$

que podemos enunciar en la forma : **" Todo determinante de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de su primer fila por sus adjuntos o cofactores correspondientes."**

Si bien no lo vamos a demostrar, esta definición puede generalizarse para cualquier fila o columna de un determinante, expresándolo del siguiente modo :

" Todo determinante de orden n es igual a la suma de los elementos de una cualquiera de sus líneas (fila o columna) previamente multiplicados por sus adjuntos o cofactores correspondientes".

En símbolos : Si $A \in K^{n \times n} \Rightarrow$

$$|A| = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} \cdot A_{ij} ; \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{desarrollo por filas})$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} \cdot A_{ij} ; \text{ para } j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{desarrollo por columnas})$$

Esta definición resulta de suma importancia, puesto que de aquí en más para calcular un determinante, puede elegirse la fila o columna que más convenga.

Ejemplo :

Sea :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

Observemos que si se encara su desarrollo por la primer fila, se tienen que calcular 4 determinantes de tercer orden, si en cambio se toma la cuarta columna para hacer el desarrollo será necesario calcular un solo determinante de tercer orden.

Propiedades de los determinantes :

En general sus demostraciones están basadas en la definición anterior.

1) " Una matriz y su transpuesta tienen igual determinante "

Es decir : $|A| = |A^T|$

Ejercicio : Verificar que :

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

A partir de esta propiedad, podemos afirmar que " todo lo que es válido para las filas será válido para las columnas y recíprocamente", por lo que las próximas propiedades se enunciarán y demostrarán para líneas en general (filas o columnas indistintamente).

2) " Si una matriz cuadrada tiene todos los elementos de una de sus líneas nulos, su determinante es igual a cero "

Su demostración es inmediata y básicamente consiste en desarrollar el determinante de esa matriz por los cofactores de los elementos de su línea nula, observándose que su resultado es cero.

3) " El producto de un escalar k por un determinante es igual a otro determinante similar al anterior, con excepción de una cualquiera de sus líneas en la cual cada uno de sus elementos deben ser multiplicados por el escalar k "

Es decir :

$$k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

En otras palabras : " Si B es la matriz que resulta de la matriz A , luego de que los elementos de una de sus líneas son multiplicados por un escalar k, entonces : $\det.B = k.\det.A$ "

Demostración : Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

luego si calculamos el determinante de B desarrollando por los cofactores de su primera fila :

$$|B| = k \cdot a_{11} \cdot A_{11} + k \cdot a_{12} \cdot A_{12} + \dots + k \cdot a_{1n} \cdot A_{1n} = k \cdot (a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n}) = k \cdot |A|$$

Esta propiedad nos permite extraer factores comunes en líneas de un determinante, simplificando de esta forma su cálculo.

Ejemplo :

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 9 & 3 & 27 \\ 25 & 5 & 125 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

Una consecuencia de esta propiedad es la siguiente : Si **A** es una matriz de orden **n**, entonces :

$$\det.(k \cdot A) = k^n \cdot \det.A$$

4) "Si en una matriz se intercambian entre sí dos líneas paralelas (dos filas o dos columnas), su determinante mantiene su valor absoluto pero cambia de signo"

Verificar que :

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

5) " Si una matriz tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante es nulo"

Demostración : Supóngase que las filas *i*-ésima y *j*-ésima de **A** son iguales. Intercambiando estas filas se obtiene una matriz **B** con la propiedad de que $\det.B = - \det.A$ (por la propiedad 4). Pero como la fila *i* es igual a la fila *j*, al intercambiarlas se obtiene la misma matriz. Entonces $A = B$ y $\det.A = \det.B = - \det.A$. Por tanto, $2 \cdot \det.A = 0$, lo cual solo se cumple si : **det.A = 0**

6) "Si un matriz tiene dos líneas paralelas proporcionales, entonces su determinante es nulo"

Demostración : Sea la matriz :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ en la cual suponemos que su } 1^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}} \text{ columna son proporcionales, es}$$

decir : $a_{11} = k \cdot a_{21}; a_{21} = k \cdot a_{22}, \dots, a_{n1} = k \cdot a_{n2}$ (donde *k* es la constante de proporcionalidad)

entonces :

$$A = \begin{pmatrix} k.a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ k.a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k.a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ entonces por la propiedad (3)}$$

=0, por propiedad (5)

$$|A| = k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

7) " Si dos matrices de orden n tienen (n-1) líneas comunes (filas o columnas), la suma de sus determinantes es igual a otro determinante compuesto por las (n-1) líneas comunes y la restante formada por la suma de los elementos correspondientes de las líneas diferentes"

En símbolos :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Demostración : Resolviendo los determinantes del primer miembro por los cofactores de las líneas diferentes

$$(a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + \dots + a_{n2} \cdot A_{n2}) + (b_{12} \cdot A_{12} + b_{22} \cdot A_{22} + \dots + b_{n2} \cdot A_{n2}) =$$

$$(a_{12} + b_{12}) \cdot A_{12} + (a_{22} + b_{22}) \cdot A_{22} + \dots + (a_{n2} + b_{n2}) \cdot A_{n2}$$

Se observa que se obtiene un desarrollo idéntico al que resulta de resolver el segundo miembro por los cofactores de la segunda columna , con lo cual queda demostrada la propiedad.

8) Si una matriz de orden n, tiene una línea que es combinación lineal de las restantes líneas paralelas a ella, su determinante es nulo.

Observación : En general se dice que una línea es combinación lineal de otras cuando cada uno de sus elementos se obtienen como la suma de los elementos correspondientes de las otras líneas, previamente multiplicados por constantes.

Demostración :

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Supongamos que la tercer fila es combinación lineal de las restantes paralelas a ellas, es decir,

$$a_{31} = k_1 a_{11} + k_2 a_{21} + \dots + k_n a_{n1}$$

$$a_{32} = k_1 a_{12} + k_2 a_{22} + \dots + k_n a_{n2}$$

$$\dots$$

$$a_{3n} = k_1 a_{1n} + k_2 a_{2n} + \dots + k_n a_{nn}$$

entonces :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ k_1 a_{11} + k_2 a_{21} + \dots + k_n a_{n1} & k_1 a_{12} + k_2 a_{22} + \dots + k_n a_{n2} & \dots & \dots & k_1 a_{1n} + k_2 a_{2n} + \dots + k_n a_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Luego, si para calcular $\det.A$ aplicamos la propiedad (7) resulta

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ k_1 a_{11} & k_1 a_{12} & \dots & \dots & k_1 a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ k_2 a_{21} & k_2 a_{22} & \dots & \dots & k_2 a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ k_n a_{n1} & k_n a_{n2} & \dots & \dots & k_n a_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

finalmente, por la propiedad (6)

$$|A| = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

9) Dada una matriz cuadrada A de orden n, si a los elementos de una de sus líneas se le suman correspondientemente los elementos de otra línea paralela a ella previamente multiplicados por una constante se obtiene una nueva matriz A*, cuyo determinante es igual al de la matriz A.

En otras palabras "El determinante de una matriz no altera si a los elementos de una de sus líneas se le suman correspondientemente los elementos de otra línea paralela a ella, previamente multiplicados por una constante".

Demostración : Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & \dots & \dots & a_{2n} + ka_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces : $\det.A = \det.A^*$

por propiedad (7)

=0 por propiedad (6)

$$\det.A^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ ka_{11} & ka_{12} & \dots & \dots & ka_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det.A + 0 = \det.A$$

10) En toda matriz, la suma de los productos de los elementos de una cualquiera de sus líneas por los adjuntos de los elementos de otra línea paralela a ella, siempre es igual a cero

Es decir, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{por ejemplo : } a_{11} \cdot A_{31} + a_{12} \cdot A_{32} + \dots + a_{1n} \cdot A_{3n} = 0$$

Determinantes de matrices triangulares :

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ entonces .

$$\det.A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33})$$

$$\det.A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

Este resultado puede ser generalizado, expresando "El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal".

Otro resultado importante :

" El determinante de un producto de matrices es igual al producto de sus determinantes "

$$\det.(A.B) = (\det.A) .(\det.B)$$

Observación :

"El determinante de una suma de matrices no es igual a la suma de sus determinantes"

$$\det.(A+B) \neq (\det.A) + (\det.B)$$

Métodos para calcular determinantes de cualquier orden :

1) Dado un determinante de orden n , mediante la aplicación sucesiva de la propiedad (9), se pueden obtener determinantes iguales al dado, pero con $(n-1)$ elementos nulos en una cualquiera de sus líneas y luego al desarrollar el nuevo determinante por los adjuntos de los elementos de esa línea solamente hará falta calcular un solo menor para obtener el valor del determinante. Es decir, mediante la aplicación de este método, se consigue reducir el calculo de un determinante de orden n , al calculo de un solo determinante de orden $(n-1)$

Ejemplo :

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

F2 por 3 + F1

$$= \begin{vmatrix} 10 & -7 & 0 & 14 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

F2por (-2)+F3

$$= \begin{vmatrix} 10 & -7 & 0 & 14 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & -7 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & -7 & 0 & 14 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & -7 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

F2 por 2 + F4

$$= \begin{vmatrix} 10 & -7 & 0 & 14 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 0 & -7 \\ 8 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Desarrollando ahora por la

tercer columna, tenemos :

$$|A| = (-1) \begin{vmatrix} 10 & -7 & 14 \\ 1 & 6 & -7 \\ 8 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

Debe observarse que de un determinante de orden 4, hemos pasado a

uno de orden 3.

Si todavía se quiere reducirlo a un determinante de orden inferior, se vuelve a aplicar el procedimiento .

- 1) F2 por (-10)+F1
- 2) F2 por (-8)+F3

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & -7 & 14 \\ 1 & 6 & -7 \\ 8 & -3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 67 & 84 \\ -1 & 6 & -7 \\ 0 & -51 & 63 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -67 & 84 \\ -51 & 63 \end{vmatrix} = 63$$

2) También, mediante la aplicación sucesiva de la propiedad (9) puede llevarse el determinante de la matriz dada al determinante de una matriz triangular, el cual se sabe es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

Ejemplo :

- 1) F1x2+F2
- 2) F1x(-5/2)+F3

$$F2x(-1/12)+F3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1/2 & -19/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -61/6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot \left(\frac{-61}{6}\right) = -122$$

MATRICES (Continuación)

Matriz Adjunta - Definición

Dada una matriz cuadrada A , se define como matriz **ADJUNTA** y la simbolizamos como $Adj.A$ a la matriz transpuesta de la matriz que resulta de sustituir en la matriz dada cada elemento por su adjunto correspondiente.

Ejemplo :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow Adj.A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Propiedad : " El producto de una matriz por su Adjunta es conmutativo e igual al producto del determinante de la matriz dada por la matriz unidad "

Es decir : $A \cdot Adj A = Adj A \cdot A = |A| \cdot I$

Demostración :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

A
 $Adj A$
 $=$
 C

Efectuando el producto, tendremos en C dos clases de elementos :

$\forall i = j \Rightarrow c_{ij} = |A|$ por ejemplo : $c_{11} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n} = |A|$

$c_{22} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + \dots + a_{2n} \cdot A_{2n} = |A|$

Por ser el desarrollo del $|A|$ por los cofactores o adjuntos de los elementos de una línea.

$\forall i \neq j \Rightarrow c_{ij} = 0$ por ejemplo : $c_{12} = a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + \dots + a_{1n} \cdot A_{2n} = 0$

$c_{13} = a_{11} \cdot A_{31} + a_{12} \cdot A_{32} + \dots + a_{1n} \cdot A_{3n} = 0$

Por ser la suma de los productos de los elementos de una línea
Por los cofactores de los elementos de otra línea paralela a ella.

En consecuencia C es una matriz escalar de la forma :

$$A \cdot \text{Adj } A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot I_n \quad (\text{de la misma forma se podría demostrar la}$$

conmutabilidad).

Matriz Inversa . Definición :

Se llama matriz inversa de una matriz dada A y la simbolizamos con A^{-1} , a aquella matriz que pre - multiplicando o post- multiplicando a la matriz dada nos da por resultado la matriz unidad.

Es decir : $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$

No todas la matrices admiten matriz inversa, para ello deben cumplir con una cierta condición
A las matrices que admiten inversa, se les dice que son invertibles o inversibles.

Condición de existencia y Cálculo :

"La condición necesaria y suficiente para que una matriz admita inversa es que sea una matriz cuadrada y su determinante distinto de cero"

Como a las matrices cuadradas de determinante no nulo se las llama *matrices no singulares*, el teorema anterior puede ser enunciado del siguiente modo :

"La condición necesaria y suficiente para que una matriz admita inversa es que sea no singular"

Demostración :

a) Si $\exists A^{-1} \Rightarrow |A| \neq 0$

Si $\exists A^{-1}$ por definición : $A \cdot A^{-1} = I$ y entonces

$$\det.(A \cdot A^{-1}) = \det.(I) = 1$$

$$\det.(A) \cdot \det.(A^{-1}) = 1 \neq 0 \quad \therefore \det.(A) \neq 0$$

b) Si $|A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

Teniendo en cuenta que por propiedad de la Adjunta :

$$A \cdot \text{Adj } A = \text{Adj } A \cdot A = |A| \cdot I$$

Si por hipótesis $|A| \neq 0$, podemos dividir ambos miembros de la anterior por $|A|$

$$\frac{A \cdot AdjA}{|A|} = \frac{AdjA \cdot A}{|A|} = I$$

expresión que al compararla con la definición de inversa

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I \quad \text{se observa que } \exists A^{-1}$$

y que además :

$$A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|}$$

Ejemplo :

Dada la matriz A , calcular su inversa A⁻¹

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ en primer lugar se calcula } |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

luego entonces :

$$A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T}{9} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}^T}{9} =$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}{9} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Se deja al lector la verificación : $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$

Regla practica para el calculo de la matriz inversa de una matriz de orden 2 :

Por aplicación de la formula de calculo de la matriz inversa resulta , que si A es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ entonces : } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{pmatrix} \quad \text{¡Verificar!}$$

Unicidad de la inversa :

Teorema : " *Si una matriz cuadrada A es invertible, entonces su inversa es única* "

Demostración : Supongamos que A y B son dos inversas de A entonces, por definición :

$$A.B = B.A = I$$

y $A.C = C.A = I$

luego : $B.(A.C) = B.I = B$

y $(B.A).C = I.C = C$

como : $B.(A.C) = (B.A).C$ (por propiedad asociativa del producto de matrices)

resulta que : $B = C$

Inversa de un producto de matrices :

Teorema : " *Si A y B son dos matrices invertibles de nxn, entonces :*

1) *A.B es invertible*

2) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

Demostración : Si se puede demostrar que :

$(A.B).(B^{-1}.A^{-1}) = (B^{-1}.A^{-1}).(A.B) = I \Rightarrow$ se habrá demostrado las dos partes del teorema.

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1} \Leftrightarrow (A.B).(B^{-1}.A^{-1}) = (B^{-1}.A^{-1}).(A.B) = I$$

por propiedad asociativa del producto de matrices :

$$(A.B).(B^{-1}.A^{-1}) = A.(B.B^{-1}).A^{-1} = A.I.A^{-1} = I$$

$$(B^{-1}.A^{-1}).(A.B) = B^{-1}.(A^{-1}.A).B = B^{-1}.I.B = I$$

Este resultado puede generalizarse para el caso de 3 o más factores " *Un producto de de cualquier número de matrices invertibles es invertible y la inversa del producto es el producto de las inversas en orden invertido* "

Ecuaciones matriciales :

Se llaman a aquellas relaciones entre varias matrices , en donde una o más de ellas se desconocen. A las matrices desconocidas, se las llama incógnitas de la ecuación. Resolver una ecuación matricial, es hallar la o las incógnitas, es decir la o las matrices que satisfacen la ecuación.

Existen distintos tipos de ecuaciones matriciales, pero en razón de su importancia solo vamos a tratar las siguientes .

a) $A.X = B$ (Donde A y B son matrices conocidas y X es la matriz incógnita)

Esta ecuación solo puede ser resuelta si A admite matriz inversa, es decir, si A es una matriz no singular (cuadrada y con determinante distinto de cero).

Suponiendo que $\exists A^{-1}$, pre - multiplicamos ambos miembros de la anterior por A^{-1} .

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$

Por propiedad asociativa :

$$(A^{-1}.A).X = A^{-1}.B$$

por definición de matriz inversa :

$$I.X = A^{-1}.B$$

Luego : $X = A^{-1}.B$

b) Si la ecuación es del tipo :

$$X.A = B$$

Razonando en forma análoga a la anterior, pero post-multiplicando por A^{-1} , se tiene :

$$X.A.A^{-1} = B.A^{-1}$$

Entonces : $X = B.A^{-1}$

Ejemplo :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ecuación del tipo : $A.X = B \Rightarrow X = A^{-1}.B$

Como en un ejemplo anterior, ya se calculó la inversa de A, se tiene :

$$X = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 5 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{9} = \begin{pmatrix} 7/9 & 3/9 \\ 8/9 & -3/9 \\ -5/9 & -6/9 \end{pmatrix} \quad \text{¡Verificar que } A.X = B!$$

Propiedades de la inversa :

Teorema : Si A es una matriz invertible, entonces :

a) A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$

b) A^n es invertible y $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ para $n = 0, 1, 2, \dots$

b) Para cualquier escalar $k \neq 0$, la matriz $k.A$ es invertible y $(k.A)^{-1} = \frac{1}{k}.A^{-1}$

Demostración : Las partes (a) y (b) se dejan para demostración del lector

c) Si k es cualquier escalar distinto de cero, entonces :

$$(k.A)\left(\frac{1}{k}.A^{-1}\right) = \frac{1}{k}.(k.A).A^{-1} = \left(\frac{1}{k}.k\right).A.A^{-1} = 1.I = I$$

Propiedades de la transpuesta :

En el siguiente teorema se enuncian las propiedades más importantes de la operación de transposición.

Teorema : Si el orden de las matrices son tales que se pueden efectuar las operaciones planteadas, entonces :

a) $((A^T)^T = A$

b) $(A+B)^T = A^T + B^T$

c) $(k.A)^T = k.A^T$ donde k es cualquier escalar

d) $(A.B)^T = B^T.A^T$

Observ. : El resultado del último inciso se puede generalizar para el caso de tres o más matrices

" La transpuesta de un producto de cualquier número de matrices es igual al producto de sus transpuestas en orden invertido "

Invertibilidad de una transpuesta :

Teorema : Si A es invertible, entonces A^T también es invertible y

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Demostración : Supongamos que $B = A^{-1}$

Por definición de inversa: $A.B = B.A = I$

Si efectuamos la operación de transposición :

$$(A.B)^T = (B.A)^T = I^T = I$$

luego, por el inciso (d) del teorema anterior :

$$(A.B)^T = B^T.A^T = I$$

$$(B.A)^T = A^T.B^T = I$$

Lo cual, por definición dice que A^T tiene inversa y que $(A^T)^{-1} = B^T$, pero $B = A^{-1}$

Por lo tanto : $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Matrices simétricas y antisimétricas - Definición :

Una matriz cuadrada A se dice que es SIMÉTRICA, si $A = A^T$

Una matriz cuadrada B se dice que es ANTISIMÉTRICA, si $B = -B^T$

Puede demostrarse que si C es una matriz cuadrada cualquiera, entonces :

$A = C + C^T$ es una matriz **SIMÉTRICA**

y $B = C - C^T$ es una matriz **ANTISIMÉTRICA**

Se deja al lector, su verificación mediante ejemplos.

Rango de una matriz :

A esta altura de nuestro estudio vamos a decir, que: "**El Rango de una matriz es igual al orden del determinante de mayor orden que se puede extraer de ella y cuyo valor sea distinto de cero**".

Observación : Más adelante, vamos a definir el Rango de una matriz desde un punto de vista más riguroso.

En la práctica, para calcular el Rango de una matriz es necesario introducir el concepto de **operaciones elementales**.

Se dice que en una matriz, se efectúa una **operación elemental** cuando :

- 1) *Se intercambian entre si, dos filas o dos columnas.*
- 2) *Se multiplica una fila o una columna por un número real distinto de cero.*
- 3) *Se le suma a una línea otra paralela a ella, previamente multiplicada por una constante.*

Puede demostrarse que el Rango de una matriz no se modifica, si en ella se efectúan **operaciones elementales**.

Básicamente, el procedimiento para calcular el Rango de una matriz consiste en lo siguiente :

Dada la matriz :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mediante el empleo de operaciones elementales (se hacen aparecer ceros por debajo de la diagonal principal) y se la lleva a su forma equivalente :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, el Rango (r), es igual al número de filas que comienzan con valores distintos de cero partir de la diagonal principal, cuando las restantes filas que siguen a ellas, si existen, son todas de cero.

Ejemplo : Calcular el Rango de la siguiente matriz :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Interc. F2} \times \text{F3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1) \text{ F1} \times (-2) + \text{F2} \\ 2) \text{ F1} \times 1 + \text{F3} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{F2} \times (-7) + \text{F3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -50 \end{pmatrix} \Rightarrow r_A = 3$$

Ejemplo: Calcular el rango de la siguiente matriz :

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Interc. F1} \times \text{F2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1) \text{ F1} \times 2 + \text{F2} \\ 2) \text{ F1} \times 1 + \text{F3} \\ 3) \text{ F1} \times 3 + \text{F4} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 14 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 1) \text{ F2} \times (-1) + \text{F3} \\ 2) \text{ F2} \times (-2) + \text{F4} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_B = 2$$

Observ. : A los efectos de que en lo posible se trabaje con números enteros, es aconsejable hacer aparecer 1 sobre la diagonal principal.

Sistema No Homogéneos : Se llaman cuando por lo menos una de las ecuaciones que integran el sistema tiene término independiente distinto de cero.

c) De acuerdo con sus soluciones :

Los sistemas se clasifican : **Compatibles e Incompatibles**

Sistemas **COMPATIBLES** son aquellos que tienen solución e **INCOMPATIBLES** los que no tienen solución.

A su vez, los sistemas **COMPATIBLES** pueden ser **DETERMINADOS** o **INDETERMINADOS**.

Sistemas **Compatibles Determinados** son aquellos que poseen una única solución y los Sistemas **Compatibles Indeterminados** son los que poseen infinitas soluciones.

Matrices asociadas al sistema :

Dado el sistema :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = h_m \end{cases}$$

Se definen como matrices asociadas al mismo, a las siguientes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & h_m \end{pmatrix}$$

Donde :

A : Matriz de los coeficientes de las incógnitas

A' : Matriz de los coeficientes de las incógnitas ampliada con la columna de los términos independientes, o simplemente Matriz ampliada.

Sistemas Equivalentes :

Dos sistemas se dicen que son **equivalentes** si ambos tienen las mismas soluciones.

Es decir, las soluciones del primer sistema son soluciones del segundo y recíprocamente, todas las soluciones del segundo son soluciones del primero.

Operaciones Elementales :

Se llaman **operaciones elementales** a aquellas que aplicadas a un sistema de ecuaciones lineales nos permita obtener otro sistema equivalente al dado.

Las operaciones elementales son :

- 1) Intercambiar entre sí , dos ecuaciones del sistema.
- 2) Multiplicar una ecuación del sistema por un número real distinto de cero.

3) Sumarle a una ecuación del sistema, otra ecuación del sistema previamente multiplicada por una constante.

Por ejemplo :

$$I) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \quad II) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$III) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$IV) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -2 \\ 7x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 9 \end{cases}$$

Los cuatros sistemas son equivalentes :

El (II) se obtuvo intercambiando E_1 con E_2

El (III) se obtuvo multiplicando E_2 por 2

El (IV) se obtuvo sustituyendo E_3 por $2E_1 + E_3$

Teorema de ROUCHE – FROBENIUS :

Su enunciado consta de dos partes :

a) *La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales sea Compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada con los términos independientes.*

Sea r : rango de la matriz A

r' : rango de la matriz A'

Si $r = r' \Rightarrow$ Sistema **Compatible**

Si $r \neq r' \Rightarrow$ Sistema **Incompatible**

b) *En un sistema compatible ($r = r'$) si el rango es igual al número de incógnitas, el sistema es Determinado (solución única), y si el rango es menor que el número de incógnitas, el sistema es Indeterminado (infinitas soluciones) y la diferencia ($n - r$) nos da el número de incógnitas auxiliares que se deberán tomar para resolver el sistema.*

En resumen :

Si $r = r' \Rightarrow$ Sistema **Compatible** $\begin{cases} r = r' = n \Rightarrow \text{Determinado} \\ r = r' < n \Rightarrow \text{Indeterminado} \end{cases}$

Si $r \neq r' \Rightarrow$ Sistema **Incompatible**

Método general para resolver sistemas de m ecuaciones lineales y n incógnitas :

Si comparamos las operaciones elementales que hemos definido para un sistema de ecuaciones, con las operaciones que se aplican para calcular el rango de una matriz, observamos que son las mismas, es decir que podemos simultáneamente calcular el rango de las dos matrices : A y A' (para poder aplicar el teorema de Rouche – Frobenius) y obtener sistemas equivalentes hasta llegar a un sistema fácil de resolver.

Este es el método de escalonamiento (también llamado de GAUSS), análogo al que utilizamos para el cálculo del rango de una matriz.

Lo explicaremos con varios ejemplos :

Ejemplo n° 1:

Sea el sistema :

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x + 3y + 4z = 11 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases} \quad \text{El sistema es Normal (m = n = 3) y No Homogéneo}$$

Trabajamos con la matriz ampliada del sistema, utilizando el esquema siguiente, en el cual se separa con una línea la columna de los términos independientes, quedando a su izquierda la matriz de los coeficientes.

x	y	z	h_i	
2	-1	-1	2	Intercambiamos F2 por F1
1	3	4	11	
3	1	-2	-1	F1 por (-2)+F2 F1 por (-3)+F3
1	3	4	11	
2	-1	-1	2	
3	1	-2	-1	F2 por (-8)+F3 por(7)
1	3	4	11	
0	-7	-9	-20	
0	-8	-14	-34	
1	3	4	11	
0	-7	-9	-20	
0	0	-26	-78	

OBSERVACIÓN :
Básicamente el escalonamiento, simplemente consiste en hacer ceros todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal, mediante la aplicación de las operaciones elementales

Finalizado el escalonamiento se aplica el Teorema de Rouche – Frobenius.

En nuestro caso $r_A = r_{A'} = 3$ y como $n = 3$ el sistema es Compatible – Determinado (única solución).

Para encontrar la solución del sistema se plantea el sistema equivalente al sistema dado que se desprende de la última matriz obtenida en el escalonamiento, que en nuestro caso es :

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 11 \\ 0x - 7y - 9z = -20 \\ 0x + 0y - 26z = -78 \end{cases}$$

En donde, de la E_3 : $-26z = -78 \Rightarrow z = 3$

Se sustituye ahora el valor de z hallado, en E_2 y se despeja y

$$-7y - 27 = -20 ; 7y = -7 \Rightarrow y = -1$$

Finalmente, se sustituyen los valores de z e y en E_1 para calcular x

$$x - 3 + 12 = 11 \Rightarrow x = 2$$

Luego la solución será $S(2, -1, 3)$

Ejemplo N° 2:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 6x - 2y + 2z = 3 \\ -2x + 4y - 6z = -1 \\ 5x + 8z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

Sistema No Normal $m \neq n$
 $m = 4 ; n = 3$
 No Homogéneo

x	y	z	h
1	-2	3	0
6	-2	2	3
-2	4	-6	-1
5	0	8	4
1	-2	3	0
0	10	-16	3
0	0	0	-1
0	10	-7	4
1	-2	3	0
0	10	-16	3
0	0	9	1
0	0	0	-1

F1 por (-6)+F2
 F1 por (2)+F3
 F1 por (-5)+F4

1) F2 por (-1)+F4
 2) Interc F3 x F4

Como $r_A = 3$ y $r_{A'} = 4 \Rightarrow r_A \neq r_{A'} \Rightarrow S.$
Incompatible

También puede llegarse a la conclusión anterior si se plantea el *sistema equivalente* al dado, a partir de su matriz escalonada :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 10y - 16z = 3 \\ 9z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = -1 \end{cases}$$

en el cual queda planteado un absurdo en su última ecuación (dado que no existen valores de x, y, z tales que multiplicados por cero y sumado no pueda dar por resultado (-1)), constituyendo esto otro indicador de que el sistema dado no tiene solución (**Incompatible**).

Ejemplo N° 3:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 3 \\ x - 2y + 3z + 2w = -4 \\ 2x - y - 2z - 2w = 0 \end{cases} \quad \text{Sistema No Normal (} m \neq n \text{)}$$

x	y	z	w	h_i	
1	1	1	1	3	1) F1 por (-1)+F2 2) F1 por (-2)+F3
1	-2	3	2	-4	
2	-1	-2	-2	0	
1	1	1	1	3	F2 por (-1)+F3
0	-3	2	1	-7	
0	+3	-4	-4	-6	
1	1	1	1	3	
0	+3	2	1	-7	
0	0	-6	-5	1	

$r_A = 3 ; r_{A'} = 3 \Rightarrow$ Sistema **Compatible**

$n = 4 \Rightarrow r_A = r_{A'} < n$ **Indeterminado**

$n - r = 4 - 3 = 1$ **incógnita auxiliar**

Su sistema equivalente obtenido a partir de su matriz escalonada es :

$$\begin{cases} x + y + z + w = 3 \\ -3y + 2z + w = -7 \\ +6z - 5w = 1 \end{cases}$$

Tomamos una de las incógnitas como incógnita auxiliar, por ejemplo $w = t$

Luego, de la E_3) $6z = -5t + 1 \Rightarrow z = \frac{-5t + 1}{6}$

de E₂) $-3y + 2 \frac{-5t-1}{6} + t = -7 \Rightarrow -3y + \frac{-5t-1}{3} + t = -7 \Rightarrow y = \frac{20-2t}{9}$

reemplazando ahora w,y, z en E₁)

$$x = 3 - \frac{20-2t}{9} - \frac{-5t-1}{6} - t \Rightarrow x = \frac{17+t}{18}$$

Finalmente, la solución general del sistema es : $S = \left(\frac{17+t}{18}; \frac{20-2t}{9}; \frac{-5t-1}{6}; t \right)$

Para encontrar soluciones particulares del sistema, basta con darle valores a (t)

Por ejemplo si t = 1, entonces una solución particular es S₁ = (1;2;1;1)

Observación : De los ejemplos anteriores se observó que al obtener el sistema equivalente de un sistema dado, pueden ocurrir tres alternativas :

- a) Que el valor de una de las incógnitas, se pueda obtener directamente de una de las ecuaciones de este sistema, la cual reemplazada en las demás ecuaciones nos permita obtener los valores de las restantes, en este caso el sistema será **Compatible Determinado** (Ejemplo 1)
- b) Que no se obtenga directamente el valor de una de las incógnitas, pero que se pueda determinar una en función de otra u otras, la cual reemplazada en las restantes ecuaciones permita hallar las otras incógnitas, en este caso el sistema será **Compatible Indeterminado** (Ejemplo 3)
- c) Que no haya coherencia en el nuevo sistema, es decir que quede planteado un absurdo en una de sus ecuaciones, en este caso el sistema será **Incompatible** (Ejemplo 2).

Sistemas normales de CRAMER:

Definimos como sistemas normales de CRAMER a aquellos sistemas donde el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas (normal) y donde el determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas es distinto de cero ($|A| \neq 0$)

Estos sistemas pueden resolverse mediante la **Regla de CRAMER**, cuya demostración es la siguiente

Sea el sistema :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = h_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = h_n \end{cases}$$

de donde :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

El determinante de los coeficientes de las incógnitas, debe ser distinto de cero ($|A| \neq 0$) y lo llamamos : **Determinante Principal de CRAMER**

Demostración :

Vamos a multiplicar a E_1 por A_{11} (cofactor de a_{11}) , E_2 por A_{21} ,....., E_n por A_{n1}

Tendremos entonces :

$$\begin{cases} a_{11} \cdot A_{11} x_1 + a_{12} \cdot A_{11} x_2 + a_{13} \cdot A_{11} x_3 + \dots + a_{1n} \cdot A_{11} x_n = h_1 \cdot A_{11} \\ a_{21} \cdot A_{21} x_1 + a_{22} \cdot A_{21} x_2 + a_{23} \cdot A_{21} x_3 + \dots + a_{2n} \cdot A_{21} x_n = h_2 \cdot A_{21} \\ a_{31} \cdot A_{31} x_1 + a_{32} \cdot A_{31} x_2 + a_{33} \cdot A_{31} x_3 + \dots + a_{3n} \cdot A_{31} x_n = h_3 \cdot A_{31} \\ \dots \\ a_{n1} \cdot A_{n1} x_1 + a_{n2} \cdot A_{n1} x_2 + a_{n3} \cdot A_{n1} x_3 + \dots + a_{nn} \cdot A_{n1} x_n = h_n \cdot A_{n1} \end{cases} \quad \text{sumando miembro a miembro :}$$

$$\underbrace{(a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} + \dots + a_{n1} A_{n1})}_{1} x_1 + \underbrace{(a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21} + a_{32} A_{31} + \dots + a_{n2} A_{n1})}_{2} x_2 + \dots$$

$$\dots + \underbrace{(a_{1n} A_{11} + a_{2n} A_{21} + a_{3n} A_{31} + \dots + a_{nn} A_{n1})}_{n} x_n = \underbrace{h_1 A_{11} + h_2 A_{21} + h_3 A_{31} + \dots + h_n A_{n1}}_{\otimes}$$

Observando el $|A|$ podemos notar que :

La expresión (1) es el desarrollo de $|A|$ por los cofactores de los elementos de la primer columna, $\therefore (1) = |A|$

Las expresiones indicadas con (2), (3) ,.....(n) son nulas por la propiedad de los determinantes ya enunciada, que dice **"En todo determinante la suma de los productos de los elementos de una línea por los cofactores de los elementos de otra línea paralela a ella es nula"**

$$\therefore (2) = (3) = \dots = (n) = 0$$

En cuanto a la expresión \otimes , no es más que el desarrollo del $|A_1|$ por los cofactores de los elementos de la primer columna,

Siendo :

$$|A_i| = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A este determinante lo llamaremos determinante de la incógnita x_i y es el que resulta de sustituir en el determinante principal de CRAMER $|A|$ la columna de los coeficientes de la incógnita x_i por la correspondiente a los términos independientes

Es decir entonces que :

$$|A| \cdot x_i = |A_i|$$

de donde , por ser $|A| \neq 0$

tenemos que :

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Repitiendo el razonamiento, podríamos obtener los valores de todas las incógnitas.

En general entonces :

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

En consecuencia puede enunciarse entonces la Regla de CRAMER del siguiente modo :

"En todo sistema normal de CRAMER, cada incógnita se obtiene dividiendo el determinante de la incógnita (que es el que resulta de sustituir en el determinante principal de CRAMER, la columna de los coeficientes de la incógnita que se quiere calcular por la columna de los términos independientes) por el determinante principal de CRAMER(que es el formado por los coeficientes de las incógnitas y que debe ser no nulo)".

Ejemplo 4 :

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x + 3y + 4z = 11 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -26 \neq 0$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 11 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{-52}{-26} = 2$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 11 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{26}{-26} = -1$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-26} = \frac{-78}{-26} = 3 \quad \therefore S = (2, -1, 3)$$

Discusión de los sistemas normales :

a) Si $|A| \neq 0$

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

es decir : $|A_i| = x_i |A|$

Si $\left. \begin{array}{l} |A_i| = 0 \Rightarrow x_i = 0 \Rightarrow \text{Solución : nula} \\ |A_i| \neq 0 \Rightarrow x_i \neq 0 \Rightarrow \text{Solución : no - nula} \end{array} \right\} \text{Compatible - Determinado}$

En ambos casos solución única, es decir "**La condición necesaria y suficiente para que un sistema normal no homogéneo sea Compatible Determinado, es que el determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas sea distinto de cero**"

Es decir que los sistemas normales de CRAMER, son siempre compatibles y determinados.

b) Si $|A| = 0$ puede ocurrir que :

$|A_i| \neq 0 \Rightarrow |A_i| = x_i |A| \Rightarrow 0 \neq x_i \cdot 0$ Imposible pues no existe valor de x_i que satisfaga la ecuación, por lo tanto el sistema es **Incompatible**.

O que :

$|A_i| = 0 \Rightarrow 0 = x_i \cdot 0$ se satisface para todo x_i luego el sistema es Indeterminado, sin embargo puede ser también Incompatible. Bastará con dar un ejemplo :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + 3y + 3z = 2 \end{cases} \quad \text{Se deja para el lector, el análisis de este sistema.}$$

Resumiendo :

Si $|A| \neq 0 \Rightarrow$ Sistema **Compatible Determinado**

$$\text{Si } |A| = 0 \begin{cases} |A_i| \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema: Incompatible} \\ |A_i| = 0 \Rightarrow \text{Sistema: } \begin{cases} \text{Indeterminado} \\ 0 \\ \text{Incompatible} \end{cases} \end{cases}$$

Sistemas Homogéneos :

Se habían definido como sistemas homogéneos, a aquellos sistemas donde todos sus términos independientes eran nulos. En consecuencia, su expresión general es de la forma :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Para este tipo de sistemas, pueden demostrarse los siguientes teoremas :

Teorema : "Los sistemas homogéneos son siempre compatibles"

Es evidente que al carecer cada ecuación de término independiente la n-upla nula, es decir $0 = (0,0,0,\dots,0)$ satisface a cada ecuación del sistema.

$$E_i = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} \cdot x_j = 0 \quad \text{si } x_j = 0 \quad \text{tendríamos} \quad E_i = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} \cdot 0 = 0$$

A esta solución que siempre existe (por lo tanto este sistema siempre será compatible) la llamaremos solución *trivial*.

Teorema : "Si un sistema homogéneo admite una solución no nula (no trivial), entonces admite infinitas y por lo tanto el sistema será indeterminado."

Supongamos que $S = (t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ sea solución del sistema homogéneo, donde $t_i \neq 0$, es decir no todas nulas (solución no trivial).

$$\text{Trabajando en } E_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = 0$$

Deberá cumplirse que:

$$E_i = a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + a_{i3}t_3 + \dots + a_{in}t_n = 0$$

multiplicando por $k \neq 0$ (arbitrario)

$$E_i = a_{i1}(kt_1) + a_{i2}(kt_2) + a_{i3}(kt_3) + \dots + a_{in}(kt_n) = 0$$

como la ecuación también se satisface, entonces también será solución :

$$S^* = (kt_1, kt_2, kt_3, \dots, kt_n)$$

siendo que k es arbitrario, habrá tantas soluciones como valores demos a k , es decir el sistema tendrá infinitas soluciones y por lo tanto será indeterminado.

Teorema : "Si el determinante de la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas de un sistema normal homogéneo es nulo, el sistema es indeterminado".

Por ser un sistema normal, se tendrá en cuenta la discusión hecha anteriormente en relación a ellos. En este caso, los $|A_i|$ (determinantes de las incógnitas) son todos nulos, por tener una columna (la correspondiente a los términos independientes) de ceros.

Luego tendremos los siguientes casos :

$|A| \neq 0 ; |A_i| = 0 \Rightarrow$ Sistema compatible Determinado (una única solución), la que siempre existe, es decir la solución nula o trivial.

$|A| = 0 , |A_i| = 0 \Rightarrow$ descartando la incompatibilidad por ser un sistema homogéneo, entonces el sistema será Indeterminado (infinitas soluciones)

Ejemplo 5 :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 4x - y + 5z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{Sistema Normal - Homogéneo}$$

Una forma rápida de analizar las soluciones de este sistema, es teniendo en cuenta uno de los teoremas anteriores.

Es decir, calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \quad \text{por ser distinto de cero, el sistema dado es compatible } \mathbf{determinado}, \text{ siendo}$$

su única solución la trivial : $S(0,0,0)$.

Otra alternativa para su resolución, es aplicar el método general de GAUSS (escalonamiento).

x	y	z	h _i
1	2	-3	0
4	-1	5	0
3	2	3	0
1	2	-3	0
0	-9	17	0
0	-4	12	0
1	2	-3	0
0	-4	12	0
0	-9	17	0
1	2	-3	0
0	1	-3	0
0	-9	17	0
1	2	-3	0
0	1	-3	0
0	0	10	0

1) F1x(-4)+F2
2) F1x(-3)+F3

Interc. F2x3

F2x(-1/4)

F2x 9 + F3

⇒ Sistema equivalente :
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ 10z = 0 \end{cases} \Rightarrow S = (0,0,0)$$

Por lo tanto este es un sistema :

Normal – Homogéneo – Compatible – Determinado – Solución Trivial (0,0,0)

Ejemplo 6 :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + w = 0 \\ 4x - y + 5z + 2w = 0 \\ 5x + y + 2z + 3w = 0 \\ 2x + 4y - 6z + 2w = 0 \end{cases}$$

Sistema Normal – Homogéneo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Como $|A| = 0$, es Indeterminado (infinitas soluciones)

Para hallarlas se debe aplicar el método de escalonamiento :

x	y	z	w	h _i
1	2	-3	1	0
4	-1	5	2	0
5	1	2	3	0
2	4	-6	2	0
1	2	-3	1	0
0	-9	17	-2	0
0	-9	17	-2	0
0	0	0	0	0
1	2	-3	1	0
0	-9	17	-2	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

- 1) F1x(-4)+F2
- 2) F1x(-5)+F3
- 3) F1x(-2)+F4

$$F2x(1)+F3$$

Puede observarse que $r_A = r_{A'} = 2$, y como $n = 4 \Rightarrow r < n$ Indeterminado

Además $n - r = 2$ incógnitas auxiliares deberán tomarse para su resolución.

Su sistema equivalente es :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + w = 0 \\ -9y + 17z - 2w = 0 \end{cases}$$

Se toma por ejemplo, como incógnitas auxiliares : $z = t$; $w = s$

Luego :

$$\text{De } E_2) \quad -9y = -17t + 2s \Rightarrow y = \frac{17t - 2s}{9}$$

$$\text{De } E_1) \quad x = -2 \cdot \frac{17t - 2s}{9} + 3t - s \Rightarrow x = \frac{-34t + 4s}{9} + 3t - s = \frac{-7t - 5s}{9}$$

Finalmente, la solución general del sistema es :

$$S = \left(\frac{-7t - 5s}{9}; \frac{17t - 2s}{9}; t; s \right)$$

Para hallar una de sus soluciones particulares, hacemos por ejemplo : $t = 1$; $s = -5$

$$\Rightarrow \text{resulta } y = 3, x = 2 \Rightarrow S_1 = (2; 3; 1; -5)$$

Observaciones : En los ejemplos puede notarse dos hechos importantes acerca de la resolución de sistemas lineales homogéneos. En primer lugar, ninguna de las tres operaciones elementales altera la columna de los términos independientes, de modo que el sistema equivalente que se obtiene es también un sistema homogéneo.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_m \end{pmatrix}$$

Se observa también, que la matriz del primer miembro de esta igualdad puede expresarse como el producto de dos matrices : la matriz de los coeficientes de las incógnitas (de orden $m \times n$) por la matriz columna de las incógnitas (de orden $n \times 1$) - **iVerificarlo!** - nos queda :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

que es **la expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales.**

Si llamamos con :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ a la matriz de los coeficientes de las incógnitas, con } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ a la}$$

$$\text{matriz de las incógnitas y con } H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_m \end{pmatrix} \text{ a la matriz de los términos independientes, la}$$

anterior es de la forma : **A.X = H**

Este modo de escribir un sistema de ecuaciones lineales es particularmente útil, en el caso en que la matriz **A** (matriz de los coeficientes) admita matriz inversa, en cuyo caso, según se vio anteriormente:

$$X = A^{-1}.H$$

Ejemplo 7 : Expresar el sistema dado en el **ejemplo 4** en la forma matricial y resolverlo si es posible por inversión matricial .

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x + 3y + 4z = 11 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

Expresión matricial :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}}_H \Rightarrow X = A^{-1} \cdot H$$

$$X = A^{-1} \cdot H = \frac{\begin{pmatrix} -10 & -3 & -1 \\ 14 & -1 & -9 \\ -8 & -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}}{-26} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

U.T.N.
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA
NACIONAL
Fac. Reg. Sta. Fe



Cátedra :

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Cuaderno N° 3

Temas :

Espacios vectoriales.
Transformaciones lineales.
Matrices similares.
Autovalores y Autovectores – Diagonalización.

Carreras :

Ingeniería Mecánica, Eléctrica, Civil e Industrial

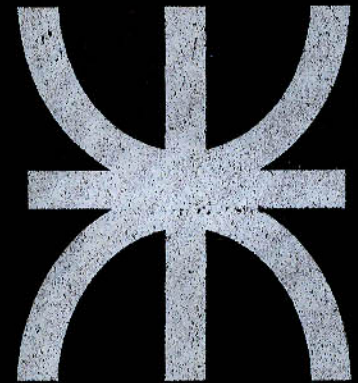
Material elaborado por :

Ing. Alberto R. GONCEBATT

(Edición preliminar)

Año 1999

U.T.N.
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA
NACIONAL
Fac. Reg. Sta. Fe



Cátedra :

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Tema :

Espacios Vectoriales

Material elaborado por :

Ing. Alberto R. GONCEBATT

(Edición preliminar)

Año 1999

••

ESPACIOS VECTORIALES

INTRODUCCIÓN:

Vamos a iniciar este tema , teniendo presente el concepto de vector de suma importancia en la geometría , según lo hemos podido apreciar en los temas anteriores .

Los vectores pueden ser sumados entre si y multiplicados por números , su resultado en ambos casos es otro vector .

Por otro lado , si $S_1(t_1, t_2, \dots, t_n)$ y $S_2(k_1, k_2, \dots, k_n)$ son soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas .

La suma de estas soluciones

$$S_1 + S_2 = (t_1+k_1, t_2+k_2, \dots, t_n+k_n)$$

y el producto de cualquiera de ellas digamos S_1 , por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \cdot S_1 = (\alpha t_1, \alpha t_2, \dots, \alpha t_n)$$

también serán soluciones de este mismo sistema.

Frecuentemente en Matemática nos encontramos con situaciones análogas cuando se tiene un conjunto de elementos que pueden ser sumados entre si y multiplicados por números, obteniéndose de esta forma elementos del mismo conjunto.

Por ejemplo , los polinomios en x de coeficientes reales , pueden ser sumados entre si y multiplicados por números reales obteniéndose polinomios del mismo tipo.

Si por ejemplo el grado de los polinomios que se suman y se multiplican por números , no sobrepasan un número dado n , los polinomios que se obtienen serán también en este caso de grado no mayor que n .

Finalmente , los propios números se pueden , por supuesto sumar entre si y multiplicar por números , es más , en lugar de un número , se pueden considerar pares , ternas o n -uplas ordenadas de números (x_1, x_2, \dots, x_n)

Estas pueden sumarse entre si

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$$

y multiplicar por números

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n)$$

obteniéndose toda vez , una n-upla del mismo tipo. Todas estas situaciones , son distintos ejemplos de espacios vectoriales .

Con el fin de abarcar estos y todos los demás casos posibles , introduciremos la siguiente definición.

ESPACIOS VECTORIALES. Definición:

Un espacio vectorial real V , es un conjunto de objetos denominados vectores , en el cual están definidas las operaciones de adición y multiplicación por un escalar y satisfacen los 10 axiomas que se enuncian a continuación:

1. Si $x \in V$, $y \in V \Rightarrow x+y \in V$ (ley de cierre p/ la suma)
2. Si $x,y,z \in V \Rightarrow (x+y)+z = x+(y+z)$ (asociativa)
3. $\exists ! x' \in V / x+x' = x'+x = x \therefore x' = 0$ (vector nulo)
4. $\exists ! x' \in V / x+x' = x'+x = 0 \therefore x' = -x$ (vector opuesto)
5. Si $x,y \in V \Rightarrow x+y = y+x$ (conmutativa)
6. Si $x \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot x \in V$ (ley de cierre p/ la multiplicación por un escalar)
- 7) Si $x,y \in V \wedge \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ (distributiva respecto a la suma de vectores)
- 8) Si $x \in V \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (distributiva respecto a la suma de escalares)
- 9) Si $x \in V \wedge \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ (asociativa de la multiplicación por un escalar)
- 10) $\forall x \in V$, $1 \cdot x = x$ (al escalar 1 se lo llama identidad multiplicativa)

• EJEMPLOS

1)El ejemplo más conocido de un **espacio vectorial** es el conjunto de los segmentos orientados que parten de un punto fijo O de nuestro espacio \mathbb{R}^2 .

Multiplicar un segmento por un numero real positivo α significa aumentar su longitud α veces, sin alterar su dirección. Si α es negativo la multiplicación de un segmento por α significa que su longitud aumenta $|\alpha|$ veces y que su dirección cambia por la contraria.

Análogamente, sumar dos segmentos significa tomar la diagonal del paralelogramo construido a partir de estos segmentos .

El vector nulo, será el segmento cuyo origen y extremo coinciden con el punto O .

2)Con un razonamiento análogo los vectores en \mathbb{R}^3 (puede demostrarse) que constituyen un **espacio vectorial**

3)Un ejemplo más general y además básico para toda la teoría de los mismos, es el conjunto de los vectores en \mathbb{R}^n , es decir el conjunto de los vectores filas (o columnas) de n componentes (x_1, x_2, \dots, x_n)

En este caso, la suma y la multiplicación por un numero real se definen del siguiente modo

$$\alpha (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

En lugar de filas (o columnas) se pueden considerar matrices de un número cualquiera, pero fijo de filas y columnas. De acuerdo con las reglas de cálculo de matrices, cualquier matriz de este tipo puede ser multiplicada por un número real y cualquiera sean dos matrices del mismo tipo pueden ser sumadas, obteniéndose en ambos casos una matriz del mismo tipo.

Resulta fácil demostrar, que además cumplen con todos los axiomas de la definición de espacio vectorial.

Por lo tanto, las matrices de orden $m \times n$ constituyen, respecto a las operaciones de adición y multiplicación por un número un **espacio vectorial**.

4) Espacio vectorial trivial: Sea $V = \{0\}$. Es decir V consiste únicamente en el número cero.

Como:

$$0+0 = 1 \cdot 0 = 0 + (0+0) = (0+0) + 0 \text{ se concluye en que } V \text{ es un } \mathbf{espacio vectorial}.$$

5) Un conjunto que no es un **espacio vectorial** :

Sea $V = \{1\}$. Es decir V contiene únicamente al número uno. Este no es un espacio vectorial por que no satisface por ejemplo el axioma 1° que es el de la ley de cierre para la suma. Esto se ve fácilmente, ya que: $1+1 = 2 \notin V$. Hay otros axiomas que tampoco satisface.

Sin embargo basta con demostrar que no cumple un axioma para probar que V no es **espacio vectorial**.

6) Verificar si el conjunto de puntos en R^2 que se encuentran sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas, constituye un **espacio vectorial**:

$$\text{Sea } V = \{ (x, y) / y = m \cdot x \}$$

Es decir V consiste en todos los puntos situados sobre la recta $y = m \cdot x$

A fin de mostrar si V es un **espacio vectorial** debe comprobarse que satisface todos los axiomas

1) Supongamos que $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$ están en V

$$\text{entonces } y_1 = m \cdot x_1, y_2 = m \cdot x_2 \quad \wedge$$

$$x + y = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, m \cdot x_1) + (x_2, m \cdot x_2) = (x_1 + x_2, m \cdot x_1 + m \cdot x_2) = [x_1 + x_2, m(x_1 + x_2)]$$

por lo tanto el axioma 1° se satisface.

2) Supongamos que $z = (x_3, y_3) = (x_3, m \cdot x_3)$ está en V

$$\text{entonces } (x+y) + z = [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) =$$

$$= [(x_1, m \cdot x_1) + (x_2, m \cdot x_2)] + (x_3, m \cdot x_3) =$$

$$= (x_1 + x_2, m \cdot x_1 + m \cdot x_2) + (x_3, m \cdot x_3) =$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3, m \cdot x_1 + m \cdot x_2 + m \cdot x_3) = (x_1, m \cdot x_1) + [(x_2 + x_3, m \cdot x_2 + m \cdot x_3)] =$$

$$= (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] = x + (y + z)$$

$$3) \text{ Sea } 0 = (0, 0) = (0, m0) \in V \Rightarrow x + 0 = (x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1 + 0, mx_1 + 0) = (x_1, mx_1) = (x_1, y_1) = x$$

$$4) \text{ Sea } x = (x_1, mx_1) \Rightarrow -x = (-x_1, -mx_1)$$

$$x + (-x) = (x_1 - x_1, mx_1 - mx_1) = (0, 0) = 0$$

$$5) x + y = (x_1, mx_1) + (x_2, mx_2) = (x_1 + x_2, mx_1 + mx_2) = (x_2, mx_2) + (x_1, mx_1) = y + x$$

$$6) \alpha \cdot x = \alpha \cdot (x_1, mx_1) = (\alpha x_1, \alpha mx_1) \in V.$$

$$7) \alpha (x + y) = \alpha (x_1 + x_2, mx_1 + mx_2) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha mx_1 + \alpha mx_2) =$$

$$= (\alpha x_1, \alpha mx_1) + (\alpha x_2, \alpha mx_2) = \alpha x + \alpha y$$

$$8) (\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha + \beta) \cdot (x_1, mx_1) = [(\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)mx_1] = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha mx_1 + \beta mx_1) =$$

$$= (\alpha x_1, \alpha mx_1) + (\beta x_1, \beta mx_1) = \alpha \cdot (x_1, mx_1) + \beta \cdot (x_1, mx_1) = \alpha x + \beta x$$

$$9) \alpha \cdot (\beta \cdot x) = \alpha \cdot [\beta \cdot (x_1, mx_1)] = \alpha \cdot (\beta x_1, \beta mx_1) = (\alpha \beta x_1, \alpha \beta mx_1) = \alpha \beta (x_1, mx_1) = (\alpha \beta) \cdot x$$

$$10) 1 \cdot x = 1 \cdot (x_1, mx_1) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot mx_1) = (x_1, mx_1) = x$$

En conclusión, como se satisfacen los 10 axiomas, se ve que el conjunto de puntos que se hallan sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas constituye un **espacio vectorial**.

Verificar los 10 axiomas suele resultar bastante tedioso, por lo tanto se sugiere verificar aquellos que no sean inmediatamente obvios.

7) Verificar si el conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 que se encuentran sobre una recta que no pasa por el origen de coordenadas constituye un **espacio vectorial**.

$$\text{Sea } V = \{ (x, y) / y = 2x + 1 ; x \in \mathbb{R} \}$$

Puede observarse que V no es un **espacio vectorial**, dado que no se cumple la ley de cierre como en el ejemplo anterior.

A fin de ver esto, supongamos que: (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están en V

$$\Rightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Si este último vector estuviese en V , se tendría:

$$y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) + 1 = 2x_1 + 2x_2 + 1$$

$$\text{pero } y_1 = 2x_1 + 1 \wedge y_2 = 2x_2 + 1$$

$$\text{de tal modo que: } y_1 + y_2 = (2x_1 + 1) + (2x_2 + 1) = 2x_1 + 2x_2 + 2$$

por tanto se llega a la conclusión de que $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \notin V$; si $(x_1, y_1) \in V \wedge (x_2, y_2) \in V$.

Una forma fácil de ver que V no es un e.v. consiste en observar que $0(0, 0)$ no está en V , ya que $0 \neq 2 \cdot 0 + 1$

Teniendo en cuenta el axioma 6 de la definición de espacios vectoriales (ley de cierre para el producto de un vector por un escalar), llegamos a través del siguiente teorema a otros resultados importantes de un **espacio vectorial**.

TEOREMA: Sea V un espacio vectorial. Entonces:

- 1) $\alpha \cdot 0 = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- 2) $0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in V$
- 3) Si $\alpha \cdot x = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee x = 0$ (o ambos a la vez)
- 4) $(-1) \cdot x = -x, \quad \forall x \in V$

Demostración

1) $\alpha \cdot 0 = 0$

Por el axioma (3) $(0+0) = 0$

por (7) $\alpha (0+0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0$

Sumando $(-\alpha \cdot 0)$ en ambos miembros

$$\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 + (-\alpha \cdot 0) = \alpha \cdot 0 + (-\alpha \cdot 0)$$

$$\alpha \cdot 0 + [\alpha \cdot 0 + (-\alpha \cdot 0)] = 0$$

$$\alpha \cdot 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha \cdot 0 = 0$$

2) $0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in V$

Similar a la anterior

$$0+0 = 0$$

$$(0+0) \cdot x = 0 \cdot x$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot x = 0 \cdot x$$

$$0 \cdot x + [0 \cdot x + (-0 \cdot x)] = 0 \cdot x + (-0 \cdot x)$$

$$0 \cdot x + 0 = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 0$$

3) $\alpha \cdot x = 0$

Si $\alpha \neq 0$ multiplicamos por $1/\alpha$

$$1/\alpha \cdot \alpha \cdot x = 1/\alpha \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot x = x = 0$$

4) $-1 \cdot x = -x$

$$1+(-1) = 0$$

por (3) $0 = 0 \cdot x = 1+(-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x =$

$$0 = x + (-1) \cdot x$$

sumando $(-x)$ a ambos lados

$$0 + (-x) = x + (-1) \cdot x + (-x) = x + (-x) + (-1) \cdot x = 0 + (-1) \cdot x = (-1) \cdot x$$

por tanto

$$-x = (-1) \cdot x$$

SUBESPACIOS:

Sabemos que $R^2 = \{(x,y) ; x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ es un e.v. Vimos además que $V = \{(x,y) / y = mx\}$ también es un e.v. Siendo que $V \subset R^2$, es decir R^2 tiene un subconjunto que es a su vez un e.v.

Ósea, que todos los e.v. tienen subconjuntos que también son e.v. En esta oportunidad vamos a analizar estos importantes subconjuntos

SUBESPACIOS. Definición:

Sea H un subconjunto no vacío de un e.v. y supongamos que H es en si mismo un e.v. ante las operaciones de adición y multiplicación por un escalar definidas en V . Entonces se dice que H es un subespacio de V .

Antes de verificar algunos ejemplos, vamos a demostrar un resultado que hace sea relativamente sencillo determinar si un subconjunto de V es o no un subespacio de V .

TEOREMA

Un subconjunto no vacío H del e.v. V es un subespacio de V si se cumplen las dos leyes de cierre.

$$1) \text{ Si } x \in H \wedge y \in H \Rightarrow x+y \in H$$

Es decir si H contiene a los vectores x e y también contiene su suma.

$$2) \text{ Si } x \in H \Rightarrow \alpha x \in H \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Es decir si H contiene un vector x , también contiene todos los múltiplos αx donde α pertenece a los reales.

Ambas condiciones, equivalen a la siguiente: Si H contiene unos vectores x e y , también contiene cualquier combinación lineal:

$$\alpha x + \beta y \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \wedge \beta \in \mathbb{R}; \text{ de los mismos.}$$

DEMOSTRACIÓN:

Es evidente que si H es un e.v. deben cumplirse las dos leyes de cierre.

Recíprocamente, para demostrar que H es un e.v., es necesario mostrar que se cumplen los axiomas del (1) al (10) de la definición de e.v. ante las operaciones de adición y multiplicación por un escalar definidas en V .

Las dos operaciones de cerradura (1) y (6) se cumplen por hipótesis.

Como los vectores en H también están en V las leyes de asociatividad, conmutatividad, distribución e identidad multiplicativa (axioma 2, 3, 7, 8, 9 y 10) se cumplen.

Sea $x \in H \Rightarrow 0.x \in H$ por la hipótesis (2), pero por el teorema anterior (parte 1) $0.x = 0$.

Entonces $0 \in H$ y el axioma (3) se satisface.

Por último, por la hipótesis (2), $(-1).x \in H$ para todo $x \in H$. Por el teorema anterior (parte 4) $-x =$

(-1). $x \in H$ por lo que el axioma (4) también se cumple y con esto queda completa la demostración. La demostración anterior, contiene un hecho que es lo suficientemente importante para señalarlo de manera explícita:

TODO SUBESPACIO NO VACÍO DE UN ESPACIO VECTORIAL CONTIENE EL 0

Este resultado a menudo facilitará ver que un subconjunto particular de V no es un e.v. Dicho en otras palabras: Si un subconjunto, no contiene el cero, entonces no es un subespacio vectorial.

Debe observarse que el vector 0 en H , el cual es un subespacio de V , es el mismo que el vector 0 de V .

Directamente de la definición, puede deducirse que todo subespacio vectorial H contiene el vector nulo y todas las combinaciones lineales de cualesquiera vectores suyos.

• EJEMPLOS:

1) Si V es cualquier e.v., el conjunto $H = \{0\}$ compuesto solamente por el vector nulo posee las propiedades (1) y (2) ($0+0=0$ y $\alpha \cdot 0 = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$) por consiguiente es un subespacio de V y se lo llama *subespacio nulo* o *subespacio trivial*.

2) Por otro lado el propio e.v. V puede ser considerado como un subespacio de sí mismo.

Estos dos ejemplos muestran que todo e.v. V , contiene los dos subespacios $\{0\}$ y V (los cuales coinciden si $V = \{0\}$)

El subespacio nulo y V suelen llamarse subespacios triviales del e.v. V .

Todos los demás subespacios se denominan no triviales o propios.

3) Analizar si $S = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3

Solución:

1) $S \neq \emptyset$ pues por ejemplo $(0,0,0) \in S$

2) $S \subset V$ por definición de S

3) Sean $x \in S; y \in S; \alpha \in \mathbb{R}; \beta \in \mathbb{R} : \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in S$

Si $x \in S \Rightarrow x = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow x_1 + x_2 = x_3$

Si $y \in S \Rightarrow y = (y_1, y_2, y_3) \Rightarrow y_1 + y_2 = y_3$

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \alpha (x_1, x_2, x_3) + \beta (y_1, y_2, y_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) =$$

$$= [\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2)] =$$

$$= [\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2)] = (z_1, z_2, z_3) = z \text{ donde } z_3 = z_1 + z_2 \text{ es decir } z \in S$$

Por cumplirse la condición suficiente S es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 .

Geoméricamente, S es un plano que pasa por el origen de coordenadas.

4) Analizar si $A = \{x \in \mathbb{R} / x_2 = x_1 + 1\}$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^2 .

Solución:

En este caso, el vector nulo $(0,0) \notin A$ por lo tanto, A no es subespacio vectorial de \mathbb{R}^2 . Geométricamente A es una recta que no pasa por el origen de coordenadas.

Sea por ejemplo:

$$a = (1,2) ; a \in S \text{ pues } x_2 = x_1 + 1$$

$$\text{y } b = (-1/2, 1/2) ; b \in S \text{ pues } x_2 = x_1 + 1$$

: al analizar si $a+b \in S$

$$a+b = (1,2) + (-1/2, 1/2) = (1/2, 5/2)$$

Se observa que se obtiene un vector que no pertenece a S , pues:

$$5/2 \neq 1/2 + 1 ; (x_2 \neq x_1 + 1)$$

5) Sea w un elemento no nulo de \mathbb{R}^3 y sea $A = \{x \in \mathbb{R}^3 / x \cdot w = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ analizar si es subespacio de \mathbb{R}^3

Solución:

$A \neq \emptyset$ pues $0 \in A$

1) Cualesquiera sean x_1 y x_2 pertenecientes a A , tenemos:

$$(x_1 + x_2) \cdot w = x_1 \cdot w + x_2 \cdot w = 0 + 0 = 0$$

2) Cualesquiera sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in A$ es:

$$(\alpha x) \cdot w = \alpha (x \cdot w) = \alpha \cdot 0 = 0$$

De (1) y (2) resulta que A es un subespacio de \mathbb{R}^3 . El conjunto A desde el punto de vista geométrico es un plano que pasa por el origen de coordenadas, perpendicular al vector w .

Con los subespacios de un e.v V se pueden efectuar determinadas operaciones, la más importante de ellas es la *intersección*.

Se llama intersección de los subespacios H_1, H_2, \dots de un e.v. V al conjunto H de los vectores que pertenecen simultáneamente a todos estos espacios.

O sea $H = H_1 \cap H_2 \dots$

TEOREMA: La intersección de dos subespacios H_1 y H_2 de un e.v V es un subespacio de este espacio vectorial.

DEMOSTRACIÓN: Podemos advertir en primer lugar que $H_1 \cap H_2$ es no vacío ya que contiene al 0. Por otro lado:

$$\text{Si } x_1 \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x_1 \in H_1 \wedge x_1 \in H_2$$

$$x_2 \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x_2 \in H_1 \wedge x_2 \in H_2$$

como H_1 y H_2 son subespacios

$$x_1+x_2 \in H1 \wedge x_1+x_2 \in H2 \text{ por lo tanto } x_1+x_2 \in H1 \cap H2$$

De manera similar

$$\text{Si } x_1 \in H1 \cap H2 \Rightarrow x_1 \in H1 \wedge x_1 \in H2$$

como H1 y H2 son subespacios $\alpha x_1 \in H1 \wedge \alpha x_1 \in H2, \alpha \in R$

por lo tanto $\alpha x_1 \in H1 \cap H2$

Por ejemplo la intersección de dos planos que pasan por el origen de coordenadas (que son subespacios de R3) es una recta que pasa también por el origen, por tanto también es un subespacio de R3.

Puede demostrarse que en general no es cierto que si H1 y H2 son subespacios de V entonces $H1 \cup H2$ sea necesariamente un subespacio de V.

COMENTARIO.

Habiéndose definido las estructuras de espacios y subespacios vectoriales y posteriormente analizado en función de ellas- a través de ejemplos específicos- si ciertos vectores de determinadas características forman parte de un espacio o subespacio vectorial, nos debemos interesar ahora por la relación que en general guardan aquellos vectores que forman parte de un espacio vectorial con otros del mismo espacio; en como pueden ser determinados y en que forma cuantos y cuales vectores del mismo espacio pueden generar a todos los vectores que componen al mismo, es decir que vectores pueden engendrar ese espacio.

En razón de ello vamos a introducir las definiciones de Conjunto generador y Dependencia e Independencia lineal.

Previo a ello observemos que por ejemplo, la ecuación $x+2y-z=0$ tiene solución general

$(x,y,z) = (s-2r,r,s)$ donde r y s son dos números cualesquiera. Toda solución puede escribirse en término de los vectores $(1,0,1)$ y $(-2,1,0)$ de R3 como

$$\begin{pmatrix} s-2r \\ r \\ s \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Es decir puede construirse un número infinito de soluciones en términos de solo dos vectores y el análisis de las soluciones puede efectuarse estudiando únicamente estos dos vectores. Para poder aplicar métodos de análisis similares en los espacios vectoriales, se necesitan los conceptos antes mencionados. En ambos conceptos aparecen las *combinaciones lineales* de vectores.

COMBINACIÓN LINEAL

Vimos que todo vector $v(a,b,c)$ en R3 se puede escribir en la forma :

$$v = a.i + b.j + c.k$$

en tal caso se dice que v es una *combinación lineal* de los vectores i, j, k . En general se tiene la siguiente definición:

COMBINACIÓN LINEAL, Definición

Sean v_1, v_2, \dots, v_n vectores en un espacio vectorial V . Entonces cualquier expresión de la forma: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son escalares, se llama combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n .

Por lo tanto, para que un vector, sea combinación lineal de otros, es necesario probar la existencia de escalares, que satisfagan la ecuación anterior.

Se plantean dos problemas:

a) Se conocen los vectores v_i y se quieren encontrar vectores que sean combinación lineal de los v_i . Es el caso más sencillo, pues basta dar valores arbitrarios a los escalares α_i .

- EJEMPLO: Dado los vectores $v_1 = (1, 2, -3)$; $v_2 = (2, 0, 1)$; $v_3 = (4, 1, 2)$ hallar un vector w que sea combinación lineal de v_1, v_2, v_3 .

Solución: $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$; damos valores arbitrarios a los escalares, por ejemplo $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = -2$; $\alpha_3 = 3$

$$1 \cdot (1, 2, -3) + (-2) \cdot (2, 0, 1) + 3 \cdot (4, 1, 2) = (9, 5, 1)$$

- EJEMPLO: Hallar una matriz C que sea c.l. de las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Solución:

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B = C$$

tomamos por ejemplo $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = 2$

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

- EJEMPLO: Combinación lineal en P_n .

En P_n todo polinomio, se puede expresar como una combinación lineal de los monomios: $1, x, x^2, \dots, x^n$

b). Dados los vectores, averiguar si uno de ellos es o no combinación lineal de los restantes

Entonces deberemos probar la existencia de números reales que cumplan con la definición.

- EJEMPLO: Decir si el vector $(4, 3)$ es o no combinación lineal de los vectores $(3, 2)$ y $(1, -1)$.

Solución: Se plantea la ecuación

$$\alpha \cdot (3,2) + \beta \cdot (1,-1) = (4,3)$$

de donde surge el sistema:

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 4 \\ 2\alpha - \beta = 3 \end{cases} \text{ cuya solución es } \alpha = 7/5 ; \beta = 1/5 \text{ por lo tanto es combinación lineal}$$

- EJEMPLO: Verificar que el vector $(1,1)$ no es combinación lineal de los vectores $(4,3)$ y $(0,0)$

Solución: Se plantea la ecuación

$$\alpha \cdot (4,3) + \beta \cdot (0,0) = (1,1)$$

de donde surge el sistema:

$$\begin{cases} 4\alpha + 0\beta = 1 \\ 3\alpha + 0\beta = 1 \end{cases} \text{ como el sistema no tiene solución, eso nos indica que no existe combinación lineal}$$

CONJUNTO GENERADOR DE UN ESPACIO VECTORIAL. Definición Se dice que los vectores v_1, v_2, \dots, v_n de un espacio vectorial V generan V , si todo vector de V se puede expresar como una combinación lineal de ellos.

Dicho de otra manera, para todo vector $v \in V$ existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

- EJEMPLOS:

- 1) Los vectores $i = (1,0)$ y $j = (0,1)$ generan \mathbb{R}^2 .
- 2) Los vectores $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$ y $k = (0,0,1)$ generan \mathbb{R}^3 .
- 3) $n+1$ vectores que generan P_n : Los monomios $1, x, x^2, \dots, x^n$ generan P_n .
- 4) Cuatro vectores que generan $M_{2 \times 2}$:

$$\text{como } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ genera } M_{2 \times 2}$$

5) Analizar si los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ generan R^3 .

Solución: Si los vectores dados constituyen un conjunto generador de R^3 , cualquier vector $x = (x_1, x_2, x_3)$ de R^3 , se puede expresar como una combinación lineal de ellos, es decir deben existir escalares α, β, δ , tal que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

operando:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\delta = x_1 \\ -\alpha + \beta + 2\delta = x_2 \\ 2\alpha + \beta + 4\delta = x_3 \end{cases}$$

escalando:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x_1 \\ -1 & 1 & 2 & x_2 \\ 2 & 1 & 4 & x_3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 3 & 5 & x_1 + x_2 \\ 0 & -3 & -2 & -2x_1 + x_3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & x_1 \\ 0 & 3 & 5 & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ \hline \end{array} \right|$$

como éste sistema es **compatible**, estamos en condiciones de afirmar que cualquier vector de R^3 se puede expresar como una combinación lineal de los vectores dados; esto es así por que para cada vector de R^3 van a existir valores de α, β , y δ que así lo determinan. Por tanto esos vectores constituyen un conjunto generador de R^3 .

Es más, como el sistema es **compatible determinado**, para cada vector de R^3 existirá una única combinación lineal de los vectores dados que lo determinen.

6) Analizar si los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ constituyen un conjunto generador de R^3 .

Solución:

Procedemos en forma análoga a la anterior. Es decir si $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

operando:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\delta = x_1 \\ -\alpha + \beta = x_2 \\ 2\alpha + \beta + 3\delta = x_3 \end{cases}$$

resolviendo este sistema mediante su escalonamiento:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & : & & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & : & & x_2 \\ 2 & 1 & 3 & : & & x_3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & : & & x_1 \\ 0 & 3 & 3 & : & & x_1 + x_2 \\ 0 & -3 & -3 & : & & -2x_1 + x_3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & : & & x_1 \\ 0 & 3 & 3 & : & & x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & : & & -x_1 + x_2 + x_3 \\ \hline \end{array}$$

como el sistema es incompatible, ello nos indica que no todos los vectores de R^3 se pueden expresar como una combinaci6n lineal de los vectores dados. En consecuencia, el conjunto de vectores dados no constituye un conjunto generador de R^3 .

Por otro lado, observemos que para que este sistema sea compatible, es necesario que

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Bajo esta condici6n, el sistema ser6 compatible indeterminado y sus infinitas soluciones permitir6n expresar como combinaciones lineales de los vectores dados, solamente a aquellos vectores de R^3 , tales que sus componentes cumplan con la condici6n se6alada anteriormente. Generando en consecuencia un conjunto de vectores de R^3 con tales caracteristicas, que desde el punto de vista geom6trico representa la ecuaci6n de un plano que pasa por el origen de coordenadas, siendo este, de acuerdo a lo visto anteriormente un subespacio de R^3 .

7) Hallar un conjunto generador del plano:

$$S = \{x \in R^3 / 2X_1 - X_2 + X_3 = 0\} = \{X \in R^3 / x_3 = -2x_1 + x_2\}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Si } x \in S \Rightarrow x = (x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, -2x_1 + x_2) = (x_1, 0, -2x_1) + (0, x_2, x_2) = \\ &= x_1 \cdot (1, 0, -2) + x_2 \cdot (0, 1, 1) \end{aligned}$$

como resulta posible obtener cualquier vector de S mediante una combinación lineal. de $A = \{(1, 0, -2); (0, 1, 1)\}$ se dice que A es un conjunto generador de S.

ESPACIO GENERADO POR UN CONJUNTO DE VECTORES. Definición

Sea $w = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ k vectores en un espacio vectorial V. El espacio generado por v_1, v_2, \dots, v_k es el conjunto de combinaciones lineales de v_1, v_2, \dots, v_k

Es decir: espacio $(v_1, v_2, \dots, v_k) = \{v: v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k\}$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ escalares. SGE

TEOREMA: Gen $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es un subespacio de V

DEMOSTRACIÓN:

Sean $a = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k)$ y $b = (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k)$ dos vectores cualesquiera del espacio generado por W y $\alpha \in R$.

$$a+b = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \cdot v_2 + \dots + (\alpha_k + \beta_k) \cdot v_k$$

$$\alpha \cdot a = (\alpha \alpha_1) \cdot v_1 + (\alpha \alpha_2) \cdot v_2 + \dots + (\alpha \alpha_k) \cdot v_k$$

luego $a+b$ y αa son combinaciones lineales. de v_1, v_2, \dots, v_k y por lo tanto pertenecen al espacio generado por W

Queda probado así, que el espacio generado por W es un subespacio de V.

- EJEMPLO: Analizar que representa el espacio generado por dos vectores $v_1 = (1, 2, 1)$ y $v_2 = (-1, 0, 1)$ en R^3 .

Solución:

$$H = \text{gen}(v_1, v_2) = \{v/v = \alpha \cdot (1, 2, 1) + \beta \cdot (-1, 0, 1)\}$$

Si $v = (x, y, z) \in H$ entonces se tiene

$$\begin{cases} \alpha - \beta = x \\ 2 \cdot \alpha = y \\ \alpha + \beta = z \end{cases}$$

Si se considera que (x, y, z) está fijo, entonces estas ecuaciones, se pueden imaginar como un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas α y β . Resolviendo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y-2x \\ 0 & 2 & z-x \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y-2x \\ 0 & 0 & -y+2x+z-x \end{vmatrix} :$$

Por lo visto, se sabe que tiene solución si $-y+x+z = 0$ es decir que

$$H = \text{gen}(v_1, v_2) = \{ v \in R^3 / z = y-x \}$$

Geoméricamente representa un plano en R^3 y cualquiera sean los escalares que se elijan, al combinarlos linealmente con v_1 y v_2 se obtendrá otro vector al que le corresponde un punto del plano.

Este ejemplo se puede generalizar para demostrar el siguiente hecho de interés:

El espacio generado por dos vectores de R^3 que no sean paralelos es un plano que pasa por el origen de coordenadas.

TEOREMA: Sean $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$ $n+1$ vectores que están en un e.v. V , si v_1, v_2, \dots, v_n generan V , entonces $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$ también generan V . Es decir la adición de uno o más vectores a un conjunto generador da por resultado otro conjunto generador.

• EJEMPLO:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ generan } R^3. \Rightarrow = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ también generan } R^3 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \omega = x \\ \beta + \omega = y \\ \gamma = z \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \omega & x \\ 0 & \beta & 0 & \omega & y \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \omega = t \\ \alpha = x - t \\ \beta = y - t \\ \gamma = z \end{cases}$$

Por ejemplo: si $t = 1$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = (4 - 1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (5 - 1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (3) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Este ejemplo nos muestra que el espacio vectorial R3 que es generado por $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ también

puede ser generado por un conjunto mayor $S' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Como veremos más adelante R3 y

funciones de R3 se pueden analizar usando conjuntos generadores; así por razones de economía y simplicidad, lo que se desea es hallar los conjuntos generadores más pequeños posibles para los espacios vectoriales. Para lograr esto, se requiere del concepto de *independencia lineal*

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Sea V un espacio vectorial real y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$. Como el vector nulo pertenece a V, entonces el vector nulo se puede expresar como una combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n . Es decir

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0 \quad (1)$$

Puede observarse que esta ecuación admite la solución trivial, es decir : $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ (1).

DEFINICIÓN 1 : Se dice que un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ es *linealmente independiente (li)* si y solo si la ecuación (1) admite como *única solución la trivial*

DEFINICIÓN 2 : Un conjunto finito de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ se llama *linealmente dependiente (ld)* si no es (li).

Dicho de otra forma $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ son (ld) si existen escalares c_1, c_2, \dots, c_n no todos nulos, tales que: $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$

Es decir si el vector 0 (cero) de V, se puede escribir como una combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n sin que todos los coeficientes sean iguales a cero.

OBSERVACIÓN : Si a un conjunto de vectores (ld) v_1, v_2, \dots, v_n se agregan otros vectores b_1, \dots, b_k el conjunto ampliado seguirá siendo (ld)

En los problemas relacionados con la dependencia lineal, el vector nulo ocupa una posición especial, debido a que todo conjunto que contenga al vector nulo es (ld).

¿ Como se sabe si un conjunto de vectores dado es (ld) o (li) ?

En el caso de dos vectores , la solución es sencilla

TEOREMA: Dos vectores , en un espacio vectorial V son (ld) si y solo si, uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que $v_2 = c.v_1$ para algún escalar $c \neq 0 \Rightarrow c.v_1 - v_2 = 0$ y v_1 y v_2 son (ld).

Supongamos por otra parte que v_1 y v_2 son (ld) \Rightarrow existen constantes c_1 y c_2 no nulas ambas, tales que $c_1.v_1 + c_2.v_2 = 0$

Si $c_1 \neq 0$ entonces dividiendo por c_1 tenemos : $v_1 + (c_2/c_1) v_2 = 0$ o lo que es lo mismo

$$v_1 = (-c_2/c_1).v_2$$

Es decir, v_1 es un múltiplo escalar de v_2

Si $c_1 = 0 \Rightarrow c_2 \neq 0$ y por lo tanto $v_2 = 0 = 0.v_1$:

• EJEMPLO a) $(2,1,3)$ y $(4,2,6)$ son (ld)

$$b) \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ son (li), si no lo fueran se tendría que } \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 2c \\ 4c \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 2 = c$; $5 = 2.c$ y $-3 = 4.c$ lo cual no se cumple para ningún valor de c .

• EJEMPLO :

$$\text{Determinar si los vectores } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ son (ld) o (li)}$$

Solución : Supongamos que :

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ al efectuar las operaciones indicadas, obtenemos:}$$

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 + 7c_3 = 0 \\ c_1 + 4c_2 - c_3 = 0 \\ 8c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \end{cases} \text{ Así, los vectores serán (ld) sí y solo sí, éste sistema tiene soluciones no triviales.}$$

Al resolverlo se observa que su solución es única ($c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$) por lo tanto los vectores dados son (li)

• EJEMPLO: Ídem de $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ -10 \end{bmatrix}$

Solución

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ operando}$$

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 - 8c_3 = 0 \\ 4c_1 + 6c_2 - 10c_3 = 0 \end{cases} \text{ Como este sistema posee infinitas soluciones, los vectores dados son (ld)}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DEPENDENCIA LINEAL EN R3

Supongamos que u, v y w son tres vectores (ld) en R^3 . Entonces existen escalares c_1, c_2, c_3 no todos nulos, tales que: $c_1 u + c_2 v + c_3 w = 0$

Supongamos por ejemplo que $c_3 \neq 0$ entonces dividiendo por c_3

$$w = -(c_1/c_3)u - (c_2/c_3)v = A.u + B.v \quad \text{donde } A = -c_1/c_3; B = -c_2/c_3$$

Haciendo ahora el producto mixto

$$w \cdot (u \times v) = (A.u + B.v) \cdot (u \times v) = A.[u \cdot (u \times v)] + B.[v \cdot (u \times v)] = A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0$$

ya que u y v son \perp a $(u \times v)$. Esto muestra que u, v y w son coplanares.

En consecuencia: *Tres vectores en R^3 son linealmente dependientes si y solo si son coplanares.*

De todo lo anterior puede deducirse que: *Si un conjunto de vectores no nulos v_1, v_2, \dots, v_n es (ld), al menos uno de esos vectores puede ser expresado como una combinación lineal de los restantes.*

De la teoría de los sistemas homogéneos, también se puede sacar algunas conclusiones con respecto a la dependencia o independencia lineal de los vectores.

TEOREMA: *Un conjunto de n vectores en R^m siempre es linealmente dependiente si $n > m$*

En otras palabras: Todo conjunto de vectores que posea un número de vectores mayor que el número de componentes de cada uno de ellos, siempre es linealmente dependiente

DEMOSTRACIÓN:

Sean x_1, x_2, \dots, x_n , n vectores en R^m . Para demostrar que son (ld) debemos hallar constantes c_1, c_2, \dots, c_n no todas nulas, tales que $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0$

Sean:

Su demostración resulta del teorema anterior en el caso que $m = n$

TEOREMA: Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces $|A| \neq 0$, si y solo si, las columnas de A son (II).

DEMOSTRACION: Por el teorema anterior. Las columnas de A son (II), si y solo si, 0 es la única solución de $A \cdot x = 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0$.

TEOREMA:

Todo conjunto de n vectores linealmente independientes (II) en \mathbb{R}^n genera \mathbb{R}^n

DEMOSTRACION: Supongamos que:

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}; \dots; v_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

son (II) y que $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ es un vector de \mathbb{R}^n

Tenemos que demostrar, que existen escalares c_1, c_2, \dots, c_n tales que

$$v = c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + \dots + c_n \cdot v_n$$

Es decir :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \dots + c_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

operando resulta el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot c_1 + a_{12} \cdot c_2 + \dots + a_{1n} \cdot c_n = x_1 \\ a_{21} \cdot c_1 + a_{22} \cdot c_2 + \dots + a_{2n} \cdot c_n = x_2 \\ \dots \\ a_{n1} \cdot c_1 + a_{n2} \cdot c_2 + \dots + a_{nn} \cdot c_n = x_n \end{array} \right.$$

Este sistema puede escribirse en la forma $A \cdot c = V$ donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{pero } |A| \neq 0, \text{ ya que las columnas de } A \text{ son}$$

(li). Entonces el sistema tiene una única solución c y el teorema queda demostrado.

COMENTARIO: Este teorema no solo muestra que V se puede expresar como una combinación lineal de los vectores independientes v_1, v_2, \dots, v_n si no, además que dicha combinación lineal es única (ya que el vector solución es único).

- EJEMPLO: Tres vectores en R^3 generan R^3 si su determinante es distinto de cero.

Los vectores $(1, 1, -1); (2, -1, 0); (-1, 3, 2)$ generan R^3 porque:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \text{ es decir son linealmente independientes.}$$

La mayor parte de los ejemplos vistos hasta aquí están referido al espacio R^n , solo por una razón de simplicidad o visualización geométrica no obstante es de destacar que otros espacios, en apariencia muy dispares, tienen básicamente las mismas propiedades.

- EJEMPLO: Determinar en $M_{2 \times 2}$ si:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ son (ld) o (li)}$$

Solución:

Planteamos la ecuación:

$$\alpha \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ operando resulta:}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta - 2\mu = 0 \\ \alpha - \beta + \mu = 0 \\ 3\alpha + \beta + \mu = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Resolviéndolo, observamos que éste sistema homogéneo, admite como única solución la trivial, esto es $\alpha = \beta = \mu = 0$; lo cual nos indica que el conjunto de matrices dado es *linealmente independiente*.

- EJEMPLO: Determinar en P_2 si los vectores $p_1 = x^2 - 1$; $p_2 = x^2 + 4$; $p_3 = x^2 + 1$ son (ld) o (li)

Solución: Planteamos la ecuación:

$$a.(x^2-1)+b.(x^2+4)+c.(x^2+1) = 0.1+0.x+0.x^2$$

$$(a+b+c).x^2 + (-a+4b+c) = 0.1+0.x+0.x^2 \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ -a+4b+c = 0 \end{cases} \text{ Como } n \text{ (n}^\circ \text{ de incog.)} = 3 \text{ y } m \text{ (n}^\circ \text{ de ecuac.)} = 2 \Rightarrow n > m \text{ el}$$

sistema es indeterminado, es decir existen escalares a, b, c no todos nulos tales que

$$a.p_1 + b.p_2 + c.p_3 = 0$$

entonces p_1, p_2, p_3 constituyen un conjunto linealmente dependiente de P_2 .

- EJEMPLO: Determinar si en P_3 los vectores $p_1 = 1$; $p_2 = 2+x$; $p_3 = x^2-2$; $p_4 = 1+x^3$ son (ld) o (li).

Solución: Planteamos la ecuación

$$a.(1) + b.(2+x) + c.(x^2-2) + d.(1+x^3) = 0.1 + 0.x + 0.x^2 + 0.x^3$$

operando, resulta el sistema:

$$\begin{cases} a + 2b - 2c + d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

luego, como su única solución es la trivial $a = b = c = d = 0$, entonces p_1, p_2, p_3, p_4 constituyen un conjunto de polinomios (li) de P_3 .

BASES DE ESPACIOS VECTORIALES

El conjunto de vectores $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ genera R^2 . Es decir

cualquier vector de R^2 se puede expresar como una combinación lineal de $(1, 1)$ $(1, -1)$. El conjunto de

vectores $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ también genera R^2 . Los conjuntos S y T difieren en que S es linealmente

independiente, mientras que T es linealmente dependiente. Esto hace que halla una notable diferencia al expresar un vector de R^2 como una combinación lineal de los vectores de cada conjunto. Por ejemplo al expresar $(2, 4)$ en término de los vectores de S , se tiene como única posibilidad

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{array} \right| \Rightarrow \alpha = 3; \beta = -1$$

Sin embargo, en término de los vectores de T , hay varias posibilidades

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \delta = 2 \\ \alpha - \beta = 4 \end{cases} \text{ resolviendo el sistema}$$

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 1 & -1 & 0 & : & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & -2 & -1 & : & 2 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 - k \\ -2\beta = 2 + k \\ \delta = k \end{cases} \Rightarrow \text{Sol. gral.} = (3-k/2 ; -1-k/2 ; k)$$

La conclusión es: si un conjunto S de vectores genera V y S es linealmente dependiente, entonces la representación de un vector $v \in V$ en término de los vectores de S no es única. Si se desea unicidad el conjunto generador, también deberá ser linealmente independiente. Un conjunto con esas características recibe el nombre de *base* para V.

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio vectorial V está generado finitamente, si existe un conjunto finito de vectores $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ en V tal que $\text{gen } S = V$. Si el conjunto S es además linealmente independiente, entonces S es una base para V.

Esta definición afirma lo siguiente:

Un conjunto finito de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para V, si y solo si:

- 1ª) genera a V
- 2ª) es linealmente independiente

En un teorema anterior, hemos visto que " todo conjunto de n vectores linealmente independiente en R^n generaba R^n ". Por lo tanto

" Todo conjunto de n vectores linealmente independiente en R^n es una base de R^n "

• Es decir, un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de un espacio vectorial V es una base de V, si todo vector de V se puede expresar como una combinación lineal única de los vectores v_1, v_2, \dots, v_n

EJEMPLO: $A = \{ (1;2), (3;-1) \}$ es una base de R^2 .

Solución: Hay que demostrar que el conjunto A es (li) y que genera R^2 .

Es decir que: $\alpha \cdot (1;2) + \beta \cdot (3;-1) = (0;0)$ tiene únicamente la solución $\alpha = 0 ; \beta = 0$

y que: $\alpha \cdot (1;2) + \beta \cdot (3;-1) = (x;y)$ tiene una solución para cualquier vector $(x;y) \in R^2$.

Por lo tanto tendremos que resolver los siguientes sistemas de ecuaciones :

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha - \beta = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ 2\alpha - \beta = y \end{cases}$$

que escrito en forma de matrices aumentadas son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & : & 0 \\ 2 & -1 & : & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & : & x \\ 2 & -1 & : & y \end{bmatrix}$$

En lugar de resolver los dos sistemas por separado, es posible resolver los dos al mismo tiempo, trabajando con la siguiente matriz aumentada doblemente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & : & 0 & : & x \\ 2 & -1 & : & 0 & : & y \end{bmatrix}$$

reduciéndola se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & : & 0 & : & x \\ 0 & 1 & : & 0 & : & \frac{-y+2x}{7} \end{bmatrix}$$

...../

la independencia lineal se estudia con esta parte

...../

el espacio generado se comprueba con esta parte

Para la independencia lineal se halla que: $\alpha = 0$; $\beta = 0$ y para gen.A se obtiene que

$$\beta = \frac{2x-y}{7}; \alpha = \frac{x+3y}{7}. \text{Entonces como A es (li) y además genera a } R^2, \text{ es una base de } R^2.$$

En este ejemplo, vemos que los coeficientes en la combinación lineal son únicos para cada vector (x,y) dado. Esto en general es cierto para todos los casos y podemos confirmarlo a través del siguiente teorema.

TEOREMA: Si $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ es una base de V y si $v \in V$, entonces existe un único conjunto de escalares c_1, c_2, \dots, c_n tales que: $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$

Es decir existe una única combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n que permite hallar v .

DEMOSTRACIÓN: Si $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ es una base de V , es en particular un sistema generador de V y por lo tanto cualquier vector de V puede expresarse como combinación lineal de esos vectores. Falta probar, que esta combinación lineal es única.

Supongamos que un vector cualquiera v puede ser expresado como:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \quad y$$

$$v = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_n v_n$$

restando miembro a miembro, se tiene:

$(c_1 - d_1) v_1 + (c_2 - d_2) v_2 + \dots + (c_n - d_n) v_n = 0$ como $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ es linealmente independiente (pues es una base) todos los escalares deben ser cero y por consiguiente: $c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \dots = c_n - d_n = 0$ y por lo tanto $c_1 = d_1$; $c_2 = d_2$;; $c_n = d_n$, lo que demuestra el teorema.

• OTROS EJEMPLOS DE BASES:

1) El conjunto $E = \{ (1;0) (0;1) \}$ es (li) y genera R^2 , por lo tanto también es una base de R^2 y particularmente recibe el nombre de base estándar.

2) El conjunto $\{ (1,0,0) (0,1,0) (0,0,1) \}$ (li) y generador de R^3 es la base estándar de R^3 .

3) Generalizando los dos ejemplos anteriores, puede decirse, que el conjunto $E = \{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$ en donde e_i tiene todas sus componentes cero, excepto la i -ésima que es uno, $e_i = (0, 0, \dots, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ constituye la base estándar de R^n

i -ésima componente.....7

4) Vimos que los polinomios $1, x, x^2, x^3$ son (li) y además que generan P^3 En consecuencia $\{ 1, x, x^2, x^3 \}$ es una base de P^3 y se la denomina base estándar.

En general los polinomios $\{ 1, x, x^2, \dots, x^n \}$ constituyen una base de P_n . A este conjunto se le llama base estándar de R^n .

5) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base del espacio M_n de las matrices diagonales de orden 2.

En efecto: El conjunto A es linealmente independiente pues

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix}$$

El conjunto A es un sistema generador pues

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}; \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = x \\ \beta = y \end{matrix}$$

Para cualquier matriz $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \in M_n$ es

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ en consecuencia } SE(A) =$$

DETERMINACIÓN DE UNA BASE DE UN SUBESPACIO DE R^3

EJEMPLO : Determinar una base para el conjunto de los vectores que se encuentran en el plano

$$\left\{ \pi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : 2x - y + 3z = 0 \right\}$$

Solución: Sabemos que π geoméricamente es un plano, es un subespacio de R^3 . Por lo tanto una base del mismo deberá estar formada por dos vectores de R^3 que sean (li) y que además generen dicho plano.

A fin de hallar una base, debemos advertir en primer lugar que si "x" y "z" se eligen en forma arbitraria y si

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \pi \Rightarrow y = 2x + 3z \text{ por lo tanto los vectores de } \pi \text{ tienen la forma } \begin{bmatrix} x \\ 2x + 3z \\ z \end{bmatrix} \text{ como "x" y "z" son}$$

arbitrarios, les asignaremos algunos valores que den resultados sencillos.

$$\text{Por ejemplo si } x = 1 \wedge z = 0 \text{ se tiene } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \text{ eligiendo } x = 0 \wedge z = 1 \text{ se obtiene } v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Entonces } \begin{bmatrix} x \\ 2x + 3z \\ z \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ por tanto } \{v_1, v_2\} \text{ genera } \pi \text{ y son además (li) -ya que ninguno de ellos}$$

es múltiplo del otro - en consecuencia forman una base de π .

Esto se puede ver de una más directa si se escribe

$$\begin{bmatrix} x \\ 2x + 3z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3z \\ z \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ lo que muestra que } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ generan } \pi.$$

TEOREMA: Si $H = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V , entonces :

a) Cualquier conjunto de $n+1$ (o más) vectores es linealmente dependiente y por lo tanto no es una base de V .

b) Cualquier conjunto de $n-1$ (o menos) vectores no puede generar V , y por lo tanto no es una base de V .

Este teorema , simplemente dice que el número de vectores en una base es único. Lo cual da lugar al siguiente teorema

TEOREMA: Si $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ son bases del espacio vectorial V , entonces $m = n$.

Es decir dos bases cualesquiera de un espacio vectorial V contienen el mismo número de vectores

Este teorema permite definir uno de los conceptos centrales del Álgebra Lineal.

DIMENSION. Definición:

- Si el espacio vectorial V tiene una base definida, entonces la dimensión de V es el número de vectores que tiene cualquiera de las bases de V y éste último recibe el nombre de espacio vectorial de dimensión finita. En cualquier otro caso, se dice que V es un espacio vectorial de dimensión infinita. Si $V = \{0\}$ se dice que V es de dimensión cero.

Notación : La dimensión de V se denota : $\dim. V$

• EJEMPLOS:

a) Dimensión de R_n : Como n vectores (li) en R_n conforman una base de este espacio, entonces $\dim R_n = n$

b) Dimensión de P_n : Como los polinomios $1, x, x^2, \dots, x^n$ constituyen una base de P_n entonces $\dim P_n =$

$n+1$

En otras palabras podemos decir, que los espacios vectoriales finitos generados por un conjunto de vectores no nulos, tienen base y son de dimensión finita.

Es evidente entonces que los espacios vectoriales de dimensión finita, son generados por una base finita.

En general un espacio vectorial (no nulo) tiene un numero infinito de bases. No obstante, el número de elementos en cada una de las bases es el mismo y a ese número se lo llama dimensión del espacio vectorial.

De todo lo anterior, puede arribarse también a las siguientes conclusiones :

1) Si v_1, v_2, \dots, v_m es un conjunto de m vectores linealmente independiente pertenecientes a un espacio vectorial V de dimensión n entonces $m \leq n$.

2) Si H es un subespacio del espacio vectorial V de dimensión finita. Entonces H es de dimensión finita y $\dim H \leq \dim V$

A través de algunos ejemplos, vamos a observar que la determinación de una base de un espacio vectorial, en general no se obtiene mediante una fórmula o la aplicación de un procedimiento o regla fija. Requiere razonamiento, flexibilidad y la aplicación adecuada de la mayor parte de lo visto hasta aquí.

• EJEMPLO: Sea $V = \{ (0,1,2) (1,2,3) \}$. Hallar una base H de R^3 que contenga al conjunto V .

Solución A

Como R^3 tiene dimensión 3, sabemos que T debe contener tres vectores.

El conjunto dado V , podemos observar que es linealmente independiente, por lo que solo basta agregar un vector a V , pero no cualquier vector, sino aquél que cumpla determinadas condiciones.

El nuevo vector que se agregue a V , no debe hacer que H sea linealmente dependiente. Esto quiere decir, que el nuevo vector no debe estar en el espacio generado por los dos vectores de V .

Se tiene que:

$$\text{gen. } \{ (0,1,2) (1,2,3) \} = \{ x / x = a.(0,1,2) + b.(1,2,3) \} = \{ x / x = b, a+2b, 2a+3b \}$$

por lo tanto, debemos lograr que el nuevo vector no sea de la forma $(b, a+2b, 2a+3b)$.

Para ello suponemos, que el nuevo vector es (x_1, x_2, x_3) entonces se hace que la ecuación

$$(b, a+2b, 2a+3b) = (x_1, x_2, x_3)$$

no tenga soluciones para a y b . Resolviendo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & : & x_1 \\ 1 & 2 & : & x_2 \\ 2 & 3 & : & x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & : & x_2 \\ 0 & 1 & : & x_1 \\ 2 & 3 & : & x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & : & x_2 \\ 0 & 1 & : & x_1 \\ 0 & -1 & : & x_3 - 2x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & : & x_2 \\ 0 & 1 & : & x_1 \\ 0 & 0 & : & x_1 + x_3 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, si x_1, x_2 y x_3 se eligen de tal modo que $x_1 + x_3 - 2x_2 \neq 0$ se tendrá un vector que no está en $\text{gen. } \{ (0,1,2) (1,2,3) \}$.

Por ejemplo $x = (1,0,0)$ es una elección aceptable, luego

$$T = \{ (0,1,2) (1,2,3) (1,0,0) \} \text{ es una base de } R^3$$

Solución B

Si el vector buscado (x_1, x_2, x_3) hiciera que $\{(0,1,2), (1,2,3), (x_1, x_2, x_3)\}$ fuera linealmente dependiente, entonces

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ ya que uno de los renglones sería una combinación lineal de los otros dos. Para que}$$

sean linealmente independientes, debe ocurrir que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow (3x_1 + 2x_2) - (4x_1 + x_3) \neq 0 \Rightarrow -x_1 + 2x_2 - x_3 \neq 0 \text{ que es la misma condición}$$

obtenida mediante la *solución A*.

Solución C:

Simplemente consiste en probar con los vectores de la base estándar, hasta que uno de ellos forme un conjunto linealmente independiente con los anteriores. Por ejemplo probamos con $(1,0,0)$ y verificamos la independencia lineal

$$c_1 \cdot (0,1,2) + c_2 \cdot (1,2,3) + c_3 \cdot (1,0,0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 2 & 3 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 2 & 3 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & -1 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que muestra que los vectores son linealmente independientes y forman una base

$$H = \{ (0,1,2), (1,2,3), (1,0,0) \}$$

• EJEMPLO: Hallar una base para el espacio solución del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Solución: Resolvemos el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 & : & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & : & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & : & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 & : & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & : & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 10 & : & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -5 & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

tomando $x_4 = t$; $x_3 = k$ resulta $x_2 = k + 2t$; $x_1 = -3t$ luego el conjunto solución es

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3t; k + 2t; k; t) = t \cdot (-3, 2, 0, 1) + k \cdot (0, 1, 1, 0)$$

Como $H = \{ (-3, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \}$ genera el espacio solución y es linealmente independiente, entonces H es una base para el espacio solución y la $\dim. H = 2$

OBSERVACIÓN: $H = \{ (-3, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \}$ también se llama **Núcleo de la matriz A**, donde A es la matriz de los coeficientes e las incógnitas del sistema anterior.

Definiéndose en general el núcleo de una matriz del modo siguiente:

NÚCLEO DE UNA MATRIZ. Definición:

Sea A una matriz de orden $m \times n$ entonces

$$\text{Núcleo de } A = N = \{ x \in R^n / A \cdot x = 0 \}$$

Puede demostrarse que el Núcleo de A de $m \times n$ es un subespacio de R^n

En efecto: Si suponemos que $x_1 \in N$ y $x_2 \in N$ entonces

$$A \cdot (x_1 + x_2) = A \cdot x_1 + A \cdot x_2 = 0 + 0 = 0 \quad y$$

$$A \cdot (\alpha \cdot x_1) = \alpha \cdot (A \cdot x_1) = \alpha \cdot 0 = 0 \quad \text{por lo tanto } N \text{ es un subespacio de } R^n \text{ y } \dim.N \leq n.$$

EJEMPLO: Hallar una base del espacio generado por $S = \{(1,3,-1) (2,1,0) (0,-10,4) (1,-2,1)\}$

Solución: Por lo visto anteriormente, sabemos que si bien S formado por vectores de R^3 , puede generar R^3 o algunos de sus subespacios, no representa una base de ninguno de ellos. En razón de que es un conjunto linealmente dependiente dado que tiene más vectores que el número de componentes de cada uno de ellos (

recordar: " Un conjunto de n vectores en R^m siempre es linealmente dependiente si $n > m$ ")

Por lo tanto para encontrar una base del espacio generado, deben eliminarse los vectores que sean combinación lineal de los otros.

Para ello consideramos:

$$c_1 \cdot (1,3,-1) + c_2 \cdot (2,1,0) + c_3 \cdot (0,-10,4) + c_4 \cdot (1,-2,1) = (0,0,0)$$

$$\text{o sea } \begin{cases} c_1 + 2c_2 + c_4 = 0 \\ 3c_1 + c_2 - 10c_3 - 2c_4 = 0 \\ -c_1 + 4c_3 + c_4 = 0 \end{cases}$$

resolviendo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -10 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -5 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ nos queda : } \begin{cases} c_1 + 2c_2 + c_4 = 0 \\ c_2 + 2c_3 + c_4 = 0 \end{cases} \text{ haciendo } c_3 = t ; c_4 = k \text{ las soluciones son de la}$$

forma : $c_1 = 4t + k ; c_2 = -2t - k ; c_3 = t ; c_4 = k$

$$\text{tomando } t = 1 ; k = 0 \text{ se tiene : } c_1 = 4 ; c_2 = -2 ; c_3 = 1 ; c_4 = 0 \Rightarrow -4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{tomando } t = 0 ; k = 1 \text{ se tiene : } c_1 = 1 ; c_2 = -1 ; c_3 = 0 ; c_4 = 1 \Rightarrow -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto los vectores $(0,-10,4)$ y $(1,-2,1)$ dependen de $(1,3,-1)$ y $(2,1,0)$.

Entonces $H = \{(1,3,-1) (2,1,0)\}$ es una base de $\text{gen.}S$ y la $\dim.\text{gen.}S = 2$

OBSERVACIÓN: En el ejemplo anterior, la matriz ampliada que resultó, tiene como columnas a los vectores de S.

Así mismo., el número de renglones (2) distintos de cero en la forma reducida es igual a la dim. del gen.S
 En general en problemas en R^n del tipo del anterior, su solución se puede encarar en forma mucho más sencilla recurriendo al siguiente teorema..

Previo a su enunciación, vamos a expresar la siguiente definición :

ESPACIO DE LOS RENGLONES DE UNA MATRIZ: Dada una matriz A de orden $m \times n$, si los renglones de A se consideran como vectores de R^n , el espacio generado por esos vectores se denomina "espacio de los renglones de A".

TEOREMA: Si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto de vectores de R^n y A de orden $m \times n$, es la matriz cuyos renglones son las componentes de los vectores v_1, v_2, \dots, v_n y si B es la matriz escalonada por renglones de A, entonces los renglones diferentes de cero de B forman una base para el espacio renglón de A. En otras palabras, los renglones no nulos de B forman una base del gen. S.

DEMOSTRACIÓN: Sea A la matriz

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{1n} \end{bmatrix}$; $v_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{2n} \end{bmatrix}$; $v_n = \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \dots \\ a_{nr} \end{bmatrix}$ Si por aplicación en A de operaciones elementales, se obtiene

un renglón de ceros, eso significa que el vector que ocupaba ese renglón es una combinación lineal de los demás vectores del conjunto.

Todos los demás renglones son en consecuencia combinación lineal de los vectores independientes del conjunto original.

Así, que el espacio generado por los renglones no nulos es igual a gen.S y por ende los renglones no nulos, siendo independientes, forman una base para gen.S y $\dim(\text{gen.S}) = n^\circ$ de renglones no nulos.

- EJEMPLO: Resolver el ejemplo anterior aplicando el teorema precedente.

Solución: Se forma la matriz A y se reduce por renglones

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -10 & 4 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{De acuerdo al teorema anterior}$$

$H' = \{(1,3,-1) (0,-5,2)\}$ es una base de $\text{gen. } S$ y $\dim(\text{gen. } S) = 2$.

CAMBIO DE BASE . COORDENADAS

A partir de aquí , vamos a considerar a una base en un espacio vectorial V de dimensión finita , no solo como un conjunto de vectores del espacio , sino como un conjunto ordenado de vectores de V (es decir un conjunto de vectores en el cual está establecido un orden entre ellos , de modo que tenga sentido hablar de " primer vector " , "segundo vector " , etc.)

Bajo esta hipótesis , se tendrá por ejemplo que la base estandar $\{e_1, e_2\}$ de R^2 es diferente de la base $\{e_2, e_1\}$.

Consideremos un espacio vectorial V de dimensión finita .Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V , entonces si $v \in V$ existe un conjunto único de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tal que :

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$$

Se puede establecer una identificación entre los vectores v del espacio V y los vectores de R^n cuya i -ésima coordenada es el escalar α_i que multiplica al vector v_i (el i -ésimo vector en la expresión que define a v como una combinación lineal de los elementos de la base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$).

Es decir :

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n \leftarrow \text{identificación} \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in R^n$$

En primer lugar debe observarse , que esta identificación se está haciendo a través de una base concreta de V . Por tanto , si se cambia la base B , el mismo vector $v \in V$ le corresponde un vector distinto de R^n (la identificación cambia) .

Por otra parte , debe observarse que esta identificación está bien definida , pues se ha dado previamente un orden a los vectores de la base de B , de modo que cada vector $v \in V$ tendrá asociado a través de la base B , un vector bien determinado en R^n .

Por ejemplo si el espacio V fuera de dim. 2 y se toma $B = \{v_1, v_2\}$ una base de V , al vector

$$v = c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2$$

le corresponde , según la identificación mencionada , el vector $(c_1, c_2) \in R^2$. Sin embargo, si se altera el orden de los vectores de B , se está , de acuerdo a lo dicho anteriormente , considerando otra base distinta de V , es decir $B^* = \{v_2, v_1\}$ respecto de la cual el vector v se identifica con $(c_2, c_1) \in R^2$.

DEFINICIÓN : Sea V un espacio vectorial de dim. n y sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V . Definase el vector de coordenadas de v respecto de la base B , el cual se denota por $(v)_B$ como el vector : $(v)_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

en donde los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son tales que $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$

EJEMPLO :

Sea $V = P_3$, o sea V es de dim. 4. Dados los vectores $v_1 = 1$; $v_2 = 1+x$; $v_3 = 1+x+x^2$; $v_4 = 1+x+x^2+x^3$ que forman una base de V , que simbolizamos como $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y dado el vector $v = 3 + 2x + 4x^2 - x^3$ obtener $(v)_B$.

Solución :

Lo que se tiene que hacer es encontrar escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tales que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$$

O sea

$$3 + 2x + 4x^2 - x^3 = \alpha_1(1) + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1+x+x^2) + \alpha_4(1+x+x^2+x^3)$$

$$3 + 2x + 4x^2 - x^3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)x + (\alpha_3 + \alpha_4)x^2 + \alpha_4 x^3$$

de donde :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3 \rightarrow \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2 \rightarrow \alpha_2 = -2 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 4 \rightarrow \alpha_3 = 5 \\ \alpha_4 = -1 \rightarrow \alpha_4 = -1 \end{cases}$$

por lo que entonces $(3 + 2x + 4x^2 - x^3)_B = (1, -2, 5, -1) \in \mathbb{R}^4$

EJEMPLO

Consideremos en $M_{2 \times 2}$ la base estandar $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tal que

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea

$$v \in M_{2 \times 2} / V = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

resulta claro que

$$v = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto $(v)_{B_1} = (2, -3, 7, 4) \in \mathbb{R}^4$

En el mismo espacio $M_{2 \times 2}$, consideremos ahora la base $B_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ tal que

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; u_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

al tomar el mismo vector $v = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ tendremos que $(v)_{B_2}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

desarrollando

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = -3 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 - 2\alpha_4 = 7 \\ 2\alpha_3 - 3\alpha_4 = 4 \end{cases}$$

resolviendo el sistema, resulta : $\alpha_1 = -25 ; \alpha_2 = 27 ; \alpha_3 = -34 ; \alpha_4 = -24$

de modo que :

$$v = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = -25 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 27 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 34 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - 24 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

y entonces

$$(v)_{B_2} = (-25, 27, -34, -24) \in \mathbb{R}^4$$

Es natural preguntarse, si existe alguna relación entre los vectores :

$$(v)_{B_1} = (2, -3, 7, 4) \quad \text{y} \quad (v)_{B_2} = (-25, 27, -34, -24)$$

pués en realidad representan el mismo vector $v \in M_{2 \times 2}$ solo que en distintas bases.

El tema siguiente resuelve esta cuestión.

CAMBIO DE BASE

Sea V un espacio vectorial de dim. n y sean :

$$B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad \text{y} \quad B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad \text{dos bases distintas de } V.$$

Si se considera un vector $x \in V$, para este vector x existen dos representaciones distintas, de acuerdo a cada una de las bases B_1 y B_2 .

$$x = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n \quad (1) \quad \text{y}$$

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \quad (2)$$

donde los b_i y c_i son números reales

es decir que :

$$(x)_{B_1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (x)_{B_2} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Se quiere ver que relación existe entre $(x)_{B_1}$ y $(x)_{B_2}$.

Como B_2 es una base , cada u_j de B_1 se puede expresar como una combinación lineal de los v_j de la base B_2 .

Por tanto existe un único conjunto de escalares $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ tal que si $n = 1, 2, \dots, n$ entonces

$$u_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \dots + a_{nj}v_n$$

o bien

$$u_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

es decir :

$$u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n$$

$$u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n$$

$$u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n$$

o sea

$$(u_1)_{B_2} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} ; (u_2)_{B_2} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} ; \dots ; (u_n)_{B_2} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en (1)

$$x = b_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n) + b_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n) + \dots + b_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n)$$

operando :

$$x = (a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n)v_1 + (a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n)v_2 + \dots + (a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \dots + a_{nn}b_n)v_n$$

teniendo en cuenta la (2)

$$x = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$$

resulta :

$$(x)_{B_2} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \dots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \dots + a_{2n}b_n \\ \text{-----} \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \dots + a_{nn}b_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(x)_{B_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = A \cdot (x)_{B_1}$$

Donde A de nxn ; cuyas columnas son las cordenadas de los vectores u_j de la base B_1 escritos en la base B_2 , es decir $(u_j)_{B_2}$; recibe el nombre de matriz de transición de la base B_1 a la base B_2 .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(u_1)_{B_2} \uparrow (u_2)_{B_2} \uparrow \dots (u_n)_{B_2} \uparrow$$

El siguiente teorema , es de mucha utilidad en los cálculos que siguen

TEOREMA : Si A es la matriz de transición de B_1 a B_2 , entonces la matriz inversa de A es la matriz de transición de B_2 a B_1

Demostración:

Sea C la matriz de transición de B_2 a B_1 entonces , según vimos :

$$(x)_{B_1} = C \cdot (x)_{B_2}$$

pero $(x)_{B_2} = A \cdot (x)_{B_1}$

sustituyendo en la anterior :

$$(x)_{B_1} = C \cdot A \cdot (x)_{B_1}$$

esta igualdad, resulta válida para todo vector x , en el caso en que $C \cdot A = I$, es decir $C = A^{-1}$ quedando el teorema demostrado .

COMENTARIO :

Este teorema hace que sea relativamente sencillo hallar la matriz de transición de la base standar $B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ en R^n a cualquier otra base en R^n .

Sea $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ otra base cualquiera. Sea C la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores v_1, v_2, \dots, v_n . Entonces C es la matriz de transición de B_2 a B_1 , por que cada vector v_j ya está escrito en términos de la base standar.

$$\text{Por ejemplo : } \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la matriz de transición de B_1 a B_2 es C^{-1} .

PROCEDIMIENTO PARA HALLAR LA MATRIZ DE TRANSICIÓN DE LA BASE STANDAR A LA BASE $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

- 1) Se escribe la matriz C , cuyas columnas son v_1, v_2, \dots, v_n
- 2) Se calcula la C^{-1} . Esta matriz, es la matriz de transición requerida.

$$\text{EJEMPLO En } R^2 \text{ sea } B_1 = \{i, j\} \text{ y } B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$$

Si $w = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R^2$; expresar w en términos de la base B_2

Solución :

En primer lugar debe asegurarse que B_2 es una base. Esto es evidente dado que ningún vector de B_2 es múltiplo del otro, es decir son linealmente independientes

Como B_1 es la base standar $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ entonces la matriz de transición C de B_2 a B_1 está

$$\text{dada por } C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$$

por tanto, según teorema anterior, la matriz de transición A de B_1 a B_2 ES

$$A = C^{-1} = \frac{1}{-41} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{o sea que } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{B_2} = \frac{1}{-41} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{B_1}$$

$$\text{Por ejemplo si } (w)_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(w)_{B_2} = \frac{1}{-41} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{41} \\ \frac{-1}{41} \end{bmatrix}$$

a manera de comprobación observemos que :

$$\frac{17}{41} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} - \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

finalmente :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{B_2} = \frac{4x+3y}{41} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} + \frac{7x-5y}{41} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO : Dado el conjunto de vectores. $B = \{(3,1,2);(-1,0,2);(4,3,5)\}$

- Demostrar que B es una base de \mathbb{R}^3
- Encontrar $(1,1,1)_B$ y $(4,3,6)_B$
- Para un vector cualquiera $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ encontrar $(x,y,z)_B$

Solución

- En este caso ,para saber si los vectores son base de \mathbb{R}^3 solo basta verificar que son linealmente independientes , por ejemplo calculando el determinante formado por ellos

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \rightarrow \text{son linealmente independientes ; por lo tanto constituyen una}$$

base de \mathbb{R}^3 .

- Matriz de transición de la base B a la base standar

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

luego la matriz de transición de la base estandar a la base B es

$$A = C^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 6 & 13 & -3 \\ 1 & 7 & -5 \\ 2 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 6 & 13 & -3 \\ 1 & 7 & -5 \\ 2 & -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{11} \\ -\frac{3}{11} \\ \frac{5}{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}_B = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 6 & 13 & -3 \\ 1 & 7 & -5 \\ 2 & -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{11} \\ -\frac{1}{11} \\ \frac{20}{11} \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} 6 & 13 & -3 \\ 1 & 7 & -5 \\ 2 & -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11}(6x - 13y + 3z) \\ \frac{1}{11}(-x - 7y + 5z) \\ \frac{1}{11}(-2x + 8y - z) \end{bmatrix}$$

EJEMPLO : Sea $B = \{v_1, v_2\}$ una base de \mathbb{R}^2 , suponga que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Determine los vectores de la base B

Solución :

Supongamos que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es la matriz de transición de la base standar a la base B,

entonces

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} + a_{12} \\ -a_{21} + a_{22} \end{bmatrix}$$

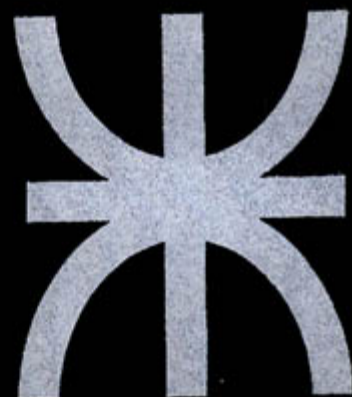
por igualdad de matrices, tenemos

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} = 2 \\ a_{21} + a_{22} = 3 \\ -a_{11} + a_{12} = 3 \\ -a_{21} + a_{22} = 5 \end{cases} \text{ resolviendo el sistema, resulta } A = \begin{bmatrix} -1/2 & 5/2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Entonces la A^{-1} es la matriz de transición de la base B a la base standar, es decir sus columnas son los vectores de la base B.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

U.T.N.
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA
NACIONAL
Fac. Reg. Sta. Fe



Cátedra :

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Tema :

Transformaciones Lineales

Material elaborado por :

Ing. Alberto R. GONCEBATT

(Edición preliminar)
Año 1999

TRANSFORMACIONES LINEALES

INTRODUCCIÓN :

En diversas ramas de la matemática , es frecuente utilizar modelos que emplean funciones vectoriales de variable vectorial, es decir funciones del tipo $w = f(v)$ donde w y v son vectores , a tales funciones comúnmente se las denomina *transformaciones* .

En este tema, nos vamos a ocupar de un caso especial de transformaciones, denominadas *lineales* , que son las más simples y las de mayor aplicación.

TRANSFORMACIÓN- DOMINIO-CODOMINIO

Definición : Si V y W son espacios vectoriales una función $T: V \rightarrow W$ recibe el nombre de transformación. Los espacios V y W se llaman respectivamente *dominio* y *codominio* de la transformación .

Así por ejemplo, la función $T: R^3 \rightarrow R^2$ definida por :

$$T(x,y,z) = (x,y)$$

es una transformación. Los espacios vectoriales R^3 y R^2 son respectivamente el dominio y el codominio de T .

En la transformación T definida anteriormente, se tiene, por ejemplo , que :

$$T(2,1,4) = (2,1)$$

Esto es, la imagen del vector $(2,1,4)$ bajo la transformación T , es el vector $(2,1)$, o en otras palabras "*T transforma al vector $(2,1,4)$ en el vector $(2,1)$* "

Otros ejemplos de imágenes de vectores de R^3 bajo esta misma transformación son

$$T(-1,3,5) = (-1,3)$$

$$T(0,0,6) = (0,0)$$

Su interpretación geométrica es la siguiente : Si (x,y,z) representa un segmento dirigido cualquiera de R^3 , T transforma dicho segmento en su proyección sobre el plano xy .

Consideremos ahora ,otra transformación de R^3 en R^2 , definida por :

$$S(x,y,z) = (x,3x)$$

Como se ve, la imagen de cualquier vector de R^3 bajo esta transformación ,es un par ordenado cuya segunda componente es el triple de la primera. En consecuencia no todos los vectores de R^2 son imagen de algún vector del dominio, sino únicamente aquellos de la forma $(a,3a)$.

Al conjunto formado por todos estos vectores, se lo denomina *Recorrido* de la transformación S .

En general se llama *Recorrido* de una transformación, al conjunto de todos los vectores que son imagen de algún vector del dominio

Otro conjunto importante definido por una transformación es el *Núcleo*.

Se llama *Núcleo* de una transformación al conjunto de vectores del dominio cuya imagen es el vector cero del codominio

Por ejemplo, para la transformación S , definida anteriormente, cualquier vector cuya primer componente sea nula, tiene como imagen al vector cero de \mathbb{R}^2 , por lo que pertenece al Núcleo de S .

Resumiendo podemos definir el Recorrido y el Núcleo de una transformación del siguiente modo:

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación

- Se llama Recorrido de T al conjunto:

$$\text{Recorrido } T = \{ w \in W / w = T(v) \text{ para algún } v \in V \}$$

- Se llama *Núcleo* de T al conjunto:

$$N(T) = \{ v \in V / T(v) = 0_w \}$$

Donde puede observarse, que el Recorrido es un subconjunto del codominio, mientras que el Núcleo lo es, del dominio

LINEALIDAD -TRANSFORMACIONES LINEALES

Para introducir la noción de linealidad, consideremos nuevamente la transformación S definida por

$$S(x, y, z) = (x, 3x)$$

y elijamos un par de vectores cualquiera del dominio, por ejemplo

$$v_1 = (x_1, y_1, z_1) \text{ y } v_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

Si sumamos dichos vectores, y calculamos la imagen de la suma bajo la transformación S , tendremos

$$v_1 + v_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$$

$$\text{y } S(v_1 + v_2) = S(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2) = [x_1 + x_2; 3(x_1 + x_2)] = (x_1 + x_2; 3x_1 + 3x_2)$$

A este mismo resultado, se llega sumando las imágenes de los vectores v_1 y v_2 ya que

$$S(v_1) = S(x_1, y_1, z_1) = (x_1; 3x_1)$$

$$S(v_2) = S(x_2, y_2, z_2) = (x_2; 3x_2)$$

$$S(v_1) + S(v_2) = (x_1; 3x_1) + (x_2; 3x_2) = (x_1 + x_2; 3x_1 + 3x_2)$$

Así , encontramos que “ *la imagen de la suma de dos vectores , es igual a la suma de las imágenes*”.

Esta ,es una de las condiciones que debe cumplir la transformación S para ser considerada lineal .

La otra condición, es la siguiente :

$$S(\alpha \cdot v_i) = \alpha \cdot S(v_i) \quad ; \forall v_i \in R^3 \wedge \alpha \in R$$

Es decir : “*la imagen del producto de un escalar por un vector, es igual al producto del escalar por la imagen del vector*”

Veamos si esto se cumple para cualquier escalar y cualquier vector en el caso de la transformación S del ejemplo.

Sean $v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in R^3 \wedge \alpha \in R$

$$\Rightarrow S(\alpha \cdot v_1) = S[\alpha \cdot (x_1, y_1, z_1)] = S(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) = (\alpha x_1; 3\alpha x_1) \quad (1)$$

por otra parte al aplicar S al vector v_1 se tiene :

$$S(v_1) = S(x_1, y_1, z_1) = (x_1; 3x_1)$$

entonces , multiplicando α por la imagen de v_1

$$\alpha \cdot S(v_1) = \alpha \cdot (x_1; 3x_1) = (\alpha x_1; 3\alpha x_1) \quad (2)$$

comparando (1) y (2) resulta :

$$S(\alpha \cdot v_1) = \alpha \cdot S(v_1)$$

Así , la transformación S del ejemplo, cumple también con la segunda condición mencionada, por lo que se trata de una *transformación lineal*.

En general entonces, podemos enunciar la definición de *transformación lineal* del siguiente modo:

Sean V y W dos espacios vectoriales reales. Una transformación $T: V \rightarrow W$ es lineal si $\forall v_1, v_2 \in V \wedge \forall \alpha \in R$ se cumplen las dos condiciones siguientes :

- 1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
- 2) $T(\alpha \cdot v_1) = \alpha \cdot T(v_1)$

Estas dos condiciones , pueden resumirse en una sola expresión para establecer las condiciones de linealidad, en forma equivalente a la definición anterior :

$$T[\alpha (v_1 + v_2)] = \alpha \cdot T(v_1) + \alpha \cdot T(v_2) \quad ; \forall v_1, v_2 \in V \wedge \forall \alpha \in R$$

Ejemplos:

1) Transformación lineal de R^2 en R^3 ;

Supongamos que $T: R^2 \rightarrow R^3$ está definida por

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{bmatrix}; \text{por ejemplo } T \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$

entonces, se deben verificar las dos condiciones de la definición

$$1) \forall u, v \in \mathbb{R}^2 : T(u+v) =? T(u) + T(v)$$

$$T \left[\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right] = T \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ x_1+x_2-y_1-y_2 \\ 3y_1+3y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \\ 3y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \\ 3y_2 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$2) \forall v \in \mathbb{R}^2 \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} : T(\alpha v) =? \alpha \cdot T(v)$$

$$T \left[\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right] = T \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \alpha y \\ \alpha x - \alpha y \\ 3\alpha y \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{bmatrix} = \alpha \cdot T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

En consecuencia T es una transformación lineal

Ejemplo: Verificar si la siguiente transformación es lineal

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \forall v \in \mathbb{R}^3 : T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 \\ y+z \end{bmatrix}$$

1ra. condic.

$$T \left[\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right] = T \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2+2 \\ y_1+y_2+z_1+z_2 \end{bmatrix}; \text{por otro lado}$$

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+2 \\ y_1+z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2+2 \\ y_2+z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2+4 \\ y_1+y_2+z_1+z_2 \end{bmatrix}$$

como existen x e y para los cuales $T(u+v) \neq T(u) + T(v)$, T no es lineal

Ejemplo: Transformación cero

Sean los espacios vectoriales V y W. Si la $T: V \rightarrow W$ es la transformación definida por

$$Tv = 0 \quad \forall v \in V$$

Entonces $T(v_1+v_2) = 0 = 0 + 0 = Tv_1 + Tv_2 = 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot Tv$ T recibe el nombre de

Transformación cero.

Ejemplo : Transformación Identidad

Sea V un espacio vectorial y $T: V \rightarrow V$ es la transformación definida por $Tv = v \forall v \in V$.

T evidentemente es una transformación lineal, se la llama transformación identidad o bien operador identidad.

Ejemplo : Analizar si la transformación $R_n \rightarrow R_m$ representada mediante la multiplicación por una matriz de $m \times n$ es lineal.

Sea A una matriz de $m \times n$ y supongamos que $T: R_n \rightarrow R_m$ está dada por $Tx = Ax$.

Como $A(x + y) = Ax + Ay$ y $A(\alpha x) = \alpha(Ax)$ si x e y están en R_n , se ve que T es una transformación lineal. Por tanto, toda matriz A de $m \times n$ da origen a una transformación lineal de R_n en R_m . La recíproca, también es cierta, es decir: *toda transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita, se puede expresar mediante una matriz.*

Ejemplo : Transformación de rotación

Supongamos que el vector $v = (x, y)$ en el plano xy se rota un ángulo θ (medido en grados o radianes) en sentido antihorario

Sea $v' = (x', y')$ el nuevo vector rotado.

Entonces si r es la longitud de v , la cual no cambia al rotarlo

$$x = r \cdot \cos \theta \quad ; \quad y = r \cdot \sin \theta$$

$$x' = r \cdot \cos(\alpha + \theta) \quad ; \quad y' = r \cdot \sin(\alpha + \theta)$$

siendo

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cdot \cos \theta - \sin \alpha \cdot \sin \theta$$

$$\sin(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cdot \sin \theta + \sin \alpha \cdot \cos \theta$$

resulta :

$$x' = r \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \theta - \sin \alpha \cdot \sin \theta) = r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \theta - r \cdot \sin \alpha \cdot \sin \theta$$

$$x' = x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta$$

$$y' = r \cdot (\cos \alpha \cdot \sin \theta + \sin \alpha \cdot \cos \theta) = r \cdot \cos \alpha \cdot \sin \theta + r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta$$

$$y' = x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta$$

$$\text{Si} \quad A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

entonces $A_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta \\ x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta \end{bmatrix}$ La transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $Tv = A_\theta \cdot v$, recibe el nombre de transformación de rotación

Propiedades de las transformaciones lineales. Recorrido y Núcleo.

Vamos a deducir algunas de las propiedades básicas de las transformaciones lineales

TEOREMA: Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces para todos los vectores $u, v, v_1, v_2, \dots, v_n$ de V y todos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$1) T(0_v) = 0_w$$

$$2) T(u-v) = Tu - Tv$$

$$3) T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T v_1 + \alpha_2 T v_2 + \dots + \alpha_n T v_n$$

Demostración

$$1) T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0) \quad \text{por tanto}$$

$$0 = T(0) - T(0) = T(0) + T(0) - T(0) = T(0)$$

$$2) T(u-v) = T[u + (-v)] = Tu + T(-1)v = Tu + (-1)Tv = Tu - Tv$$

3) Esta parte se demostrará mediante inducción matemática

a) Si $n = 2$ se tiene $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) = \alpha_1 T v_1 + \alpha_2 T v_2$ por tanto la ecuación es válida para $n = 2$

Supongamos que es válida si $n = k$, y para darle validez general debemos demostrar que es válida también para $n = k+1$

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k) + T(\alpha_{k+1} v_{k+1})$$

y haciendo uso de la ecuación que aparece en la parte (3) para $n = k$, la anterior es igual a:

$$(\alpha_1 T v_1 + \alpha_2 T v_2 + \dots + \alpha_k T v_k) + \alpha_{k+1} T v_{k+1} \quad \text{que es lo que se pretendía demostrar.}$$

Como ya hemos visto, el Recorrido de una transformación es un subconjunto del codominio y el Núcleo es un subconjunto del dominio.

Si la transformación es lineal dichos subconjuntos son además subespacios, como podemos ver en siguiente teorema:

TEOREMA:

Si $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces

1) Núcleo $T = \text{nu } T$, es un subespacio de V

2) Recorrido T es un subespacio de W .

Demostración:

1) Como $\text{nu } T$ es un subconjunto de V solo basta demostrar (de acuerdo a lo visto anteriormente) que $\text{nu } T$ es cerrado para la adición y la multiplicación por un escalar:

Supongamos que u y v están en $\text{nu } T$, entonces

$$T(u + v) = Tu + Tv = 0 + 0 = 0 \quad \text{y}$$

$$T(\alpha u) = \alpha \cdot Tu = \alpha \cdot 0 = 0 \quad \forall \alpha$$

por lo que $u + v$ y $\alpha \cdot u$ están en $\text{nu } T$, en consecuencia $\text{nu } T$ es un subespacio de V .

2) Supongamos que w_1 y w_2 están en Recorrido T , entonces existen dos vectores v_1 y v_2 tales que: $w_1 = Tv_1$ y $w_2 = Tv_2$ esto significa que:

$$T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 = w_1 + w_2 \quad \text{y}$$

$T(\alpha v_1) = \alpha \cdot Tv_1 = \alpha \cdot w_1$ por tanto $w_1 + w_2$ y $\alpha \cdot w_1$ están en Recorrido T en consecuencia es un subespacio de W .

Ejemplos:

Núcleo y Recorrido de la transformación cero:

Supongamos que $Tv = 0 \quad \forall v \in V$

$$\Rightarrow \text{nu } T = V \quad \text{y} \quad \text{Recorrido } T = \{0\}$$

Núcleo y Recorrido de la transformación identidad:

Supongamos que $Tv = v \quad \forall v \in V$

$$\Rightarrow \text{nu } T = \{0\} \quad \text{y} \quad \text{Recorrido } T = V$$

Las transformaciones cero e identidad representan los dos extremos. En la primera todo está en el núcleo. En la segunda, solo el vector cero está en el núcleo. Los casos intermedios son más interesantes.

Ejemplo: Sea la transformación $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (y, 3y)$$

Resulta fácil deducir que:

$$\text{Recorrido } T = \{(y, 3y) / y \in \mathbb{R}\}$$

pudiéndose observar que dicho conjunto es un subespacio de \mathbb{R}^2 .

Por otro lado

$$\text{núT} = \{ (x,0,z) / x,z \in \mathbb{R} \}$$

pudiéndose comprobar que este conjunto es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

Si bien en el ejemplo anterior, resulta fácil determinar el Recorrido y el Núcleo , no ocurre lo mismo en la generalidad de los casos . No obstante , para determinar el Recorrido de una transformación lineal específica , puede tenerse en cuenta el siguiente teorema ;

TEOREMA :

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal . Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V , entonces el conjunto $G = \{Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n\}$ es un generador del Recorrido T .

Demostración :

Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V .Si w es un vector cualquiera del Recorrido T , entonces, existe algún vector $v \in V$, tal que :

$$w = Tv$$

como B es una base de V
$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

por lo que
$$Tv = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n)$$

y , como T es lineal
$$w = \alpha_1 Tv_1 + \alpha_2 Tv_2 + \dots + \alpha_n Tv_n$$

En consecuencia , el conjunto $G = \{Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n\}$ es un generador del Recorrido T

Si el conjunto G del teorema anterior , es linealmente independiente, entonces ,es una base del

Recorrido T y si es linealmente dependiente , puede obtenerse una base del Recorrido T a partir de el

En otras palabras , este teorema nos está indicando que “ Si se conoce el efecto de una

transformación lineal , sobre los vectores de una base del dominio , se conoce el efecto de la

transformación sobre cualquier otro vector del dominio, con lo cual la transformación queda

determinada completamente .”

Ejemplo :

Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y supongamos que :

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}; T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}; T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{Calcular } T \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Solución : Se tiene que :

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ por tanto}$$

$$T \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = 3.T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 4.T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5.T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ -22 \end{bmatrix}$$

Ejemplo : Sea T una transformación lineal de R^2 en R^3 .

1) Hallar T , sabiendo que

$$Tv_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad Tv_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \text{y que } V = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \text{ es base de } R^2$$

2) Hallar $T \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Solución :

$$1) \text{ Sea } v \in R^2 \Rightarrow v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ a+2b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b = x \\ a+2b = y \end{cases} \text{ de donde } b = \frac{y-x}{3}; a = \frac{2x+y}{3}$$

$$\text{es decir } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{2x+y}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{y-x}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ aplicando } T \text{ que es lineal}$$

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T \left\{ \frac{2x+y}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{y-x}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \frac{2x+y}{3} T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{y-x}{3} T \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{2x+y}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{y-x}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x+2y}{3} \\ \frac{4x+2y}{3} \\ \frac{x+2y}{3} \end{bmatrix}$$

$$2) \quad T \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 10/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo :

Sea la transformación lineal $T : R^3$ en R^3 definida por

$$T(x,y,z) = (3x+y; 6x-z; 2y+z)$$

consideremos por sencillez, la base canónica de R^3

$$B = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$$

para la cual se tiene :

$$T(1,0,0) = (3,6,0)$$

$$T(0,1,0) = (1,0,2)$$

$$T(0,0,1) = (0,-1,1)$$

entonces de acuerdo al teorema anterior , el conjunto :

$$G = \{ (3,6,0); (1,0,2); (0,-1,1) \}$$

es un generador del Recorrido T.

A partir de G , estamos en condiciones de determinar el espacio generado por este conjunto e inclusive determinar una base de el y su dimensión

$$\text{Si } w = (w_1, w_2, w_3) \in \text{Recorrido T} \Rightarrow w = \alpha \cdot (3,6,0) + \beta \cdot (1,0,2) + \gamma \cdot (0,-1,1)$$

es decir

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = w_1 \\ 6\alpha - \gamma = w_2 \\ 2\beta + \gamma = w_3 \end{cases}$$

resolviendo por Gauss-Jordan , puede observarse que este sistema es compatible solo si

$$w_2 - 2w_1 + w_3 = 0$$

Es decir que el Recorrido T es ,geométricamente , un plano de la forma $w_2 - 2w_1 + w_3 = 0$

O sea ,que el Recorrido T está formado por todos los vectores del tipo

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 2c_1 - c_2 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ por lo tanto el conjunto } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \text{ es una base de dicho espacio; es}$$

decir es una base del Recorrido T y , según podemos apreciar su dim. = 2 .

Para este mismo ejemplo obtengamos el núcleo de la transformación . Se requiere entonces determinar , bajo que condiciones un vector $(x,y,z) \in R^3$ es tal que :

$$T(x,y,z) = (0,0,0)$$

aplicando la ley de correspondencia

$$(3x + y; 6x - z; 2y + z) = (0,0,0)$$

lo cual, es equivalente al sistema homogéneo:

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 6x - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \text{ cuya solución general es } x = x; y = -3x; z = 8x$$

es decir que el nuT es un subespacio de R^3 , siendo una base de nuT el conjunto :

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$ y su $\dim. = 1$; geométricamente es una recta de \mathbb{R}^3 .

Nulidad y Rango de una transformación lineal :

Como el núcleo y el recorrido de una transformación lineal son espacios vectoriales . Si T es una transformación lineal de V en W , se define :

Nulidad de $T = \nu(T) = \dim. \text{ del nu}T$

Rango de $T = \rho(T) = \dim. \text{ del Recorrido } T$

En el ejemplo anterior puede apreciarse que

$$\nu(T) = 1 \quad \text{y} \quad \rho(T) = 2$$

Si sumamos dichas dimensiones , se obtiene un número que coincide con la dimensión del dominio.

Esto sucede siempre que se trabaja con espacios vectoriales de dimensión finita , como se establece a continuación :

TEOREMA : *Si V es un espacio de dimensión finita y $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal , entonces :*

$$\dim. V = \nu(T) + \rho(T) \quad (\text{teorema de las dimensiones})$$

Representación matricial de una transformación lineal :

En el caso de espacios de dimensión finita , las transformaciones lineales pueden ser representadas por medio de matrices.

Con el objeto de introducir , el concepto de matriz asociada a una transformación lineal, consideremos como ejemplo la transformación $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por :

$$T(x,y,z) = (x-3y ; 2x + z)$$

y tratemos de encontrar , una matriz A , tal que el producto de ésta por cualquier vector del dominio , nos de por resultado , la imagen de dicho vector bajo la transformación T , es decir una matriz A , tal que :

$$A.v = Tv \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$$

como en este caso , v es un vector de \mathbb{R}^3 y Tv es un vector de \mathbb{R}^2 , la igualdad anterior sólo puede lograrse , si A es de orden 2×3 , considerando a v y Tv como vectores columna .

En consecuencia , la matriz A , deberá ser de la forma :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

y satisfacer la igualdad :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 3y \\ 2x + z \end{bmatrix} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

es decir :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = x - 3y \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 2x + z \end{cases}$$

la cual ,se cumple para los valores

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1; a_{12} = -3; a_{13} = 0 \\ a_{21} &= 2; a_{22} = 0; a_{23} = 1 \end{aligned}$$

por lo que la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

satisface las condiciones pedidas.

A esta matriz , se la conoce como "*matriz asociada a la transformación T*" (definida anteriormente) y se la representa con $M(T)$.

Veamos ahora , que relación tienen los elementos de esta matriz , con los vectores de una base del dominio.

Si calculamos las imágenes de los vectores de la base estándar (canónica) :

$$E = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$$

bajo la transformación T , obtenemos :

$$T(1,0,0) = (1,2)$$

$$T(0,1,0) = (-3,0)$$

$$T(0,0,1) = (0,1)$$

Como puede apreciarse , estas imágenes (consideradas como vectores columnas) son precisamente las columnas que integran la matriz asociada a T .

Puede demostrarse , que este es un resultado de carácter general . Por ello para obtener la matriz asociada a una transformación lineal , solo basta calcular las imágenes de los vectores que integran la base estándar del dominio .

Por ejemplo , para la transformación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por :

$$T(x,y,z) = (x - y ; y + z ; 2x + z)$$

se tiene :

$$T(1,0,0) = (1,0,2)$$

$$T(0,1,0) = (-1,1,0)$$

$$T(0,0,1) = (0,1,1)$$

por lo que la matriz asociada es

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En efecto , si multiplicamos esta matriz por un vector cualquiera de R^3 , tenemos :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ y + z \\ 2x + z \end{bmatrix}$$

que es la imagen de dicho vector , bajo la transformación T .

Matriz asociada , referida a dos bases cualesquiera :

En los ejemplos anteriores , las columnas de la matriz asociada a la transformación , son las imágenes de los vectores de la base estándar del dominio , y al multiplicar dicha matriz por un vector , se obtiene la imagen de este bajo la transformación .

Esto es posible , debido a que tanto el dominio como el codominio son espacios del tipo R^n .

Sin embargo , las ideas anteriores pueden generalizarse al caso de espacios vectoriales cualesquiera , simplemente reemplazando los vectores , por sus respectivos vectores de coordenadas .

De esta manera , si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal , A es una base de V y B es una base de W ; en lugar del vector $v \in V$ tendremos a su vector de coordenadas en la base A : $(v)_A$; en lugar de $T(v) \in W$ tendremos a su vector de coordenadas en la base B : $[Tv]_B$.

La matriz que al multiplicar al vector $(v)_A$ nos da por resultado $[Tv]_B$, se llama **matriz asociada a T referida a las bases A y B** y se representa como $M_{AB}(T)$ es decir :

$$M_{AB}(T) \cdot (v)_A = [Tv]_B$$

Las columnas de dicha matriz , son los vectores de coordenadas en la base B de las imágenes de los elementos que integran la base A , como lo establece el siguiente teorema :

Teorema :

Sean V y W , dos espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente y sean :

$A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ bases de V y W respectivamente .

Si $T:V \rightarrow W$ es una transformación lineal, existe una y solo una matriz $M_{AB}(T)$ de orden $m \times n$, tal que :

$$M_{AB}(T) \cdot (v)_A = [Tv]_B \quad \forall v \in V$$

las n columnas de dicha matriz, son los vectores : $[Tv_1]_B, [Tv_2]_B, \dots, [Tv_n]_B$

El principio básico que sirve de guía para la demostración de este teorema es el siguiente :

Si la $\dim V = n$ y $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base para V , entonces la imagen de T puede describir completamente en términos de las imágenes $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ de los vectores de la base.

Para ver esto, sea x cualquier vector en V . Existen constantes c_1, c_2, \dots, c_n tales que :

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

ahora bién :

$$\begin{aligned} T(x) &= T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n) = \\ &= c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \dots + c_n T(v_n) \quad \text{por la linealidad de } T \end{aligned}$$

Para cada k ($1 \leq k \leq n$) $T(v_k)$ está en W y se puede representar mediante los elementos de la base para W

$$T(v_k) = a_{1k} w_1 + a_{2k} w_2 + \dots + a_{mk} w_m$$

es decir :

$$T(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m$$

$$T(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$T(v_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m$$

por lo tanto :

$$\begin{aligned} T(x) &= c_1 (a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m) + c_2 (a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m) + \dots \\ &+ c_n (a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m) \end{aligned}$$

agrupando términos :

$$\begin{aligned} T(x) &= (c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \dots + c_n a_{1n}) w_1 + (c_1 a_{21} + c_2 a_{22} + \dots + c_n a_{2n}) w_2 + \dots \\ &+ (c_1 a_{m1} + c_2 a_{m2} + \dots + c_n a_{mn}) w_m \end{aligned}$$

Los coeficientes de w_1, w_2, \dots, w_m en esta última expresión son exactamente los productos renglón columna de :

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} (Tv_1)_B & (Tv_2)_B & \dots & (Tv_n)_B \end{matrix} & \end{matrix} = M_{AB}(T) \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz $M_{AB}(T)$ de $m \times n$, cuyas columnas son los vectores de coordenadas de Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n es la matriz deseada.

Esta matriz es única para cada par de bases, ya que los vectores de coordenadas son únicos en una base dada.

De acuerdo a este teorema, la matriz $M_{AB}(T)$, nos permite calcular la imagen de un vector cualquiera v del dominio, mediante el siguiente procedimiento, que podemos considerar indirecto:

- 1) **Determinar las coordenadas de v en la base A .**
- 2) **Multiplicar la matriz $M_{AB}(T)$ por el vector $(v)_A$**
- 3) **Obtener el vector $T(v)$ a partir de sus coordenadas en la base B**

Este teorema es de importancia por diversas razones: En primer lugar, por que reduce el problema de aplicar una transformación, al de multiplicar una matriz por un vector, lo cual permite aprovechar las propiedades y procedimientos del álgebra matricial, incluyendo las posibilidades de su manejo por computadoras.

Otra consecuencia importante de dicho enunciado, es que la matriz $M_{AB}(T)$ depende de las bases A y B . Generalmente dichas bases se eligen de manera que el cálculo de coordenadas, resulte lo más sencillo posible.

Ejemplo: Sea el espacio $V = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ de todos los polinomios de coeficientes reales de grado menor que tres, y el espacio $W = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}$ de todas las matrices simétricas de 2×2 con elementos reales y sea $T: V \rightarrow W$ la transformación definida por $T(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a+c & 3b \\ 3b & 2a+2c \end{bmatrix}$

Con el propósito de simplificar al máximo el cálculo de coordenadas, elegimos las siguientes bases para V y W .

$$A = \{x^2, x, 1\}$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Para hallar la matriz asociada a T referida a estas bases, procedemos de la siguiente manera.

Calculamos las imágenes bajo la transformación T de los vectores de la base A .

$$T(x^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

cuyas coordenadas en la base B son:

$$[Tx^2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[Tx]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[T1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

en consecuencia la matriz asociada a T, referida a las bases A y B es:

$$M_{AB}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si queremos emplear esta matriz para obtener, por ejemplo, la imagen del vector

$$v = 3x^2 - 2x + 4$$

se hace lo siguiente:

1) Determinamos las coordenadas de v en la base A. En este caso, por ser A la base estándar de P_2 , resulta:

$$v_A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2) Efectuamos el producto: $M_{AB}(T) \cdot (v)_A = [Tv]_B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

3) Como el resultado es $[Tv]_B$, entonces:

$$Tv = 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-6) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 14 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}$$

Puede observarse, que al mismo resultado se llega aplicando a v la ley que define la transformación.

$$Tv = T(3x^2 - 2x + 4) = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}$$

Como vimos al inicio de este tema, cuando los espacios V y W del teorema anterior son del tipo R^n y A, B, son las bases estándar de V y W, la matriz $M_{AB}(T)$ se denota simplemente con M(T) y se la llama matriz asociada a T.

Reiterando lo enunciado en el teorema anterior, puede decirse, que la imagen de cualquier vector del primer espacio, es igual al producto de la matriz asociada a T, referida a las bases A y B, por la

matriz de coordenadas de dicho vector, respecto de la base A. Tal imagen, resulta expresada en términos de la base B del segundo espacio.

Ejemplo: Sea la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ y + z \end{bmatrix}$$

1) Determinar la matriz de T respecto de las bases:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^2$$

2) Utilizando la matriz $M_{AB}(T)$ obtener la imagen del vector $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Solución:

1) Se calculan las imágenes de los vectores de la base A, bajo la transformación T y se expresan dichas imágenes, en términos de los vectores de la base B.

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_B$$

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_B$$

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

luego
$$M_{AB}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

2) Para calcular la imagen, bajo T, del vector $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; en primer lugar, es necesario determinar

las coordenadas de v, respecto de la base A, es decir hallar c_1, c_2, c_3 , tales que

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ c_2 + c_3 = 1 \\ c_3 = 3 \end{cases} \text{ resolviendo resulta}$$

$$c_1 = 1; c_2 = -2; c_3 = 3$$

$$\text{entonces } (v)_A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{su imagen es: } [Tv]_B = M_{AB}(T) \cdot (v)_A$$

$$[Tv]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

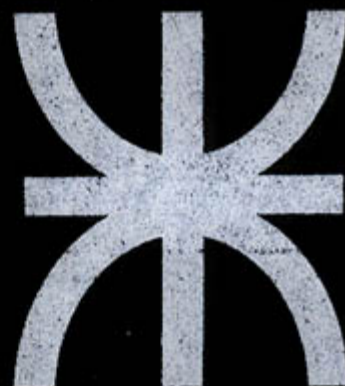
los escalares 4 y $-1/2$ son las componentes de $[Tv]$ respecto de la base B.

Como el resultado es $[Tv]_B$ entonces

$$Tv = 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si aplicamos directamente T al vector } v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ tenemos: } T \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

U.T.N.
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA
NACIONAL
Fac. Reg. Sta. Fe



Cátedra :

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Tema :

Matrices Similares

Material elaborado por :

Ing. Alberto R. GONCEBATT

(Edición preliminar)
Año 1999

U.T.N.
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA
NACIONAL
Fac. Reg. Stá. Fe



Cátedra :

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Tema :

Valores y Vectores propios-Diagonalización-Ejemplos

Material elaborado por :

Ing. Alberto R. GONCEBATT

(Edición preliminar)
Año 1999

MATRICES SIMILARES Y CAMBIO DE BASE

El propósito de una representación matricial M para una transformación lineal T , es permitirnos analizar T trabajando con M .

Si es fácil trabajar con M , ya se ha ganado algo, en caso contrario no hay ninguna ventaja.

Como bases diferentes dan por resultados matrices diferentes, la elección "correcta" de una base para obtener una matriz M sencilla es importante. La elección adecuada de una base no es obvia, como se verá en el ejemplo siguiente :

Ejemplo N° 1 : Hallar para

$$T: R^2 \rightarrow R^2 / T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 6x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Su representación matricial en

a) La base estándar

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) La base

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

SOLUCIÓN :

a) Con respecto a la base E :

$$M_E = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Con respecto a la base B :

$$T \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \Rightarrow T \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \Rightarrow T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Luego :

$$M_B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Por el Algebra matricial sabemos que en ciertas operaciones, los cálculos son más fáciles si las matrices son diagonales : inversión, multiplicación y determinantes por ejemplo. AL crecer la dimensión de los espacios vectoriales (y el tamaño de las matrices) esta situación se acentúa. Es necesario por tanto hallar una forma de obtener la matriz más simple posible para representar una transformación T.

Para resolver este problema, hay que descubrir como relacionar las diferentes representaciones matriciales de una transformación lineal dada.

Vamos a analizar la situación en la cual $V = W$, con la misma base en V y en W. Este es el caso que ocurre con más frecuencia en las aplicaciones.

Para hallar la relación, supongamos que :

M_A : Es la matriz que representa a $T:V \rightarrow V$ en la base A

M_B : Es la matriz que representa a $T:V \rightarrow V$ en la base B

Sea P la matriz de transición de la base B a la base A, de manera que $\forall x \in V$

$$\begin{aligned} M_B(x)_B &= (Tx)_B = P^{-1}(Tx)_A = P^{-1}(M_A(x)_A) \\ &= P^{-1}M_A \cdot I \cdot (x)_A \\ &= P^{-1}M_A \cdot (P \cdot P^{-1}) \cdot (x)_A \\ &= P^{-1}(M_A \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot (x)_A) \\ &= (P^{-1}M_A \cdot P) \cdot (x)_B \end{aligned}$$

por lo tanto :

$$M_B(x)_B = (P^{-1}M_A \cdot P) \cdot (x)_B \quad \forall x \in V$$

Por lo que :

$$M_B = (P^{-1}M_A \cdot P)$$

Esta ecuación en realidad, constituye una demostración del resultado básico.

Teorema:

Sea $T: V \rightarrow V$, una transformación lineal con matriz M_A con respecto a la base A y matriz M_B con respecto a la base B . Si P es la matriz de transición de la base B a la base A , entonces:

$$M_B = (P^{-1}M_A P)$$

Esta relación resulta de sumo interés y merece un nombre.

Definición: Dos matrices A y B de $n \times n$ son **similares** si existe una matriz P , tal que:

$$B = P^{-1}AP$$

Notesé que la definición de ninguna manera indica como hallar la matriz de similaridad P .

En el caso de dos matrices de representación para una transformación lineal, P es una matriz de transición de una base a otra, como se vio en el teorema anterior.

La siguiente es una reformulación de aquel teorema:

“Sea $T: V \rightarrow V$ una transformación lineal, entonces dos matrices cualesquiera que representan a T , son similares”

Ejemplo N° 2: En el ejemplo N° 1 sea E la base canónica. Mostrar la aplicación del teorema para T, E, B como en el ejemplo N° 1.

Solución:

Matriz canónica:

$$M_E = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula la matriz de transición de la base B a la base E

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego, la matriz de transición P de la base B a la base estándar E resulta:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Siendo, de acuerdo a lo visto anteriormente la matriz de transición de la base E a la base B la inversa de P , es decir P^{-1} .

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Finalmente :

$$M_B = P^{-1} M_E P = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Teorema :

Las siguientes proposiciones relativas a la similaridad son verdaderas . En todos los casos son matrices de nxn.

- ◆ La matriz A es similar a A
- ◆ Si A es similar a B , entonces B es similar a A.
- ◆ Si A es similar a B y B es similar a C , entonces A es similar a C.
- ◆ Si A es similar a B , entonces $\det.A = \det.B$
- ◆ Si A es similar a B , entonces $\text{tr}.A = \text{tr}.B$
- ◆ Si A es similar a B , entonces A^n es similar a B^n para todo n entero positivo.
- ◆ Si A es similar a B , entonces A es invertible , si y solo si , B es invertible. En este caso A^{-1} es similar a B^{-1} .

Ejemplo N° 3 : Verificar que las matrices similares del ejemplo n° 2 : M_E y M_B tienen igual determinante e igual traza

Solución :

$$M_E = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|M_E| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 18 = -14$$

$$|M_B| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14$$

$$\text{tr}.M_A = 1 + 4 = 5$$

$$\text{tr}.M_B = -2 + 7 = 5$$

En razón de su importancia vamos a demostrar algunas de la proposiciones del teorema anterior :

- ◆ Si A es similar a B , entonces $\det.A = \det.B$

$$\text{Si } B = P^{-1}.A.P$$

$$\det(B) = \det(P^{-1}.A.P) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \det(P^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(P) \\
 &= \det(A) \cdot (1/\det(P)) \cdot \det(P) \\
 &= \det(A)
 \end{aligned}$$

♦ Si A es similar a B , entonces $\text{tr} A = \text{tr} B$

Si $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ y como $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Se tiene $\text{tr} B = \text{tr}(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \text{tr}((P^{-1} \cdot A) \cdot P) = \text{tr}(P \cdot (P^{-1} \cdot A)) = \text{tr}((P \cdot P^{-1}) \cdot A) = \text{tr} A$

♦ Si A es similar a B , entonces A^n es similar a B^n para todo n entero positivo.

Si $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

Si $B^2 = (P^{-1} \cdot A \cdot P)^2 = (P^{-1} \cdot A \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot A \cdot P) = (P^{-1} \cdot A) \cdot (P \cdot P^{-1}) \cdot (A \cdot P) = P^{-1} \cdot (A \cdot A) \cdot P = P^{-1} \cdot A^2 \cdot P$

Pudiendo a partir de aquí , demostrarse mediante el principio de inducción completa que A^n es similar a B^n para todo n entero positivo.

♦ Si A es similar a B , entonces A es invertible , si y solo si , B es invertible. En este caso A^{-1} es similar a B^{-1} .

Según vimos , si A es similar a B entonces $\det A = \det B$ luego

1) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$

Recordar que la inversa de un producto de matrices es igual al producto de sus inversas en orden invertido

2) Si $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$

$$A^{-1} = (P^{-1} \cdot B \cdot P)^{-1} = P^{-1} \cdot B^{-1} \cdot (P^{-1})^{-1} = P^{-1} \cdot B^{-1} \cdot P$$

$\Rightarrow A^{-1}$ es similar a B^{-1}

Debe observarse que el problema de determinar si dos matrices son similares o no generalmente no es de fácil resolución.

Pero para descartar la similaridad se puede recurrir a las siguientes proposiciones que se deducen del teorema anterior :

Si $\text{tr} A \neq \text{tr} B$ o bien $\det A \neq \det B$, A *no puede ser similar a B*.

Ejemplo N° 4 :

En los siguientes pares de matrices determinar si A y B son similares:

1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

3)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución :

- 1) Se observa que $\det.A \neq \det.B \Rightarrow A$ no es similar a B
- 2) Como $\text{tr}.A \neq \text{tr}.B \Rightarrow A$ no es similar a B
- 3) Si bien $\det.A = \det.B$ y $\text{tr}.A = \text{tr}.B$, esto no nos asegura que A sea similar a B , en consecuencia nuestro análisis debe pasar por verificar la ecuación :

$$B = P^{-1}.A.P$$

De donde :

$$P.B = A.P$$

para una matriz P no singular (es decir cuadrada y con determinante distinto de cero)

Sea :

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

desarrollando los productos se tiene :

$$\begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ a+3c & b+3d \end{bmatrix}$$

de donde por igualdad de matrices, resulta :

$$3c = a + 3c \quad \text{y} \quad 3d = b + 3d \quad \text{lo cual significa que } a = b = 0$$

pero entonces

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$$

siendo esta una matriz no invertible, en consecuencia : A no puede ser similar a B .

VALORES Y VECTORES PROPIOS

Efectuemos un nuevo análisis del ejemplo nº 1 desarrollado en el tema anterior (Matrices Similares) en el cual dada la transformación lineal :

$$T: R^2 \rightarrow R^2 / T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 6x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

Obtuvimos su representación matricial :

$$M_E = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

En la base estándar

y

$$M_B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

en la base

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- 1) Destaquemos nuevamente la importancia que tiene (fundamentalmente para matrices de orden superior a 2) obtener una representación matricial sencilla para T, como son las matrices diagonales, de las cuales resulta prácticamente inmediato por ejemplo conocer el valor de su determinante, su invertibilidad y su rango que es a su vez el rango de T , lo que nos permite también determinar directamente la nulidad de T.
- 2) Resulta evidente, tal como se dijo anteriormente que la elección de una base que nos de para T una representación matricial diagonal no resulta sencillo.

Hecho este que nos da a entender, que la elección de la base

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Para la cual la representación matricial de T es :

$$M_B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

no fue arbitraria.

En la búsqueda de aquellas condiciones que permitan elegir una determinada base para T cuya representación matricial sea diagonal, observemos que los vectores de la base B , respecto de la cual T tiene una representación matricial sencilla tienen la siguiente particularidad.

$$T \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es decir las imágenes de cada uno de los vectores de la base B , a través de T , resultan ser múltiplos de ellos mismos.

A esta altura, podríamos cuestionarnos si en general es posible conseguir una base del espacio vectorial V , tal que la representación matricial del operador $T:V \rightarrow V$ sea una matriz diagonal.

Esta misma pregunta se puede plantear en términos "puramente matriciales" atento a la relación de similaridad que guardan todas las matrices cuadradas que en distintas bases representan a una transformación lineal T , expresándola en la siguiente forma :

"¿En general dada una matriz cuadrada A , existe una matriz diagonal B similar a A ?"

Uno de los objetivos principales de este tema es dar respuesta a esta pregunta (desde ya adelantamos que la respuesta es : NO).

El primer paso que vamos a dar para fundamentar la respuesta anterior, es estudiar lo relacionado con vectores $v \in V$ cuyas imágenes bajo la transformación lineal $T:V \rightarrow V$, sean múltiplos de ellos mismos (en el ejemplo analizado anteriormente, esta es la característica de los vectores de la base B , respecto de la cual la matriz que representa a T es diagonal), a tal fin vamos a establecer la siguiente definición :

Definición :

Sea $T: V \rightarrow V$ un operador lineal en el espacio vectorial V de dimensión n . El número λ es llamado **valor propio** (valor característico, autovalor o eigenvalor) de T , si existe un vector $v \in V$ no nulo, tal que $T(v) = \lambda \cdot v$. En tal caso, al vector v se lo llama **vector propio** (vector característico, autovector o eigenvector) de T , correspondiente al valor propio λ .

Teniendo en cuenta, que por ser V de dimensión finita, entonces T se puede representar por medio de una matriz M_T (cuadrada) llamada matriz asociada a T , es decir : $T(v) = M_T \cdot v$ reemplazando en la anterior resulta :

$$M_T \cdot v = \lambda \cdot v$$

Debido a esta correspondencia y por razones de simplicidad , se analizarán los valores y vectores propios de las matrices de $n \times n$.

En consecuencia la siguiente definición es equivalente a la enunciada anteriormente.

Definición :

Sea A una matriz cuadrada de orden n . . El número λ es llamado **valor propio** (valor característico , autovalor o eigenvalor) de A , si existe un vector $x \in \mathbb{R}^n$ no nulo , tal que $A \cdot x = \lambda \cdot x$. En tal caso, al vector x se lo llama **vector propio** (vector característico, autovector o eigenvector) de A , correspondiente al valor propio λ .

Puede observarse que en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , $A \cdot x = \lambda \cdot x$ significa que a cada eigenvector (si existen algunos) lo transforma en otro vector paralelo a x , dependiendo su dirección del signo del eigenvalor λ .

Volviendo a nuestro ejemplo inicial :

El vector $x = (2,-1)$ es un eigenvector o vector propio de

$$M_E = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Correspondiente al eigenvalor o valor propio $\lambda = -2$ ya que :

$$M_E \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

De igual manera, el vector $x = (1,1)$ es también un eigenvector o vector propio de M_E correspondiente al eigenvalor o valor propio $\lambda = 7$ en razón de que :

$$M_E \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Relacionando las definiciones anteriores podemos enunciar :

Sea $T:V \rightarrow V$ un operador lineal en el espacio vectorial V de dimensión n . El número λ es llamado valor propio de T , si λ es un valor propio de la matriz A asociada al operador T , respecto de alguna (cualquiera) base de V .

Valores propios :

Para encontrar los valores propios de una matriz A de $n \times n$, la expresión :

$$A \cdot x = \lambda \cdot x$$

se vuelve a escribir como :

$$A \cdot x = \lambda \cdot I \cdot x$$

o bien de manera equivalente :

$$(A - \lambda.I).x = 0$$

Para que λ sea un valor propio de A , debe existir (de acuerdo a la definición) una solución distinta de cero para esta ecuación.

Siendo la ecuación anterior, la expresión matricial de un sistema lineal homogéneo, sabemos que para que tenga soluciones distintas de cero debe ocurrir que :

$$\det.(A - \lambda.I) = 0$$

Esta expresión se denomina **ecuación característica de A** .

Los escalares que satisfacen esta ecuación son precisamente los valores propios de A .

Al desarrollar $\det.(A - \lambda.I)$ se obtiene un polinomio en λ , denominado **polinomio característico de A** y simbolizado como $p(\lambda)$.

Puede demostrarse que si A es una matriz de $n \times n$, entonces el polinomio característico de A es de grado n y el coeficiente de λ^n es uno (1), es decir el polinomio característico de una matriz $n \times n$ es de la forma :

$$P(\lambda) = \det.(A - \lambda.I) = \lambda^n + c_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + c_n$$

Por el Teorema Fundamental del Algebra, se sabe que la ecuación característica :

$$\lambda^n + c_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0 \quad (\bullet)$$

tiene a lo sumo n raíces distintas, por lo que una matriz de $n \times n$ tiene a lo sumo n valores propios distintos.

Vamos a mostrar este proceso para la matriz M_E de nuestro ejemplo inicial :

A tal fin recordemos que

$$M_E = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Planteamos ahora : $\det.(M_E - \lambda.I) = 0$

$$\det \left[\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = \det \left[\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda).(4-\lambda) - 18 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 7 \text{ y } \lambda_2 = -2 \text{ valores propios de la matriz } M_E$$

En el caso particular de que la ecuación (\bullet) no tenga n raíces distintas, con seguridad algunas de ellas se repiten. Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ son las raíces distintas de (\bullet) con las multiplicidades r_1, r_2, \dots, r_m respectivamente, entonces la ecuación (\bullet) se puede factorizar en la forma :

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{r_m} ; \text{ donde } r_1 + r_2 + r_m = n$$

Los números r_1, r_2, \dots, r_m se llaman **multiplicidades algebraicas** de los valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ respectivamente.

OBSERVACIÓN : Puede ocurrir que matrices reales puedan tener valores propios complejos, esto conduce a la posibilidad de considerar espacios vectoriales complejos, no obstante ello, vamos a restringir nuestro estudio únicamente al campo de los números reales.

Valores propios de matrices triangulares :

Si A es una matriz triangular (superior, inferior o diagonal) de nxn, entonces los valores propios de A son los elementos de su diagonal principal.

En efecto : Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Entonces :

$$\det.(A - \lambda I) = \det. \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Luego la ecuación característica es :

$$(a_{11} - \lambda).(a_{22} - \lambda).(a_{33} - \lambda) = 0$$

y los **valores propios** son : $\lambda = a_{11}$; $\lambda = a_{22}$; $\lambda = a_{33}$ que son precisamente los elementos de la diagonal principal de A.

Un ejemplo muy particular de este tema lo constituyen los valores y vectores propios de la matriz identidad I.

Sea $A = I$, entonces si $v \in R^n$

$$A.v = I.v = \lambda.v$$

Por tanto el único valor propio de A, es el número 1 y todo vector distinto de cero perteneciente a R^n es un vector propio de I.

Vectores propios . Espacios propios :

Se ha visto ya como se pueden determinar los valores propios de una matriz cuadrada A de nxn.

Veamos ahora como determinar los vectores propios correspondientes.

Sea λ un valor propio de A. Entonces $\det.(A - \lambda.I) = 0$.

El vector $x \in R^n$ es un vector propio de A asociado al valor propio λ si x es no nulo y si $A.x = \lambda.x$

En otras palabras, x es un vector propio asociado al valor propio λ si x es una solución no trivial de $(A - \lambda.I).x = 0$

La existencia de soluciones no triviales de este sistema homogéneo de ecuaciones lineales (esto es la existencia de vectores propios Asociados al valor propio λ) está asegurada por el hecho de que siendo λ un valor propio de A, la matriz $(A - \lambda.I)$ es no inversible (pues $\det.(A - \lambda.I) = 0$)

En resumen , para determinar vectores propios asociados al valor propio λ , solo se tienen que hallar soluciones no triviales del sistema homogéneo de ecuaciones lineales $(A - \lambda.I).x = 0$

Ejemplo : Vimos en el ejemplo anterior que los valores propios de la matriz :

$$M_E = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Son $\lambda_1 = 7$ y $\lambda_2 = -2$

Para determinar los vectores propios correspondientes a cada uno de estos valores propios, se tiene que considerar el sistema lineal homogéneo $(A - \lambda.I).x = 0$ es decir :

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para el valor propio $\lambda_1 = 7$ se tiene el sistema :

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollando :

$$\begin{cases} -6x_1 + 6x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son : $x_1 = t, x_2 = t, t \in \mathbb{R}$

Entonces los vectores propios de M_E asociados al valor propio $\lambda_1 = 7$ son vectores de la forma $(t;t)$ con $t \in \mathbb{R}$ ($t \neq 0$).

Para el valor propio $\lambda_2 = -2$ el sistema por resolver es :

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sea :

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son : $x_1 = -2t; x_2 = t; t \in \mathbb{R}$.

Entonces los vectores propios de M_E asociados al valor propio $\lambda_2 = -2$ son de la forma $(-2t;t); t \in \mathbb{R}$ ($t \neq 0$).

Puede observarse que el conjunto de vectores propios de una matriz A asociados al valor propio λ , que es a su vez el conjunto de soluciones no triviales del sistema homogéneo $(A - \lambda.I).x = 0$ no es en sí mismo un subespacio de \mathbb{R}^n (pues carece del vector cero). Sin embargo si se considera la unión de este conjunto con el conjunto formado por el vector cero, lo que se obtiene es precisamente el espacio solución del sistema homogéneo $(A - \lambda.I).x = 0$, el cual se sabe es un subespacio de \mathbb{R}^n .

Definición :

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$ y λ un valor propio de A . Sea E_λ la unión del conjunto de vectores propios de A asociados al valor propio λ con el conjunto formado por el vector cero, E_λ es entonces un subespacio de \mathbb{R}^n llamado **espacio propio** (espacio característico o eigenespacio) de la matriz A correspondiente al valor propio λ .

Ejemplo : Los espacios propios de la matriz

$$M_B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

De acuerdo a la definición anterior son :

$$E_{\lambda_1} = \{(t, t), t \in \mathbb{R}\}$$

$$E_{\lambda_2} = \{(-2t, t), t \in \mathbb{R}\}$$

Ejercicio :

Determinar los valores propios, espacios propios y vectores propios de la matriz .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución :

El polinomio característico de A es:

$$p(\lambda) = \det.(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 6 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Siendo su ecuación característica :

$$p(\lambda) = (1-\lambda).(-2-\lambda).(1-\lambda) = (1-\lambda)^2.(1-\lambda) = 0$$

de donde la raíces de la ecuación característica de A son: $\lambda_1 = 1$ (orden de multiplicidad 2) y $\lambda_2 = -2$ siendo estos los **valores propios de A**.

Para determinar los espacios propios correspondientes a cada uno de estos valores propios, se tiene que considerar el sistema homogéneo $(A - \lambda.I).x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 6 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cuyas soluciones son $x_1 = t$; $x_2 = 0$; $x_3 = s$ con $r, s \in R$

Entonces el espacio propio E_{λ_1} es :

$$E_{\lambda_1} = \{(r, 0, s), r, s \in R\}$$

El cual tiene dimensión 2 y una base de el está constituida por los vectores : $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$ y además cualquier vector que sea combinación lineal de ellos es un vector propio de A asociado a su valor propio $\lambda_1 = 1$.

Para $\lambda_2 = -2$ se tiene el sistema :

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cuyas soluciones son : $x_1 = r/2$; $x_2 = -r/2$, $x_3 = r$ con $r \in R$

Entonces el espacio propio E_{λ_2} es :

$$E_{\lambda_2} = \left\{ \left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}, r \right); r \in R \right\}$$

cuya dimensión es 1 y una de sus bases es $\{(1, -1, 2)\}$. A su vez el vector $(1, -1, 2)$ es un vector propio de A asociado a su valor propio $\lambda_2 = -2$

Multiplicidad geométrica y multiplicidad algebraica :

Si λ_0 es un valor propio de una matriz A de nxn entonces la dimensión del espacio propio correspondiente a λ_0 se denomina **multiplicidad geométrica de λ_0** y el número de veces que λ_0 es raíz del polinomio característico de A, es decir el número de veces que se repite el factor $(\lambda_0 - \lambda)$ en la expresión factorizada del polinomio característico de A, se denomina **multiplicidad algebraica de A**, correspondiente a su valor propio λ_0 .

Puede demostrarse que para todo valor propio de A, la multiplicidad geométrica es menor o igual que la multiplicidad algebraica.

Esto puede ser observado en el ejemplo anterior donde se cumple que la multiplicidad algebraica de $\lambda_1 = 1$ es 2 y la dimensión de su espacio propio correspondiente es igual a 2.

Ocurriendo también que la multiplicidad algebraica de $\lambda_2 = -2$ es 1, y su correspondiente espacio propio tiene dimensión 1.

A esta altura estamos en condiciones de enunciar otra propiedad importante de las matrices similares :

" Las matrices similares tienen el mismo polinomio característico, por lo tanto tienen las mismas raíces características (multiplicidades inclusive) "

Demostración :

Sean A y B de nxn dos matrices similares, es decir que :

$$A = P^{-1} \cdot B \cdot P$$

3) Entonces

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \cdot I) &= \det(P^{-1} \cdot B \cdot P - \lambda \cdot I) \\ &= \det(P^{-1} \cdot B \cdot P - \lambda \cdot P^{-1} \cdot I \cdot P) \\ &= \det(P^{-1} \cdot B \cdot P - P^{-1} \cdot \lambda \cdot I \cdot P) \\ &= \det(P^{-1} \cdot (B - \lambda \cdot I) \cdot P) \\ &= \det(P^{-1}) \cdot \det(B - \lambda \cdot I) \cdot \det(P) \\ &= \det(P^{-1}) \cdot \det(P) \cdot \det(B - \lambda \cdot I) \\ &= \det(P^{-1} \cdot P) \cdot \det(B - \lambda \cdot I) \\ &= \det(B - \lambda \cdot I) \end{aligned}$$

Atención:

La recíproca no se cumple, es decir que el hecho de que dos matrices tengan el mismo polinomio característico, ello no indica que ambas matrices sean similares.

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Definiciones :

- a) Se dice que la matriz cuadrada A es **diagonalizable** si existe una matriz inversible P ; tal que :
 $P^{-1}.A.P$ es una matriz diagonal (es decir A es similar a una matriz diagonal).
- b) Se dice que el operador lineal $T:V \rightarrow V$ en el espacio vectorial V de dimensión finita es **diagonalizable** si existe una base β de V , respecto de la cual la matriz que representa a T es una matriz diagonal.

Es claro que un operador lineal $T:V \rightarrow V$ es diagonalizable si, y solo si la matriz que lo representa respecto de alguna (cualquiera) base de V lo es.

En efecto, supongamos que T es diagonalizable y sea β' una base cualquiera de V . Sea $A = M_{\beta'}$. Según la definición (b) existe una base β de V tal que $B = M_{\beta}$ es una matriz diagonal.

Teniendo en cuenta que A y B son matrices similares, entonces existe una matriz inversible P tal que $B = P^{-1}.A.P$ (de hecho, P es la matriz de cambio de base de β a β').

Por lo tanto, según la definición (a), A es diagonalizable.

Recíprocamente, supongamos que A es diagonalizable y que A es la matriz que representa al operador $T:V \rightarrow V$ respecto de alguna base β' de V .

Existe entonces una matriz P invertible tal que $P^{-1}.A.P$ es una matriz diagonal. En consecuencia de acuerdo a lo visto anteriormente existe una base β de V tal que P es la matriz de cambio de base de β a β' .

Sea $B = M_{\beta}$. Como $P^{-1}.A.P = B$, B es una matriz diagonal, luego se concluye que T es diagonalizable.

Corolario de las definiciones (a) y (b) : Si la matriz A (el operador T) es diagonalizable, entonces el polinomio característico de A (de T) se puede factorizar como producto de factores lineales.

Demostración :

Si la matriz A de $n \times n$ es diagonalizable, A es similar a una matriz diagonal D .

Supongamos que :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de D es :

$$p(x) = \det.(D - x.I) = \det \begin{bmatrix} \lambda_1 - x & & 0 \\ & \lambda_2 - x & \\ 0 & & \lambda_n - x \end{bmatrix} = (\lambda_1 - x) \cdot (\lambda_2 - x) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - x)$$

Siendo A similar a D, el polinomio característico de A es también p(x), el cual está formado como el producto de n (= orden de A) factores lineales.

Intentaremos ahora determinar las condiciones para que una Transformación lineal dada tenga una representación matricial diagonal o , lo que es equivalente **para que una matriz dada sea similar a una matriz diagonal.**

Es decir vamos a plantear el siguiente problema :

Dada una matriz A de nxn, determinar si A es diagonalizable. Si A es diagonalizable calcular P y D para la ecuación :

$$A = P.D.P^{-1}$$

Para resolver el problema de la diagonalización, en primer lugar nos preguntamos lo siguiente :

Si A es diagonalizable **¿ que condiciones deben cumplir P y D ?.**

Si A es diagonalizable $\Rightarrow A = P.D.P^{-1}$

lo cual significa que $A.P = P.D$

Entonces si :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{Y} \quad D = \begin{bmatrix} c_1 & & & 0 \\ & c_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la anterior :

$$A \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} c_1 & & & 0 \\ & c_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & c_n \end{bmatrix}$$

Si llamamos con P_1, P_2, \dots, P_n a las columnas de P , observamos que igualando las columnas de estas dos matrices ($A.P = P.D$) resulta que :

$$j\text{-ésima columna de } A.P = A.P_j = c_j.P_j = j\text{-ésima columna de } P.D$$

es decir : $A.P_1 = c_1.P_1 ; A.P_2 = c_2.P_2 ; \dots ; A.P_n = c_n.P_n$

Por tanto P es la matriz cuyas columnas son **vectores característicos de A** . Los elementos diagonales de D **son los valores característicos correspondientes**.

Además como P es invertible, las columnas de P son linealmente independientes. Todo esto nos conduce al siguiente teorema :

Teorema :

Si A de $n \times n$ es diagonalizable, entonces A tiene n vectores característicos linealmente independientes. Además en la ecuación $A = P.D.P^{-1}$, P es una matriz cuyas columnas son vectores característicos y los elementos diagonales de D son los valores característicos correspondientes columna por columna a sus vectores característicos respectivos.

Este teorema establece como deben ser P y D si A es diagonalizable.

Sería deseable fuese reversible. Es decir, sería deseable que si :

1. Se resolviese el problema característico para A de $n \times n$

$$A.X_1 = \lambda_1.X_1, \dots, A.X_n = \lambda_n.X_n$$

2. Los vectores característicos se pudiesen elegir linealmente independientes y si
3. Al construir $P = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

Entonces se tendría :

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

Afortunadamente esto es posible . Antes de demostrar que este procedimiento es válido analicemos un ejemplo.

Ejemplo : Utilizando el procedimiento anterior diagonalice la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución :

El problema característico de A se resolvió ya en ejemplos anteriores :

Sus pares característicos generales son :

$$\left(-2 \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} \right)$$

$$\left(7 \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \right)$$

y

Y las elecciones específicas dan :

$$\left(-2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\left(7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Pero

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Es un conjunto linealmente Independiente, por lo que formamos

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Finalmente hay que comprobar si

$$A = P.D.P^{-1}$$

Es decir :

Vector
caract
para $\lambda = -2$
en la 1^o
columna

Vector
carac
Para
 $\lambda = 7$ en
la 2^a
columna

Valor
caract
 $\lambda = -2$
En la 1^a
columna

Valor
caract.
 $\lambda = 7$
El la 2^a
columna

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Lo que confirma la diagonalización de la matriz A.

A continuación vamos a demostrar el teorema representado con este ejemplo .

Teorema :

Si A de nxn tiene n vectores característicos linealmente independientes X_1, X_2, \dots, X_n , es decir que $A.X_1 = \lambda_1.X_1, \dots, A.X_n = \lambda_n.X_n$, entonces A es diagonalizable y

$$A = P.D.P^{-1}$$

Donde :

$P = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ es una matriz de $n \times n$, cuyas columnas son las componentes de X_1, X_2, \dots, X_n
 Y

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los valores propios correspondientes a X_1, X_2, \dots, X_n

Demostración : Si $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces

$P = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ es invertible.

pero

$$AP = \begin{bmatrix} A.X_1 & A.X_2 & \dots & A.X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1.X_1 & \lambda_2.X_2 & \dots & \lambda_n.X_n \end{bmatrix} =$$

$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow & & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ \text{col.1} & \text{col.2} & & \text{col.1} & \text{col.2} & \text{col.n} \end{matrix}$

$$= \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{bmatrix} = P.D$$

como $A.P = P.D$ se tiene $A = P.D.P^{-1}$ y A ha sido diagonalizada.

Los dos teoremas anteriores juntos permiten enunciar un resultado importante en relación al problema de la diagonalización :

Teorema:

La matriz A de $n \times n$ es diagonalizable, si y solo si, A tiene n vectores característicos linealmente independientes. En tal caso, si X_1, X_2, \dots, X_n son los vectores linealmente independientes y si los pares característicos son $(\lambda_1, X_1), (\lambda_2, X_2), \dots, (\lambda_n, X_n)$ entonces haciendo

$$P = (X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{y}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Se tendrá : $A = P.D.P^{-1}$ y $D = P^{-1}.A.P$

El resultado de este teorema se puede enunciar de otras dos formas equivalentes :

- ♦ "La matriz A de $n \times n$ es diagonalizable, si y solo si, existe una base de R^n constituida por vectores característicos de A . En ese caso si $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ es la base de los vectores característicos y si los pares característicos son $(\lambda_1 X_1), (\lambda_2 X_2), \dots, (\lambda_n X_n)$, entonces P y D se construyen como se indicó antes".
- ♦ "Supóngase que A de $n \times n$ tiene valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_m$ con $m \leq n$ (m es estrictamente menor que n si algunos de los vectores característicos tiene multiplicidad 2 o mayor). Entonces A es diagonalizable, si y solo si :

$$\sum_{k=1}^{k=m} \dim E_{\lambda_k} = n$$

NOTA: Debe observarse que a fin de resolver el problema de la diagonalización para A , primero se resuelve el **problema característico para A** .

Ejemplo : Diagonalizar si es posible la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

La ecuación característica de A es :

$$\det.(A - \lambda.I) = 0$$

$$\det. \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

o bien :

$$(1 - \lambda)^2 = 0$$

los valores característicos son : $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$

para hallar sus vectores característicos se resuelve

$$(A - \lambda.I).X = 0$$

que para este caso se reduce a
 $\lambda = 1$

$$\begin{cases} 0x_1 + x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

por lo tanto : $X_1 = (k, 0)$; $X_2 = (t, 0)$

Obsevandose que no es posible obtener dos vectores característicos linealmente independientes para la matriz A de 2×2 .

Entonces A **no es diagonalizable**.

Otra forma de expresar esto, es decir que los vectores característicos de A no forman una base para \mathbb{R}^2 .

Ahora ya sabemos que una matriz A de nxn es diagonalizable, si y solo si, A tiene n vectores característicos linealmente independientes. Pero si n es grande determinar la independencia lineal puede resultar tedioso.

Para evitar ello, en el siguiente teorema se expresa una **condición suficiente** muy sencilla de la diagonalizabilidad.

Teorema:

“ Una matriz A de nxn que tiene n valores característicos distintos es diagonalizable”.

Demostración :

Sea A de nxn una matriz con valores característicos diferentes que denotaremos por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Según el teorema que dice “Una matriz A de nxn es diagonalizable si y solo si tiene n vectores característicos linealmente independientes” sera suficiente demostrar que A tiene n vectores característicos linealmente independientes.

Supongamos que X_1, X_2, \dots, X_n sean vectores característicos correspondientes a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivamente.

Supongamos también que X_1, X_2, \dots, X_n sean linealmente dependientes.

Esta suposición nos llevará a una contradicción.

Puesto que X_1 es vector característico, **es diferente de cero**

Por lo tanto, existe un entero k ($1 \leq k < n$), tal que X_1, \dots, X_k son linealmente independiente, mientras que X_1, \dots, X_k, X_{k+1} son linealmente dependientes. Es decir se verifica que :

$$c_1 X_1 + \dots + c_k X_k + c_{k+1} X_{k+1} = 0 \quad (\diamond)$$

para escalares c_1, \dots, c_{k+1} que no sean todos cero

Entonces, multiplicando ambos miembros de la anterior por A, y aplicando álgebra matricial

$$c_1 A X_1 + \dots + c_k A X_k + c_{k+1} A X_{k+1} = 0$$

y puesto que X_1, \dots, X_{k+1} son vectores característicos de A, se verifica que

$$c_1 \lambda_1 X_1 + \dots + c_k \lambda_k X_k + c_{k+1} \lambda_{k+1} X_{k+1} = 0 \quad (\diamond\diamond)$$

Si ahora multiplicamos ambos miembros de (\diamond) por λ_{k+1} y la restamos de $(\diamond\diamond)$ se tiene :

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})X_1 + \dots + c_{k+1}(\lambda_k - \lambda_{k+1})X_k = 0$$

y puesto que : X_1, X_2, \dots, X_k son linealmente independientes, se ha de tener en general

$$c_t(\lambda_t - \lambda_{k+1}) = 0 \quad t = 1, 2, \dots, k$$

pero $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ son diferentes entre sí, y por lo tanto $(\lambda_t - \lambda_{k+1}) \neq 0$ para $t = 1, \dots, k$ por consiguiente $c_1 = \dots = c_k = 0$. También por (\diamond), $c_{k+1} = 0$. Esto contradice nuestra suposición de que c_1, \dots, c_{k+1} no eran todos iguales a cero, es decir que X_1, \dots, X_{k+1} eran linealmente dependientes.

Importancia de la diagonalización para el calculo de potencia de matrices :

En matemáticas aplicadas se presentan a menudo problemas en los que se hace necesario calcular potencias grandes de matrices cuadradas. Puede mostrarse que el empleo de la diagonalización hace que estos cálculos sean sencillos.

A tal efecto , supongamos que A es una matriz de nxn diagonalizable, es decir que existe una matriz invertible P y una matriz diagonal D , tal que :

$$A = P^{-1}.D.P$$

La potencia cuadrada de A será :

$$A^2 = (P^{-1}.D.P)^2 = (P^{-1}.D.P).(P^{-1}.D.P) = P^{-1}.D.(P.P^{-1}).D.P = P^{-1}.D^2.P$$

De igual modo su potencia cúbica será :

$$A^3 = (P^{-1}.D.P)^3 = (P^{-1}.D.P).(P^{-1}.D.P).(P^{-1}.D.P) = P^{-1}.D.(P.P^{-1}).D.(P.P^{-1}).D.P = P^{-1}.D^3.P$$

Generalizando , si k es cualquier entero positivo :

$$A^k = P^{-1}.D^k.P$$

Lo que nos muestra que si A es similar a una matriz diagonal D , entonces el calculo de A^k se puede efectuar calculando D^k , lo cual es sencillo , de donde tiene en cuenta que si :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & d_n^k \end{pmatrix}$$

Nota: En las aplicaciones en el campo de la ingeniería, los valores y vectores propios están relacionados con las frecuencias de vibración y la estabilidad de los sistemas mecánicos. Pero como el lector podrá apreciar en los ejemplos que se han seleccionados resulta relativamente fácil de calcular los valores y vectores propios. En general esto no sucede así, debiéndose recurrir para estos casos a diversos métodos numéricos desarrollados con tal fin

DESARROLLO DE EJEMPLOS SOBRE TEMAS ANTERIORES

Sección 1: Matrices asociadas a una transformación lineal

Ejemplo N° 1: Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que :

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

A) Hallar la matriz que representa a T, cuando :

a-1) $A = B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

a-2) $A = B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

a-3) $A = B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

a-4) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

B) En cada caso calcular $T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, directamente y luego usando M

Solución :

a-1) A) En la base estándar $A = B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

directamente tenemos que :

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

B) $T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

a-2) A) En las bases $A = B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

En primer lugar calculamos las imágenes de los vectores de la base B, bajo la transformación T y expresamos dichas imágenes en términos de la base B.

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}_B = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}, \beta = -\frac{2}{3} \Rightarrow T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}_B = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}, \beta = \frac{5}{3} \Rightarrow T \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

luego :

$$M_T = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

B) En primer lugar escribimos el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en la base B .

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_B = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = -1; \beta = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

luego :

$$\left(T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)_B = M_T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{finalmente : } \begin{bmatrix} -\frac{11}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{11}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{10}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

a-3) A) En las bases $A = B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

procedemos de la misma forma que en el caso anterior :

$$T \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}_B = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{1}{4} \Rightarrow T \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}_B = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = \frac{3}{2} \Rightarrow T \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

luego :

$$M_T = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{7}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

B)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_B = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{3}{8} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

luego :

$$\begin{pmatrix} T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{pmatrix}_B = M_T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{finalmente: } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

a-4) A) En las bases $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

En este caso , si bien $A \neq B$ se puede aplicar el mismo procedimiento

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}_B = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = 0; \beta = 2 \Rightarrow T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}_B = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = 2; \beta = -4 \Rightarrow T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

En consecuencia la matriz de T con respecto a las bases A y B resulta:

$$M_T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

B) Para calcular $T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ hacemos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_A = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}; \beta = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{luego: } \begin{bmatrix} T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_B = M_T \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\text{finalmente: } \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix} \rightarrow 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-7) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Sección 2 : Matrices similares

Ejemplo nº 1: En el ejemplo nº1 de la sección anterior se encontró que la representación matricial del operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que :

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

dependía de las bases adoptadas y que :

a) En las bases $A = B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es $M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = M_a$

b) En las bases $A = B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es $M_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} = M_b$

c) En las bases $A = B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ es $M_T = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = M_c$

d) En las bases $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ es $M_T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = M_d$

Ahora a esas matrices las hemos llamados M_a ; M_b ; M_c y M_d respectivamente y con (a),(b) y (c) a las bases que permitieron determinar a M_a ; M_b ; M_c respectivamente , se pide :

A) Demostrar que M_b y M_c son similares a M_a .

B) Demostrar que si se cumple que si M_b es similar a M_a y M_a es similar a M_c , entonces M_b es similar a M_c .

C) Justificar por que M_d no es similar a ninguna de ellas

Solución :

A) M_a es similar a $M_b \Leftrightarrow M_b = P^{-1} \cdot M_a \cdot P$

Donde P es la matriz de transición de la base (b) a la base (a)

es decir $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

siendo P^{-1} la matriz de transición de la base (a) a la base (b)

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

luego: $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = M_b \Rightarrow M_a \text{ es similar a } M_b$

Por otro lado : M_a es similar a $M_c \Leftrightarrow M_c = P^{-1} \cdot M_a \cdot P$

Como en el caso anterior, primero calculamos la matriz P de transición de la base (c) a la base (a)

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

posteriormente calculamos la matriz de transición de la base (a) a la base (c), es decir P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

luego :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = M_c \Rightarrow M_a \text{ es similar a } M_c$$

Los apartados (B) y (C) se dejan como ejercitación para el lector.

Ejemplo N° 2: En los siguientes ejercicios se da una transformación lineal $T: V \rightarrow V$ y bases A y B.

- Hallar la matriz de T con respecto a A
- Hallar la matriz de T con respecto a B usando la matriz de transición.
- Hallar directamente la matriz de T con respecto a B.

$$1) T: R^2 \rightarrow R^2; T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A = Base canónica

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución:

$$a) M_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Primero calculamos la matriz de transición de B a A :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Posteriormente calculamos la matriz de transición de A a B :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Finalmente :

$$M_B = P^{-1} M_A P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Calculamos las imágenes bajo la transformación T, de los vectores de la base B y las expresamos en la base B

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}; \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}; \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

luego : $M_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2) $T : R^2 \rightarrow R^2 / T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}$

A = Base canónica.

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución :

a) En la base canónica directamente : $M_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) Las matrices de transición son iguales a las del ejercicio (1-b)

Luego:

$$M_B = P^{-1} M_A P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c)

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}_B = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}; \beta = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}_B = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}; \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

luego : $M_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3) $T : P_1 \rightarrow P_1 / T(a + bx) = a + b + (2a - 3b)x$

A = Base canónica = $\{1; x\}$

B = $\{1+x; 1-x\}$

a) Hallamos los vectores de coordenadas en la base A, de las imágenes de los vectores de la base A bajo la transformación T.

$$T(1) = 1 + 2x \Rightarrow (1 + 2x)_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = 1 - 3x \Rightarrow (1 - 3x)_A = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

luego :

$$M_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

b)

$$(1+x)_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad (1-x)_A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

luego :

$$M_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c)

$$T(1+x) = 2 - x \Rightarrow (2-x)_B = \alpha(1+x) + \beta(1-x) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}; \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow (2-x)_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$T(1-x) = 5x \Rightarrow (5x)_B = \alpha(1+x) + \beta(1-x) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}; \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow (5x)_B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

luego :

$$M_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ejemplo N° 2: En el espacio R^2 considere la base $A = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ y sea $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$. Determine

la base B de R^2 , tal que P es la matriz de cambio de base de la base B a la base A.

Solución :

Sea $B = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\}$. Entonces si $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de B a A, sus

columnas son los vectores de coordenadas de B escritos en la base A.

Por tanto :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow B = \left\{ \begin{bmatrix} 42 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 43 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

Ejemplo N° 3: Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Demuestre que las siguientes matrices no son similares a A.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

Solución :

- a) No tienen igual determinante.
- b) No tienen igual determinante.
- c) No tienen igual traza.
- d) No tienen igual determinante.
- e) No tienen igual determinante.
- f) No tienen igual determinante.

Sección 3 : Autovalores y Autovectores (valores propios y vectores propios)

Ejemplo N° 1: Hallar los valores y vectores propios de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución : Planteamos la ecuación característica: $\det.(A-\lambda I) = 0$

$$\det \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)^2 = 0$$

por lo tanto $\lambda = 3$ es un **valor propio** de A de multiplicidad algebraica 2.

Debemos resolver ahora $(A-\lambda I).X = 0$ para $\lambda = 3$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0x_1 + 0x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

de modo que el espacio propio correspondiente a $\lambda = 3$ es todo \mathbb{R}^2 , es decir

$$E_\lambda = \text{gen.} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Observe que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ son dos **vectores propios** linealmente independientes de A,

correspondiente a su único valor propio.

Ejemplo N° 2: Idem de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\det.(A-\lambda I) = \det \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)^2 = 0$$

por lo tanto $\lambda = 3$ es un **valor propio** de A de multiplicidad algebraica 2.

Debemos resolver ahora $(A-\lambda I).X = 0$ para $\lambda = 3$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0x_1 + x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 0$$

por lo tanto :

$$E_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ es un } \mathbf{vector\ propio} \text{ de } A.$$

Ejemplo N° 3: Idem de :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución :

$$\det.(A-\lambda I) = \det. \left[\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] = \det. \begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

desarrollando se tiene : $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda - 10 = 0$

luego para resolver esta ecuación puede utilizarse el teorema que expresa que las posibles raíces racionales deben ser submúltiplo del término independiente.

En nuestro caso : $\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 5 , \pm 10$

Como se verifica que $\lambda_1 = 1$ es raíz ,para encontrar las restantes dividimos la anterior por $(\lambda-1)$

Quedándonos : $\lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0$ y por aplicación de la resolvente de la ecuación de segundo grado resulta : $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 10$

En consecuencia la matriz dada tiene dos valores propios distintos $\lambda_1 = 1$ (multiplicidad algebraica 2)

y $\lambda_3 = 10$

Para hallar sus espacios y vectores propios debemos resolver: $(A-\lambda I).X = 0$ para $\lambda_1 = 1$ y para $\lambda_3 = 10$

Para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -2x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

luego :

$$E_1 = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \text{ es el espacio propio correspondiente al valor propio } \lambda = 1$$

siendo $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ dos vectores propios de A linealmente independientes correspondiente a dicho

valor propio.

Para $\lambda = 10$

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

luego :

$$\lambda_{10} = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in R \right\} \text{ es el espacio propio correspondiente a } \lambda = 10 \text{ y } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ es un valor}$$

propio correspondiente a dicho valor propio.

Obsérvese que en este ejemplo la matriz dada tiene dos valores propios y tres vectores propios linealmente independientes.

Ejemplo N° 4: Idem de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución :

$$\det.(A-\lambda I) = \det. \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ (orden de multiplicidad 3)}$$

Debemos resolver ahora : $(A-\lambda I).X = 0$ para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego :

$$\lambda_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in R \right\} \text{ es el espacio propio correspondiente a } \lambda = 1 \text{ y } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ es un vector propio}$$

correspondiente a ese valor propio.

Obsevese que en este ejemplo la matriz A tiene un solo valor propio (orden de multiplicidad 3) y un solo vector propio.

Sección 4 : Diagonalización de matrices

Ejemplo N° 1: Analizar si la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable; en cuyo caso

encontrar una matriz diagonal similar a A

Solución : Recordemos que para resolver el problema de la diagonalización, en primer lugar debemos calcular los valores y vectores propios(característicos) de A.

Su ecuación característica es :

$$\det.(A-\lambda I) = \det. \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & 3 \\ 4 & -5-\lambda & 3 \\ 4 & -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 14\lambda - 4 = 0$$

Sus posibles raíces racionales son : $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Encontrándose que : $\lambda = 1, \lambda = 2$ y $\lambda = -2$ son las raíces de $p(\lambda)$ y por lo tanto son los valores característicos o propios de A.

A esta altura podemos asegurar que A es diagonalizable, teniendo en cuenta el teorema que expresa : **"Una matriz A de nxn que tiene n valores propios distintos es diagonalizable"**

Buscamos ahora los vectores propios de A, para lo cual debemos resolver el sistema : $(A-\lambda I).X = 0$

para $\lambda = -1; \lambda = 2; \lambda = -2$

Para $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego:

$$E_{-1} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in R \right\} \text{ es el espacio propio correspondiente a } \lambda = -1 \text{ y } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ es un vector propio}$$

de A correspondiente a dicho valor propio.

Para $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 4 & -7 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

luego :

$$E_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \text{ es el espacio propio correspondiente a } \lambda = 2 \text{ y } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ es un vector propio de } A$$

correspondiente a dicho valor propio.

Para $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

luego :

$$E_{-2} = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \text{ es el espacio propio correspondiente a } \lambda = -2 \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ es un vector propio}$$

de A correspondiente a dicho valor propio.

Formamos ahora :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y calculamos } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente para encontrar una matriz diagonal similar a la matriz A ; hacemos:

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Observar que los elementos diagonales de D son los valores propios de A.

Ejemplo N° 2: Dadas las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que tienen a 3 como valor propio de multiplicidad algebraica 2.

b) Demostrar que A no es diagonalizable, pero B sí lo es.

Solución :

a) Cálculo de los valores propios de A :

$$\det.(A-\lambda I) = 0$$

$$\det. \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -5-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)^2 \cdot (-5-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 3 (\text{mult. alg } 2) \text{ y } \lambda = -5 \text{ son los}$$

valores propios de A

Idem de B :

$$\det.(B-\lambda I) = 0$$

$$\det. \begin{pmatrix} -\lambda & -3 & -3 \\ -3 & -\lambda & -3 \\ -3 & -3 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 27\lambda + 54 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 (\text{mult. alg } 2) \text{ y } \lambda = -6 \text{ son los valores}$$

propios de B.

Conclusión : Las dos matrices A y B tienen a 3 como valor propio de multiplicidad algebraica 2.

b) Cálculo de los vectores propios de A y B

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{debemos resolver } (A-\lambda I) \cdot X = 0 \text{ para } \lambda = 3 \text{ y } \lambda = -5$$

Para $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_2 = 0 \\ -8x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$E_3 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in R \right\} \text{ es el espacio propio correspondiente a } \lambda = 3 \text{ y } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ es un vector}$$

propio de A correspondiente a ese valor propio.

Para $\lambda = -5$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 8x_1 - x_2 = 0 \\ 8x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego :

$$E_{-5} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es el espacio propio correspondiente a } \lambda = -5 \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ es un vector}$$

propio de A correspondiente a ese valor propio

$$\text{Si } B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{debemos resolver } (A-\lambda I).X = 0 \text{ para } \lambda = 3 \text{ y } \lambda = -6$$

Para $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow X = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$E_3 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es el espacio propio correspondiente a } \lambda = 3 \text{ y } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ son dos vectores}$$

propios de A correspondiente a ese valor propio.

Para $\lambda = -6$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego :

$$E_{-6} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ es el espacio propio correspondiente a } \lambda = -6 \text{ y } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ es un vector propio de A}$$

correspondiente a ese valor propio.

Conclusión :

- 1) La matriz A de 3x3 **no es diagonalizable** dado que no es posible hallar una base de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de A. También $\dim.E_3 + \dim.E_5 = 1+1 = 2 < 3$ (orden de A)
- 2) La matriz B de 3x3 **es diagonalizable** dado que es posible encontrar una base de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de B, es decir podemos encontrar en ella tres vectores propios linealmente independientes, por ejemplo :

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ejemplo N° 3: Diagonalizar la matriz B del ejemplo anterior

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución : Con los vectores propios de B que calculamos anteriormente formamos la matriz P.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ luego hallamos } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente :

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo N° 4: Investigar si es posible diagonalizar las siguientes matrices :

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (Ejemplo n° 2 -Secc. 3)

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (Ejemplo N° 3 -Secc. 3)

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Ejemplo N° 4 -Secc. 3)

Solución :

a) La matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **no es diagonalizable**

por que :

- 1) Es de orden 2x2 y según calculamos en el Ejemplo n°2 - Secc.3 tiene un solo valor propio (teorema pag. 22)
- 2) Al ser de orden 2x2 y tener un solo vector propio linealmente independiente, es imposible determinar una base de R^2 formada por vectores propios de A (teorema pag. 21)
- 3) La dimensión de su único espacio propio (1) es menor que el orden de A (2)

c) La matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable

Por que:

1) Si bien A tiene dos valores propios distintos $\lambda = 1$ (mult. alg. 2) y $\lambda = 10$, los espacios propios que a ellos corresponden son de dimensión 2 y 1 respectivamente, por lo tanto

$$\sum \dim E_{\lambda} = 2 + 1 = 3 \text{ siendo 3 el orden de la matriz A (teorema pag.22)}$$

2) Se puede determinar una base de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios linealmente independientes de A.

c) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable

por que : Tiene un solo valor propio $\lambda = 1$ (mult. alg 3) y la dimensión de su único espacio propio (1) correspondiente a ese valor propio es menor que el orden de A(3) (teorema pag22).

Ejemplo N° 5 : Diagonalizar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución : En el ejemplo N° 3 - Secc. 3 se determinaron los valores y vectores propios de la matriz A, con los siguientes resultados :

Para el valor propio $\lambda = 1$ (mult. alg. 2) son vectores propios de A, linealmente independientes.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Para el valor propio $\lambda = 10$ es un vector propio linealmente independiente de A : $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Con los vectores propios linealmente independientes de A, formamos ahora la matriz P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y calculamos } P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Observar que los elementos diagonales de D , son los valores propios de la matriz A y que las columnas de la matriz P , que diagonaliza a la matriz A , son los vectores propios de esta matriz.

Ejemplo N° 6 : Para Investigación del lector : " Si A de $n \times n$ es un matriz diagonalizable cualquiera con n valores propios distintos "

- a) *¿Existe una única matriz P , que diagonaliza a la matriz A ?*
- b) *¿Existe una única matriz diagonal D , que sea similar a la matriz A ?*



Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Santa Fe

Álgebra y Geometría Analítica



Parte Práctica



SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES, MATRICES Y DETERMINANTES

EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas **no es cierta**? Justificar.

- a) Es un par ordenado que satisface ambas ecuaciones.
- b) Su gráfica consiste en el/los punto/s de intersección de las gráficas de las ecuaciones
- c) Si el sistema es indeterminado, hay una única solución.
- d) Si el sistema es inconsistente, no existe una solución.

2) ¿Cuál de las afirmaciones es cierta para el siguiente sistema de ecuaciones? $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$. Justificar.

- a) El sistema es inconsistente.
- b) La solución es $(-1, 2)$.
- c) La solución se encuentra sobre la recta $x = 2$.
- d) Las ecuaciones son equivalentes.

3) ¿Cuál de las siguientes es una segunda ecuación para el sistema cuya primera ecuación es $x - 2y = -5$, si debe tener un número infinito de soluciones? Justificar.

a) $6y = 3x + 15$	b) $6x - 3y = -15$	c) $y = -1/2 x + 5/2$	d) $3/2 x = 3y + 15/2$
-------------------	--------------------	-----------------------	------------------------

4) ¿Cuál de las gráficas de los siguientes sistemas es un par de rectas paralelas? Justificar.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 4y = 6x - 14 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 3x = 4 + 6y \end{cases}$	c) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$	d) $\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 7y = 3x \end{cases}$
------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------	------------------------------------------------------

5) Clasificar los sistemas dados. Utilizar el método de eliminación de Gauss o Gauss-Jordan para resolverlos. Verificar el resultado obtenido, en caso de ser posible.

a) $\begin{cases} 6x - 12y = -22 \\ 2x - 3y + z = -8 \\ 2x - 6y - 2z = -6 \\ -3x + y - 2z = 14 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 7 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$	c) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 11 \\ 4x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 10 \end{cases}$	d) $\begin{cases} x + z + w = 0 \\ y + z = 1 \\ x - y + w = 1 \end{cases}$
e) $\begin{cases} x + u + v = 0 \\ y + u = 1 \\ x + v - y = -1 \end{cases}$	f) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + 5y - 6z = 0 \end{cases}$	g) $\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 = 0 \\ 3X_1 - X_2 - X_3 = 0 \\ 2X_1 + 3X_2 - 4X_3 = 0 \end{cases}$	h) $\begin{cases} 2x + y + z - w = 0 \\ x + y + 3z - w = 0 \\ x + 2y + 4z - w = 0 \\ 3x + y - z - w = 0 \end{cases}$



6) Analizar los siguientes sistemas según los valores de los parámetros t , p y q determinando cuando son compatibles (determinados o indeterminados) y cuando incompatibles:

a) $\begin{cases} x + (t+1)y + tz = t+1 \\ x + (t+1)y + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x - y = 4 \\ y + 3z = 1 \\ 2x + y + pz = q \end{cases}$
-----------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------

7) Determinar el valor de α para que cada sistema dado admita infinitas soluciones. Escribir todas las soluciones posibles para el valor de α hallado.

a) $\begin{cases} x + \alpha y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ 3x + 3y + 3z = \alpha \end{cases}$
c) $\begin{cases} 2x - y + z + w = 1 \\ x + 2y - z + 4w = 2 \\ x + 7y - 4z + 11w = \alpha \end{cases}$	d) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + 7y - \alpha z = 5 \end{cases}$

8) ¿Cuál de las siguientes es una operación elemental con renglones?

- Reemplazar un renglón con un múltiplo diferente de cero de ese renglón.
- Sumar una constante diferente de cero a cada elemento en un renglón.
- Intercambiar dos columnas.
- Reemplazar un renglón con la suma de otros renglones.

9) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es cierta sobre la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

- Está en la forma escalonada por renglón.
- No está en la forma escalonada por renglón porque el cuarto número en el renglón 1 no es 1.
- No está en la forma escalonada por renglón porque el primer elemento diferente de cero en el renglón 3 es 3.
- No está en la forma escalonada por renglón porque la última columna contiene un 0.
- Estaría en forma escalonada reducida si la cuarta columna fuese $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

10) Dada la ecuación: $\begin{bmatrix} x+y & 3x+y \\ x+z & x+y-2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 9 & -17 \end{bmatrix}$. Plantear el sistema de ecuaciones lineales correspondiente, resolverlo y clasificar según el número de soluciones.

11) Escribir explícitamente las matrices cuadradas definidas a continuación, clasificándolas según su "forma" en diagonal, triangular superior o inferior, simétrica, antisimétrica, etc:

a) $A_{n \times n} = \{(a_{ij}) / a_{ij} = 0 \text{ si } i \geq j\}$	b) $B_{3 \times 3} = \{(b_{ij}) / b_{ij} = i - j\}$
c) $C_{3 \times 3} = \{(c_{ij}) / c_{ij} = i + j\}$	d) $D_{4 \times 4} = \{(d_{ij}) / d_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \vee d_{ij} = k \text{ si } i = j\}$
e) $E_{n \times n} = \{(e_{ij}) / e_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \vee e_{ij} = 1 \text{ si } i = j\}$	



12) Dadas las matrices $A_{2 \times 2}$; $C_{3 \times 3}$; $D_{3 \times 2}$, determinar qué orden deberán tener X e Y para que las ecuaciones siguientes tengan sentido:

a) $(D + 2 \cdot X) \cdot Y \cdot C = 0$	b) $C \cdot X + D \cdot Y = 0$
c) $A \cdot X = Y \cdot C$	d) $A \cdot X = C \cdot Y$
e) $A \cdot X = B + Y$	f) $A \cdot X = Y \cdot D$

13) Dadas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A) Efectuar, si es posible, las operaciones indicadas donde el punto “.” indica producto matricial:

a) $A \cdot E$	b) $A \cdot E^t$	c) $A^2 \cdot B^3$ y $B^3 \cdot A^2$	d) N.B
e) $[(2A - B \cdot I) \cdot C]^t$	f) $E \cdot D$	g) $[(A - 2I) \cdot D]^t$	h) $C \cdot E$ y $E \cdot C$

B) Efectuar con los vectores E y C, si es posible, las siguientes operaciones donde el punto “.” indica producto punto o escalar (entre vectores columna o renglón):

a) $E \cdot C^t$ y $C^t \cdot E$	b) $(E - 2C) \cdot C$	c) $(E^t - C) \cdot (E + C)$	d) $(E \cdot C) \cdot E$	e) $C \cdot E$ y $E \cdot C$	f) $E^t \cdot C$ y $C \cdot E^t$
----------------------------------	-----------------------	------------------------------	--------------------------	------------------------------	----------------------------------

14) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; verificar:

a) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$	b) $(A - B)^2 \neq A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$. ¿Cuál sería el desarrollo correcto?
c) $(A + B)^t = A^t + B^t$	d) $(A \cdot B)^2 \neq A^2 \cdot B^2$. ¿Cuál sería el desarrollo correcto?

15) Determinar si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justificar:

- Si A y B son matrices tales que $|A| = |B|$, entonces $A = B$.
- Si A es una matriz tal que $A^2 = 0$ (0: matriz nula), entonces $A = 0$.
- Si A es una matriz que satisface $A^2 = I$ (I: matriz identidad), entonces $A = I$.
- Sea $A_{n \times n}$ y $a_{ij} = i + 1$, entonces $|A| = 0$, $\forall n > 1$.
- Si A es una matriz antisimétrica ($A^t = -A$), entonces $|A^t| = (-1)^n |A|$.
- Si A es una matriz antisimétrica ($A^t = -A$) y n es impar, entonces $|A| = 0$.
- Si A es una matriz ortogonal ($A^t = A^{-1}$), entonces $|A| = 1$.
- Si A es una matriz idempotente ($A^2 = A$), entonces $|A| = 1$.
- Si $A_{3 \times 3}$ y $|A| = -2$, entonces: 1) $|A \cdot A^t| = 4$; 2) $|A \cdot A^{-1}| = 1$; 3) $|A \cdot \text{Adj.} A| = 8$.
- Si A y B son matrices tales que $|A| \neq |B|$, entonces A o B no es cuadrada.
- Si A es una matriz que satisface $A^2 = I$ (I: matriz identidad), entonces A es cuadrada.
- Si A es una matriz antisimétrica ($A^t = -A$), entonces A es cuadrada.

16) Sea G la forma escalonada reducida de la matriz de coeficientes un sistema de ecuaciones lineales $G \cdot X = B$:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ¿Cuántas ecuaciones y cuántas incógnitas tiene el sistema dado?
- Escribir al menos de dos maneras diferentes el conjunto solución del sistema homogéneo $G \cdot X = 0$
- Proponer una matriz B, si existe, que satisfaga las siguientes condiciones:
 - $G \cdot X = B$ incompatible.
 - $G \cdot X = B$ compatible determinado.
 - $G \cdot X = B$ compatible indeterminado.



17) Determinar la solución del siguiente sistema, resolviéndolo mediante la ecuación matricial $A \cdot x = b$. Utilizar la forma escalonada reducida (método del espejo) para obtener A^{-1} .

a) $\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -4x+5y=1 \end{cases}$	c) $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ -4x+5y=0 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x-3y+4z=0 \\ 2x-5y+7z=0 \\ -y+z=0 \end{cases}$	e) $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 2x-5y+7z=1 \\ -y+z=1 \end{cases}$	f) $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 2x-5y+7z=1 \\ -y+2z=1 \end{cases}$

18) Demostrar que si A es una matriz cuadrada y además:

a) $A^3 = 0$, entonces $(I - A)^{-1} = A^2 + A + I$.

b) $A^3 - 3A + I = 0$, entonces $A^{-1} = 3I - A^2$.

19) Demostrar que si B es invertible, entonces $A \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A$ si y sólo si $A \cdot B = B \cdot A$.

20) Calcular los siguientes determinantes mediante distintos métodos:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$ b) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ c) $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ d) $|D| = \begin{vmatrix} x+y & 1 \\ 1 & x-y \end{vmatrix}$

e) $|E| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ f) $|F| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ g) $|G| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

21) Aplicando propiedades de los determinantes, calcular:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix}$; b) $|B| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$; c) $|C| = \begin{vmatrix} a+b & a \\ a & a \end{vmatrix}$; d) $|D| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; e) $|E| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & d & 0 & 0 \end{vmatrix}$

22) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} x+2 & x & x \\ x & x+3 & x \\ x & x & x+4 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 2-x & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1+x & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

23) Si $\begin{vmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 4$; calcular los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} -3a+2b & -3c+2d & -3e+2f \\ 1 & 5 & -2 \\ b & d & f \end{vmatrix}$; b) $|B| = \begin{vmatrix} 3e & 3c & 2a \\ 3f & 3d & 2b \\ -6 & 15 & 2 \end{vmatrix}$



24) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$; calcular los siguientes determinantes:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3c & 3b & 3a \\ 3f & 3e & 3d \\ 3i & 3h & 3g \end{vmatrix}$; b) $|B| = \begin{vmatrix} d & e & f \\ g+2d & h+2e & i+2f \\ a & b & c \end{vmatrix}$

25) A partir de cada determinante, obtener otro del mismo valor al dado, haciendo nulos los elementos de una línea, excepto una de ellas. Verificar:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

26) Si A es una matriz que satisface $A^2 = I$ (I= matriz identidad). ¿Cuáles son los valores posibles para el determinante de A?

27) Determinar la solución del siguiente sistema, resolviéndolo mediante la ecuación matricial $A \cdot x = b$. Obtener A^{-1} mediante la fórmula $A^{-1} = \text{Adj}(A) / |A|$, donde $\text{Adj}(A)$ es la matriz adjunta de A.

a) $\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -4x+5y=1 \end{cases}$	c) $\begin{cases} x-3y+4z=1 \\ 2x-5y+7z=1 \\ -y+z=1 \end{cases}$
d) $\begin{cases} -x+y=-2 \\ 4x+2y-5z=1 \\ 3x-y-2z=2 \end{cases}$	e) $\begin{cases} 2x-2y+z=0 \\ -2x+3y+z=1 \\ 2x+7z=6 \end{cases}$	

28) ¿Para qué valores de x, no son invertibles las siguientes matrices?

a) $\begin{pmatrix} x & -3 \\ 4 & 1-x \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & x-1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 \end{pmatrix}$

29) Si A y B son matrices 3x3 cuyos determinantes valen 1 y -2 respectivamente, calcular, si es posible, el valor de los siguientes determinantes:

a) $|A \cdot B|$; b) $|B^3|$; c) $|2A^t|$; d) $|B \cdot \text{adj}(B)|$; e) $|3B^{-1}|$; f) $|A+B|$

30) Si $E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una forma escalonada para una matriz A, ¿Será cierto que $|A| = 1$? Justificar.

31) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, determinar el valor de $|A^n|$.

32) Demostrar que si A es una matriz $n \times n$ y $|A| = 2$, entonces $|\text{adj}(A)| = 2^{n-1}$.



33) A) Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $A \cdot X \cdot B = C$ b) $A \cdot X + B = C$ c) $A \cdot X - 2X = B$ d) $X^{-1} = C$ e) $(I + 2X^{-1}) = B$ f) $(X^{-1})^{-1} = (A^{-1})^t$

B) Con las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; hallar la solución particular de las ecuaciones matriciales resueltas en el inciso anterior.

34) Dada $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices columnas b , de orden 3×1 para las que exista al menos una solución de $A \cdot x = b$.

35) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$,

- a) Resolver el sistema homogéneo $A \cdot X = 0$;
b) Demostrar que para cualquier matriz A de orden $n \times n$, y B matriz invertible de orden $n \times n$, el sistema homogéneo $(B \cdot A) \cdot X = 0$ tiene las mismas soluciones que $A \cdot X = 0$.

36) Plantear un ejemplo de:

- a) un sistema con menos ecuaciones que incógnitas pero sin solución;
b) un sistema con menos ecuaciones que incógnitas pero con infinitas soluciones;
c) un sistema homogéneo con infinitas soluciones;
d) un sistema homogéneo sin solución.

- 37) a) Proponer un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas cuya solución sea $(1; 1)$.
b) Cambiando una ecuación haga que el sistema propuesto sea incompatible.
c) Representar gráficamente ambos sistemas.

38.a) ¿Cómo será el valor del determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas para cada sistema según su conjunto solución?. Tachar lo que no corresponda.

	Sistema Normal	Determinante de la matriz de los coeficientes de las incógnitas	
1) HOMOGÉNEO	1) Sistema Compatible Determinado	= 0	≠ 0
	2) Sistema Compatible Indeterminado	= 0	≠ 0
2) INHOMOGÉNEO	1) Sistema Compatible Determinado	= 0	≠ 0
	2) Sistema Compatible Indeterminado	= 0	≠ 0
	3) Sistema Incompatible	= 0	≠ 0

38.b) ¿Cómo será el valor del determinante de la matriz ampliada para cada sistema según su conjunto solución?. Tachar lo que no corresponda.

	Sistema Normal	Determinante de la matriz ampliada	
1) HOMOGÉNEO	1) Sistema Compatible Determinado	= 0	≠ 0
	2) Sistema Compatible Indeterminado	= 0	≠ 0
2) INHOMOGÉNEO	1) Sistema Compatible Determinado	= 0	≠ 0
	2) Sistema Compatible Indeterminado	= 0	≠ 0
	3) Sistema Incompatible	= 0	≠ 0



39) Modelo económico de Leontief:

39.a) Considerar dos industrias en las que se producen respectivamente dos artículos: vehículos (automóviles y camiones) y acero. Cada año se da una *demanda externa* (proveniente de otras industrias, empresas privadas o de otros países) de 360 mil toneladas de acero y 110 mil vehículos. Pero la demanda externa no es la única que se da en las dos industrias consideradas. Se requiere acero para producir vehículos. También se requieren vehículos para producir vehículos, porque estas plantas automotrices requieren autos y camiones para transportar los materiales y los empleados. De igual manera, la industria del acero requiere acero (para su maquinaria) y vehículos (para el transporte del producto y de los trabajadores) en su operación. Así, cada una de las dos industrias impone demandas a sí misma y a la otra industria. Estas acciones se llaman *demandas internas*.

Suponer que la industria del acero requiere $1/4$ de tonelada de acero y $1/12$ de vehículo para producir 1 tonelada de acero (es decir, se usa 1 vehículo en la producción de 12 toneladas de acero). También la industria automotriz requiere de $1/2$ tonelada de acero y de $1/9$ de vehículo para producir un vehículo.

¿Cuántas toneladas de acero y cuántos vehículos se deben producir cada año para que la disponibilidad de cada uno sea igual a la *demanda total* (externa + interna) ?.

39.b) Un sistema económico tiene dos industrias. El vector de demandas externas es $(30, 40)^t$. Se requieren 0,5 y 0,8 unidades de producción de la industria 1 para producir una unidad de la industria 1 y de la industria 2 respectivamente. Se requieren 0,2 y 0,3 unidades de producción de la industria 2 para producir una unidad de la industria 1 y 2 respectivamente.

Sea $(x_1, x_2)^t$ el vector de producciones de la industria 1 y de la industria 2. Calcular las producciones de cada industria de manera que la oferta sea igual a la demanda.

39.c) Las demandas internas y externas de las industrias N1 y N2 están dadas a continuación; x e y son respectivamente las producciones de cada industria: N1) $1/2 x + 1/4 y$; 300; N2) $1/10 x + 1/5 y$; 512

a) Escribir el sistema de ecuaciones que modela la situación: "demanda total = producción".

b) Expresar el sistema en forma matricial haciendo uso del producto entre matrices.

c) Mostrar que la matriz de coeficientes del sistema es invertible y usarla para determinar la producción de cada industria.

39.d) Una ciudad tiene una compañía maderera A, una compañía constructora B y una compañía ferroviaria C.

La compañía A utiliza $1/4$ de su propia producción (en unidades monetarias) para construir almacenes destinados a guardar su madera.

La compañía B necesita maderas de A equivalentes a $1/5$ de la producción (en unidades monetarias) de B.

La compañía C requiere maderas para durmientes equivalentes a $1/8$ de la producción (en unidades monetarias) de C.

La compañía A vende \$10000 a otras industrias, que no son la B, ni la C.

La compañía B vende \$8000 a otras industrias, que no son la A, ni la C.

La compañía C vende \$12000 a otras industrias, que no son la A, ni la B.

Si se representa con x, y, z la producción total, en unidades monetarias, de A, B y C, respectivamente, las demandas interindustriales totales sobre la B y la C están dadas por:

$0,1x + 0,3y + 0,04z$ (sobre la B); $0,01x + 0,21y + 0,33z$ (sobre la C)

Determinar la producción (en unidades monetarias) de las industrias A, B y C considerando que las ofertas sean iguales a las demandas sobre cada empresa.

40) Cadenas de Markov:

40.a) Cada año $2/10$ de la gente que vive en la zona rural o suburbana de una ciudad, se muda a la zona urbana y $1/10$ de la gente que vive dentro de la zona urbana se muda fuera.

Escribir una ecuación matricial que describa la distribución de gente dentro y fuera de la zona urbana de la ciudad al cabo de n años en términos de una distribución inicial conocida.

Utilizar la fórmula anterior para determinar ¿Cuál será la población dentro de la zona urbana a fines del año 2005, si a fines del 2002 había 20000 dentro y 3000 fuera?.



40.b) Dos negocios (A y B) surten de un producto a cierta población. Con el tiempo algunos clientes cambian de repartidor por diferentes razones (publicidad, costo, conveniencia, etc.). Se desea modelar y analizar el movimiento de los clientes entre los dos negocios suponiendo, por simplicidad, que la misma fracción de clientes cambiará de un negocio a otro durante cada período de tiempo.

Suponer que después de un mes el negocio A ha logrado mantener el 80% de sus propios clientes y además ha atraído el 30% de los clientes del negocio B.

Si originalmente el número total de clientes era de 100.000, y el negocio A contaba con 30.000 clientes

- Con qué cantidad de clientes contará cada negocio después de un mes?
- Y al cabo de dos meses?. Y a los 3 meses?
- Cuál será la fórmula que permite conocer la distribución de clientes al cabo de n meses?
- Cómo podría determinar si en algún momento la distribución del mercado se estabiliza?

41) Probabilísticos:

41.a) En un día determinado una persona está sana o enferma. Si la persona está sana hoy, la probabilidad de que esté enferma mañana se estima en un 98%. Si la persona está enferma hoy, la probabilidad de que esté sana mañana es de un 30%.

Si la persona está enferma hoy, ¿cuál es la probabilidad de que se recupere dentro de dos días?.

41.b) Suponer que el clima de cierta región es bueno, regular o malo en cualquier día dado.

Si el clima es bueno hoy, será bueno, regular o malo mañana con probabilidad de 0,6, 0,2 y 0,2 respectivamente.

Si el clima es regular hoy, mañana será bueno, regular o malo con probabilidades respectivas de 0,25, 0,5 y 0,25.

Por último, si hoy el clima es malo, las probabilidades son 0,25, 0,25 y 0,5 para bueno, regular y malo mañana.

Se desea predecir el clima al cabo de dos días, teniendo en cuenta que el estudio se inicia un día de clima bueno, es decir el vector de estado inicial es $(1 \ 0 \ 0)^T$.

41.c) Suponer que en cierta actividad laboral, cada persona está categorizada en uno solo de los tres siguientes estados:

Estado 1: Trabajador Profesional

Estado 2: Trabajador No Calificado

Estado 3: Trabajador Calificado

Asumir que cada persona tiene un hijo y que las probabilidades de que la próxima generación pase de un estado a otro son las siguientes:

Profesional a No Calificado: 10%

Profesional a Calificado: 30%

No Calificado a Profesional 20%

No Calificado a Calificado: 20%

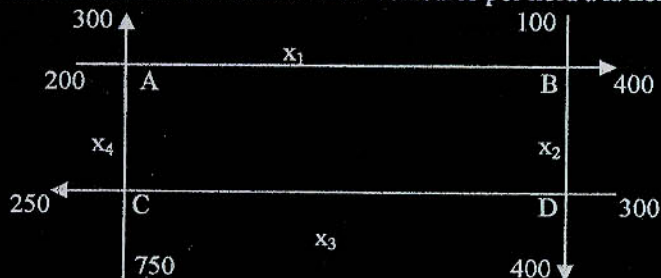
Calificado a Profesional 20%

Calificado a No Calificado 30%

Si el 20% de los trabajadores son Profesionales, el 50% No Calificados y los restantes son Calificados. Encontrar las probabilidades respectivas de que el nieto de un trabajador sea Profesional, No Calificado o Calificado.

42) Redes:

42.a) Considerar el siguiente diagrama que reproduce una red de calles de una sola vía con el flujo de tráfico promedio que entra o sale de cada calle en unidades de vehículos por hora a la hora de máximo tráfico.



Asumiendo que la cantidad de automóviles que llegan a una intersección es igual a la que sale de ella, construya un modelo matemático para el estudio del tránsito de la zona diagramada.

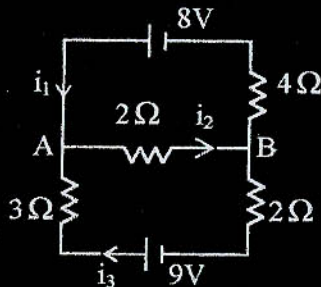
Suponer que la calle que va de C a A debe ser reparada, por lo cual interesa que el tráfico en este tramo sea mínimo sin ocasionar congestamientos en las otras calles.

Determinar cual sería el mínimo tráfico que se podría permitir en ese tramo a reparar y describa cómo obtendría ese mínimo.



42.b) Dado el siguiente circuito eléctrico:

- Determinar matricialmente la corriente que circula en cada conductor
- Analizar que ocurre con el resto del circuito cuando alguna de las resistencias altera su valor. Considerar los casos extremos, es decir cuando deja de funcionar o se pone en corto.



Condiciones:

- * En cada circuito, la suma algebraica del voltaje (FEM) es igual a la suma algebraica de las caídas de tensión,
- ** En cada nodo la suma de las corrientes que entra es igual a la suma de las corrientes que sale.

43) Varios:

43.a) La Empresa Electrocalculadoras S.A. puede producir una calculadora con un costo de materiales de \$12. Los costos fijos diarios ascienden a \$720 y planean vender cada calculadora en \$20. Elaborar las gráficas de las ecuaciones de costos y de ingresos en el mismo sistema de coordenadas cartesianas ortogonales y encontrar la cantidad de calculadoras por día que deben vender para que las finanzas se encuentren en equilibrio.

43.b) La Empresa Juguetes S.A. produce tres tipos de aeromodelos. Los principales materiales necesarios son metal (m), plástico (p) y tela (t). El esquema, que puede ser representado mediante una matriz $M_{3 \times 3}$, indica la cantidad de material necesario para cada modelos.

La Empresa vende directamente a una cadena de tiendas que le ha hecho un pedido de 700 unidades del modelo a, 800 del modelo b y 500 del c. El pedido está representado mediante la matriz $P_{1 \times 3} = (700 \ 800 \ 500)$.

m	p	t	
2	4	5	Modelo a
3	5	3	Modelo b
3	6	4	Modelo c

- Formar la matriz que exprese la cantidad total de cada material necesaria para satisfacer el pedido.
- La Empresa juguetera compra todos sus materiales en dos proveedores. Los precios unitarios del proveedor s1 son \$1,50 el metal, \$0,85 el plástico y \$1,15 la tela. El proveedor s2 cobra \$1,65 el metal, \$0,80 el plástico y \$1,10 la tela. Formar la matriz de costo ($C_{3 \times 2}$) cuyas columnas muestren los precios unitarios de cada proveedor, y determinar la matriz que muestre el costo de los materiales para cada modelo basados en los dos conjuntos de precios de proveedor.
- Determinar la matriz de 1×2 que muestra el costo total de materiales para completar el pedido, para cada conjunto de precios de proveedor. Sólo con base en costos, ¿a qué proveedor debe comprar sus materiales la Empresa?

43.c) Supongamos que uno quiere comparar el costo de ciertos comestibles. La siguiente matriz $M_{3 \times 5}$ indica el costo de un kilogramo de cada uno de los productos en tres supermercados.

$$M = \begin{pmatrix} 70 & 40 & 13 & 30 & 330 \\ 85 & 38 & 10 & 28 & 310 \\ 75 & 42 & 12 & 30 & 325 \end{pmatrix}$$

Las primera fila indica el precio de cada producto en el supermercado 1, la segunda corresponde al supermercado 2 y la tercera al 3.

Las columnas indican los precios de carne, pan, papas, manzanas, y café, respectivamente.

Si se desea comprar 5 kg de carne, 3 kg de pan, 10 kg de papas, 4 kg de manzanas y 2 kg de café. ¿Determinar matricialmente en qué supermercado conviene comprar?



43.d) Un veterinario desea controlar la dieta de un animal de modo que, mensualmente, el animal consuma como mínimo 960 kg de avena, 1200 kg de maíz y 880 kg de soja. Tiene tres alimentos (A, B y C) disponibles con contenidos según se muestra en la siguiente tabla.

¿Determinar matricialmente cuál es la menor cantidad de bolsas de cada alimento que debe comprar para obtener la dieta deseada?

	Avena	Maíz	Soja
1 bolsa de alimento A (15 kg)	6 partes	5 partes	5 partes
1 bolsa de alimento B (18 kg)	6 partes	6 partes	4 partes
1 bolsa de alimento C (19 kg)	4 partes	7 partes	5 partes

43.e) Una firma de transporte posee tres tipos de camiones A, B y C. Los camiones están equipados para transportar dos clases de maquinaria pesada. El número de máquinas de cada clase que puede transportar cada camión es:

$$\begin{matrix} \text{Máquina} \\ \text{Clase 1} \\ \text{Clase 2} \end{matrix} \begin{bmatrix} A & B & C \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La firma consigue una orden para 32 máquinas de clase 1 y 10 de clase 2. Si la operación de cada tipo de camión tiene el mismo costo para la firma, determine la solución más económica para cumplir la orden asumiendo que cada camión debe estar totalmente cargado.

43.f) Una inversionista le afirma a su corredor de bolsa que todas sus acciones son de tres compañías, A, B y C, y que hace dos días su valor bajó \$ 350,00 pero que ayer aumentó \$ 600,00. El corredor recuerda que hace dos días el precio de las acciones de A bajó \$ 1,00 por acción y el de las de B bajaron \$ 1,50, pero que el precio de las acciones de C subió \$ 0,50. También recuerda que ayer el precio de las acciones de A subió \$ 1,50 por acción, el de las de B bajó otros \$ 0,50 por acción y las de C subieron \$ 1,00.

Demuestra que el corredor no tiene suficiente información para calcular el número de acciones que posee la inversionista en cada compañía, pero que si ella dice que tiene 200 acciones de C, el corredor puede calcular el número de acciones que tiene en A y B.

43.g) Un fabricante produce cuatro artículos diferentes, cada uno de los cuales requiere para su elaboración de tres materias primas. Los cuatro productos se denotan por p_1 , p_2 , p_3 y p_4 y las tres materias primas se denotan por r_1 , r_2 y r_3 . En la tabla se indica el número de unidades que se requiere de cada materia prima para elaborar una unidad de cada producto.

	p_1	p_2	p_3	p_4
r_1	2	1	3	4
r_2	4	2	2	1
r_3	3	3	1	2

i) Si $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$ es el vector producción, y $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ es el vector de materia prima, escribir la ecuación matricial que

permite determinar el vector de materia prima en función del vector de producción.

ii) Suponiendo que $p = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$, ¿cuántas unidades se requieren de cada materia prima?



43.h) Un fabricante produce juguetes que tienen tres partes: ruedas, ejes y cuerpos que son hechos de acero y plástico. Las partes y los materiales están dados por las siguientes tablas:

	juguete 1	juguete 2	Juguete 3
Parte 1 (ruedas)	4	3	2
Parte 2 (eje)	2	2	1
Parte 3 (cuerpos)	1	1	1

Material (gramos)	parte 1	parte 2	Parte 3
1 (acero)	0	1	4
2 (plástico)	0,6	0	1

- i) Si la orden de venta pide 8 juguetes del tipo 1, 12 del tipo 2 y 10 del tipo 3. ¿Cuántas ruedas, ejes y cuerpos debe producir la compañía para satisfacer la orden?
- ii) ¿Qué cantidad de material se requiere para cumplir con la orden de venta?

43.i) Un empresario tiene tres máquinas (m_1 ; m_2 ; m_3) que son empleadas en la fabricación de cuatro productos diferentes (p_1 ; p_2 ; p_3 ; p_4).

Para utilizar plenamente las máquinas, éstas estarán en operación 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de una unidad de cada uno de los productos está dada por:

$$\begin{array}{l} p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \\ m_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ m_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ m_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Encontrar matricialmente el número de unidades que se deben producir de cada uno de los cuatro productos en una jornada de 8 horas bajo el supuesto que cada máquina se usa las 8 horas completas.



RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) c; 2) c; 3) a; 4) b;

5a) Sistema no normal, inhomogéneo, compatible determinado, $S = \{(x, y, z)\} = \{(-43/9, -5/9, -1/9)\}$;

5b) Sistema no normal, inhomogéneo, incompatible;

5c) Sistema normal, inhomogéneo, compatible determinado, $S = \{(x, y, z)\} = \{(2, -3, 1)\}$;

5d) Sistema no normal, inhomogéneo, incompatible;

5e) Sistema no normal, inhomogéneo, compatible indeterminado, $S = \{(x, y, u, v)\} = \{(-u - v, 1 - u, u, v)\}$;

5f) Sistema normal, homogéneo, compatible indeterminado, $S = \{(x, y, z)\} = \{(8t, 10t, t)\}$;

5g) Sistema normal, homogéneo, compatible determinado, $S = \{(x_1, x_2, x_3)\} = \{(0, 0, 0)\}$;

5h) Sistema normal, homogéneo, compatible indeterminado, $S = \{(x, y, z, w)\} = \{(2t, -t, t, 4t)\}$;

6.b) Incompatible si $p = 9, q \neq 11$; indeterminado si $p = 9, q=11$;

7a) Si $\alpha=1 \Rightarrow S = \{(x, y, z)\} = \left\{ \left(\frac{1}{3}t, \frac{2}{3}t, t \right) \right\}$; 7b) Sistema Incompatible $\forall \alpha \Rightarrow S = \emptyset$;

7c) Si $\alpha=5 \Rightarrow S = \{(x, y, z, w)\} = \left\{ \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}z - \frac{6}{5}w, \frac{3}{5} + \frac{3}{5}z - \frac{7}{5}w, z, w \right) \right\}$;

7d) Si $\alpha=4 \Rightarrow S = \{(x, y, z)\} = \left\{ \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}t, \frac{3}{5} + \frac{3}{5}t, t \right) \right\}$;

8) a, d;

9) c, e;

10) Compatible determinado; (1, -2, 8); 11.a);

$$11.a) A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

$$11.b) B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$11.c) C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix};$$

$$11.d) D = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix};$$

$$11.e) E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

12.a) $X_{3 \times 2}, Y_{2 \times 3}$;

12.b) $X_{3 \times m}, Y_{2 \times m}$;

12.c) $X_{2 \times 3}, Y_{2 \times 3}$;

12.d) incompatibles para la operación indicada;

12.e) $X_{2 \times 3}, Y_{2 \times 3}$;

12.f) $X_{2 \times 2}, Y_{2 \times 3}$;

13.A.a) No compatibles para el producto indicado; 13.A.b) $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$; 13.A.d) No compatibles para el producto indicado;

13.A.e) (-5 9); 13.A.h) $C.E = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; $E.C = (14)$;

13.B.a) $E.C^t = 14 = C^t.E$;

13.B.e) $E.C = C.E = 14$;

13.B.f) $C.E^t = 14 = E^t.C$;

15.a) f; 15.b) f; 15.c) f; 15.d) v; 15.e) v; 15.f) v; 15.g) f; 15.h) f; 15.i.1) v; 15.i.2) v; 15.i.3) f;
15.j) f; 15.k) v; 15.l) v;

16.a) 4 ecuaciones y 7 incógnitas;

16.c.1) $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)^t$ con $b_4 \neq 0$;

16.c.2) Nunca;

16.c.3) $B = (b_1, b_2, b_3, 0)^t$;



RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA (CONTINUACIÓN):

17.a) no es posible por ser sistema no normal;

$$17.b) A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & -3/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; S = \{(x, y)\} = \{(-4, -3)\};$$

$$17.c) A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & -3/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; S = \{(x, y)\} = \{(0, 0)\};$$

17.d) SCI; no es posible hallar A^{-1} ;

17.e) no es posible hallar A^{-1} ; no se puede determinar a priori si es SCI o SI;

$$17.f) A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; S = \{(x, y, z)\} = \{(-2, -1, 0)\}$$

20.a) -26; 20.b) -10; 20.c) 56; 20.d) $x^2 - y^2 - 1$; 20.e) 3; 20.f) 59; 20.g) -10,
21.a) 0; 21.b) 0; 21.c) ab; 21.d) 0; 21.e) abcd; 22.a) -12/13 b) 11; 23.a) 12; 23.b) -72;
24.a) 54; 24.b) -2; 25.a) -13; 25.b) -5; 25.c) 10; 26) $S = \{-1, 1\}$;

27.a) no es posible por ser sistema no normal; 27.b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & -3/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; S = \{(x, y)\} = \{(-4, -3)\}$

27.c) no es posible hallar A^{-1} ; no se puede determinar a priori si es SCI o SI;

$$27.d) A^{-1} = \begin{pmatrix} -9/2 & 1 & -5/2 \\ -7/2 & 1 & -5/2 \\ -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}; S = \{(x, y, z)\} = \{(5, 3, 5)\};$$

$$27.e) S = \{(x, y, z)\} = \{(-4, -3, 2)\};$$

28.a) 4 y -3; 28.b) 0 y 3; 29.a) -2; 28.b) -8; 28.c) 8; 28.d) -8; 28.e) -27/2; 28.f) no se puede calcular;

30) No. Se desconocen las operaciones elementales aplicadas;

$$31) (1/2)^n;$$

33.A.a) $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$; 33.A.b) $X = A^{-1} \cdot (C - B)$; 33.A.c) $X = (A - 2I)^{-1} \cdot B$; 34) $b = (b_1; b_2; b_3)^t / b = (b_1; b_2; b_1 + b_2)^t$;

38.a) 1.1) $\neq 0$; 1.2) $= 0$; 2.1) $\neq 0$; 2.2) $= 0$; 2.3) $= 0$; 38.b) 1.1) $= 0$; 1.2) $= 0$; 2.1) $= 0$; 2.2) $= 0$; 2.3) $\neq 0$;

39.a) 600000 t acero/año; 180000 vehículos/año; 39.b) $(x_1; x_2) = (278,95; 136,84)$; 39.c) $(x, y) = (981,33; 762,66)$;
39.d) $x = \$21414,40$; $y = \$15812,70$; $z = \$23186,30$

40.a) 16934 personas; 40.b.i) $X_1 = (A; B)_1 = (45000, 55000)$;

40.b.ii) $X_2 = (A; B)_2 = (52500; 47500)$; $X_3 = (A; B)_3 = (56250; 43750)$

40.b.iii) $X_n = M^n X_0$; 40.b.iv) $X = (A; B) = (60000, 40000)$;

41.a) 50,4%; 41.b) Si el clima es bueno hoy, pasado mañana será bueno, regular o malo con probabilidades respectivas de 0,46 ; 0,27 y 0,27; 41.c) 31,2% 36,7% 32,1%;

42.a) 500 vehic /hora (400 en AB, 100 en BD , 0 en DC); 42.b) $i_1 : 1A; i_2 : 2A; i_3 : 1^a$;

43.a) (90, 1800); 43.b.i) (5300 9800 7900), 43.b.ii) $\begin{pmatrix} 12,15 & 12,00 \\ 12,20 & 12,25 \\ 14,20 & 14,15 \end{pmatrix}$, 43.b.iii) (25,365 25,275);

43.c) supermercado 2; 43.d) A: 15, B: 144, C: 19; 43.e) (13, 2, 4);

43.f) Sistema indeterminado. Pero, si $C = 200$, entonces $A = 300$ y $B = 100$;

43.i) Soluciones posibles (4, 2, 0, 0), (3, 1, 1, 1), (2, 0, 2, 2).



VALORES Y VECTORES PROPIOS, MATRICES SIMILARES, DIAGONALIZACIÓN.

EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) Determinar los valores propios (o característicos) de cada matriz, sus multiplicidades algebraicas y geométricas. Decidir si la matriz es diagonalizable. En caso de serlo verificar que es semejante (similar) a la correspondiente matriz diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Si λ es un valor propio de A , demostrar que:

- a) λ es un valor propio de A^t .
- b) $k\lambda$ es un valor propio de kA , donde k es un real no nulo.
- c) λ^n es un valor propio de A^n .
- d) Para $\lambda \neq 0$, $1/\lambda$ es valor propio de A^{-1} .

3) Verificar usando la definición de valor y vector propio, que $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$ tiene a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ como vector propio correspondiente al valor propio d .

4) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & a_1 \\ -5 & a_2 \end{pmatrix}$ que admite a $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ como autovectores. Hallar los autovalores correspondientes y los a_1 y a_2 de la matriz A .

5) Determinar, en cada caso, si los pares de matrices son similares. Justificar

Sugerencia: Usar los contrarrecíprocos de los resultados de los ejercicios 2.b) y 2.c) cuando sea posible.

a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$



6) a) Sea $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, con $b \neq 0$. Determinar los valores propios y sus multiplicidades algebraicas y geométricas. ¿Es A diagonalizable?. Justificar la respuesta.

b) Determinar el polinomio característico de $B = \begin{bmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$. Determinar si B es semejante a A .

7) Calcular A^{20} y B^6 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8) Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de una transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ respecto a la base canónica de \mathbb{R}^2 .

a) Determinar la matriz B , que representa a T respecto a las bases $B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) ¿La matriz A es diagonalizable? ¿Qué nombre reciben los vectores de B_1 y los elementos diagonales de la matriz B hallada? Justificar cada respuesta a partir de las definiciones correspondientes.

c) Calcular A^{30} .

9) Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz en la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinar, si es posible:

i) Una representación matricial para T que sea diagonal;

ii) Una matriz ortogonal ($Q^{-1} = Q^t$) que diagonalice a A .

b) ¿Qué relación existe entre la matriz diagonal asociada a T y la matriz en la base canónica, A ? Verificar.

10) Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación definida por $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -x + y \end{pmatrix}$, determinar:

a) la matriz de T respecto a la base canónica y explicar, usando algún teorema, ¿por qué el cero es un autovalor de T ?

b) los autovalores. Decidir si la matriz de T es diagonalizable. Si lo es, escribir la matriz diagonal asociada a T ;

c) los vectores propios de T . Mostrar que son ortogonales;

d) una base ortonormal de \mathbb{R}^2 formada por autovectores de T . ¿Qué ventaja presenta tomar esta base como columnas de P a la hora de verificar que ambas representaciones matriciales de T son similares, esto es $D = P^{-1} A_T P$?



11) Sea $H = \{t\vec{k} / t \in \mathbb{R}\}$

- Verificar que H es un subespacio de \mathbb{R}^3 y que $\dim H = 1$.
- Determinar la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisface las siguientes condiciones:
 - El subespacio H es el núcleo de T .
 - El escalar $\lambda = 2$ es un valor propio de T cuyo espacio propio es $E_2 = \text{gen}\{\vec{i}; \vec{i} + \vec{j}\}$
- Describir la imagen de T . Hallar una base y el rango de T .
- Verificar que T es un operador diagonalizable.

12) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{bmatrix}$, calcular los valores de a , b , y c para que $\lambda = 1$ sea un autovalor de A que tiene como autovector correspondiente al vector $v = [1; 1; 1]$. Para los valores de a , b , y c obtenidos, calcular los demás autovalores y espacios propios correspondientes.

13) Determinar para que valor o valores de a la matriz A tiene entre sus valores propios, alguno de multiplicidad algebraica mayor a 1 (uno). $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

14) Responder verdadero o falso según corresponda. Justificar.

- Si los vectores columna de una matriz $A_{n \times n}$ forman una base de \mathbb{R}^n entonces 0 es un valor propio de A .
- Si 1 es valor propio de la matriz I de orden 4×4 entonces su multiplicidad geométrica es 4 .
- Toda matriz simétrica es diagonalizable.

15) Determinar las condiciones que deben cumplir a , b , c para que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ no sea diagonalizable.

16) En cada caso determinar el / los valores de a , b (según corresponda), los autovectores y espacios característicos, si:

a) la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & b \end{pmatrix}$ admite como autovalores a $\lambda_1 = 1$; $m_{(1)} = 1$ y $\lambda_2 = -1$; $m_{(-1)} = 2$

b) la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ admite como autovalores a $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$



RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA:

- 1) a) 2; 2; 3; $E_2 = \text{gen}\{i\}$; $E_3 = \text{gen}\{-1; 1; 1\}$; No diagonalizable
 b) -2; 7; $E_{-2} = \text{gen}\{(2; -1)\}$; $E_7 = \text{gen}\{(1; 1)\}$; Diagonalizable
 c) -3; -3; $E_{-3} = \text{gen}\{i\}$; No diagonalizable
 d) -3; -3; $E_{-3} = \mathbb{R}^2$; Diagonalizable (D ya es diagonal)
 e) 0; 1; 3; $E_0 = \text{gen}\{[1; 1; 1]\}$; $E_1 = \text{gen}\{[-1; 0; 1]\}$; $E_3 = \text{gen}\{[1; -2; 1]\}$; Diagonalizable
 f) 1; 1; 10; $E_1 = \text{gen}\{[0; 1; -2]; [1; 0; -2]\}$; $E_{10} = \text{gen}\{[2; 2; 1]\}$; Diagonalizable
 g) 1; 1; 1; $E_1 = \text{gen}\{[1; 1; 1]\}$; No diagonalizable
 h) 2; 2; 2; 2; $E_2 = \text{gen}\{[0; 0; 0; 1], [1; 0; 0; 0]\}$; No diagonalizable;
- 4) $\lambda_1 = -4$; $\lambda_2 = 3$; $a_1 = -2$; $a_2 = 1$;
- 5) a) Si; b) No; c) No;
- 6) a) $\lambda = a$; $m_{A(\lambda)} = 3$; No, pues $E_a = \text{gen}\{i, k\}$; $m_{g(\lambda)} = 2$; b) No, pues no tienen el mismo polinomio característico.
- 7) a) $A^{20} = I$;
- 8) a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$; b) Si; vectores propios de A; valores propios de A; $A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$; $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- 9) a) $M_T = \text{diag}(0; 1; 3)$; b) son semejantes, $Q^{-1} \cdot A \cdot Q = D$;
- 10) a) A_T no es invertible $\equiv 0$ es valor propio de A_T ; b) 0; 2. Diagonalizable. $D = \text{diag}(2; 2)$
 c) $(1; 1) \cdot (1; -1) = 0$; d) $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1; 1), \frac{\sqrt{2}}{2}(1; -1) \right\}$. P sería ortogonal, $P^{-1} = P^t$.
- 11) b) i) $T(x; y; z) = (x; y; 0)$; ii) $T(x; y; z) = (2x; 2y; 0)$; c) $\text{Im} = \text{gen} = \{i; j\}$;
- 12) $a = -2$; $b = -2$; $c = -3$; $\lambda_2 = -1$; $E_{(-1)} = \text{gen}\{[-1; 1; 0]; [1; 0; 1]\}$;
- 13) Si $a = 1 \Rightarrow \lambda = 1$; ; si $a = 2 \Rightarrow \lambda = 2$;
- 14) a) F; b) V; c) V
- 15) Para que A no sea diagonalizable $a \neq c \vee b = 0$
- 16) a) $a = -2$; $b = -3$; $E_{(1)} = \text{gen}\{1; 1; 1\}$; $E_{(-1)} = \text{gen}\{[-1; 1; 0]; [1; 0; 1]\}$;
 b) Si $\lambda_3 = 1 \Rightarrow a = 1$; ; si $\lambda_3 = 2 \Rightarrow a = 2$;

Bibliografía Consultada:

- ✓ Álgebra Lineal (S. Grossman)
- ✓ Introducción al Álgebra Lineal (H. Anton)
- ✓ Teoría y Problemas de Álgebra Lineal (S. Lipschutz - S. Schaum)

El contenido del presente tema ha sido seleccionado por la Lic. Adriana Frausin y la Prof. Silvina Martínez. Edición original desarrollada o recopilada por la Lic. Gabriela Roldán y el Ing. Roberto Vignolo y transcrita por éstos, por la Srta. Carolina Robson (C.E.U.T.) y el Sr. Fabio Dlugovitzky.



TRANSFORMACIONES LINEALES

EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) Determinar si la transformación de V en W dada es lineal:

a) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

b) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$

c) $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

d) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}$

e) $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}$

2) Siendo T una transformación lineal,

a) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$; hallar $T \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

b) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; hallar $T \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



3) Encontrar una representación matricial y determinar núcleo, imagen (o recorrido), nulidad y rango de cada una de las transformaciones lineales siguientes:

a) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$

b) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$

c) $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2; T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y + w \end{pmatrix}$

d) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 3x - y + 4z \\ 5x - y + 8z \end{pmatrix}$

e) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$

f) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b - c \\ 2a - b + 3c \end{pmatrix}$

g) $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 3z \\ 5x - 4y - 4z \\ 7x - 6y + 2z \end{pmatrix}$

h) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$

4) Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ y - 3z \\ z \end{pmatrix}$;

a) ¿Es T una transformación lineal? Justificar.

b) Determinar $\text{Nu}(T)$; $\text{Im}(T)$ y una base y la dimensión de cada uno de ellos.

c) Determinar la matriz de T respecto de las bases $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2 respectivamente.

d) Determinar $T(1; 2; 0)$ directamente y mediante la matriz asociada a la transformación.



- 5) Siendo $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$, donde $A = \{v_1; v_2\}$, $B = \{w_1; w_2; w_3\}$ son bases de \mathfrak{R}^2 y \mathfrak{R}^3 respectivamente, determinar $T(v_\lambda)_B$.
- 6) Siendo $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, donde $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$; $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (base del dominio); $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (base del codominio); determinar $T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, directamente y mediante la matriz de la transformación.
- 7) La transformación lineal $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ respecto de las bases $A = \{(0;1;1); (1;0;1); (1;1;0)\}$ y $B = \{(1;2); (2;1)\}$ del dominio y codominio, respectivamente, está representada mediante la matriz $M_{AB(T)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Definir T respecto de las bases estándar del dominio y del codominio.
- 8) Determinar:
a) La imagen y rango de cualquier transformación lineal $T: V \rightarrow \mathfrak{R}^2$.
b) El núcleo y nulidad de cualquier transformación lineal $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow V$.
- 9) Hallar una transformación lineal $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ tal que $nuT = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$.
- 10) Hallar una transformación lineal $T: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ tal que $RecT = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$.
- 11) Encontrar todas las transformaciones lineales de \mathfrak{R}^2 en \mathfrak{R}^2 tales que la recta $y = 0$ se transforma en la recta $x = 0$.
- 12) Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Sea $B = \{v_1; v_2; \dots; v_n\}$ una base de V y suponiendo que $T(v_i) = 0$ para $i = 1; 2; \dots; n$. Mostrar que T es la transformación cero.
- 13) Sean las transformaciones lineales $S: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ y $T: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$. Si $S[T_v]$ es la transformación lineal cero, demostrar a favor o en contra que $T[S_v]$ es la transformación lineal cero.
- 14) Demostrar que si u y v son vectores paralelos en \mathfrak{R}^2 y $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es una transformación lineal, entonces $T(u)$ y $T(v)$ también son vectores paralelos en \mathfrak{R}^2 .



15) En cada caso, describir verbalmente la transformación lineal $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ que tiene la representación matricial A_T :

a) $A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

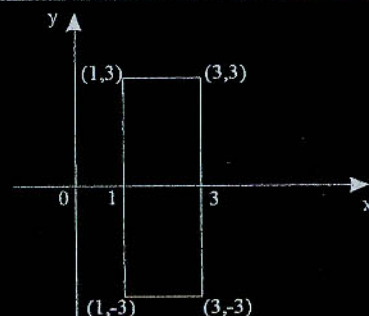
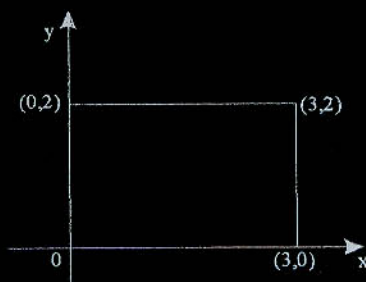
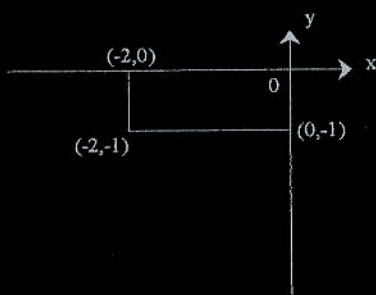
d) $A_T = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

16) El rectángulo de cada caso sufre una transformación lineal dada. Determinar la representación matricial de dicha transformación y graficar la región que se obtiene finalmente:

a) Compresión a lo largo del eje x ($c = 1/2$)

b) Expansión a lo largo del eje y ($c = 3$)

c) Reflexión con respecto al eje y



17) Sea la transformación lineal $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$; $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}$

a) ¿Cuál es la representación matricial de T respecto de la base canónica de \mathfrak{R}^2 tanto para el dominio como el codominio?

b) ¿Es una matriz invertible? Justificar. A partir de esta respuesta, determinar: nulidad, rango, núcleo e imagen de T.

c) Hallar la matriz de transformación respecto de la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ tanto para el dominio como el codominio.



RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) a) c) y e) son transformaciones lineales, el resto no;

2.a) $T(x; y) = (x-4y; 2x; 3x+5y)$; $T(2; 4) = (-14; 4; 26)$;

2.b) $T(x; y) = (-4x+5y; x-3y)$; $T(2; 4) = (12; -10)$;

3.a) $M_T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\text{Nu}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$; $\text{Im}(T) = \mathfrak{R}$; $v = 1$; $\rho = 1$;

3.b) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\text{Nu}(T) = (0; 0)$; $\text{Im}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$; $v = 0$; $\rho = 2$;

3.c) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\text{Nu}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$; $\text{Im}(T) = \mathfrak{R}^2$; $v = 2$; $\rho = 2$;

3.d) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$; $\text{Nu}(T) = \text{gen} \{0\}$; $\text{Im}(T) = \mathfrak{R}^3$; $v = 0$; $\rho = 3$;

3.e) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\text{Nu}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; $\text{Im}(T) = \mathfrak{R}^2$; $v = 1$; $\rho = 2$;

3.f) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $\text{Nu}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $\text{Im}(T) = \mathfrak{R}^2$; $v = 1$; $\rho = 2$;

3.g) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{pmatrix}$; $\text{Nu}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 16 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $\text{Im}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $v = 1$; $\rho = 2$;

3.h) $M_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

Si $ad - bc \neq 0 \Rightarrow \text{Nu}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; $v(T) = 0$; $\text{Rec}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right\}$; $\rho(T) = 2$

Si $ad - bc = 0 \Rightarrow \text{Nu}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $v(T) = 1$; $\text{Rec}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ c/a \end{pmatrix} \right\}$; $\rho(T) = 1$



4.a) Sí, $T(x)=A \cdot x$; 4.b) $\text{Nu}(T)=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; $\text{Im}(T)=\mathfrak{R}^2$; $v=1$; $\rho=2$; 4.c) $M(T)=\begin{pmatrix} 3 & 7/5 & 16/5 \\ 0 & 4/5 & 2/5 \end{pmatrix}$; 4.d) $T(1;2;0)=(3;2)$

5) Si $v_A=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$; $T(v_A)_B=\begin{pmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 \end{pmatrix}$; donde $T(v_1)=(a_{11}w_1+a_{21}+w_2)$ y $T(v_2)=(a_{12}w_1+a_{22}+w_2)$

6) $M(T)=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; 7) $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-3x+7y-z)/2 \\ (-3x+5y+z)/2 \end{pmatrix}$

8.a) i) $\text{Rec1}(T)=\{0\}$; ii) $\text{Rec2}(T)=\text{gen}\{(1, m), m \in \mathfrak{R}\}$; iii) $\text{Rec3}(T)=\mathfrak{R}^2$;

8.b) i) $\text{Rec1}(T)=\{0\}$; ii) rectas que contienen al origen coordenado; iii) planos que contienen al origen coordenado;

9) $T(x, y, z)=(x-2y+3z, 0)$; $T(x, y, z)=(x-2y+3z, kx-2ky+3kz)$; 10) $T(x, y, z)=(2y-3z, y, z)$;

11) $A_T=\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \forall b, c, d \in \mathfrak{R}$; 13) falso;

15.a) Reflexión respecto a la recta $y=x$;

15.b) Reflexión respecto al eje x ;

15.c) Compresión a lo largo del eje y ;

15.d) Expansión a lo largo del eje x ;

16.a) $A_T=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 16.b) $A_T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 16.c) $A_T=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

17.b) Sí; $|M_T| \neq 0$; $v=0$, $\rho=2$; 17.c) $\begin{pmatrix} 5/4 & -13/4 \\ 5/4 & 3/4 \end{pmatrix}$.

Bibliografía Consultada:

- ✓ Álgebra Lineal (S. Grossman)
- ✓ Introducción al Álgebra Lineal (H. Anton)
- ✓ Teoría y Problemas de Álgebra Lineal (S. Lipschutz - S. Schaum)

El contenido del presente tema ha sido seleccionado por la Lic. Adriana Frausin y la Prof. Silvina Martínez. Edición original desarrollada o recopilada por la Lic. Gabriela Roldán y el Ing. Roberto Vignolo y transcripta por éstos, por la Srta. Carolina Robson (C.E.U.T.) y el Sr. Fabio Dlugovitzky.



ECUACIONES EN COORDENADAS CARTESIANAS EXPRESADAS EN FORMA PARAMÉTRICA

EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) Identificar el lugar geométrico que representan las siguientes ecuaciones en \mathcal{R}^2 , donde $\vartheta, x_0, y_0, r, a, b \in \mathcal{R}$ (ϑ es el parámetro y las demás son constantes). Graficar.

1.a) $\begin{cases} x = r \cdot \cos \vartheta \\ y = r \cdot \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$	1.b) $\begin{cases} x = 3 \cdot \cos \vartheta \\ y = 3 \cdot \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$	1.c) $\begin{cases} x = 3 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \\ y = 3 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \end{cases}$	1.d) $\begin{cases} x = 3 \cdot \cos \vartheta \\ y = 3 \cdot \cos \vartheta \end{cases}$
1.e) $\begin{cases} x = x_0 + r \cdot \cos \vartheta \\ y = y_0 + r \cdot \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$	1.f) $\begin{cases} x + 2 = \operatorname{sen} \vartheta \\ y - 3 = \cos \vartheta \end{cases}$	1.g) $\begin{cases} x = 3 + 5 \cdot \cos \vartheta \\ y = 7 + 5 \cdot \cos \vartheta \end{cases}$	1.h) $\begin{cases} x = 3 + 3 \cdot \cos \vartheta \\ y = 3 + 2 \cdot \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$
1.i) $\begin{cases} x = x_0 + a \cdot \cos \vartheta \\ y = y_0 + b \cdot \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$	1.j) $\begin{cases} x = \vartheta \cdot \cos \vartheta \\ y = \vartheta \cdot \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$	1.k) $\begin{cases} x = \vartheta \cdot \cos \pi \vartheta \\ y = \vartheta \cdot \operatorname{sen} \pi \vartheta \end{cases}$	1.l) $\begin{cases} x = \pi \vartheta \cdot \cos \pi \vartheta \\ y = \pi \vartheta \cdot \operatorname{sen} \pi \vartheta \end{cases}$
1.m) $\begin{cases} x = 2\vartheta \cdot \cos \vartheta \\ y = 3\vartheta \cdot \operatorname{sen} \vartheta \end{cases}$	1.n) $\begin{cases} x = \vartheta \\ y = \vartheta^2 \end{cases}$	1.ñ) $\begin{cases} x = 3\vartheta^2 \\ y = 2\vartheta \end{cases}$	1.o) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$
1.p) $\begin{cases} x^2 = \vartheta \\ y^2 = \vartheta \end{cases}$	1.q) $\begin{cases} x\vartheta = 1 \\ y = \vartheta \end{cases}$	1.r) $\begin{cases} x^2 = 25/\vartheta \\ y^2 = \vartheta \end{cases}$	1.s) $\begin{cases} x = \vartheta \cdot \operatorname{sen} \vartheta \\ y = \vartheta \cdot \cos \vartheta \end{cases}$



2) Identificar el lugar geométrico que representan las siguientes ecuaciones en \mathbb{R}^3 , donde $\alpha; \beta; \lambda; \mu; \vartheta; r; k \in \mathbb{R}$ ($\alpha; \beta; \lambda; \mu; \vartheta$ son parámetros y las demás ($r; k$) son constantes). Graficar.

2.a) $\begin{cases} x = r \cdot \cos \alpha \\ y = r \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ z = \beta \end{cases}$	2.b) $\begin{cases} x = 2 \cdot \cos \alpha \\ y = \beta \\ z = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$	2.c) $\begin{cases} x = 3 \cdot \cos \alpha \\ y = 3 \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ z = 0 \end{cases}$
2.d) $\begin{cases} x = 3 \cdot \cos \vartheta \\ y = \operatorname{sen} \vartheta \\ z = \mu \end{cases}$	2.e) $\begin{cases} x = r \cdot \cos \alpha \\ y = r \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ z = k \alpha \end{cases}$	2.f) $\begin{cases} x = \alpha / 10 \\ y = 2 \cdot \cos \alpha \\ z = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$
2.g) $\begin{cases} x = 3 \cdot \cos \alpha \\ y = 3 \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ z = \alpha / \pi \end{cases}$	2.h) $\begin{cases} x = 2 \cdot \cos \alpha \\ y = 3 \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ z = 3 \alpha \end{cases}$	2.i) $\begin{cases} x = 3 + \cos \alpha \\ y = 4 + \operatorname{sen} \alpha \\ z = (0,1) \cdot \alpha \end{cases}$
2.j) $\begin{cases} x = 2 \cdot \cos \alpha \\ y = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ z = \alpha^2 \end{cases}$	2.k) $\begin{cases} x = 2 \cdot \cos \alpha \\ y = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ z = \sqrt{\alpha} \end{cases}$	2.l) $\begin{cases} x = 2 \cdot \cos \alpha \\ y = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ z = 2^\alpha \end{cases}$
2.m) $\begin{cases} x = 2 \cdot \cos \alpha \\ y = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ z = 2 \end{cases}$	2.n) $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \cos \alpha \\ z = 0 \end{cases}$	2.ñ) $\begin{cases} x = \alpha \cdot \cos \alpha \\ y = \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$
2.o) $\begin{cases} x = \alpha \cdot \cos \alpha \\ y = \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ z = \alpha^2 \end{cases}$	2.p) $\begin{cases} x = \alpha \cdot \cos \alpha \\ y = \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ z = \sqrt{\alpha} \end{cases}$	2.q) $\begin{cases} x = \alpha \cdot \cos \alpha \\ y = \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ z = 0 \end{cases}$
2.r) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$	2.s) $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda + \mu \\ z = 0 \end{cases}$	2.t) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$
2.u) $\begin{cases} x = 2 \cdot \cos \alpha \\ y = 3 \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ z = \mu \end{cases}$	2.v) $\begin{cases} x = r \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ y = r \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \\ z = r \cdot \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$	2.w) $\begin{cases} x = -1 + \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ y = 2 + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta \\ z = 3 + \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$



3) Identificar el lugar geométrico que representan las siguientes ecuaciones en \mathbb{R}^3 , donde ϑ es el parámetro. Graficar.

3.a) $\begin{cases} x = 2 \cdot \cos \vartheta \\ y = 2 \cdot \sin \vartheta \end{cases}$	3.b) $\begin{cases} x = 3 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \\ y = 3 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \end{cases}$	3.c) $\begin{cases} x = 3 \cdot \cos \vartheta \\ y = 3 \cdot \cos \vartheta \end{cases}$
-------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------

4) ¿La ecuación
$$\begin{cases} x = \alpha \cdot \cos \alpha \\ y = \alpha \cdot \sin \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$
 es equivalente a $x^2 + y^2 = z^2$?

5) Calcular la longitud de una espira de
$$\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

6) Determinar el valor de k para que una espira de
$$\begin{cases} x = 3 \cdot \cos \alpha \\ y = 3 \cdot \sin \alpha \\ z = k\alpha \end{cases}$$
 mida 10π unidades.



RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1.a) Circunferencia de centro C (0; 0) y radio r	1.b) Circunferencia de centro C (0; 0) y radio r= 3	1.c) Punto P(0; 3)	1.d) Segmento de la recta r) y= x para $x \in [-3;3]$
1.e) Circunferencia de centro C (x ₀ ; y ₀) y radio r	1.f) Circunferencia de centro C (-2; 3) y radio r= 1	1.g) Segmento de la recta r) y=x+4 para $x \in [-2; 18]$	1.h) Elipse $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$
1.i) Elipse de ecuación $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	1.j) Espirales. Una para $\vartheta \geq 0$ y otra para $\vartheta \leq 0$	1.k) Especie de espirales. Una para $\vartheta \geq 0$ y otra para $\vartheta \leq 0$	1.l) Espirales. Una para $\vartheta \geq 0$ y otra para $\vartheta \leq 0$
1.m) Especie de espirales. Una para $\vartheta \geq 0$ y otra para $\vartheta \leq 0$	1.n) Parábola lg) y= x ²	1.ñ) Parábola lg) $x = \frac{3}{4} y^2$	1.o) Punto P(3; 2)
1.p) Rectas lg ₁) y= x v lg ₂) y= -x	1.q) Hipérbola lg) y= 1/x	1.r) Hipérbolas lg ₁) y= 5/x v lg ₂) y= -5/x	1.s) Espirales. Una para $\vartheta \geq 0$ y otra para $\vartheta \leq 0$.

2.a) Superficie cilíndrica recta circular de directriz paralela al plano xy (como por ejemplo $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ z = 0 \end{cases}$ y generatriz paralela al eje z	2.b) Superficie cilíndrica recta circular de directriz paralela al plano xz (como por ejemplo $\begin{cases} x^2 + z^2 = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ y generatriz paralela al eje y	2.c) Circunferencia contenida en el plano xy, de centro C(0; 0; 0) y radio r= $\sqrt{3}$
2.d) Superficie cilíndrica recta elíptica de directriz paralela al plano xy (como por ejemplo $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y generatriz paralela al eje z	2.e) Hélices: eje coincidente con el z; radio r; cada vuelta avanza $2\pi k$ unidades Habrá una hélice para $k \geq 0$ y otra para $k \leq 0$	2.f) Hélice: eje coincidente con el x; radio r= 2; cada vuelta avanza $\pi/5 \approx 0,6$ unidades
2.g) Hélice: eje coincidente con el z; radio r= 3; cada vuelta avanza 2 unidades	2.h) Especie de hélice. Curva inscrita en una superficie cilíndrica recta elíptica de directriz paralela al plano xy (como por ejemplo $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y generatriz paralela al eje z. Cada vuelta avanza 6π unidades	2.i) Hélice: el eje es la recta $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$; radio r= 1; cada vuelta avanza $\pi/5$ unidades
2.j) Especie de hélice. Curva inscrita en una superficie cilíndrica recta circular de directriz paralela al plano xy (como por ejemplo $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ y generatriz paralela al eje z	2.k) Especie de hélice. Curva inscrita en una superficie cilíndrica recta circular de directriz paralela al plano xy (como por ejemplo $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ y generatriz paralela al eje z	2.l) Especie de hélice. Curva inscrita en una superficie cilíndrica recta circular de directriz paralela al plano xy (como por ejemplo $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ y generatriz paralela al eje z



LA RECTA EN \mathbb{R}^2

EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) Determinar la ecuación de la recta con dirección $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y que pase por $P(2; 0)$. Graficar.

2) Determinar la ecuación de la recta que pasa por $P(5; 9)$ y es paralela al eje de ordenadas. Graficar.

3) Determinar el ángulo de inclinación de la recta dada en cada caso:

a) $y = x$ b) $y = -x$ c) $x - \sqrt{3}y = -2 \cdot \sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}x + y - 2 = 0$

4) Determinar las coordenadas de tres puntos de cada recta. Verificar:

a) $2x - 3y = 6$ b) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-1} = 7$ c) $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{-3}$ d) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3 \end{cases}$

5) En cada caso obtener (y graficar) la ecuación de la recta que contiene al punto $A(-1; -2)$ y cuya pendiente es:

a) $3/4$ b) $-4/5$ c) 2 d) 0 e) infinita.

6) Expresar en forma paramétrica y cartesiana. Hallar intersecciones con ejes coordenados. Hallar un vector normal \vec{n} y uno paralelo \vec{u} . Graficar.

a) $2x + 4y = 3$ b) $y = -\frac{2}{3}x - 2$ c) $\frac{x}{-1} + \frac{y}{5} = 1$.

7) En cada uno de los siguientes casos, determinar la ecuación de la recta que contiene los puntos dados y luego expresarla en forma paramétrica, general, explícita, simétrica y segmentaria:

a) $A(2;1); B(-3;2)$ b) $A(-1;0); B(0;-3)$

8) Graficar las rectas a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-1} = 7$ b) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3 \end{cases}$

9) Hallar la ecuación de la recta cuya abscisa al origen es 3 y cuya ordenada al origen es -2. Expresar en forma:

a) general, b) explícita y c) paramétrica. Graficar.

10) Demostrar que $r_1) 3x + 4y - 7 = 0$ y $r_2) 9x + 12y - 8 = 0$ son paralelas.

11) Demostrar que $r_1) x + 2y + 5 = 0$ y $r_2) 4x - 2y - 7 = 0$ son normales.



12) Determinar analíticamente los puntos de intersección. Verificar y graficar:

a) $r_1) \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$ y $r_2) x + y = 7$;

b) $r_3) \frac{x}{-1} + \frac{y}{3} = 1$ y $r_4) x + 5y = 3$

c) $r_5) 1 = y - 3x$ y $r_6) 2y = 6x + 2$;

d) $r_7) y = 3x + 1$ y $r_8) 2y - 6x - 6 = 0$

13) Determinar si las rectas $r_1) \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - t \end{cases}$ y $r_2) \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$ se interceptan o son paralelas. Hallar el punto de intersección o la distancia que las separa, según corresponda.

14) En cada inciso hallar la ecuación de la recta que cumple las condiciones enunciadas. Graficar:

a) Contiene al origen y es paralela a $2x - 3y = 4$.

b) Contiene a $P_1(3; 0)$ y es perpendicular a $2x + y - 5 = 0$.

c) Contiene a $P(1/4; -1/2)$ y es paralela a la recta que pasa por $A(-2; 1/4)$ y $B(1/2; 3)$.

d) Es perpendicular a $r_1) y = x - 1$, y que además pasa por el punto $A(5; y)$ perteneciente a $r_2) \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -\frac{1}{3}t \end{cases}$

e) Pasa por el punto de intersección de las rectas $r_1) x - 2y - 4 = 0$ y $r_2) 4x - y - 4 = 0$ y forma un ángulo de 45° con la recta de ecuación $r_3) 9x - 5y - 12 = 0$.

15) Determinar el valor de k para que la recta $r_1) k^2x + (k+1)y + 3 = 0$ sea perpendicular a la recta $r_2) 3x - 2y - 11 = 0$.

16) En el triángulo cuyos vértices son $A(-3; 2)$; $B(5; 6)$; $C(1; -4)$, encontrar las ecuaciones de las rectas a las que pertenecen:

a) Las medianas.

b) Las bisectrices.

c) Las alturas.

Hallar la superficie del triángulo.

17) Determinar la ecuación de la recta cuya pendiente es $m = -4$ y pasa por el punto de intersección de $r_1) 2x + y - 8 = 0$ y $r_2) 3x - 2y + 9 = 0$, sin hallar el punto de intersección. Verificar el resultado obtenido hallando el punto de intersección entre r_1 y r_2 .

18) En cada caso, determinar el/los valor/es de k para que la recta $r_1) \frac{x-2}{k} + \frac{y+1}{-4} = 0$:

a) Sea perpendicular a la $r_2) kx - 3y + 1 = 0$

b) Contenga al punto $P(2; 0)$

c) Contenga al $O(0; 0)$

d) Contenga al punto $P(0; -4)$



19) Calcular la distancia a) Desde $P(1;0)$ a la recta $r_1) \frac{x}{2} - \frac{y}{1} = 2$; b) Entre las rectas $r_1) y = -3x + 1$ y $r_2) y + 3x - 4 = 0$; c) Desde el origen de coordenadas a la recta $r_1) 5x - y = 10$.

20) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas:

a) $3x - y + 2 = 0$; $2x + y - 2 = 0$

b) $y = 2x + 5$; $2x - y = 1$

c) $y = -x$; $x - y = 0$

21) Determinar la ecuación de la recta que contiene a $P(-1; -2)$ y forma 135° con la $y = 0$.

22) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $r_1) 6x - 2y + 8 = 0$ y $r_2) 4x - 6y + 3 = 0$ y es perpendicular a $r) 5x + 2y + 6 = 0$, sin hallar el punto de intersección. Verificar el resultado obtenido hallando el punto de intersección entre r_1 y r_2 .

23) Desde el punto $P_1(2; -3)$ se traza una perpendicular a la recta $3x - 4y + 6 = 0$. ¿A qué distancia se halla dicha perpendicular del punto $P(0; 8)$?

24) Sin hallar su punto de intersección, demostrar que las tres rectas son concurrentes. Graficar.

$r_1) 3x + 4y + 14 = 0$; $r_2) 2x - y - 9 = 0$; $r_3) 7x + 3y + 1 = 0$

Verificar el resultado obtenido hallando el punto de intersección entre r_1 ; r_2 y r_3 .

25) Determinar el valor de la constante k para que las tres rectas sean concurrentes. Graficar.

$r_1) 8x + 3y - 1 = 0$; $r_2) 3x + ky - 3 = 0$; $r_3) x - 5y + 16 = 0$

26) ¿Las ecuaciones:

$\alpha(-2x + 3y - 2) + \beta(3x - y + 1) = 0$ con $\alpha \in \mathbb{R}; \beta \in \mathbb{R}$ y $-2x + 3y - 2 + \mu(3x - y + 1) = 0$ con $\mu \in \mathbb{R}$ representan gráficamente los mismos lugares geométricos?. Justificar.

27) Los lados del triángulo ABC están contenidos en las rectas de ecuaciones $r_1) x + y - 1 = 0$, $r_2) x - y + k_1 = 0$; $r_3) k_2x - y + 2 = 0$. Si $\overline{AB} \in r_1$; $\overline{BC} \in r_2$; $\overline{AC} \in r_3$ y el vértice C está dado mediante su vector posición $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Determinar las ecuaciones de las rectas r_2 y r_3 . Graficar.

28) Una recta pasa por el punto $A(-2; 3)$ y por la intersección de las rectas:

$r_1) x + 5y + 2 = 0$ y $r_2) 3x + 4y - 5 = 0$

Determinar su ecuación sin hallar la intersección de r_1 y r_2 . Graficar. Verificar el resultado obtenido hallando el punto de intersección entre r_1 y r_2 .



29) Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección de:

$$lg_1) x^2 + y^2 - 10x + 7y + 31 = 0; \quad lg_2) x^2 + y^2 - 6x - y + 3 = 0.$$

Nota: El lugar geométrico a hallar también es conocido con el nombre de eje de potencia.

30) A una reunión asisten 20 personas y se recaudan \$ 104.- Calcular la cantidad de hombres y mujeres, si los hombres pagan \$ 6 c/u y las mujeres \$ 3 c/u. Graficar e interpretar el resultado obtenido.

31) A una reunión asisten 20 personas y se recaudan \$ 105.- Calcular la cantidad de hombres y mujeres, si los hombres pagan \$ 6 c/u y las mujeres \$ 3 c/u. Graficar e interpretar el resultado obtenido.

32) En una reciente competición de precios, la compañía de alquiler de automóviles B elimina el cobro inicial por alquilar un automóvil, pero aumenta el costo por kilometraje a \$0,30 el kilómetro. Para poder competir la compañía A reduce su tarifa inicial a \$ 15 y aumenta el costo por kilometraje a \$0,20 el kilómetro. ¿Cuál compañía mas conveniente? Realizar gráfica de análisis.

33) Dos líneas aéreas ofrecen las siguientes promociones

PROMOCIÓN ANUAL Ud. gana volando por A LINE	¡Este año B LINE premia A TODOS SUS CLIENTES!
El costo de su pasaje le acreditará automáticamente el 75% de su valor en millas. Así, si el 75% de su pasaje es de \$300, se le acreditarán 300 millas. Cuando Ud. lo desee, podrá canjear (total o parcialmente) su puntaje actual por un pasaje cuyo destino resulte, en millas, menor o igual que la cifra acumulada.	Al comprar su primer pasaje, usted gana 500 millas, y además, le sumaremos una cantidad de millas igual a la mitad del costo de todos los pasajes que compre durante la promoción.

El señor RR es cliente de la compañía A Line y MM es cliente de la B Line. RR le propone a MM que cambie de compañía, ya que ambos programan la realización de un viaje juntos. Pero MM le asegura que no le conviene la promoción de la A Line. Interpretar el problema y obtener conclusiones.

34) La compañía Zuco está planeando producir pizzas cuadradas. Los gastos fijos diarios son de \$100. Para hacer cada pizza le cuesta \$2. Las venderá a \$5 cada una.

- ¿Cuánto gana en un día con la venta de 50 pizzas?
- ¿Cuántas pizzas deberán vender en un día para tener una ganancia de \$100?
- ¿Qué cantidad mínima de pizzas deberán ser vendidas en un día para no obtener pérdidas?



RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4t \end{cases}$; $y = -4x + 8$	2) $x = 5$
3.a) 45° ; 3.b) 135° ; 3.c) 30° ; 3.d) 60°	5.a) $3x - 4y - 5 = 0$; 5.b) $4x + 5y + 14 = 0$; 5.c) $y = 2x$; 5.d) $y = -2$; 5.e) $x = -1$
6.a) $\begin{cases} y = t \\ x = \frac{3}{2} - 2t \end{cases}$; $\frac{x - 3/2}{-2} = y$;	7.a) $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + t \end{cases}$; $x + 5y - 7 = 0$; $y = -\frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$; $\frac{x}{7} + \frac{y}{7/5} = 1$
6.b) $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{2}{3}t - 2 \end{cases}$; $x = \frac{y + 2}{-2/3}$	7.b) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3t \end{cases}$; $3x + y + 3 = 0$; $y = -3x - 3$; $\frac{x}{-1} + \frac{y}{-3} = 1$
6.c) $\begin{cases} x = -\frac{1}{5}t \\ y = 5 - t \end{cases}$; $x = \frac{y - 5}{5}$	
9.a) $-2x + 3y + 6 = 0$; 9.b) $y = \frac{2}{3}x - 2$; 9.c) $\begin{cases} x = 3t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$	12.a) $P_1(11/2; 3/2)$; 12.b) $P_2(-3/4; 3/4)$; 12.c) <i>rectas coincidentes</i> ; 12.d) \overline{AP}_4 (<i>rectas paralelas</i>)
13) $d(r_1; r_2) = \sqrt{2}$	14.a) $2x - 3y = 0$; 14.b) $x - 2y - 3 = 0$; 14.c) $44x - 40y - 31 = 0$; 14.d) $x + y - 4 = 0$; 14.e) $49y - 14x + 92 = 0$; $14y + 49x - 4 = 0$
15) $k_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$; $k_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}$	16.a) $x + 6y - 9 = 0$; $x = 1$; $7x - 6y + 1 = 0$; 16.b) $2x + y + 2 = 0$; $2x - 3y + 8 = 0$; $2x + 5y - 4 = 0$; $S = 32$
17) $y + 4x - 10 = 0$	18) a) $\pm 2\sqrt{3}$; b) ϕ ; c) -8 ; d) $-8/5$
19.a) $d = \frac{3}{5}\sqrt{5}$; 19.b) $d = \frac{(3/10)\sqrt{10}}$; 19.c) $d = \frac{5}{13}\sqrt{26}$;	20 a) $45^\circ, 135^\circ$; 20.b) 0° ; 20.c) 90°
21) $r_1 \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 + t \end{cases}$; $r_2 \begin{cases} x = -1 - t \\ y = -2 + t \end{cases}$	22) $4x - 10y + 1 = 0$; $P(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$
23) $d = 5$	25) $k = 2$
26) <i>No, la segunda ecuación nunca representará la recta $3x - y + 1 = 0$</i>	27) $r_2) x - y + 1 = 0$; $r_3) y - 2 = 0$
28) $4x + 5y - 7 = 0$	29) $2y - x + 7 = 0$
30) \emptyset	31) $15; 5$

Bibliografía Consultada:

- * Cálculo y Geometría Analítica - Tomo 1 - (R. Larson - R. Hostetler - B. Edwards)
- * Geometría Analítica - (C. Lehmann)

El contenido del presente tema ha sido recopilado o desarrollado por el Ing. Roberto Vignolo, y transcrito por éste y por el Sr. Walter Cusit.



LA RECTA EN \mathbb{R}^3

EJERCITACIÓN PROPUESTA:

- 1) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0; 1; 2)$ y es paralela al vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.
- 2) Determinar la ecuación de la recta que contiene los puntos $A(2; -3; 1)$ y $B(0; 1; -1)$. Expresarla en forma a) Vectorial; b) Paramétrica; c) simétrica; d) General.
- 3) Determinar analíticamente la ecuación de la recta que pasa por $P(2; -1; 3)$ y es paralela al eje x . Graficar. Determinar además, las ecuaciones correspondientes a tres planos proyectantes.
- 4) Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(3; -3; 4)$ y además es perpendicular a las rectas $r_1) \frac{2x+4}{4} = \frac{y-3}{-1} = z$ y $r_2) x-3 = \frac{2y-3}{2} = -z$.
- 5) Determinar la ecuación de la recta que contiene a $P(0; 1; -3)$ y es paralela a $r) \begin{cases} x = 3-t \\ y = 2+3t \\ z = 1-2t \end{cases}$.
- 6) Determinar la ecuación de la recta que contiene al origen y es paralela a $r) \frac{x-1}{-2} = z-3 = \frac{y+2}{-1}$.
- 7) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1; -2; -3)$ y es perpendicular al plano $\pi) x - 3y + 2z + 4 = 0$.
- 8) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1; 4; -2)$ y es paralela a los planos $\pi_1) 6x + 2y + 2z + 3 = 0$ y $\pi_2) 3x - 5y - 2z - 1 = 0$.
- 9) Dada la recta $r) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$, determinar:
- Planos proyectantes.
 - Puntos de penetración.
 - Ecuación de la recta en forma canónica.
- 10) Dada la siguiente ecuación $r) \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -3 \\ z = -4t \end{cases}$
- Expresarla en forma vectorial, simétrica, general.
 - Determinar las coordenadas de dos puntos pertenecientes a r .
 - Hallar las componentes de dos vectores dirección.
 - Determinar las ecuaciones de los planos proyectantes.
 - Hallar los puntos de penetración.



11) Hallar la ecuación de la recta situada en el plano $\pi) x + 3y - z + 4 = 0$ y que es perpendicular a la recta $r_1) \begin{cases} x - 3z = 3 \\ y = 2z \end{cases}$ en el punto en que ésta corta al plano dado.

12) Calcular la distancia entre el punto $P(1; 0; -1)$ y la recta $r) \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-3}$.

13) Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y la recta $r) \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$.

14) Calcular la distancia entre $r_1) \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{-3}$ y $r_2) \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-2}{4}$.

15) Determinar el ángulo que forman las rectas $r_1) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$ y $r_2) \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$.

16) Determinar el ángulo que forman la recta $r) \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ con el plano $\pi) z - x + 3y = 0$.

17) Determinar el ángulo agudo que forma la recta que pasa por los puntos $A(3; 4; 2)$ y $B(2; 3; -1)$ con la que une $C(1; -2; 3)$ y $D(-2; -3; 1)$.

18) Determinar el ángulo entre la recta intersección de $\pi_1) 3x + 4y = 12$ y $\pi_2) 2x + z = 2$ con la normal al plano $\pi_3) x + y + 2z = 2$.

19) Determinar el ángulo entre la recta intersección de los planos $\pi_1) 3x + y + 3z = -5$ con $\pi_2) x - y + z = 2$ y la recta intersección de $\pi_3) 8x - y + 7z = 3$ con $\pi_4) x - y + z = 2$.

20) Verificar que la recta $r_1) \begin{cases} x = \frac{2}{7}z + \frac{15}{7} \\ y = -\frac{5}{7}z - \frac{34}{7} \end{cases}$ es perpendicular a la recta $r_2) \begin{cases} x - y - z - 7 = 0 \\ 3x - 4y - 11 = 0 \end{cases}$.

21) Verificar que las rectas $r_1) \frac{x-1}{2} = y-4 = \frac{z-5}{2}$ y $r_2) \frac{x-2}{-1} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-11}{4}$ son coplanares. Determinar la ecuación del plano al que pertenecen y el punto de intersección entre ambas.

22) Verificar que las rectas $r_1) \begin{cases} x - 2y + 2z - 4 = 0 \\ x + 4y + 8z + 8 = 0 \end{cases}$ y $r_2) \begin{cases} x + y + 5z - 5 = 0 \\ x + 8y + 12z - 12 = 0 \end{cases}$ son paralelas. Determinar la ecuación del plano al que pertenecen.



- 23) Demostrar que la recta $r) \begin{cases} 5x - 2y + 3z = 5 \\ x + 4y + 5z = -15 \end{cases}$ es paralela al plano $\pi) x + y + 2z = 4$. Determinar la distancia entre estos lg.
- 24) Demostrar que la recta $r) \begin{cases} 5x - 2y + 3z = 5 \\ x + 4y + 5z = -15 \end{cases}$ es perpendicular al plano $\pi) x + y - z = 7$.
- 25) Determinar la ecuación del plano que contiene al punto $P(0; 1; 0)$ y a la recta $r) \begin{cases} 4x + 3y + 2z = 4 \\ 2x - 11y - 4z = 12 \end{cases}$
- 26) Calcular la longitud del segmento determinado por las intersecciones de la recta $r) \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 3y + x + z = 1 \end{cases}$ con los planos xy y xz .
- 27) Dada la recta $r) \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{-z+2}{-1}$, calcular la distancia de su punto de penetración con el plano yz , al plano $\pi) 3x + 2y - z - 1 = 0$.
- 28) Determinar el punto de intersección de la recta $r) \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = -\frac{z}{4}$ con el plano $\pi) 3x + y - z = -1$. Resolverlo mediante las formas general y paramétrica.
- 29) Determinar si las rectas $r_1) \frac{x}{1} = \frac{4-y}{3} = \frac{4-z}{3}$; $r_2) x-1 = \frac{y+1}{5} = z$ se interceptan o no. Hallar el punto de intersección o la distancia que las separa, según corresponda.
- 30) Determinar la ecuación del plano que pasa por la recta intersección de los planos $\pi_1) x - y + 2z + 4 = 0$ y $\pi_2) 2x + y + 3z - 9 = 0$ y es paralelo a la recta cuyos números directores son $[1; 3; -1]$.
- 31) Dada la recta $r) \frac{x-2}{6} = \frac{3y+1}{-6} = \frac{1-z}{3}$ y el plano $\pi) 2x - 3y + 6z = -3$, determinar, si existe, el punto de intersección. Caso contrario, la distancia entre la recta y el plano.
- 32) Demostrar que la recta $r) \begin{cases} 5x - 2y + 3z = 5 \\ x + 4y + 5z = -15 \end{cases}$ está en el plano $\pi) 2x - 3y - z = 10$.
- 33) Determinar la ecuación del plano que pasa por la recta intersección de los planos $\pi_1) 2x - y + 3z = 2$ y $\pi_2) 2x + 3y - z = 2$ y es perpendicular al plano $\pi_3) 3x - 4y - 2z = 9$.
- 34) a) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$, es perpendicular al eje x , y además lo corta.
b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 2, 3)$ y $O(0, 0, 0)$.
c) Hallar la ecuación del plano determinado por ambas rectas.



- 35) Determinar la ecuación de la recta de ángulos directores: $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 45^\circ$ y contiene al punto P (1; 2; 3).
- 36) Determinar y describir el lg mas amplio que representa $xy = 0$ en \mathbb{R}^3 . Graficar
- 37) Determinar y describir el lg mas amplio que representa $xyz = 0$ en \mathbb{R}^3 . Graficar
- 38) Determinar y describir el lg que representa $4z^2 - 16 = 0$ en \mathbb{R}^3 . Graficar.
- 39) Determinar y describir el lg mas amplio que representa $xy - y^2 = 0$ en \mathbb{R}^3 . Graficar
- 40) Determinar y describir el lg mas amplio que representa $x^2 - z^2 = 0$ en \mathbb{R}^3 . Graficar.
- 41) Determinar y describir el lg mas amplio que representa $\begin{cases} y = x \\ z = 4 \end{cases}$ en \mathbb{R}^3 . Graficar.
- 42) Obtener la ecuación correspondiente al lugar geométrico de los puntos de \mathbb{R}^3 que cumplen simultáneamente las siguientes condiciones: a) El valor de la abscisa es opuesto al de la ordenada; b) La cota se mantiene constantemente igual a 4. Graficar.
- 43) Obtener dos puntos pertenecientes a la recta r) $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ -x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$



RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) $\frac{x}{3} = y - 1 = \frac{z - 2}{5}$;

2.a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; 2.b) $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$; 2.c) $x = \frac{y - 1}{-2} = z + 1$; 2.d) $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 + t \\ z = 4 + t \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + 3t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$; 6) $\frac{x}{-2} = \frac{y}{-1} = z$;

7) $x - 1 = \frac{y + 2}{-3} = \frac{z + 3}{2}$; 8) $x - 1 = \frac{y - 4}{3} = \frac{z + 2}{-6}$;

9.a) $\pi_{xy} : 5x + 2y - 1 = 0$; $\pi_{xz} : 3x + 2z + 1 = 0$; $\pi_{yz} : 3y - 5z - 4 = 0$

9.b) $P_1(-1/3; 4/3; 0)$; $P_2(1/5; 0; -4/5)$; $P_3(0; 1/2; -1/2)$; 9.c) $\frac{x - 1/5}{-2/5} = y = \frac{z + 4/5}{3/5}$

10.a.1) $\vec{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} t$ (Ec. Vectorial); 10.a.2) No se puede expresar en forma simétrica;

10.a.3) $\begin{cases} x + \frac{5}{4}z - 2 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ (Ec. General); 10.d) $\pi_{xy} : y = -3$; $\pi_{xz} : x + 5/4 z - 2 = 0$; $\pi_{yz} : y = -3$

10.e) $r \cap \text{pl } xy (z = 0) \Rightarrow P(2; -3; 0)$; $r \cap \text{pl } yz (x = 0) \Rightarrow Q(0; -3; 8/5)$; $r \cap \text{pl } xz (y = 0) \Rightarrow \bar{A}$

11) r) $\frac{x - 3/8}{-5} = \frac{y + 7/4}{4} = \frac{z + 7/8}{7}$; 12) $d = \sqrt{6/7}$; 13) $d = \frac{5}{26} \cdot \sqrt{26}$; 14) $d = \frac{3}{89} \cdot \sqrt{89}$;

15) $\theta_1 = 60^\circ$; $\theta_2 = 120^\circ$; 16) $\theta = 58^\circ 31'$; 17) $\theta = 36^\circ 18' 36,7''$; 18) $\theta = 130^\circ 28' 30'' \vee 49^\circ 31' 30''$;

19) $\theta = 7^\circ 35' 20''$; 21) $\pi) 2x + 10y - 7z - 7 = 0$; 22) $\pi) 3x - 4y + 8z - 8 = 0$; 23) $d = \frac{89}{66} \cdot \sqrt{6}$;

25) $\pi) 9x + 8y + 5z - 8 = 0$; 6) $l = \sqrt{27/2}$; 27) $d = \frac{13}{28} \cdot \sqrt{14}$; 28) $P(-8/3; 13/3; -8/3)$;

29) $P(5/4; 1/4; 1/4)$; 30) $\pi) 5x + y + 8z - 14 = 0$; 31) $d(r; \pi) = 2$; 33) $2x + y + z = 2$;

34.a) $\begin{cases} x = 1 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$; 34.b) $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$; 34.c) $\pi) 3y - 2z = 0$; 35) $x - 1 = \frac{y - 2}{\sqrt{2}} = \pm(z - 3)$;

36) $x = 0 \cup y = 0$; 37) plano $xy \vee$ plano $xz \vee$ plano yz ;

38) Pl. paralelo al xy que corta al eje z en $z = 2$ \cup pl. paralelo al xy que corta al eje z en $z = -2$;

39) $x = y \vee y = 0$; 40) $x = z \vee x = -z$; 42) $\begin{cases} y = -x \\ z = 4 \end{cases}$

Bibliografía Consultada:

* Geometría Analítica - (C. Lehmann)

El contenido del presente tema ha sido recopilado o desarrollado por el Ing. Roberto Vignolo, y transcrito por éste y por el Sr. Walter Cusit.



CURVAS DE SEGUNDO GRADO

EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) Determinar y graficar la ecuación de la circunferencia que:

- Tiene centro $C(-3; 1/2)$ y radio $r = \sqrt{7}$;
- Tiene centro $C(7; -6)$ y contiene al punto $A(2; 2)$;
- Tiene centro en el eje x , y pasa por $A(1; 3)$ y $B(4; 6)$;
- Tiene centro $C(0; -2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$;
- Pasa por el punto $A(1; 2)$ y en el origen de coordenadas es tangente al eje x .

2) Determinar la longitud del segmento tangente trazado desde el punto $A(-3; 5)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 = 18$. Verificar.

3) Determinar la posición relativa entre las circunferencias: $lg_1) x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$ y $lg_2) x^2 + y^2 - 6x - 12y + 41 = 0$. Graficar.

4) Determinar el valor de k para que el punto $A(-2; k)$ sea interior a la circunferencia: $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 17$. Verificar. Graficar.

5) ¿Qué valores deberá tomar x de los puntos $A(x; y)$ pertenecientes a la recta $y = -x + 1$, que sean exteriores a la circunferencia $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 17$? Graficar. Verificar.

6) Determinar los puntos de intersección (si es que existen) de las circunferencias:
 $x^2 + y^2 - 10x + 7y + 31 = 0$ y $x^2 + y^2 - 6x - y + 3 = 0$. Verificar. Graficar.

7) Individualizar el lg que representa en \mathcal{R}^2 : $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$

8) Determinar la ecuación de la parábola, los elementos principales y graficar cada caso, si:

- Está situada en el semiplano inferior, es simétrica respecto al eje y ; $lr = 1$; $V(0; 0)$;
- Su vértice es $V(4; -1)$; eje focal $y + 1 = 0$; $A(3; -3) \in lg$;
- Su foco es $F(3; 4)$ y directriz: $x - 1 = 0$;
- Su vértice es $V(2; 0)$; foco $F(0; 0)$;
- Su vértice es $V(0; 0)$; directriz $d: y - 3 = 0$.

9) De la ecuación de la parábola: $y + (1/3)x^2 = 0$, determinar las coordenadas del vértice y foco; las ecuaciones del eje y directriz; graficar.

10) ¿Para qué valores de m , habrá contacto entre la recta $y = mx + 2$ y la parábola $y^2 = 4x$? Graficar.

11) Dada la parábola $y^2 = 9x$ determinar las ecuaciones de las rectas paralelas a $y = 2x + 4$ que:

- No corten a la parábola. Graficar
- Sean tangentes a la parábola - Hallar puntos de tangencia. Graficar



- 12) Hallar puntos de tangencia entre la recta $y = mx + 2$ y la parábola $y^2 = 4x$. Graficar.
- 13) Hallar:
- Las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(-3; 3)$ a la parábola $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$,
 - Los puntos de tangencia,
 - El ángulo formado por dichas tangentes,
 - Las ecuaciones de las rectas normales a la parábola en los puntos de tangencia hallados en b),
 - Graficar.
- 14) Determinar la ecuación de la elipse, los elementos principales y graficar cada caso, si:
- Dos de sus vértices son $V(0; \sqrt{7})$ y $V'(0; -\sqrt{7})$; focos $F_1(3; 0)$ y $F_2(-3; 0)$;
 - Sus focos son $F_1(2; 0)$ y $F_2(-2; 0)$ y excentricidad $e = 2/3$;
 - Un vértice secundario es $V(3; -1)$; focos ubicados en $r) y + 6 = 0$ y $e = \sqrt{2}/2$;
 - La distancia entre focos es $2c = 4$; excentricidad $e = 2/5$ y centro $C(0; 0)$;
 - Su eje focal coincide con el eje x ; pasa por los puntos $A(2; 3)$ y $B(1; 3\sqrt{5}/2)$; su centro es $C(0; 0)$;
 - Su centro es $C(0; 0)$; eje focal coincidente con el eje y ; razón entre las longitudes de ejes menor y mayor $1:2$ y pasa por el punto $A(\sqrt{7}/2; 3)$;
 - Uno de sus vértices es $V(0; -7)$; centro $C(0; 0)$ y pasa por el punto $P(\sqrt{5}; 14/3)$.
- 15) Si $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 9 = 0$ es la ecuación representativa de una elipse, determinar sus principales elementos característicos.
- 16) La ecuación representativa de una familia de elipses es: $kx^2 + 4y^2 + 6x - 8y = 5$. Hallar las ecuaciones de las elipses de esa familia que tienen $e = 1/2$. Graficar.
- 17) Hallar la ecuación de la familia de elipses que tiene: centro $C(2; 3)$, eje focal paralelo al eje x ; $e = 1/2$. Graficar.
- 18) ¿Para qué valores de h , la recta $y = -x + h$:
- No corta a la elipse $x^2/20 + y^2/5 = 1$?
 - Es tangente a ella?. Determinar el o los puntos de tangencia.
- 19) Determinar la ecuación de la hipérbola, los elementos principales y graficar cada caso, si:
- La distancia entre vértices $|V_1V_2| = 2$ y asíntotas: $y_1 = 3x$; $y_2 = -3x$;
 - Sus focos están ubicados en el eje de abscisas; centro $C(0; 0)$ y pasa por los puntos $A(6; -1)$ y $B(-8; 2\sqrt{2})$;
 - Sus focos están ubicados en el eje de abscisas; asíntotas: $y_1 = 2/3x$; $y_2 = -2/3x$ y pasa por el punto $A(9/2; -1)$;
 - Sus vértices son $V_1(-1; 3)$; $V_2(3; 3)$ y excentricidad $e = 3/2$;
 - Su centro es $C(4; 5)$; excentricidad $e = 2$ y uno de sus focos es $F(8; 5)$;
 - Su centro es $C(0; 0)$; eje transversal contenido en el eje y ; longitud de lado recto $lr = 2/3$ y que pasa por el punto $A(-1; 2)$;
 - Sus focos se encuentran en el eje de abscisas; distancia interfocal $= 20$ y asíntotas: $y_1 = 4/3x$; $y_2 = -4/3x$;
 - Sus focos se encuentran en el eje de abscisas; centro $C(0; 0)$; excentricidad $e = \sqrt{2}$ y pasa por el punto $A(-5; 3)$;
 - Su eje focal es paralelo al eje de abscisas; pasa por el punto $A(4; 6)$ y asíntotas: $2x + y - 3 = 0$; $2x - y - 1 = 0$;
 - Sus vértices son $V_1(0; 3)$; $V_2(0; -3)$ y la longitud del lado recto es $lr = 6$.
- 20) ¿Para qué valores de h , la recta $y = 5/2x + h$:
- corta a la hipérbola $x^2/9 - y^2/36 = 1$?
 - es tangente a ella?. Determinar los puntos de tangencia.
 - Graficar.



21) Analizar, determinar y graficar el lugar geométrico que representa cada ecuación, en \mathbb{R}^2 :

- a) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 = 0$;
- b) $x^2 + 2x + y^2 + 3 = 0$;
- c) $x^2 + 2x + 1 = 0$;
- d) $4x^2 + 12xy + 9y^2 = 0$;
- e) $36x^2 + 36y^2 + 48x - 108y + 97 = 0$;
- f) $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$;
- g) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 29 = 0$;
- h) $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$;
- i) $3y^2 - x^2 - 10x - 22 = 0$;
- j) $xy = 1$;
- k) $y^2 \cdot x^2 = 25$;
- l) $4y^2 - 48x - 20y = 71$.
- m) $3x^2 + 4y^2 - 12x - 24y + 36 = 0$.

22) Una escalera de longitud L está, en su estado inicial, apoyada totalmente a una pared vertical. Su extremo inferior está situado en el suelo. La pared y el suelo forman un ángulo recto.

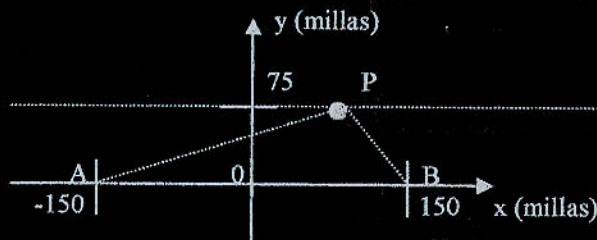
- a) ¿Cuál es la figura que describe el extremo superior de la escalera, al resbalar y caer ésta?;
- b) ¿Y el punto medio de ésta?;
- c) ¿Y un punto cualquiera de la escalera?.



23) Un rifle, situado en $(-c, 0)$ dispara sobre un blanco colocado en $(c, 0)$. Una persona oye el sonido del disparo y el del impacto simultáneamente. Probar que esa persona está situada en una rama de la hipérbola.

$$\frac{x^2}{c^2 v_s^2 / v_m^2} - \frac{y^2}{c^2 (v_m^2 - v_s^2) / v_m^2} = 1, \text{ donde } v_m \text{ es la velocidad de la bala y } v_s \text{ es la velocidad del sonido.}$$

24) En el sistema de radionavegación LORAN (LONG RADIO NAVIGATION), dos estaciones de radio o radiobalizas situadas en A y en B, simultáneamente emiten sendas señales. La computadora de a bordo de un barco situado en P recibe la señal de B 1000 microsegundos (μs) antes que la de A. Supongamos que las estaciones están situadas en los puntos de coordenadas cartesianas A $(-150, 0)$ y B $(150, 0)$, y que el barco está recorriendo una trayectoria de coordenadas $(x, 75)$. Las señales viajan a la velocidad de la luz (186000 millas/s). Hallar la coordenada x de la posición del barco.





25) Un guardabosque (R) se encuentra varado dentro de un camino boscoso que corre paralelo a una carretera, a 2 millas de ella. Hay dos vehículos de rescate (F_1 y F_2) en la carretera, estacionados 3 millas de distancia entre sí. El guardabosque activa una señal de explosión (señal de emergencia) y el sonido llega al vehículo de rescate A (que está al norte) 3 segundos antes que al B. Determinar la ubicación del explorador respecto de los vehículos de rescate. La velocidad del sonido es de 1100 pies por segundo (1 milla = 5280 pies).

26). Dos micrófonos (A y B), separados 1 milla, graban una explosión E. El sonido llegó al micrófono A 2 segundos antes que al B. ¿Dónde ocurrió la explosión?. (Velocidad del sonido $V_s = 1100$ pies/seg.)

27) Los planetas se mueven alrededor del sol en órbitas elípticas, con el sol en uno de los focos. Las posiciones de un planeta, cuando está más cerca y más lejos del sol, se llaman *perihelio* y *afelio*, respectivamente. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse que describe la tierra es de $1,485 \cdot 10^8$ km y que la excentricidad es aproximadamente $1/62$, halla la máxima y la mínima distancia de la tierra al Sol.

28) Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de la tierra de tal modo que el centro de ésta es uno de los focos. El punto más alejado del satélite a la superficie terrestre está a 2500 millas, y el más cercano está a 1000 millas. Estas distancias se miden a lo largo del eje mayor, que se supone está en el eje y. Suponiendo que el radio de la tierra es de 4000 millas, deducir la ecuación de la órbita.

29) El ojo de un puente para paso inferior de una carretera de dos carriles tiene la forma de media elipse. El arco elíptico salva 50 m, que es la longitud del eje mayor, y la altura en el centro es de 20 m. Las orillas de los carriles están a 10 m de las bases del puente. ¿Cuál es la altura salvada sobre estas líneas?

30) El cable central de un puente colgante forma un arco parabólico (catenaria). El cable está colgado de los extremos superiores de dos torres separadas 80 m entre sí. Esos extremos están a 17 m por sobre la carretera (tablero del puente) y el punto inferior del cable está a 1 m sobre la carretera. Calcular la longitud del cable paralelo a una de las torres, ubicado a 10 m de ésta.

31) Halla la altura de un punto de un arco parabólico de 18 m de altura y 24 m de base, situado a 8 m del centro del arco.

32) Se desea construir una elipse de 4 m de diámetro menor. El constructor utiliza, para marcar su forma, una cuerda de 5 m de largo. ¿Dónde debe clavar los extremos de la cuerda?

33) Un señor tiene dos tortugas (A y B) en el punto de partida de una carrera. Se dispone a cronometrar a sus animalitos desde el mismo instante en que éstas comienzan a desplazarse. La siguiente tabla indica los valores obtenidos:

Tiempo (min)	Tortuga A	Tortuga B
	Recorrido (m)	Recorrido (m)
0	0	0
1	1	6
2	4	12
3	9	18

Al llegar a esta instancia (3 min) el señor se ausentó del lugar porque tuvo que atender una llamada telefónica. Al regresar, las dos tortugas habían llegado a la meta ubicada a 40 m de la largada.

Suponiendo que las mascotas llevaron el mismo ritmo durante toda la carrera, ¿Cuál de las dos habrá sido la vencedora?



RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1.a) $(x+3)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = 7$; 1.b) $(x-7)^2 + (y+6)^2 = 89$; 1.c) $(x-7)^2 + y^2 = 45$; 1.d) $x^2 + (y+2)^2 = 4$;

1.e) $x^2 + (y-\frac{5}{4})^2 = 25/16$; 2) $L = 4$; 3) \lg_2 es interior a \lg_1 ; 4) $k \in (-3; 5)$; 5) $x < -4 \vee x > 1$;

6) $P_1(5; -1)$; $P_2(3; -2)$; 7) Circunferencia de $C(5/2; -3/2)$ y radio $r=4$; 8.a) $x^2 = -y$;

8.b) $(y+1)^2 = -4(x-4)$; $lr=4$; directriz (d): $x=5$; 8.c) $(y-4)^2 = 4(x-2)$; eje: $y=4$; $lr=4$;

8.d) $y^2 = -8(x-2)$; d) $x=4$; $lr=8$; 8.e) $x^2 = -12y$; ef) $x=0$; $lr=12$;

9) $V(0; 0)$; $F(0; -3/4)$; directriz (d): $y=3/4$; eje: $x=0$; 10) $-\infty < m \leq 1/2$;

11.a) $y=2x+b$ / $b > 9/8$; 11.b) $y=2x+9/8$; $P(9/16; 9/4)$

12) $P_1(4; 4)$; $P_2(0; 0)$; 13.a) $y_1 = 3/2 x + 15/2$; $y_2 = -1/2 x + 3/2$; 13.b) $P_1(1; 1)$; $P_2(-5/3; 5)$;

13.c) $\theta_1 = 82^\circ 53'$; $\theta_2 = 97^\circ 7'$; 13.d) $y_{N1} = 2x - 1$; $y_{N2} = -2/3 x + 35/9$;

14.a) $x^2/16 + y^2/7 = 1$; $V_1(4; 0)$; $V_2(-4; 0)$; $e = 3/4$;

14.b) $x^2/9 + y^2/5 = 1$; $V_1(-3; 0)$; $V_2(3; 0)$; $V_3(0; \sqrt{5})$; $V_4(0; -\sqrt{5})$;

14.c) $(x-3)^2/50 + (y+6)^2/25 = 1$; $C(3; -6)$; $V_1(3; -1)$; $V_2(3; -11)$; $V_3(3+5\sqrt{2}; -6)$; $V_4(3-5\sqrt{2}; -6)$;

$F_1(8; -6)$; $F_2(-2; -6)$; $lr = 5\sqrt{2}$

14.d.1) $x^2/25 + y^2/21 = 1$; $V_1(-5; 0)$; $V_3(5; 0)$; $V_2(0; \sqrt{21})$; $V_4(0; -\sqrt{21})$

14.d.2) $x^2/21 + y^2/25 = 1$; $V_1(0; -5)$; $V_2(0; 5)$; $V_3(\sqrt{21}; 0)$; $V_4(-\sqrt{21}; 0)$

14.e) $x^2/16 + y^2/12 = 1$; $V_1(4; 0)$; $V_2(-4; 0)$; $V_3(0; 2\sqrt{3})$; $V_4(0; -2\sqrt{3})$; $F_1(2; 0)$; $F_2(-2; 0)$;

14.f) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$; $lr=2$; $V_1(0; 4)$; $V_2(0; -4)$; $V_3(2; 0)$; $V_4(-2; 0)$; $F_1(0; 2\sqrt{3})$; $F_2(0; -2\sqrt{3})$

14.g) Opción 1 (considerando a V como vértice principal): $\lg \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$;

$V_1(0; 7)$; $V_2(0; -7)$; $V_3(3; 0)$; $V_4(-3; 0)$; $F_1(0; 2\sqrt{10})$; $F_2(0; -2\sqrt{10})$; $lr = 18/7$;

14.h) $(x-2)^2/4 + (y-3)^2/3 = 1$; $C(2; 3)$; $F_1(1; 3)$; $F_2(3; 3)$; $V_1(0; 3)$; $V_2(4; 3)$; $V_3(2; 3-\sqrt{3})$; $V_4(2; 3+\sqrt{3})$;

15) No representa lugar geométrico;

16) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$; $\frac{(x+9/16)^2}{513/256} + \frac{(y-1)^2}{171/64} = 1$;

17) $\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{(3/4)a^2} = 1$; con $a > 0$; 18.a) $|h| > 5$; 18.b) $h = 5$; $P_1(4; 1)$; $P_2(-4; -1)$;

19.a) $y^2 - \frac{x^2}{1/9} = 1$; $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$; 19.b) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$; 19.c) $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$;

19.d) $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$; 19.e) $\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{12} = 1$;

19.f) $y^2 - \frac{x^2}{1/3} = 1$; $C(0; 0)$; ef: $x=0$; asíntotas: $y_1 = \sqrt{3}x$; $y_2 = -\sqrt{3}x$

19.g) $C(0; 0)$; $lr = 64/3$; $\lg \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$; $V_1(-6; 0)$; $V_2(6; 0)$; $F_1(-10; 0)$; $F_2(10; 0)$



19.h) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$; Eje focal \equiv eje x; Eje normal \equiv eje y; Asíntotas: $y = x$; $y = -x$;

Vértices: $V_1(-4; 0)$; $V_2(4; 0)$; Focos: $F_1(-4\sqrt{2}; 0)$; $F_2(4\sqrt{2}; 0)$; Lado recto $l = 8$

19.i) lg) $\frac{(x-1)^2}{11/4} - \frac{(y-1)^2}{11} = 1$; C (1; 1); Eje focal: $y = 1$; Eje normal: $x = 1$; $l = 8$

Vértices: $V_1(1 - \sqrt{11/4}; 1)$; $V_2(1 + \sqrt{11/4}; 1)$; Focos: $F_1(1 - \sqrt{55/4}; 1)$; $F_2(1 + \sqrt{55/4}; 1)$;

19.j) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1$; Eje focal \equiv eje y; Eje normal \equiv eje x; Asíntotas: $y = x$; $y = -x$; Focos: $F_1(0; 3\sqrt{2})$; $F_2(0; -3\sqrt{2})$;

20.a) $|h| > 9/2$; 20.b) $|h| = 9/2$; $P_1(5; 17)$, $P_2(5; 8)$; $P_3(-5; -8)$, $P_4(-5; -17)$;

21.a) punto : P (-2; -1); 21.b) No representa lg; 21.c) recta : $x + 1 = 0$;

21.d) recta : $y + (2/3)x = 0$; 21.e) P (-2/3; 3/2);

21.f) Si $k > 41 \Rightarrow$ no representa lg; Si $k = 41 \Rightarrow$ P (4; -5);

Si $k < 41 \Rightarrow$ circunferencia de centro C (4; -5) y radio $r = \sqrt{41 - k}$;

21.g) No representa lg; 21.h) rectas: $x - 2y - 1$ v $x + 2y - 1 = 0$; 21.i) hipérbola: $\frac{(x+5)^2}{3} - y^2 = 1$;

21.j) hipérbola: $y = 1/x$; 21.k) hipérbolas: $y = 5/x$ v $y = -5/x$; 21.l) Parábola de vértice V (-2; 5/2); foco F (1; 5/2) directriz d): $x = -5$; Eje focal o de simetría: $y = 5/2$ Lado recto $l = |4p| = 12$; 21.m) elipse

22.a) $x = 0$; 22.b) Un cuarto de la circunferencia $x^2 + y^2 = (L/2)^2$; 22.c) Siendo d, la distancia del punto P(x; y) al extremo superior, describe un cuarto de la elipse $\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{(L-d)^2} = 1$

24) 110,28 millas; 25) Considerando a $F_1(0; -1,5)$ y $F_2(0; 1,5)$, las coordenadas buscadas serán R (2; 0,53), es decir, a 2,85 millas de A y a 2,22 millas de B;

26) La explosión tuvo lugar en algún lugar de la rama de la hipérbola $\frac{x^2}{1210000} - \frac{y^2}{5759600} = 1$ que se encuentra más cerca de A; 27) $1,51 \cdot 10^8$ km; $1,46 \cdot 10^8$ km; 28)) Haciendo coincidir el 0 del sistema coordenado con el centro de la elipse, $\frac{x^2}{5701^2} + \frac{y^2}{5750^2} = 1$; 29) 16 m; 30) 10 m; 31) 8 m; 32) A 1,5 m del centro; 33) La vencedora es la A

Bibliografía Consultada:

- * Geometría Analítica - (C. Lehmann)
- * Introducción al Álgebra Lineal - (H. Anton)

El contenido del presente tema ha sido recopilado o desarrollado por el Ing. Roberto Vignolo, y transcrito por éste, por la Sta. Claudia Arrieti y por la Sta. Carolina Robson (CEUT).



VECTORES EN \mathbb{R}^2

EJERCITACIÓN PROPUESTA:

- 1) Los vértices de un triángulo son $A(1; 3)$; $B(-1; 5)$ y $C(6; -2)$. Hallar el vector $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$. Verificar gráficamente. Interpretar el resultado.
- 2) Determinar gráfica y analíticamente con $P_1(0; 1)$; $P_2(6; -3)$; $P_3(-2; -3)$ el vector resultante de $\vec{OP}_1 - \frac{1}{3}\vec{OP}_2 + 2\vec{OP}_3$, su módulo y dirección.
- 3) Si $\vec{CA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{CB} = -\vec{i} + \vec{j}$, \vec{CA} calcular \vec{AB} . Graficar.
- 4) Con los vectores $\vec{AB} = \vec{a}$, si $A(-3; 4)$ y $B(-1; -2)$ y $\vec{c} = 2\vec{j}$, determinar el versor de $(\vec{a} \cdot \vec{c})$.
- 5) Siendo $\vec{d} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{e} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, determinar el ángulo entre \vec{d} y \vec{e} .
- 6) Determinar las componentes del vector de módulo 6 y ángulo director $\alpha = 60^\circ$.
- 7) Hallar las componentes del vector \vec{b} de módulo 5 que tenga dirección contraria al $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$.
- 8) Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $A(-1; 1)$ y $B(3; 1)$. Hallar las vectorialmente las coordenadas del tercer vértice y la superficie. Graficar.
- 9) El vector \vec{AB} tiene módulo $|\vec{AB}| = 5$. Si es $A(3; -2)$ y $B(6; y)$, hallar vectorialmente el valor de y . Graficar.
- 10) Dados los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$; $\vec{c} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$, se pide: a) Hallar los escalares x e y tal que: $x\vec{a} - y\vec{b} = \vec{c}$ y graficar. b) Calcular el vector proyección de \vec{b} sobre \vec{c} y graficar.
- 11) Un vector de módulo 8 tiene sus dos componentes iguales. Hallarlas. Graficar.



12) Los vectores \vec{a} y \vec{b} forman entre sí un ángulo de 45° y el módulo de \vec{a} vale 3. ¿Cuál debe ser el módulo de \vec{b} para que $\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a}$? Verificar gráficamente.

13) Dados dos vectores \vec{a} y \vec{b} , determinar la condición necesaria y suficiente para que $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$.

14) Dado el vector $\vec{b} = -\vec{i} + b_2\vec{j}$, hallar b_2 de tal manera que $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ sea:

a) perpendicular a \vec{b} ; b) paralelo a \vec{b} ; c) tal que, forme con \vec{b} un ángulo $\theta = \frac{\pi}{4}$. Graficar cada caso.

15) Dado \vec{a} de módulo 4 y ángulo director $\alpha = 30^\circ$. Hallar las componentes del vector \vec{b} de módulo 9 y dirección contraria a la de \vec{a} .

16) Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$? Interpretar la respuesta.

17) Hallar las componentes del versor que sea perpendicular a $\vec{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$. Graficar.

18) Hallar gráfica y analíticamente la proyección de un vector \vec{a} paralelo al eje y sobre a) \vec{i} ; b) \vec{j} .

19) Dados los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, hallar $proy_{\vec{b}}\vec{a}$ y $proy_{\vec{b}}\vec{c}$. Graficar.

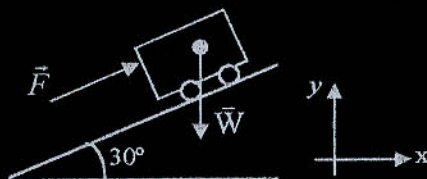
20) Sean $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j}$ y $\vec{v} = \vec{i} + b\vec{j}$. Determinar el valor de b de tal manera que el ángulo entre \vec{u} y \vec{v} sea $\theta = \frac{\pi}{4}$. Graficar.

21) Dados los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, hallar el vector múltiplo de \vec{b} que hay que sustraerle al \vec{a} para obtener un vector perpendicular al \vec{b} . Graficar.

22) Determinar si los siguientes puntos son colineales (están en una misma recta). Graficar.

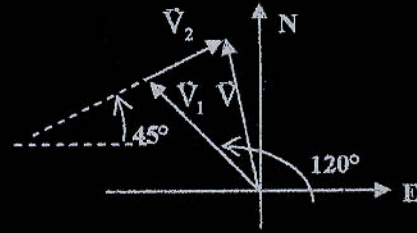
- $A(0; -4)$, $B(2; 0)$ y $C(3; 2)$
- $A(-2; 1)$, $B(2; -2)$ y $C(-1; 0)$.

23) Un auto de $\vec{W} = 600$ (N) se sostiene sobre una rampa a 30° . Determinar vectorialmente la fuerza requerida para evitar que el auto ruede por la rampa (supuesta sin rozamiento).

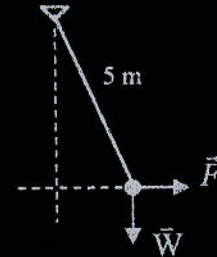




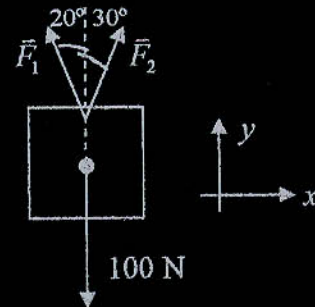
24) Un avión vuela a una velocidad $\vec{V}_1 = 500$ (km/h) en dirección NO, hasta que se encuentra con un viento de dirección NE $\vec{V}_2 = 70$ (km/h). ¿Cuál es la dirección en que vuela ahora y con qué velocidad?



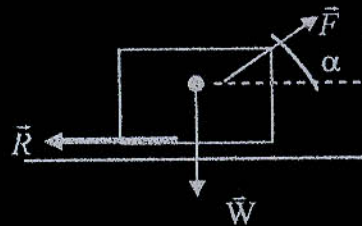
25) Un peso $\vec{W} = 25$ (N) está suspendido de una cuerda de 5 m de largo. Calcular la fuerza horizontal requerida para mantener el peso a 1 m de la vertical.



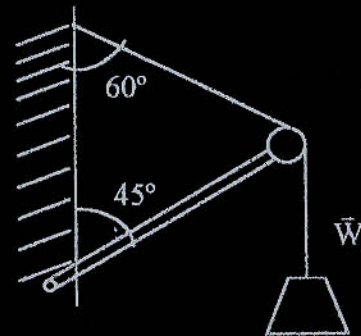
26) Calcular las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 que ejercen dos hombres para sostener un peso de 100 N. Verificar.



27) Un objeto de 100 N es arrastrado a velocidad constante, mediante una soga. Al movimiento se le opone una fuerza de rozamiento de 173,21 N. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza \vec{F} aplicada en la soga? Resolver utilizando proyección de vectores.



28) Calcular el peso máximo \vec{W} que puede soportar la estructura, si el puntal es capaz de resistir una compresión máxima de 500 N.





RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA:

- 1) $\vec{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; 2) $\vec{r} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$; $|\vec{r}| = 2\sqrt{13}$; $\alpha = 213^\circ 41' 24''$; ángulos directores:
 $\alpha = 146^\circ 18' 36''$; $\beta = 123^\circ 41' 24''$; 3) $\vec{AB} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$; 4) $\frac{1}{17}\sqrt{17}\vec{i} - \frac{4}{17}\sqrt{17}\vec{j}$; 5) $18^\circ 26' 6''$;
6) $3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$; 7) $-\sqrt{5}\vec{i} + 2\sqrt{5}\vec{j}$; 8) $C_1(1, 1 + 2\sqrt{3})$; $C_2(1, 1 - 2\sqrt{3})$; $S = 4\sqrt{3}$;
9) $y_1 = 2$; $y_2 = -6$; 10.a) $x = -13/4$; $y = -1/4$; 11) $\begin{bmatrix} 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} \end{bmatrix}$; 12) $3\sqrt{2}$;
13) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; 14) a) $4/3$ b) $-3/4$; 15) $\vec{b}_1 = -\frac{9}{2}\sqrt{3}\vec{i} + \frac{9}{2}\vec{j}$; $\vec{b}_2 = -\frac{9}{2}\sqrt{3}\vec{i} - \frac{9}{2}\vec{j}$;
16) $\vec{a} = 0 \vee \vec{b} = \vec{c} \vee \vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$; 17) $\vec{v}_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$; $\vec{v}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$; 18.a) \vec{o} ; 18.b) \vec{a} ;
19.a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 19.b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; 20) \emptyset ; 21) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; 22) a) sí; b) no.; 23) $\vec{F} = \begin{pmatrix} -150\sqrt{3} \\ -150 \end{pmatrix}$;
24) $112,6^\circ$; $522,5 \text{ km/h}$; 25) $F \approx 5,1 \text{ N}$; 26) $T_1 \approx 65,27\text{N}$; $T_2 \approx 44,65\text{N}$; 27) $F \approx 200 \text{ N}$; 28) $W \approx 557,68 \text{ N}$.

Bibliografía Consultada:

- * Álgebra Lineal - (S. Grossman)
- * Álgebra y Cálculo Numérico - (A. Sagastume - V. Berra - G. Fernandez)
- * Introducción al Álgebra Lineal - (H. Anton)

El contenido del presente tema ha sido desarrollado o recopilado por el Ing. Roberto Vignolo y transcrito por éste y por el Sr. Walter Cusit.



VECTORES EN \mathbb{R}^3

EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) Dados: $\vec{a} = \vec{AB}$ con $A(2;0;0)$ y $B(2;1;3)$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\vec{d} = \vec{k}$

a) Representar gráficamente.

b) Calcular $-2\vec{b} + \vec{a} + \vec{c} + \vec{d}$.

c) Calcular módulos y cosenos directores de: $\vec{a}; \vec{d}$.

d) Calcular la proyección y el módulo de la proyección de \vec{d} sobre $(-\vec{b} + \vec{c})$.

2) Dado $\vec{OP}_1 = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ y $\vec{OP}_2 = -\vec{j} + \vec{k}$, hallar vectorialmente la distancia entre P_1 y P_2 .

3) Hallar las componentes de un vector \vec{a} de módulo igual a 5, que forma con los 3 ejes, ángulos iguales.

4) Dado \vec{a} tal que $|\vec{a}|=4$, y los ángulos directores $\alpha=30^\circ$; $\beta=60^\circ$ (en \mathbb{R}^3); hallar las componentes de otro \vec{b} / $|\vec{b}|=9$ y $\vec{b} \parallel \vec{a}$, pero de dirección contraria a \vec{a} .

5) Mostrar que no existe un vector unitario cuyos ángulos directores sean $\pi/6$, $\pi/3$ y $\pi/4$.

6) Un vector \vec{a} de módulo igual a 4 forma un ángulo $\alpha=60^\circ$ con el eje x y un ángulo $\beta=45^\circ$ con el eje y .

a) Hallar el valor del ángulo γ que forma con el eje z .

b) Determinar las componentes de \vec{a} .

7) Sean \vec{AB} y \vec{AC} dos vectores (pertenecientes a \mathbb{R}^3) que forman entre sí un ángulo de 60° y tienen por módulos 2 y 3 respectivamente. Hallar el módulo del vector que une los puntos medios de los segmentos \overline{AB} y \overline{AC} .

8) Hallar los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ de módulo 2 y que forman un ángulo de 30° con el eje x .

9) Comprobar analíticamente que cualquier vector paralelo al eje y es perpendicular a cualquier vector paralelo al plano (x, z) .

10) Hallar los cosenos directores de los vectores pertenecientes a \mathbb{R}^3 situados en el plano xy , donde el ángulo director $\alpha = \pi/4$.



11) Determinar si el siguiente enunciado es verdadero o falso: "la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados". Justificar vectorialmente.

12) Determinar si los siguientes vectores son paralelos o perpendiculares:

a) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$; b) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$; c) $\vec{u}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{u}_2 = 4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

13) Dado $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, calcular:

a) $|\vec{a} \times \vec{b}|$; b) $|\vec{b} \times \vec{a}|$; c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$; d) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$; e) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$; f) $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$

14) El módulo de \vec{c} es $|\vec{c}| = \sqrt{20}$. Determinar sus componentes, si \vec{c} es perpendicular a

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

15) Hallar \vec{b} tal que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ con:

15.a) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\vec{c} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$; 15.b) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$; $\vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; 15.c) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

16) Calcular vectorialmente el área del paralelogramo que tiene por vértices $A(2;5;3)$; $B(0;0;2)$; $C(0;-3;0)$.

17) Verificar vectorialmente que los puntos $P(1;-2;3)$; $Q(2;1;0)$; $R(4;7;-6)$ están alineados.

18) Calcular vectorialmente el ángulo determinado por los lados \overline{AB} y \overline{AC} de un paralelogramo de 12 unidades cuadradas de superficie, siendo $\overline{AB} = 3$ y $\overline{AC} = 4\sqrt{5}$.

19) Un triángulo de vértices $A(x; 2; -5)$; $B(6; 3; 5)$; $C(2; 3; -3)$ tiene 6 unidades cuadradas de superficie. Determinar el valor de x .

20) Calcular el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los 3 vértices adyacentes son $A(1;0;0)$; $B(3;2;9)$; $C(5;2;-3)$.



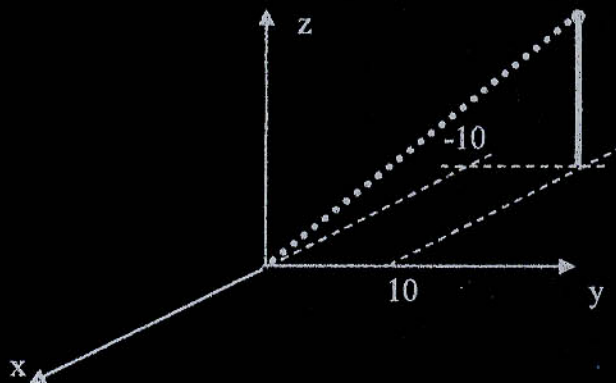
21) Verificar que los vectores dados no son coplanares: $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

22) Decir si los puntos dados son coplanares: $A(1;1;6)$; $B(2;3;5)$; $C(8;4;6)$; $D(2;1;3)$.

23) Dados \vec{u} ; \vec{v} ; \vec{w} (no coplanares), interpretar gráficamente el producto $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.

24) Un trípode, cuya cabeza está situada en el punto $P(0; 0; 4)$ soporta un peso de 120 N. Las patas del trípode apoyan en $Q_1(0;-1;0)$; $Q_2(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0)$; $Q_3(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0)$. Hallar la fuerza que ejerce cada pata en el suelo.

25) Un tensor (de peso despreciable) tiene una tensión de 300 N y está sostenido, por uno de sus extremos, al suelo, y por el otro, a la punta de una torre de 5 m de altura. Expresar las componentes de la tensión.



26) Hallar vectorialmente el cuarto vértice de un rectángulo de vértices $O(0;0;0)$; $A(4;3;0)$; $B(-6;8;0)$.



RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA:

$$1.b) -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \quad 1.c) \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \cos \beta = (1/10)\sqrt{10} \\ \cos \gamma = (3/10)\sqrt{10} \end{cases}; \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \cos \beta = 0 \\ \cos \gamma = 1 \end{cases}; \quad 1.d) -3/11(\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k});$$

$$2) \sqrt{11}; \quad 3) \vec{a}_1 = \frac{5}{3}\sqrt{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}); \vec{a}_2 = -\frac{5}{3}\sqrt{3}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}); \quad 4) -9/2(\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j});$$

$$6) \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2\sqrt{2} \\ -2 \end{bmatrix}; \gamma_1 = 60^\circ; \gamma_2 = 120^\circ; \quad 7) |\overline{M_1 M_2}| = \frac{1}{2}\sqrt{7};$$

$$8) \vec{a}_1 = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}; \vec{a}_2 = \sqrt{3}\vec{i} - \vec{j};$$

$$10) \cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \beta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \gamma_1 = 0; \cos \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \gamma_2 = 0;$$

11) Verdadero; 12.a) Paralelos; 12.b) No paralelos; no perpendiculares; 12.c) Perpendiculares;

$$13 a) \sqrt{230}; b) \sqrt{230}; c) -20\vec{i} - 6\vec{j} - 22\vec{k}; d) 49; e) 49; f) -49;$$

$$14) \vec{c}_1 = 2\sqrt{5/19}(\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}); \vec{c}_2 = -2\sqrt{5/19}(\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k});$$

$$15.a) \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad 15.b) \vec{b} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ 3 \\ t \\ 2t-4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{R}; \quad 15.c) \text{ no existe}; \quad 16) \sqrt{101}; \quad 18) \vartheta \approx 31^\circ 43' 3'';$$

$$19) x=0; x=2; \quad 20) 4; \quad 22) \text{ No}; \quad ; \quad 23) \text{ vector perteneciente al plano determinado por } \vec{u} \text{ y } \vec{v};$$

$$24) 10 \cdot \sqrt{17}; \quad 25) [-200, 200, 100]; \quad 26) (-2; 11; 0)$$

Bibliografía Consultada:

- Álgebra Lineal - (S. Grossman)
- Álgebra y Cálculo Numérico - (A. Sagastume - V. Berra - G. Fernandez)
- Introducción al Álgebra Lineal - (H. Anton)

El contenido del presente tema ha sido desarrollado o recopilado por el Ing. Roberto Vignolo y transcrito por éste y por el Sr. Walter Cusit.



ESPACIOS VECTORIALES

EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) Demostrar que el conjunto de los vectores de la forma $\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ con $x \in \mathbb{R}$, es un espacio vectorial.

2) Comprobar que los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 no son espacios vectoriales:

- a) Los vectores localizados en el primer cuadrante.
- b) $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- c) $\{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$

3) Demostrar que el conjunto H es un subespacio de V:

- a) $V = \mathbb{R}^m$; $H = \{X \in \mathbb{R}^m / A.X = 0\}$.
- b) $V = \mathbb{R}^3$; $H =$ el plano xy.
- c) $H_1 \wedge H_2$ son SEV de V; $v_1 \in H_1 \wedge v_2 \in H_2$; $H = H_1 + H_2 = \{v = v_1 + v_2\}$
- d) $v_1, \dots, v_n \in V$; $H = \{v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \text{ con } \alpha_i \in \mathbb{R}\}$
- e) $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y) : x = y\}$

4) En cada caso, describir geoméricamente el conjunto dado y determinar si es o no un subespacio vectorial justificando adecuadamente:

- a) El conjunto de los vectores en \mathbb{R}^3 de la forma (x, x, x) con $x \in \mathbb{R}$.
- b) Los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $x = t+1; y = 2t; z = t-1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
- c) El conjunto de puntos en \mathbb{R}^3 que satisface la ecuación $x + z = 1$.
- d) El conjunto de puntos en \mathbb{R}^3 que satisface la ecuación $x + z = 0$.
- e) Los puntos de \mathbb{R}^3 que satisfacen las ecuaciones $x + z = 0 \wedge x - z = 0$.
- f) El lugar geométrico determinado por la unión de dos subespacios cualesquiera.
- g) El conjunto formado por los vectores $[0; 0; 0]; [1; 0; 0]$.
- h) El conjunto constituido por los vectores de la forma $(0, y, z)$
- i) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z = 0\}$
- j) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = z \wedge 2x + y = 0\}$
- k) El lugar geométrico determinado por la intersección de dos planos coordenados cualesquiera
- l) Un subespacio de \mathbb{R}^3 perpendicular al subespacio $x = y = z$ es $\vec{v} = -(\vec{i} + \vec{j})$.

5) Determinar en cada caso, si el conjunto solución S_i correspondiente a cada sistema de ecuaciones lineales dado, es un subespacio de V. En caso afirmativo verificar el cumplimiento de los axiomas correspondientes:

A) $V = \mathbb{R}^3$: a) $S_1: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$; b) $S_2: \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ c) $S_3: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ d) $S_4: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = z \end{cases}$

B) $V = \mathbb{R}^4$: $S_5: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = z \end{cases}$



6) Determinar $(x; y)$ tal que el vector $v_1 = (1; 1)$ no sea combinación lineal de los vectores $v_2 = (4; 3)$ y $v_3 = (x; y)$.

7) a) Determinar si los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ generan el espacio vectorial \mathbb{R}^3 .

b) Si la respuesta es negativa, describir geoméricamente el espacio que generan y expresarlo algebraicamente utilizando tres conjuntos generadores diferentes.

8) Determinar en cada caso, el espacio que generan los vectores dados:

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; c) $(1; 1; 1)$;

d) $(1, -1, 1)$ y $(-1, 1, -1)$; e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; f) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

9) Responder verdadero o falso según corresponda. Justificar la respuesta.

a) Los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan el plano $\pi) x + y - z = 0$.

b) El vector $[6; 2]$ pertenece a $\text{gen} \{[2; 3]; [4; -5]\}$

c) Un conjunto de tres vectores de \mathbb{R}^2 siempre genera a \mathbb{R}^2

d) El espacio generado por un vector no nulo de \mathbb{R}^3 es un plano perpendicular a ese vector y que pasa por el origen.

e) El espacio que generan tres o más vectores en \mathbb{R}^3 , es todo \mathbb{R}^3 .

f) Sean los vectores u, v, w de $\mathbb{R}^3 / v \neq w$, entonces $\text{gen} \{u, v\} \neq \text{gen} \{u, w\}$

10) Hallar $u \in \mathbb{R}^3 / U \cap W = \text{gen}\{u\}$, siendo $U = \text{plano } xy$; $W = \text{gen}\{(1; 0; 0); (0; 1; 1)\}$.

11) Una compañía almacena tres mezclas básicas (A, B y C) con cuatro compuestos diferentes:

	A	B	C
I	20	18	12
II	10	10	10
III	20	10	8
IV	0	12	20

Las cantidades se miden en gramos y cada unidad de mezcla básica pesa 50 gramos.

Se pueden formular mezclas especiales combinando las tres mezclas básicas; entonces las mezclas especiales posibles pertenecen al espacio generado por los tres vectores que representan las tres mezclas básicas.

¿Se puede hacer una mezcla que consiste en 210g de I, 130g de II, 150g de III y 160g de IV?

Si se puede, ¿cuántas unidades de cada mezcla básica se necesitan para formular la mezcla especial?



12) Determinar en cada caso, si el conjunto H es linealmente independiente:

a) En \mathcal{R}^2 : $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

b) En \mathcal{R}^2 : $H = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$

c) En \mathcal{R}^2 : $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

d) En \mathcal{R}^3 : $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$

e) En \mathcal{R}^4 : $H = \{(1;2;-1;3) ; (7;1;0;4) ; (-8;0;8;2)\}$.

f) En \mathcal{R}^3 : $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

13) Determinar un conjunto generador de $H = \{(x; y; z) \in \mathcal{R}^3 / x - z = 0\}$ que contenga tres vectores. ¿Es li? ¿Por qué?

14) Responder verdadero o falso según corresponda. Justificar la respuesta.

a) En un espacio vectorial, cualquier conjunto constituido por un solo vector es Li.

b) Si en \mathcal{R}^3 , un vector es combinación lineal de otros dos, entonces el producto mixto es igual a cero.

c) Si $\{u; v; w\}$ es un conjunto Li incluido en \mathcal{R}^3 , y sea $z \in \mathcal{R}^3 / z \notin \text{gen}\{u, v, w\}$ entonces $\{u; v; w; z\}$ es Li.

d) Sabiendo que $u_1; u_2; u_3$ son Li, entonces el conjunto $\{w_1; w_2; w_3\}$ donde $w_1 = u_1 + u_2; w_2 = u_1 - u_2; w_3 = u_1 - 2u_2 + u_3$, es Ld.

e) Sean $u; v; w$ vectores de \mathcal{R}^3 linealmente independiente, entonces el conjunto $\{u, v, u+v+w\}$ es Li.

f) Si u, v y w son vectores Li, entonces $u+v, u+w$ y $v+w$ son también Li.

15) Determinar el valor de α , para que los vectores dados sean linealmente dependientes. ¿Cuándo serán base de \mathcal{R}^3 ?

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix} ;$

b) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

16) Determinar en cada caso, si el conjunto H es base del espacio vectorial V:

a) $H = \{(1;0;1), (0;1;1)\}; V = \{(x; y; z) / x + y - z = 0\};$ b) $H = \{(1;0;1), (0;1;1), (1;1;2)\}; V = \mathcal{R}^3$

17) Determinar una base y la dimensión del espacio dado en cada caso:

a) $S = \begin{cases} x - y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} ;$ i) En \mathcal{R}^2 ; ii) En \mathcal{R}^3 ;

b) l) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$; i) En \mathcal{R}^3 ; ii) En \mathcal{R}^4 ;

c) l) $x + y - z = 0$ en \mathcal{R}^3 ;

d) $S = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ en \mathcal{R}^3 ;

e) $\text{gen} = \{(1;2;3), (4;5;6)\}$.



18) ¿De qué espacio vectorial es base $H = \{(1;2;0), (0;3;1)\}$?

19) Determinar una base de \mathfrak{R}^3 que contenga los vectores $(-1; 3; 4)$ y $(2; 1; 2)$.

20) Determinar el valor que debe adoptar k de tal manera que $H = \{(k;0;2), (1;2;3), (0;1;1)\}$ constituya una base de \mathfrak{R}^3 .

21) Sea B_1 la base estándar de \mathfrak{R}^2 y sea $(v)_{B_1} = (x; y)$ el vector de coordenadas de cualquier vector de \mathfrak{R}^2 respecto de B_1 . Usando la matriz de transición correspondiente, expresar este vector v en términos de $B_2 = \{(1;1), (1;-1)\}$.

22) a) ¿Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz de transición de la base canónica de \mathfrak{R}^2 a la base $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$? Justificar.

b) Hallar la matriz de transición de B_1 a $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) Determinar el vector de coordenadas $(x)_{B_2}$ sabiendo que: $e_1 (x)_{B_1} = (2; -1)$; $e_2 (x)_{B_1} = (x_1; y_1)$

23) Sea $B = \{(1;0;0), (1;1;0), (1;0;1)\}$ una base de \mathfrak{R}^3 . Verificar.

a) Encontrar la matriz de transición de la base canónica de \mathfrak{R}^3 a la base B .

b) Utilizando la matriz hallada, escribir el vector $(-1; 2; 1)$ como combinación lineal de los vectores de B .

24) Si $(v)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ con $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Hallar la matriz de transición de B_1 a $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Hallar el vector de coordenadas $(v)_{B_2}$ usando la matriz anterior.

c) ¿Cuáles son las coordenadas de v en la base canónica?

25) Determinar en cada caso una base ortonormal a partir de la base dada:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$; c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

26) Determinar una base ortonormal para cada uno de los siguientes subespacios:

a) $H = \{(x, y) : x + y = 0\}$

b) $\pi = \{(x, y, z) : 2x - y - z = 0\}$

c) $L = \{(x, y, z) : x = y = z\}$

d) $H = \{(x, y) : ax + by = 0\}$

27) Determinar una base ortonormal en \mathfrak{R}^4 que incluya los vectores $u_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$; $u_2 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$



28) Responder verdadero o falso según corresponda. Justificar la respuesta:

- Si P y Q son matrices ortogonales de $n \times n$, entonces PQ es ortogonal.
- Si P es ortogonal y simétrica, entonces $P^2 = I$.
- Si Q es ortogonal, entonces $|Q| = 1$.
- Si el conjunto de vectores $\{u, v\}$ es ortogonal en \mathcal{R}^3 , entonces $\{u, v, uxv\}$, es un conjunto Ld.
- Para cualquier número real t , la matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & \operatorname{cos} t \\ \operatorname{cos} t & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$ es ortogonal.

29) Corroborar lo demostrado en 28c) mediante ejemplos de matrices ortogonales de orden 2×2 .

30) Encontrar la solución óptima en término de mínimos cuadrados para los siguientes sistemas incompatibles y calcular

el error que se comete en cada caso:

a)	$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ y = 5 \\ 2x = 1 \end{cases}$	b)	$\begin{cases} 3x = 2 \\ 2x + y = 0 \\ -x + 5y = 1 \end{cases}$
----	-------------------------------------------------------------	----	-----------------------------------------------------------------

31) a) Si A es 4×7 , ¿Cuál es el orden de A^+ ?

- Demostrar que si A es invertible, entonces $A^+ = A^{-1}$.
- Demostrar que $(A A^+)^T = A A^+$

32) a) Demostrar que para cualquier matriz A de tamaño $m \times n$, $A^+ A = I_{n \times n}$.

- Determinar el valor de $A^+ A A^+$ y $A A^+ A$.

33) Se ha medido la posición y de un cuerpo en cinco momentos t diferentes de tiempo, obteniendo los siguientes datos:

$t(\text{min})$	0	3	5	8	10
$y(\text{km})$	2	5	6	9	11

- Representar gráficamente los datos en un sistema cartesiano de ejes t e y .
- Proponer la ecuación general más apropiada para describir la relación entre las variables t e y .
- Obtener los parámetros de la ecuación propuesta que mejor ajusten dicha curva a los datos.



RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA:

4) a); d); e); h); j); k) son subespacios vectoriales, el resto no; 5) c) no es subespacio vectorial, el resto sí; 6) $v_3 = (0, 0)$;

7) Generan el plano π $x+y-z=0$; Por ejemplo: $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$; $H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

8) a) π $x+y-z=0$; b) \mathbb{R}^3 ; c) r $x=y=z$; d) r $x=-y=z$; e) π $x+y-2z=0$; f) \mathbb{R}^2 ;
9) a); b) V ; el resto: F ; 10) $(1, -1, 0)$; 11) 3 de A , 5 de B y 5 de C ; 12) a); d); e); f) son li, los restantes son ld;
13) Por ejemplo: $H = \{(1,0,1), (0,1,0), (1,1,1)\}$; es ld; 14) b); e); f) son V , el resto es F ; 15.a) $\alpha = -13/2$; 15.b) $\alpha \in \mathbb{R}$;
16.a) H es base de V ; $\dim V = 2$; 16.b) H no es base de V ;
17.a.i) $\{(1, 1)\}$; $\dim S = 1$; 17.a.ii) $\{(1, 1, 0); (0, 0, 1)\}$; $\dim S = 2$;
17.b.i) $\{(2, 3, 4)\}$; $\dim S = 1$; 17.b.ii) $\{(2, 3, 4, 0); (0, 0, 0, 1)\}$; $\dim S = 2$;
17.c) $S = \{(1, 0, 1); (0, 1, 1)\}$; $\dim S = 2$; 17.d) $\{(0, -1, 1)\}$, $\dim S = 1$; 17.e.) $\{(1, 2, 3); (4, 5, 6)\}$; $\dim S = 2$;

18) π $2x-y+3z=0$; 19) Por ejemplo $B = \{(-1, 3, 4); (2, 1, 2); (1, 4, z)\}$ con $z \neq 6$; 20) $k \neq 2$; 21) $v = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

22.a) No, es A^{-1} ; 22.b) $M_{B_1, B_2} = \begin{pmatrix} 2/5 & 17/15 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$; 22.c.i) $v_{B_2} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$; 22.c.2) $M_{B_2} = \begin{pmatrix} 2/5 x_1 + 17/15 y_1 \\ 1/5 x_1 + 2/5 y_1 \end{pmatrix}$;

23.a) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 23.b) $v = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

25.a) $B = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\}$; 25.b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3/2} \\ -2\sqrt{3/2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3/2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$;

26.a) $1/\sqrt{2}(i+j)$; 26.b) $1/\sqrt{5}(i+2k)$; $1/\sqrt{30}(2i+5j-k)$; 26.c) $1/\sqrt{3}(i+j+k)$;

26.d.i) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; 26.d.ii) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; 26.d.iii) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; 26.d.iv) $B = \left\{ \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ con $a \neq 0$;

27) Por ejemplo: $B = \left\{ u_1; u_2; \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\}$;

28.a) V ; 28.b) V ; 28.c) F ; 28.d) V ; 28.e) V ;

30) a) $x = -23/29$, $y = 45/29$, $E = 4,64$;

31) a) 7×4 ;

32) b) A^+ , A ;

33.b) $y = a + bt$ 33.c) $a = 2,013$; $b = 0,882$

Bibliografía Consultada:

- ✓ Álgebra Lineal (S. Grossman)
- ✓ Introducción al Álgebra Lineal (H. Anton)
- ✓ Teoría y Problemas de Álgebra Lineal (S. Lipschutz - S. Schaum)

El contenido del presente tema ha sido seleccionado por la Lic. Adriana Frausin y la Prof. Silvina Martínez. Edición original desarrollada o recopilada por la Lic. Gabriela Roldán y el Ing. Roberto Vignolo y transcrita por éstos, por la Srta. Carolina Robson (C.E.U.T.) y el Sr. Fabio Dlugovitzky.



EL PLANO

EJERCITACIÓN PROPUESTA:

- 1) Determinar las ecuaciones general y segmentaria del plano obtenido en cada caso:
- Pasa por el punto $A(3, -6, 1)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = 2\vec{i}$;
 - Pasa por el punto $A(3, -6, 1)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$;
 - Contiene al punto $A(3, -6, 1)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$;
 - Contiene al origen y es normal al vector $\vec{n} = -2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$.
- 2) Con los planos hallados en los ejercicios 1), determinar las trazas e intersecciones con los ejes coordenados. Graficar
- 3) Siendo $ax + by + cz + d = 0$ la ecuación general del plano, escribir las ecuaciones de cada caso si:
- Contiene al origen. Justificar;
 - Es perpendicular al plano coordenado XZ. Graficar. Justificar en base al vector normal;
 - Es paralelo al eje Y y contiene al origen. Graficar. Justificar en base al vector normal
- 4) Determinar la ecuación del plano obtenido en cada caso:
- Pasa por $P_1(-1; 2; 4)$ y es paralelo a $\pi_1) 2x - 3y - 5z + 6 = 0$;
 - Pasa por los puntos $P_1(2; 3; 5)$, $P_2(6; 4; 3)$ y $P_3(4; 6; 3)$;
 - Pasa por $P_1(-2; -1; 5)$ y es perpendicular a la recta determinada por $P_2(2; -1; 2)$ y $P_3(3; 1; -2)$;
 - Es perpendicular en el punto medio al segmento que une los puntos $A(-2; 2; -3)$ y $B(6; 4; 5)$;
 - Pasa por $A(3; -2; 4)$ y es perpendicular a $\pi_1) 7x - 3y + z = 5$ y $\pi_2) 4x - y - z + 9 = 0$;
 - Contiene al eje z y al punto $A(3; 1; 5)$;
 - Es perpendicular al plano xy y contiene a $A(2; -2; 11)$ y $B(-7; -8; -3)$. Graficar.
 - Pasa por la intersección de $\pi_1) 3x + y - 2z + 2 = 0$ y $\pi_2) x - 3y - z + 3 = 0$ y es perpendicular al plano xz;
 - Es paralelo a $\pi_1) 4x - 4y + 7z - 3 = 0$ y dista 4 unidades de $A(4; 1; -2)$;
 - Es paralelo a los vectores $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j}$ y pasa por $P(2; 5; 6)$;
 - Pasa por $A(1; -1; 1)$ y por la recta de intersección de $\pi_1) x + 2y - z = 4$ y $\pi_2) 2x - 3y + z = 6$;
 - Pasa por los puntos $P_1(2; 3; 5)$; $P_2(6; 4; 15)$; $P_3(0; 0; 0)$.
- 5) Hallar la ecuación del plano cuya intersección con el eje x es $L(2; 0; 0)$ y con el eje y es $M(0; 3; 0)$ y dista del origen $6/7$.



6) Hallar los valores k si:

6.a) $\pi_1) 2x+3y+z = 1$ y $\pi_2) 4x+k_1y+k_2z = 8$ son paralelos;

6.b) $\pi_1) 2x+3y+z = 1$ y $\pi_2) x-4y+kz = 20$ son perpendiculares;

6.c) La distancia del origen al $\pi) 3x-6y+kz+14 = 0$ es 2;

6.d) $\pi) kx-3y+kz = 22$ pasa por $A(3;-4;2)$;

6.e) $\pi_1) 2x+ky-kz+7 = 0$ es perpendicular a $\pi_2) 3x+6y = 12$.

7) Hallar la distancia entre:

7.a) $A(1;-2;3)$ y $\pi) 2x-3y+2z-14 = 0$;

7.b) El plano $\pi_1) \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1$ y el punto de intersección de $\pi_2) 2x-y+3z-4 = 0$ con el eje y

7.c) $\pi_1) 8x-4y+z+9 = 0$ y $\pi_2) 8x-4y+z-36 = 0$.

8) Calcular el ángulo que forman $\pi_1) x-y+z = 1$ y $\pi_2) 2x+3y-z = 2$.

9) Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(1;3;0)$ y $B(4;0;0)$ y forma un ángulo de 30° con $\pi_1) x+y+z = 1$

10) Determinar la ecuación del plano que pasa por $A(0;0;1)$ y es perpendicular al plano xz , y forma un ángulo cuyo coseno es $1/3$ con el plano $x+2y+2z = 5$.

11) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de $\pi_1) 2x-y+3z = 2$ y $\pi_2) 4x+3y-z = 1$, y es perpendicular a $\pi_3) 3x-4y-2z = 9$

12) Hallar la ecuación del plano que sea paralelo al $\pi_1) 6x+3y-2z = 14$ y equidistante de él y del origen.

13) Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(3;1;-1)$, es perpendicular a $\pi_1) 2x-2y+z+4 = 0$ e interseca al eje z en $B(0;0;-3)$.

14) Demostrar que los planos $\pi_1) 3x+2y-z-3 = 0$, $\pi_2) 2x-3y-3z = 4$ y $\pi_3) x+7y-2z+7 = 0$ tienen sólo un punto común. Hallarlo.



RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1.a) $x - 3; \frac{x}{3} = 1;$ 1.b) $x - 2y - 15 = 0; \frac{x}{15} + \frac{y}{-15/2} = 1;$ 1.c) $x - 2y + 3z - 18 = 0; \frac{x}{18} - \frac{y}{9} + \frac{z}{6} = 1$

1.d) $2x - 5y - z = 0; \frac{x}{5} - \frac{y}{2} - \frac{z}{10} = 1;$

2.a) $\pi \cap xy: x=3; z=0; \pi \cap xz: x=3; y=0; \pi \cap yz: \bar{A}; \pi \cap x: L(3; 0; 0); \pi \cap y: \bar{A}; \pi \cap z: \bar{A};$

2.b) $\pi \cap xy: x - 2y - 15 = 0; z = 0; \pi \cap xz: x = 15; y = 0; \pi \cap yz: y = -15/2; x = 0;$

$\pi \cap x: L(15; 0; 0); \pi \cap y: M(0; -15/2; 0); \pi \cap z: \bar{A};$

2.c) $\pi \cap xy: 2x - 5y = 0; z = 0; \pi \cap xz: 2x - z = 0; y = 0; \pi \cap yz: 5y + z = 0; x = 0;$

$\pi \cap x: L(0; 0; 0); \pi \cap y: M(0; 0; 0); \pi \cap z: N(0; 0; 0);$

3.a) $ax + by + cz = 0;$

3.b) $-ax + cz + d = 0;$

3.c) $-ax + cz = 0$

4.a) $2x - 3y - 5z + 28 = 0;$

4.b) $2x + 2y + 5z - 35 = 0;$

4.c) $x + 2y - 4z + 24 = 0;$

4.d) $4x + y + 4z - 15 = 0;$

4.e) $4x + 11y + 5z = 10;$

4.f) $x - 3y = 0;$

4.g) $2x - 3y - 10 = 0;$

4.h) $10x - 7z + 9 = 0;$

4.i) $4x - 4y + 7z + 38 = 0; 4x - 4y + 7z - 34 = 0;$

4.j) $2x + y - 9z + 45 = 0;$

4.k) $2x - 3y + z - 6 = 0;$

4.l) $2x + 2y + 5z - 35 = 0$

5) $\pi_1) 3x + 2y + 6z - 6 = 0;$

$\pi_2) 3x + 2y - 6z - 6 = 0$

6.a) 2; 6;

6.b) 10;

6.c) $\pm 2;$

6.d) 2;

6.e) -1;

7.a) 0; 7.b) $\frac{14}{17} \cdot \sqrt{17};$ 7.c) 5;

8) $107^\circ 59'; 72^\circ 1';$ 9) $5x + 5y + (8 \pm 3\sqrt{6})z = 20;$ 10) $3x - 4z + 4 = 0;$ 11) $6x + 7y - 5z = 0.$

12) $6x + 3y - 2z - 7 = 0;$

13) $5x + y - 8z - 24 = 0;$

14) $P(2; -1; 1).$

Bibliografía Consultada:

* Geometría Analítica – (C. Lehmann)

El contenido del presente tema ha sido recopilado o desarrollado por el Ing. Roberto Vignolo, y transcripto por éste y por el Sr. Walter Cusit.



COORDENADAS POLARES, ESFÉRICAS Y CILÍNDRICAS

D) COORDENADAS POLARES - EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1. Expresar en coordenadas cartesianas cada una de las siguientes ecuaciones (dadas en coordenadas polares), identificar el lugar geométrico que representan y graficarlas:

a) $r \operatorname{sen} \theta = -2$ b) $r \cos \theta = 3$ c) $r = 10 \cos \theta$

d) $r (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta) = 2$ e) $r = 5$ f) $\theta = \frac{3\pi}{4}$

g) $\rho = 4 \operatorname{sen} \theta$ h) $\rho = 9 \cos \theta$ i) $\rho = \frac{2}{2 - \cos \theta}$

j) $\operatorname{sen}^2 \theta - 4\rho \cos^3 \theta = 0$ k) $\rho - \rho \cos \theta = 4$

2. Dadas las siguientes ecuaciones (expresadas en coordenadas polares) $r = 3 \cos \theta$; $r = 1 + \cos \theta$ determinar:

- Intersección de los lugares geométricos;
- Gráficas.

3. Dadas las siguientes ecuaciones (expresadas en coordenadas polares) $r = 4$; $r = 4(1 - \cos \theta)$ determinar:

- Intersección de los lugares geométricos;
- Gráficas.

4. Cada una de las siguientes ecuaciones (expresadas en coordenadas polares) expresarla en coordenadas cartesianas y graficarla:

a) $\rho = 4 (2 - \cos \theta)$ (Parábola cúbica)

b) $\rho = 3 - 4 \cos \theta$ (Espiral de Arquímedes)

c) $\rho = \frac{a}{\theta}$ (Espiral hiperbólica)

5. Colocar verdadero o falso:

- Por definición, las coordenadas polares $(\rho; \theta)$ de un punto, exigen que ρ y θ sean positivos.
- Un par ordenado de coordenadas polares $(\rho; \theta)$ determina uno y solamente un punto del plano coordenado.
- Cada punto del plano coordenado tiene un único par de coordenadas polares $(\rho; \theta)$ que lo representa.
- El sistema polar establece una correspondencia biunívoca entre cada punto del plano y un par de números reales.
- A cada punto del sistema cartesiano le corresponde uno y solo un punto del sistema polar.
- El polo tiene un único par de coordenadas polares que lo represente.



6. Hallar el par principal de coordenadas polares del punto **P** cuyas coordenadas rectangulares son:
- a) P(1; 1) b) P(0; 1) c) P(1; 0) d) P(-1; 1)
e) P(1; -2) f) P(-1; -1) g) P(4; 3)
7. Para cada uno de los pares anteriores, escribir otro par de coordenadas polares del punto **P** distinto al principal.
8. Hallar la ecuación rectangular del lugar geométrico cuya ecuación polar es:
- a) $\rho = r$ siendo r una constante positiva. b) $\theta = k$ siendo k una constante.
c) $\rho = \frac{a}{\cos \theta}$ siendo a una constante. d) $\rho = \frac{a}{\operatorname{sen} \theta}$ siendo a una constante.
e) $\rho = a \operatorname{sen} \theta$ siendo a una constante. f) $\rho = a \cos \theta$ siendo a una constante.
g) $\rho = \frac{2}{1 - \operatorname{sen} \theta}$ h) $\rho = \frac{2}{1 + \cos \theta}$
9. Hallar la ecuación polar [en la forma $\rho = \rho(\theta)$] del lugar geométrico cuya ecuación rectangular es:
- a) $x^2 + y^2 = r^2$ b) $5x - 4y + 3 = 0$ c) $x^2 - y^2 = 4$
d) $xy = 2$ e) $x^2 + y^2 - 2y = 0$ f) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$
10. Trazar las curvas correspondientes a cada ecuación polar, considerando en lo posible:
- Intersecciones con el eje polar y con el eje normal,
 - Simetría con el eje polar, con el eje normal y con el polo,
 - Extensión del lugar geométrico,
 - Tabla de valores (para los ángulos θ necesarios),
 - Ecuación rectangular.
- a) $\rho^2 = 2 \cos(2\theta)$ c) $\rho = \operatorname{sen} \theta$ e) $\rho = \cos \theta$
b) $\rho^2 = \operatorname{sen}(2\theta)$ d) $\rho = -2 \operatorname{sen} \theta$ f) $\rho = -\frac{1}{2} \cos \theta$
11. Encontrar los puntos de intersección entre cada grupo de curvas. Verificarlo analíticamente.
- a) $\rho = \operatorname{sen}(2\theta)$ y $\rho = 0,5$
b) $\rho = \operatorname{sen} \theta$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$
c) $\rho = 2 \cdot \cos \theta$ y $\rho = \sec \theta$
d) $\rho = \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} \theta$ y $\rho = (1 + \cos \theta)$
12. Deducir la fórmula en coordenadas polares para calcular la distancia entre dos puntos del plano. Graficar.



II) COORDENADAS ESFÉRICAS - EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) Dados los siguientes puntos en coordenadas esféricas,

$$P\left(1, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) \quad Q\left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

- Hallar sus coordenadas cartesianas
- Graficarlos y mostrar que la posición de dichos puntos en \mathcal{R}^3 es la misma.

2) Hallar las coordenadas esféricas de los puntos $P(3, -4, 0)$; $Q(6, 3, 2)$, dados en coordenadas cartesianas.

3) Transformar las siguientes ecuaciones rectangulares en su equivalente en coordenadas esféricas:

a) $x+4y=9$ b) $x^2+y^2+2z^2=4$ c) $x^2+y^2=4$ d) $x^2+y^2-z^2=0$

4) Hallar en cada caso la ecuación rectangular de las siguientes ecuaciones, dadas en coordenadas esféricas. Identifique el lugar geométrico en \mathcal{R}^3 .

a) $r=3$ b) $\theta = \frac{\pi}{4}$ c) $r-2\cos\varphi=0$ d) $r \sin\varphi \sin\theta=7$

III) COORDENADAS CILÍNDRICAS - EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) Dados los siguientes puntos en coordenadas cilíndricas,

$$P\left(1, \frac{\pi}{4}, -2\right) \quad Q\left(2, \frac{2\pi}{3}, 4\right)$$

- Hallar sus coordenadas cartesianas
- Graficarlos y mostrar que la posición de dichos puntos en \mathcal{R}^3 es la misma.

2) Hallar en cada caso la ecuación equivalente en coordenadas cilíndricas.

a) $2x=y$ b) $x^2+y^2-2y=0$ c) $x^2+y^2+z^2=4$ d) $x^2-z^2=4$ e) $y^2=4z$

3) Transformar en ecuaciones cartesianas las siguientes ecuaciones en coordenadas cilíndricas. Identifique el lugar geométrico que representa la ecuación en cada caso.

a) $r=2$ b) $r=z$ c) $r=4\cos\theta$ d) $r(\cos\theta+\sin\theta)-z=4$ e) $r^2 \sin^2\theta=4(1-z^2)$



I) RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA COORDENADAS POLARES:

1. a) $y+2=0$ Recta paralela al eje x. b) $x-3=0$ Recta paralela al eje y.
 c) $(x-5)^2 + y^2 = 25$ Circunferencia. d) $x-y-2=0$ Recta.
 e) $x^2 + y^2 = 25$ Circunferencia. f) $x+y=0$ Recta que pasa por el origen.
 g) $x^2 + (y-2)^2 = 4$ Circunferencia. h) $x^2 + y^2 - 9x = 0$ Circunferencia.
 i) $3x^2 + 4y^2 - 4x - 4 = 0$ Elipse. j) $y^2 = 4x^3$
 k) $y^2 = 8x + 16$ Parábola.

2) $P_1(0;0); P_2(\frac{3}{2}; \frac{\pi}{3}); P_3(\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\pi);$ 3) $P_1(4; \frac{\pi}{2}); P_2(4; \frac{3}{2}\pi)$

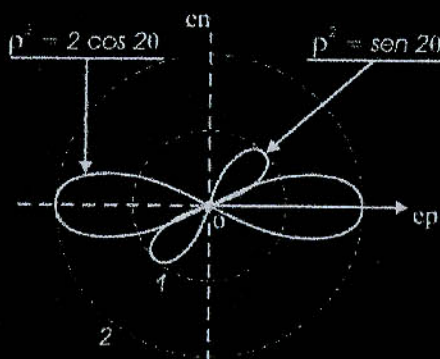
5.a) F; 5.b) V; 5.c) F; 5.d) F; 5.e) F; 5.f) F;

6. a) $(\sqrt{2}; \pi/4)$ b) $(1; \pi/2)$ c) (1; 0) d) $(\sqrt{2}; 3\pi/4)$
 e) $(\sqrt{5}; 2\pi + \arctg(-2)) \approx (\sqrt{5}; 296,56^\circ)$ f) $(\sqrt{2}; 5\pi/4)$ g) $(5; \arctg \frac{3}{4}) \approx (5; 36,86^\circ)$

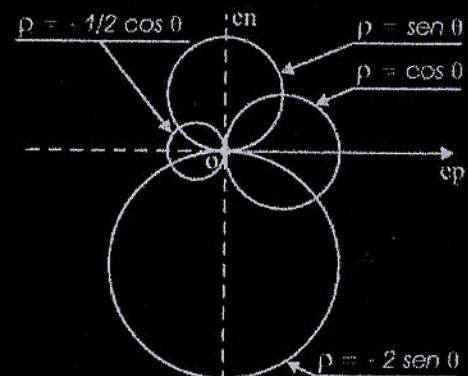
8. a) $x^2 + y^2 = r^2$ b) $y = [\text{tg}(k)]x$ Recta. c) $x = a$ d) $y = a$ e) $(y - \frac{a}{2})^2 + x^2 = (\frac{a}{2})^2$
 f) $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$ g) $y = \frac{x^2 - 4}{4}$ h) $y^2 = 4 - 4x$

9. a) $\rho = r$ b) $\rho = \frac{3}{4\text{sen}\theta - 5\text{cos}\theta}$ c) $\rho = 2\sqrt{\sec(2\theta)}$ d) $\rho = 2\sqrt{\text{cosec}(2\theta)}$ e) $\rho = 2\text{sen}\theta$ f) $\rho = 2\text{cos}\theta$

10. Lemniscatas



Circunferencias





11.a) $P_1\left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{12}\right); P_2\left(\frac{1}{2}; \frac{5\pi}{12}\right); P_3\left(\frac{1}{2}; \frac{13\pi}{12}\right); P_4\left(\frac{1}{2}; \frac{17\pi}{12}\right);$
 $P_5\left(\frac{1}{2}; \frac{7\pi}{12}\right); P_6\left(\frac{1}{2}; \frac{11\pi}{12}\right); P_7\left(\frac{1}{2}; \frac{19\pi}{12}\right); P_8\left(\frac{1}{2}; \frac{23\pi}{12}\right)$

11.b) $P_1 = (0; 0); P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4}\right);$ $O(0; \theta)$ es solución, y el valor de θ será determinado según sea el caso.

11.c) $P_1 = \left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right); P_2 = \left(\sqrt{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$

11.d) $P_1 = \left(\frac{3}{2}; \frac{\pi}{3}\right); P_2 = (0; \pi)$

II) RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA COORDENADAS ESFÉRICAS:

3.a) $\operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{4}, \theta = 165^\circ 57'$ 3.b) $r^2 = \frac{4}{1 + \cos^2 \theta}$ 3.c) $r^2 = \frac{4}{\operatorname{sen}^2 \theta}$ 3.d) $\varphi = \frac{\pi}{4}$
 4.a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 4.b) $y - x = 0$ 4.c) $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ 4.d) $y = 7$

III) RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA COORDENADAS CILÍNDRICAS:

2.a) $\theta = 63^\circ 26'$ 2.b) $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ 2.c) $r = \sqrt{4 - z^2} \quad -2 < z < 2$ 2.d) $r^2 = \frac{4 + z^2}{\cos^2 \theta}$ 2.e) $r^2 = \frac{4z}{\operatorname{sen}^2 \theta}$
 3.a) $x^2 + y^2 = 4$ superficie cilíndrica recta circular 3.b) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ Superficie cónica circular
 3.c) $x^2 + y^2 - 4x = 0$ Superficie cilíndrica recta circular trasladada; 3.d) $x + y - z - 4 = 0$ Plano
 3.e) $y^2 + 4z^2 = 4$ Superficie cilíndrica recta elíptica

Bibliografía Consultada:

- Elementos de Cálculo Diferencial e Integral -- Tomo I (M. Sadosky - R. de Guber)
- Cálculo y G. Analítica -- Tomo I (R. Larson - R. Hostetler)

El presente ha sido recopilado o desarrollado por el Ing. Roberto Vignolo y la Prof. Silvina Martinez y transcripto por éstos, el Ing. Carlos Toniolo y el Sr. Gustavo Sanchez.



SUPERFICIES

EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) Determinar la ecuación de la superficie esférica tal que:

- Su centro es $C(0, 0, 0)$ y su radio $r = 9$;
- Su centro es $C(5, -3, 7)$ y radio es $r = \sqrt{2}$;
- Los puntos $A(2, -3, 5)$ y $B(4, 1, -3)$ son extremos de un diámetro;
- Su centro es $C(-4, -4, -2)$ y además pasa por el origen de coordenadas;
- Su radio es $r = 3$, y en el punto $P(1, 1, -3)$ es tangente al plano $\pi_1) x + 2y + 2z + 3 = 0$;
- Su centro es $C(-4, -2, 3)$ y además es tangente al plano yz ;
- Su centro es $C(0, 0, 0)$ y además es tangente al plano $\pi_1) 16x - 15y - 12z + 75 = 0$;

h) Sea tangente a los planos: $\pi_1) x - 2z - 8 = 0$; $\pi_2) 2x - z + 5 = 0$ y su centro se halla en la recta $r) \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$.

2) Hallar la ecuación del plano que es tangente a la superficie $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 24$ en el punto $P(-1, 3, 0)$.

3) Hallar las coordenadas del punto de contacto entre la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ y su plano tangente $\pi) 2x - 6y + 3z = 49$.

4) Determinar y describir el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de sus distancias a los planos $\pi_1) x + 4y + 2z = 0$; $\pi_2) 2x - y + z = 0$; $\pi_3) 2x + y - 3z = 0$ es 10.

5) Determinar, describir y graficar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al eje y sea el triple de la correspondiente al eje z .

6) Determinar la ecuación y graficar la superficie cilíndrica circular recta con generatriz paralela al eje y ; directriz: circunferencia ubicada en un plano paralelo al xz , con centro $C(0; k; 1)$ con $k \in \mathbb{R}$ y radio $r = 1$.

7) Las curvas planas: $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ z = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + 9z^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y^2 + 4z^2 = 4 \\ x = 0 \end{cases}$ pertenecen a un lg. Determinar su ecuación. Describir. Graficar.

8) Las curvas planas: $\begin{cases} x^2/2 + y^2/2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2/2 + z^2/3 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y^2/2 + z^2/3 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ pertenecen a un lg. Determinar su ecuación. Describir. Graficar.

9) Determinar la ecuación de la superficie cilíndrica parabólica recta con generatriz paralela al eje y y directriz: parábola de vértice $V(0; 0; 0)$; eje de simetría coincidente con el z ; $l = 6$. Graficar.



10) Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie cilíndrica parabólica recta de ecuación $x^2 = 6z$ y que pasa por el punto $P(0; 8; 0)$. Describir y graficar.

11) Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie cilíndrica parabólica recta de ecuación $z^2 - 3x - 8z + 10 = 0$ que pasa por el punto $P(1; 1; 1)$. Describir y graficar.

12) Dada la superficie de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = cz$ (con $c < 0$), determinar:

- Intersecciones con ejes coordenados
- Trazas
- Intersecciones con planos $z = k$ para: $c_1) k = 0$; $c_2) k > 0$; $c_3) k < 0$
- Graficar

13) Analizar, determinar y describir el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias al plano yz son el doble de la distancia al punto $P_1(1, -2, 2)$.

14) Determinar, describir y graficar el lg mas amplio que representa:

- $x^2 + z^2 - y = 4$;
- $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 6x - 6y = 0$;
- $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 6x - 6y + 6 = 0$;
- $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 6x - 6y + 7 = 0$;
- $xy = 0$ en \mathbb{R}^3 ;
- $xy = 0$ en \mathbb{R}^2 ;
- $xyz = 0$;
- $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 5 = 0$;
- $4x^2 + y^2 - 4z = 0$;
- $x^2 - 4x = 0$ en \mathbb{R}^3
- $x^2 - 4x = 0$ en \mathbb{R}^2
- $xy - y^2 = 0$ en \mathbb{R}^3
- $xy - y^2 = 0$ en \mathbb{R}^2 ;
- $4z^2 + 4y^2 - x^2 = 0$;
- $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z = 18$;
- $x^2 + z^2 = 25$ en \mathbb{R}^3 ;
- $x^2 + z^2 = 25$ en \mathbb{R}^2 ;
- $x^2 + z^2 = 2z$ en \mathbb{R}^3 ;
- $x^2 = 6z$ en \mathbb{R}^3 ;
- $x^2 = 6z$ en \mathbb{R}^2 ;
- $y^2 / 25 + z^2 / 16 = 1$ en \mathbb{R}^3 ;
- $y^2 / 25 + z^2 / 16 = 1$ en \mathbb{R}^2 ;
- $x^2 + 4y^2 + 4 = 0$ en \mathbb{R}^3 ;
- $x^2 - z^2 = 0$ en \mathbb{R}^3 ;
- $x^2 - z^2 = 0$ en \mathbb{R}^2 ;
- $4z^2 - 16 = 0$ en \mathbb{R}^3 ;
- $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$;
- $x^2 - y^2 - z^2 = 1$;
- $4x^2 + 4y^2 - z^2 - 16x + 8y - 6z = 17$;
- $2x^2 - 3y^2 - 4z^2 - 12x - 6y = 21$;
- $16z^2 - 4x^2 - 16y = 0$.

15) Realizar la discusión completa, describir el lugar geométrico que representa y graficar cada una de las siguientes ecuaciones:

- $(x-3)^2 + (y+1)^2 - (z-1)^2 = -9$;
- $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6y + 6z + 6 = 0$;
- $2x^2 - 3y^2 + 4z^2 - 8x - 6y + 12z = 10$;
- $9z^2 - 4y^2 - 36x^2 - 36 = 0$.



RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1.a) $x^2 + y^2 + z^2 = 81$; 1.b) $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 2$; 1.c) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21$;

1.d) $(x+4)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 36$;

1.e) $lg_1) x^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 9$; $lg_2) (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$;

1.f) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 4y - 6z + 13 = 0$; 1.g) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

1.h.1) $(x+2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 16/5$; 1.h.2) $(x+2)^2 + y^2 + (z+11)^2 = 144/5$

2) $\pi) 2x - y + z + 5 = 0$; 3) P (2; -6; 3);

4) Superficie esférica con centro C(0; 0; 0) y radio $r = \sqrt{10}$: $x^2 + y^2 + z^2 = 10$;

5) Superficie cónica elíptica de vértice V (0; 0; 0) y eje \equiv con z: $9x^2 + 8y^2 - z^2 = 0$;

6) $x^2 + z^2 = 2z$; 7) Elipsoide con centro C(0; 0; 0) y eje mayor \equiv x: $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$;

8) Elipsoide de revolución: $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 6$; 9) $lg_1) x^2 + 6z = 0$; $lg_2) x^2 - 6z = 0$;

10) $z = 0$; 11) $\pi) x + 2z - 3 = 0$;

12.a) O (0; 0; 0);

12.b) $lg \cap$ con plano xy \Rightarrow O (0; 0; 0);

$$lg \cap \text{ con plano } xz \Rightarrow \begin{cases} z = x^2/ca^2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (parábola de C (0; 0; 0) y ef } \equiv z);$$

$$lg \cap \text{ con plano } yz \Rightarrow \begin{cases} z = y^2/cb^2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ (parábola de C (0; 0; 0) y ef } \equiv z);$$

12.c.1) Si $k=0 \Rightarrow$ O (0; 0; 0); 12.c.2) Si $k>0 \Rightarrow$ No interseca;

12.c.3.1) Si $k<0 \wedge$ si $a^2 = b^2 \Rightarrow$ circunferencias: $\begin{cases} x^2 + y^2 = kca^2 \\ z = k \end{cases}$;

12.c.3.2) Si $k<0 \wedge$ si $a^2 \neq b^2 \Rightarrow$ elipses: $\begin{cases} x^2/cka^2 + y^2/ckb^2 = 1 \\ z = k \end{cases}$;

13) $\frac{(x-4/3)^2}{4/9} + \frac{(y+2)^2}{1/3} + \frac{(z-2)^2}{1/3} = 1$ Elipsoide de Revolución de centro C (4/3; -2; 2)



- 14.a) Paraboloide de revolución de vértice $V(0; -4; 0)$ y eje $\equiv y$;
- 14.b) Elipsoide de revolución; eje paralelo al x ; centro $C(0; 1; -1)$; ecuación: $\frac{x^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(z+1)^2}{2} = 1$;
- 14.c) $P(-1; 1; 0)$; 14.d) No representa lg; 14.e) Plano xy U plano xz U plano yz : $x=0 \vee y=0 \vee z=0$;
- 14.f) Eje x U eje y : $x=0 \vee y=0$; 14.g) Plano $xy \vee$ plano $xz \vee$ plano yz ; 14.h) No representa lg;
- 14.i) Paraboloide elíptico de vértice $V(0;0;0)$ y eje $\equiv z$; 14.j) plano $yz \vee$ plano paralelo al yz de abscisa $x=4$;
- 14.k) eje $y \vee$ recta paralela al eje y de abscisa $x=4$; 14.l) plano $x=y \vee$ plano xz ; 14.m) eje $x \vee$ recta $x=y$;
- 14.n) Superficie cónica circular de vértice $V(0;0;0)$; eje coincidente con el x ; una directriz: $(z^2+y^2=1; x=2)$
- 14.o) Superficie esférica de centro $C(2; 1; -1)$ y radio $r = 2\sqrt{6}$;
- 14.p) Superficie cilíndrica circular recta con eje $\equiv y$; generatriz paralela al eje y ; directriz: circunferencia ubicada en un plano paralelo al xz ; de radio $r = 5$ y centro $C(0; y; 0)$, donde $y \in \mathbb{R}$;
- 14.q) Circunferencia ubicada en el plano xz ; con centro $C(0; 0)$ y radio $r = 5$;
- 14.r) Superficie cilíndrica recta circular con generatriz paralela al eje y ; directriz paralela al plano xz [una directriz: $x^2+(z-1)^2=1; y=0$];
- 14.s) Superficie cilíndrica parabólica recta con generatriz paralela al eje y ; directriz: parábola ubicada en un plano paralelo al xz y vértice ubicado en el eje y ;
- 14.t) Parábola ubicada en el plano xz ; vértice $V(0; 0)$ y eje $\equiv z$;
- 14.u) Superficie cilíndrica elíptica recta con generatriz paralela al eje x ; directriz: elipse ubicada en un plano paralelo al yz y centro ubicado en el eje x ; 14.v) Elipse ubicada en el plano yz ; centro $C(0; 0)$; y ef $\equiv y$; 14.w) No representa lg;
- 14.x) plano $x=z \vee$ plano $x=-z$; 14.y) Recta $x=z \vee$ recta $x=-z \vee$ punto $P(0; 0)$;
- 14.z) Plano paralelo al xy que corta al eje z en $z=4 \vee$ plano paralelo al xy que corta al eje z en $z=-4$;
- 14.aa) Elipsoide con centro $C(0; 0; 0)$ y eje mayor $\equiv x$;
- 14.bb) Hiperboloide de revolución de dos hojas con centro $C(0; 0; 0)$ y eje $\equiv x$;
- 14.cc) Hiperboloide elíptico de una hoja con eje paralelo al z ;
- 14.dd) Hiperboloide elíptico de dos hojas con eje $\equiv x$; 14.ee) Paraboloide hiperbólico de eje $\equiv y$;
- 15.a) Hiperboloide circular de dos hojas con eje paralelo al z ; centro $C(3; -1; 1)$; 15.b) $P(0; 1; -1)$
- 15.c) Hiperboloide elíptico de una hoja con eje coincidente con el eje y
- 15.d) Hiperboloide elíptico de dos hojas con eje coincidente con el eje z

Bibliografía Consultada:

* Geometría Analítica – (C. Lehmann)

* Introducción al Álgebra Lineal – (H. Anton)

El contenido del presente tema ha sido recopilado o desarrollado por el Ing. Roberto Vignolo, y transcrito por éste, por la Sta. Claudia Arrieti y por la Sta. Carolina Robson (CEUT).



COORDENADAS CARTESIANAS

EJERCITACIÓN PROPUESTA:

- 1) Representar gráficamente los puntos $P(-1; 1)$ y $Q(3; 2)$. Calcular la distancia entre ellos, y determinar el punto medio del segmento \overline{PQ} .
- 2) Dado dos puntos $A(7; 8)$ y $B(x_B; y_B)$, y el punto $M(4; 3)$ que divide al segmento rectilíneo \overline{AB} en dos partes iguales, determinar analíticamente las coordenadas del punto B. Graficar.
- 3) Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto $Q(2; -1)$. Si la ordenada del otro extremo es 3, hallar analíticamente su abscisa. Graficar.
- 4) Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $A(-1; 1)$ y $B(3; 1)$. Hallar analíticamente:
 - a- las coordenadas del tercer vértice
 - b- la superficie del triángulo.
 Graficar.
- 5) Utilizando la fórmula del punto medio, determinar los tres puntos que dividen en cuatro partes iguales al segmento rectilíneo que une $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$.
- 6) Utilizando la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, determinar si los puntos:
 - a) $A(0; -4)$, $B(2; 0)$ y $C(3; 2)$; b) $A(-2; 1)$, $B(2; -2)$ y $C(-1; 0)$ son o no colineales. Graficar.
 (Sugerencia: Recordar las relaciones entre las longitudes de los lados de un triángulo)
- 7) Verificar que todo ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.
- 8) Hallar gráfica y analíticamente el punto $C(x_c; y_c)$ perteneciente al segmento rectilíneo \overline{AB} que dista de $A(1; 1)$ la tercera parte de lo que dista de $B(5; 4)$.
- 9) Determinar el lugar geométrico (lg) representado mediante el punto genérico $P(x; 2)$. Graficar.
- 10) Determinar la relación que existe entre "x" e "y" de manera que $P(x; y)$ equidiste de los puntos $A(2; 1)$ y $B(3; -2)$. Describir el lugar geométrico (lg) que representa.
- 11) Determinar la ecuación que represente al lugar geométrico de los puntos de \mathcal{R}^2 que satisfacen la propiedad común de situarse a una distancia r de un punto fijo $C(h; k)$. Interpretar geoméricamente.
- 12) Determinar si a) $A(2; 3)$ y/o b) $B(-1; 4)$ pertenece/n a la circunferencia de centro $C(-1; 0)$ y radio $r=4$.
- 13) Representar gráficamente los puntos $P(1; 2; 3)$ y $Q(0; 1; 2)$.
- 14) Graficar el triángulo ABC, siendo $A(1; -4; 2)$, $B(1; 1; 2)$ y $C(4; 7; -5)$.
- 15) Graficar el triángulo ABC, siendo $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ y $C(0; 0; 2)$.
- 16) ¿Cuál es el valor de: a) la cota; b) la abscisa; c) la ordenada del origen de coordenadas en \mathcal{R}^3 ?
- 17) Graficar el plano que pasa por $P(4; -7; -4)$ y que sea paralelo al plano yz.
- 18) Graficar la recta que pasa por $P(-7; 2; 3)$ y que sea paralela al eje x.



19) Determinar la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos del espacio tridimensional, referidos a una terna de coordenadas cartesianas.

20) Dado el punto $P(3; -4; 5)$, hallar la distancia de P al: a) eje x ; b) eje y ; c) eje z ; d) plano xz .

21) Un punto P dista del plano xy 3 unidades, del plano yz 2 unidades y del plano xz 6 unidades. Determinar la distancia de P al origen de coordenadas.

22) Determinar la fórmula para calcular las coordenadas del punto medio de un segmento rectilíneo en \mathcal{R}^3 .

23) Dado los puntos $A(-2; 1; 4)$ y $B(3; 2; -1)$, hallar los puntos que dividen al segmento rectilíneo \overline{AB} en tres partes iguales.

24) Describir el mas amplio lugar geométrico (lg) de los puntos de \mathcal{R}^3 que tienen cota $= -5$. Graficar.

25) ¿Cuál es el mas amplio lugar geométrico (lg) cuyos puntos responden a la forma $Q(x; 2; z)$?. Graficar.

RESPUESTAS A EJERCITACIÓN PROPUESTA:

1) $M(1; 3/2); d = \sqrt{17}$	2) $B(1; -2)$
3) Dos soluciones: $x_1 = -1; x_2 = 5$	4) $C_1(1; 1+2\sqrt{3}); C_2(1; 1-2\sqrt{3}); S = 4\sqrt{3} M(1; 3/2); d = \sqrt{17}$
5) $M_1((3x_1+x_2)/4; (3y_1+y_2)/4)$ $M_2((x_1+3x_2)/4; (y_1+3y_2)/4)$ $M((x_1+x_2)/2; (y_1+y_2)/2)$	6) a) sí; b) no
8) $C(2; 7/4)$	9) $y = 2$
10) $y = 1/3 x - 4/3$	11) $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$; Ecuación de la circunferencia de centro $C(h, k)$ y radio r .
12) a) $A \notin \text{lg}$. b) $B \in \text{lg}$.	16) a) $z = 0$; $x = 0$; c) $y = 0$
19) $d(P_1; P_2) = \sqrt{\frac{P_1 P_2}{2}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$	20) a) $d(P; x) = \sqrt{41}$; b) $d(P; y) = \sqrt{34}$; c) $d(P; z) = 5$; d) $d(P; xz) = 4$
21) $d = 7$	22) $M[(x_1+x_2)/2; (y_1+y_2)/2; (z_1+z_2)/2]$
23) $P_1(-1/3; 4/3; 7/3); P_2(4/3; 5/3; 2/3)$	24) $z = -5$
25) $y = 2$	

Bibliografía Consultada:

- * Cálculo y Geometría Analítica – Tomo 1 – (R. Larson – R. Hostetler – B. Edwards)
- * Geometría Analítica – (C. Lehmann)
- * Apuntes de la Cátedra redactados por: Ing. A. Goncibatt e Ing. C. Toniolo

El contenido del presente tema ha sido recopilado o desarrollado, y transcrito por el Ing. Roberto Vignolo.

21 bis

2/F+1

COORDENADAS CARTESIANAS

GUÍA DE ACTIVIDADES PRÁCTICAS

Breves Consideraciones del Tema

Abscisa de un punto de un eje: Si consideramos ~~un par de semirectas~~ un par de semirectas opuestas) ubicadas en el plano, podemos determinar un punto **O** llamado origen de las semirectas opuestas.

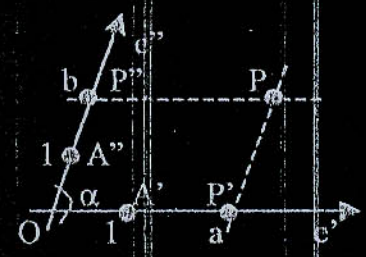
Si consideramos un segmento \overline{OA} (unidad), puede determinarse una correspondencia biunívoca entre los puntos del eje y \mathbb{R} (conjunto de los números reales), es decir que a cada punto **P** del eje le corresponde un número real "a" (denominado abscisa del punto **P**) y viceversa.



Se conviene representar los puntos correspondientes a abscisas positivas, a la derecha de **O** (semieje positivo), y viceversa.

Coordenadas Cartesianas de un punto de un plano: Un par de ejes pertenecientes al espacio bidimensional (a un plano), que además se intersectan en sus correspondientes puntos **O**, dividen a dicho plano en cuadrantes.

Si desde un punto **P** del plano trazamos paralelas a dichos ejes, los intersectarán en **P'** y **P''**, determinando así las abscisas "a" y "b".



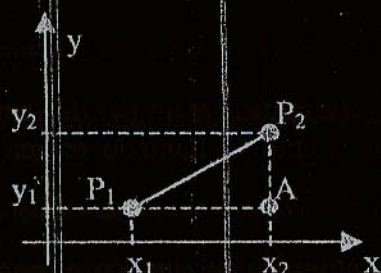
De esta manera se hace corresponder a cada punto del plano un par ordenado de números reales, (a; b), y viceversa (correspondencia biunívoca). Los números reales "a" y "b" se denominan **Coordenadas Cartesianas de P**.

- a : abscisa de P en el eje e' o simplemente **abscisa de P**.
- b : abscisa de P en el eje e'' u **ordenada de P**.

Si el ángulo α es recto, el sistema se denomina "sistema ortogonal de coordenadas cartesianas", caso contrario "sistema oblicuo de coordenadas cartesianas".

Si las unidades consideradas en cada eje son iguales ($|\overline{OA}| = |\overline{OA''}|$), el sistema se denomina "ortonormal".

Distancia entre dos puntos del plano, referidos a un sistema de Coordenadas Cartesianas ortogonal:



Datos: $P_1(x_1; y_1); P_2(x_2; y_2)$

Incógnita: $d(P_1; P_2)$

Resolución:

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $P_1 A P_2$

$$d(P_1; P_2) = \overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

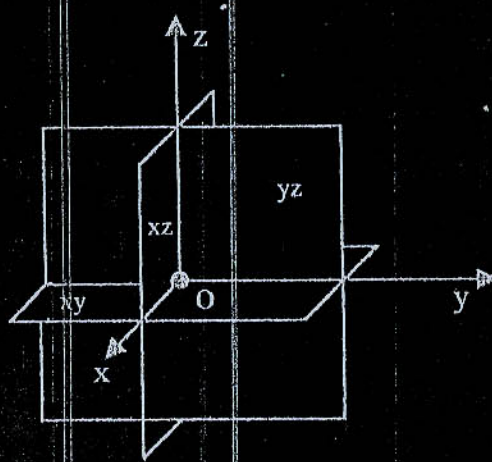
CLASE PRÁCTICA

El alumno debe:

- 1) Representar gráficamente los puntos $P(-1; -1)$ y $Q(3; 2)$. Calcular la distancia entre ellos, y determinar el punto medio del segmento \overline{PQ} .
- 2) Dado dos puntos $A(7; 8)$ y $B(x_B; y_B)$, y el punto $M(4; 3)$ que divide al segmento rectilíneo \overline{AB} en dos partes iguales, determinar analíticamente las coordenadas del punto B. Graficar.
- 3) Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto $Q(2; -1)$. Si la ordenada del otro extremo es 3, hallar analíticamente su abscisa. Graficar.

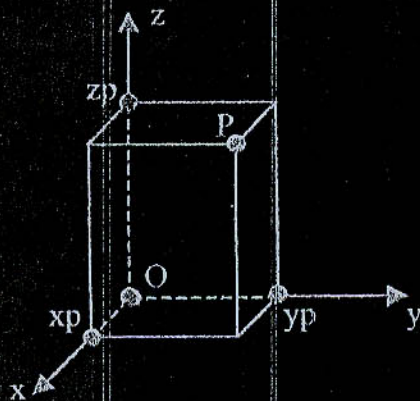
Coordenadas Cartesianas de un punto del espacio de tres dimensiones: Consideremos

en el espacio de tres dimensiones, tres planos (en particular perpendiculares entre sí) que se intersectan en un punto O (dividen al espacio en octantes).

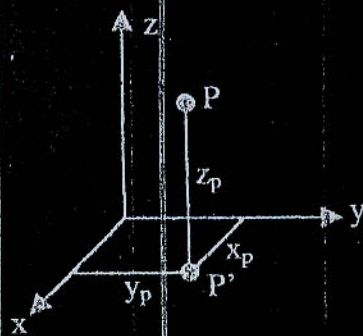


Las intersecciones de los planos determinan una terna de ejes perpendiculares dos a dos $(x; y; z)$. Dichos ejes se denominan “ejes coordenados”, y los planos “planos coordenados” $(xy; xz; yz)$.

Los planos paralelos a los coordenados que pasan por un punto P del espacio tridimensional, intersectarán a los ejes, determinando así las abscisas “ x_p ”, “ y_p ”, “ z_p ”.



De esta manera se hace corresponder a cada punto del espacio tridimensional una terna ordenada de números reales, $(x_p; y_p; z_p)$, y viceversa (correspondencia biunívoca).



Los números reales “ x_p ”, “ y_p ”, “ z_p ” se denominan **Coordenadas Cartesianas de P.**

x_p : abscisa de P.

y_p : ordenada de P.

z_p : cota de P.

Definición de lugar geométrico: Se denomina lugar geométrico (lg) a todo conjunto de puntos del espacio bi o tridimensional que satisface una determinada propiedad.

Problemas fundamentales de la Geometría Analítica:

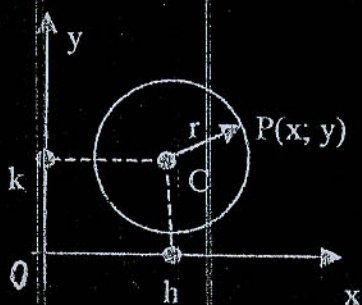
Problema 1: Enunciada la propiedad común del conjunto de puntos que determinan un lg, encontrar la ecuación que exprese la relación entre las coordenadas de esos puntos e interpretar geoméricamente la solución obtenida.

La ecuación del lg es una ecuación entre las variables "x" e "y" (espacio \mathbb{R}^2) o entre las "x", "y" y "z" (espacio \mathbb{R}^3) que representan las coordenadas tales que cumplen las siguientes condiciones:

- a- Las coordenadas de todo punto del lg, satisfacen a la ecuación.
- b- Recíprocamente, todo punto cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación del lg, pertenece al mismo.

Es decir, un punto $P(x, y)$ pertenece al lugar geométrico si y solo si sus coordenadas satisfacen su ecuación.

Ejemplo: Hallar el lugar geométrico (en \mathcal{R}^2) que represente al conjunto de puntos que satisfacen la propiedad común de equidistar una distancia r de un punto fijo $C(h; k)$.



Consideremos un punto $P(x; y)$ genérico (representante de todos los puntos del lg a hallar), y según lo solicitado en el enunciado:

$$d(P; C) = \overline{PC} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$\Rightarrow \boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

Ecuación de la circunferencia de centro $C(h; k)$ y radio r .

Determinaremos si $A(2; 3)$ y/o $B(-1; 4)$ pertenece/n a la circunferencia de centro $C(-1; 0)$ y radio 4.

$$C(-1; 0) \text{ y } r = 4 \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 16 \quad (1)$$

Un punto $P(x; y)$ pertenece al lg si y solo si sus coordenadas satisfacen su ecuación \Rightarrow

a) $A(2; 3) \in \text{lg} ? \Rightarrow$ En (1) : $(2+1)^2 + 3^2 \neq 16 \Rightarrow A \notin \text{lg}$

b) $B(-1; 4) \in \text{lg} ? \Rightarrow$ En (1) : $(-1+1)^2 + 4^2 = 16 \Rightarrow B \in \text{lg}$

Problema 2: Dada una ecuación algebraica, determinar el lg que representa. Esto no es tan sencillo. Para resolver el problema se efectúa lo que se denomina discusión de la ecuación (determinación de las intersecciones con ejes coordenados, planos coordenados (si el lg se desarrolla en \mathcal{R}^3), simetrías (respecto a ejes coordenados, origen de coordenadas, etc.), extensión, confección de tablas de valores, etc., finalizando con el trazado de la gráfica correspondiente (en la medida de lo posible).

ALGEBRA y GEOMETRÍA ANALÍTICA

APLICACIONES

20/03/06

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

La formulación matemática de un problema requiere la identificación de las variables que intervienen en su modelización así como la descripción de las relaciones existente entre ellas. Cuando estas relaciones vienen determinadas por ecuaciones de primer grado, es necesario plantear un sistema de ecuaciones lineales para la resolución del problema. Por ejemplo, analicemos el siguiente problema:

Un espía sabe que en un aeropuerto hay estacionado 60 aviones entre cazas y bombarderos. El agente conoce además que en el aeropuerto se han introducido 200 cohetes para equipar a estos 60 aviones, de manera que cada caza lleva 6 de dichos cohetes y cada bombardero 2. ¿Cuál es el número de cazas y bombarderos que hay en el aeropuerto?

Solución:

Las incógnitas o variables, son el número de cazas y bombarderos estacionados en el aeropuerto, que vamos a llamar x e y respectivamente, entonces se tiene que:

$$x + y = 60$$

Por otra parte, como cada caza va provisto de 6 cohetes y cada bombardero de 2, también ha de verificarse:

$$6 \cdot x + 2 \cdot y = 200$$

Así pues, los valores de x e y se obtienen a partir del sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 6x + 2y = 200 \end{cases}$$

Con un esquema de trabajo similar, encaremos la resolución de los siguientes problemas:

PROBLEMA N° 1: La suma de las tres cifras de un número es igual 6. La cifra de la centena es igual a la suma de las cifras de las unidades y decenas. Si se invierte el orden de las cifras, el número disminuye en 198 unidades. Calcular dicho número.

PROBLEMA N° 2: Se tienen 3 lingotes de 100 gramos cuya composición es la siguiente:

Lingotes	Composición		
	Oro	Plata	Cobre
1	20	30	50
2	30	40	30
3	40	50	10

¿Qué peso habrá de tomarse de cada uno de los tres lingotes para formar uno nuevo que contenga: 12 grs. de oro, 57 grs. de plata y 51 grs. de cobre.

PROBLEMA N° 3: Una empresa de camiones posee tres tipos de camiones. A, B y C. Los camiones están equipados para el transporte de dos tipos de maquinarias pesadas. El número de máquinas que puede transportar cada camión es:

CAMIONES	A	B	C
Clase 1	2	1	1
Clase 2	0	1	2

La firma consigue una orden para transportar 32 máquinas de la clase 1 y 10 máquinas de la clase 2. Se considera que la empresa exige que cada camión debe estar completamente cargado y el número exacto de máquinas pedidas es el que se debe despachar. La operación de cada tipo de camión tiene el mismo costo para la firma.

Determinar la solución más económica para cumplir la orden.

PROBLEMA N° 4: Un fabricante produce tres tipos de juguetes J_1, J_2, J_3 , donde cada uno está compuesto de tres partes principales: ruedas, ejes y cuerpo. Para elaborar un J_1 necesita 4 ruedas, 2 ejes y 1 cuerpo; para un J_2 requiere 3 ruedas, 2 ejes y 1 cuerpo; para un J_3 utiliza 2 ruedas, 1 eje y 1 cuerpo. A su vez, los materiales (en gramos) insumido por cada pieza están dados en la siguiente tabla:

	Rueda	Eje	Cuerpo
Acero	0	1	4
Plástico	0,6	0	1

- Si cuenta con 25 ruedas, 14 ejes y 10 cuerpos ¿cuántas unidades de cada juguete podrá fabricar?
- ¿Que cantidad de cada material necesitará?

PROBLEMA N° 5: Un productor de un insumo básico para jardinería, abastece a cuatro mayoristas: A, B, C y D, quienes han realizados sus pedidos guardando esta relaciones:

- A solicitó tanto como C y D juntos.
- La orden de B es de 100 unidades menos que las de A y C juntas.
- D solicitó 200 unidades menos que C.

Si la producción total existente es de 2800 unidades ¿como deberá distribuir las el productor entre los cuatro mayoristas.

PROBLEMA N° 6: En un estadio cubierto se lleva a cabo un espectáculo deportivo. Las entradas tienen tres precios diferentes, según las ubicaciones, y su venta anticipada.

En el primer día de venta se recaudan los montos que describimos:

- A la mañana \$ 2075 por 100 entradas de primera clase, 50 de segunda y 15 de tercera.
- A la tarde, \$ 2250, por 50, 100 y 100 entradas de primera, segunda y tercera clase, respectivamente.
- A la noche, \$5750 por la venta de 150, 100 y 500 entradas de primera, segunda y tercera clase respectivamente.

Hallar el precio de las entradas de cada clase.

ALGEBRA y GEOMETRÍA ANALÍTICA

APLICACIONES

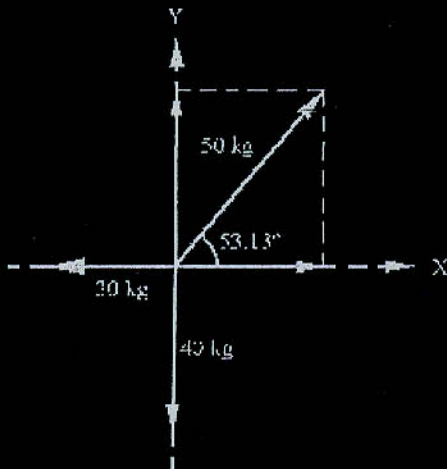
06//04/06

Vectores, recta y plano

PROBLEMA N° 1: Un objeto que pesa 120 N. se encuentra sobre la cabeza de un trípode, correspondiente al punto $P(0;0;4)$. Las patas apoyan en $Q_1(0;-1;0)$; $Q_2(3/2;1/2;0)$; $Q_3(-3/2;3/2;0)$. Hallar la fuerza que ejerce cada pata en el suelo.

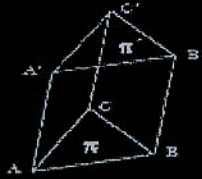
PROBLEMA N° 2: Dos fuerzas F_1 y F_2 están aplicadas a un punto. La magnitud de F_1 es 8 kg y su dirección forma 60° con el eje X en el primer cuadrante. La magnitud de F_2 es 5 kg y su dirección forma 53° con el eje X en el cuarto cuadrante. a) ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza resultante? b) ¿Cuál es la magnitud de esa resultante? c) ¿Cuál es la magnitud del vector diferencia $F_1 - F_2$?

PROBLEMA N° 3: Hállese la resultante del siguiente sistema de fuerzas: 40 kg verticalmente hacia abajo, 50 kg 53.13° por encima de la horizontal hacia la derecha, 30 kg horizontal y hacia la izquierda.



PROBLEMA N° 4: Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -1)$ y $A'(1, -1, \alpha)$. Calcula:

- La ecuación del plano π que pasa por los puntos A , B y C .
- El valor de α para que el plano π' , que contiene los puntos A' , B' y C' , diste una unidad del plano π .
- Para $\alpha=1$ el plano π' y el volumen del prisma.



PROBLEMA N° 5: Un niño tira de una cuerda sujeta a un trineo con una fuerza de 60N. La cuerda traza un Angulo de 40° con la horizontal.

Calcular:

- El valor de la fuerza que tiende a mover al trineo a lo largo del suelo.
- La fuerza que tiende a levantar verticalmente al trineo.

PROBLEMA N° 6: (Determinación de la dirección y velocidad real de un avión)

Un avión Boeing 737 mantiene en el aire una velocidad constante de 500 millas por hora en dirección sur. La velocidad de la corriente de chorro es de 80 millas por hora en dirección noreste.

- a) determinar un vector unitario con dirección noreste.
- b) Determinar un vector con magnitud de 80 unidades en la misma dirección que el vector unitario de la parte a)
- c) Determinar la velocidad real del avión respecto de la tierra.
- d) Determinar la dirección real del avión respecto del suelo.

PROBLEMA N° 7 (Cálculo de trabajo)

Determinar el trabajo realizado por una fuerza de 5 libras que actúa en la dirección $i + j$ al mover un objeto una distancia de 1 pie, de $(0, 0)$ hasta $(1, 0)$.

PROBLEMA N° 8 : Determinar las ecuaciones de las rectas que representan los límites de un terreno cuadrado por medio de los siguientes datos:

- a) Dos postes que se conservan y constituyen los vértices puestos, estando determinados los postes en el plano por las coordenadas $A(2 ; 1)$ y $C(4 ; 5)$.
- b) Tres postes que se han conservado; uno en el centro y dos en los vértices de uno de sus lados, estando determinados los postes en el plano por las siguientes coordenadas: el del centro $N(1 ; 6)$ y los laterales $A(5 ; 9)$ y $B(4 ; 2)$.

PROBLEMA N° 9 : En la planimetría de un campo, se observa que la cañería de un acueducto que lo atraviesa, tiene por referencia dos puntos de paso del mismo, cuyas coordenadas son: $A(1200 , 5000)$ y $B(-500 , 8000)$. Para llevar agua a un estanque, situado en el punto $C(9000 , 3000)$, se necesita conocer la menor longitud de cañería a utilizar y las coordenadas del punto del acueducto, en donde deberá realizarse el enlace.



ALGEBRA y GEOMETRÍA ANALÍTICA

APLICACIONES

30/04/06

CURVAS DE SEGUNDO GRADO (Cónicas)

PROPIEDADES FÍSICAS :

Antenas parabólicas:

Al girar una parábola sobre su eje, se obtiene una superficie de revolución llamada paraboloides. Estas superficies tienen muchas aplicaciones, principalmente en óptica y electrónica, ya que si un rayo de luz paralelo al eje choca contra el paraboloides, entonces se refleja hacia su foco, e inversamente, si un rayo de luz sale del foco y choca contra el paraboloides éste se refleja en la dirección de su eje. Esta propiedad, conocida como la propiedad de reflexión o propiedad óptica de la parábola, tiene muchas aplicaciones, por ejemplo, en los faros de los automóviles, las antenas parabólicas, los telescopios, los micrófonos direccionales, etc.

Los puentes colgantes:

Si un cable sostiene un peso homogéneo mucho mayor que el peso del propio cable, éste toma la forma de una parábola. Esta propiedad se utiliza en los puentes colgantes, como el de la Laguna Setúbal de Santa Fe.

Tiro parabólico:

La trayectoria de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo, describe una parábola abierta hacia abajo. Esta propiedad fue descubierta por Galileo en el siglo XVI.

Propiedad de reflexión de la elipse:

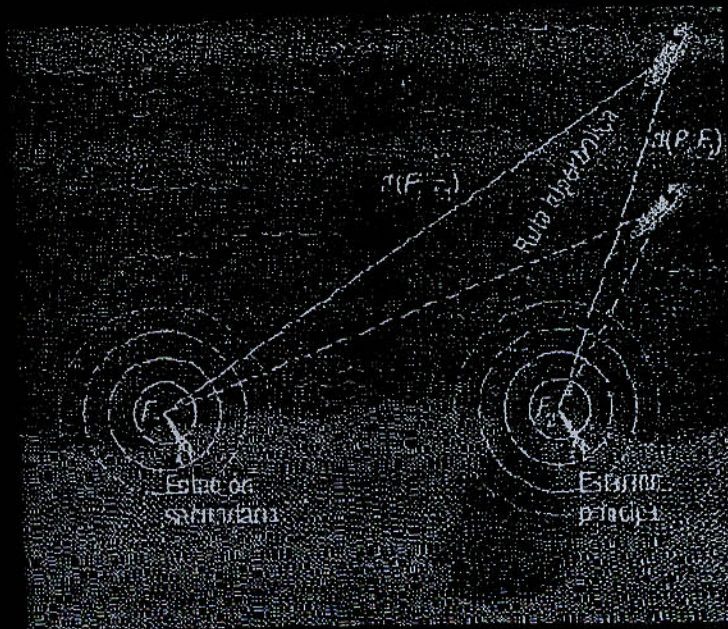
Un rayo que emana de un foco de la elipse se refleja en ella hacia el otro foco. Una de las aplicaciones de esta propiedad, es en ciertos hornos de laboratorio para fabricar cristales. En un recipiente en forma de elipsoide de revolución, cuya pared interior sea de un material altamente reflejante, se coloca una fuente de calor en uno de los focos de la elipse y el objeto que se desea calentar en el otro foco. Como todos los rayos que emanan de un foco se reflejan hacia el otro foco, después de un tiempo, el segundo foco está extremadamente caliente.

Movimiento Planetario – KEPLER:

Los planetas se mueven en órbitas elípticas, uno de cuyos focos es el Sol.

Sistema de navegación de largo alcance (LORAN)

En el sistema de navegación de largo alcance (LORAN, por sus siglas en inglés), una estación principal de radio y una estación secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en el mar.



Aunque un barco recibe las dos señales, por lo regular se halla más cerca de una de las dos estaciones y, por lo tanto, hay cierta diferencia en las distancias que recorren las dos señales, lo cuál se traduce en una pequeña diferencia de tiempo entre las señales registradas. Mientras la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia de las dos distancias también será constante. Si el barco sigue una ruta que mantenga fija la diferencia de tiempo, seguirá la trayectoria de una hipérbola cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones de radio. Así que para cada diferencia de tiempo se obtiene una trayectoria hiperbólica diferente, cada una llevando al barco a una posición distinta de la costa. Las cartas de navegación muestran las diferentes rutas hiperbólicas correspondientes a diferencias de tiempo distintas.

Problema N° 1: (*Geometría Analítica – Oteyza- Lam..Problema n° 21 – pag 241*)

Un jugador de béisbol lanza una pelota desde una altura de 2 metros sobre el nivel del suelo y ésta cae a una distancia de 50 metros de él, medida horizontalmente. Si el jugador se encuentra en el origen de coordenadas y la altura máxima que alcanza la pelota es de 20 metros ¿ a que distancia del jugador, medida horizontalmente, alcanza dicha altura?

Problema N° 2: (*Geometría Analítica – Oteyza- Lam..Problema n° 1 – pag 206*)

Un puente tiene una longitud de 160 metros. El cable que lo soporta tiene la forma de una parábola. Si el puntal en cada uno de los extremos tiene una altura de 25 metros ¿ cual es la ecuación de la parábola?

Problema N° 3: (*Geometría Analítica – Oteyza- Lam..Problema n° 8 – pag 206*)

Un diseñador de automóviles desea diseñar un faro que tenga 16 centímetros de diámetro. La lámpara que va a utilizar en el, tiene el filamento a 2

centímetros del cuello. ¿ Que profundidad debe tener el faro para que el filamento quede en el foco del faro, si el cuello de la lámpara se coloca a la altura del vértice del faro?

Problema N° 4: (*Geometría Analítica – Oteyza- Lam..Problema n° 9 – pag 206*)

Como el faro del problema anterior resulta demasiado profundo, el diseñador decide recortarlo 2 centímetros, de manera que la profundidad sea de 6 centímetros. ¿Cuál será el diámetro del nuevo diseño del faro?

Problema N° 5: (*Geometría Analítica – Oteyza- Lam..Problema n° 22 – pag 242*)

Un jugador de fútbol americano debe meter un gol de campo a una distancia de 40 yardas del arco. Sabiendo, que el balón pasó sobre el arco a una altura de 10 yardas sobre el piso y que alcanzó su altura máxima cuando había recorrido una distancia horizontal de 25 yardas ¿cuál es la altura que alcanzó?

Problema N° 6: (*Geometría Analítica – Oteyza- Lam..Problema n° 6 – pag 260*)

Una puerta tiene la forma de un arco elíptico, es decir está formada por media elipse. En la base mide 2 metros de ancho y la altura en el centro es de 4 metros. A través de ella deseamos pasar una caja de 2 metros de altura. ¿Cuál es la anchura máxima que puede tener la caja?

Problema N° 7: (*Geometría Analítica – Oteyza- Lam..Problema n° 7 – pag 242*)

Una galería tiene paredes verticales de 1.5 metros de altura y un techo abovedado en forma de medio elipsoide. Los focos que están a una altura de 1.5 metros sobre el piso, están separados 4 metros. Si la altura de la construcción en el centro de la bóveda es de 3.5 metros, ¿Cuánto mide su eje mayor?

Problema N° 8: (*Geometría Analítica – Oteyza- Lam..Problema n° 15 – pag 241*)

Se desea construir un puente de piedra sobre un río, de manera que el claro debajo de él sea un arco elíptico, es decir media elipse. El claro debe medir en la base 20 metros y es necesario que pueda pasar debajo del puente una barcaza de 6 metros de ancho y 3 metros de altura sobre el agua. ¿Cuál es la altura mínima sobre el nivel del agua desde el centro del puente?

Problema N° 9 : Se encontró parte de una rueda antigua. Fue una rueda sólida sin rayos. Para determinar su tamaño el arqueólogo colocó el pedazo en un sistema de ejes coordenados, con cuadrícula de una pulgada de lados. Localizó 3 puntos del borde, en $A (-3,-3)$ $B (-1,11)$ y $C (5,13)$ ¿Cuál fue la deducción del arqueólogo acerca del radio de la rueda original?

Problema N° 10 : Un guardabosques se encuentra varado en su vehículo, en un camino boscoso en una montaña en un camino de nieve. El camino corre paralelo a una carretera de norte a sur, a dos millas de ella. Hay dos vehículos de rescate en la carretera estacionados a tres millas de distancia entre sí. El guardabosque activa una señal de

2/4

explosión (señal de emergencia) y el sonido llega al vehículo de rescate que está al norte 3 segundos antes de llegar al otro vehículo.
Determine la ubicación del explorador en relación con los vehículos de rescate. La velocidad del sonido es 1100 pies /segundo.

Problema N° 11 : Los cables de un puente de suspensión se encuentran a 50 pies por encima del pavimento en las torres del puente y a 10 pies por encima de la misma al centro del puente. El pavimento sobre el puente tiene una longitud de 200 pies. A lo largo del puente se encuentran espaciados cables verticales cada 20 pies.

- Hallar una ecuación que represente la trayectoria del cable suspendido.
- Calcular la longitud del primer cable vertical con referencia a la primera torre.

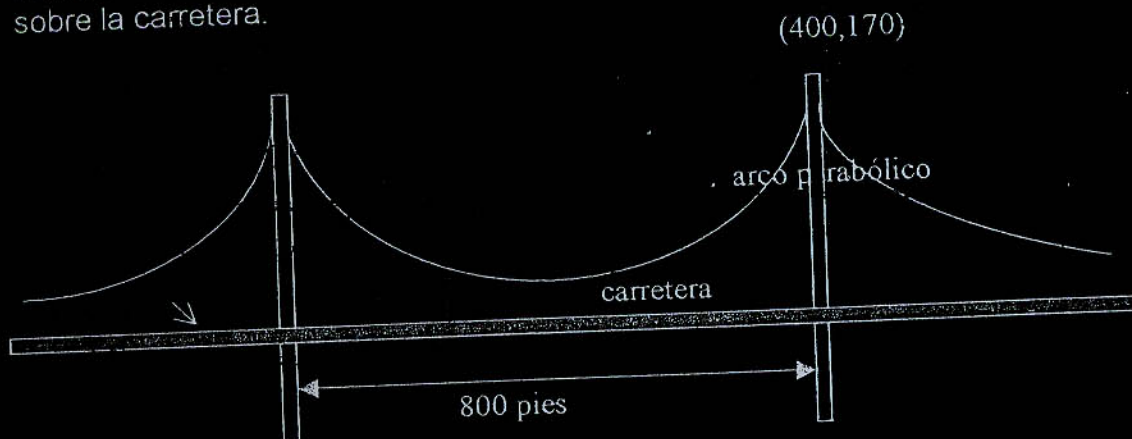
Problema N° 12 : El arco de un puente de mampostería es una semielipse de 27,43m. de luz; cuya altura en el centro es de 9,14m. ¿Cual es la altura del arco a 5,57m del centro?

Problema N° 13 : En un triángulo isósceles de base 12 y altura 10, se inscribe un rectángulo de tal manera que uno de sus lados este sobre la base del triángulo y dos de sus vértices toquen cada uno de sus lados iguales. ¿Cuales son las dimensiones del rectángulo que tiene mayor área?

Problema N° 14: En 1957, los rusos lanzaron el primer satélite fabricado por el hombre, el Sputnik. Su órbita alrededor de la Tierra fue elíptica con el centro de la Tierra en un foco. La altura máxima sobre la superficie terrestre fue, aproximadamente, 580 millas, y la mínima 130 millas.

- Suponiendo que el radio de la Tierra es 4000 millas, deduzca la ecuación de la órbita del Sputnik. (Deje sin simplificar el valor de b^2 .)
- Calcule el valor de b con precisión de una milla, y vuelva a escribir la ecuación de la elipse con este resultado.

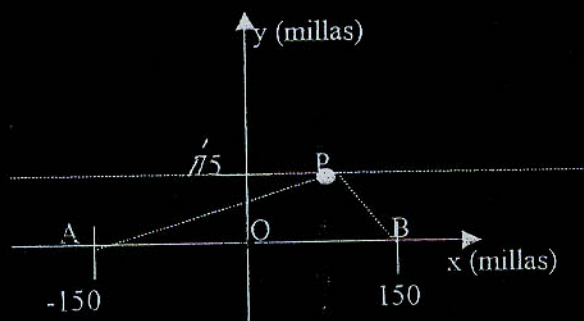
Problema N° 15: El cable central de un puente colgante forma un arco parabólico. El cable está colgado de los extremos superiores de las dos torres de soporte, separadas 800 pies entre sí. Esos extremos están a 170 pies sobre la carretera, y el punto del cable cuya altura es mínima está a la mitad del claro entre las torres y 10 pies sobre la carretera. Calcule la altura del cable sobre la carretera a 100 pies de una torre, medidos sobre la carretera.



Problema N° 16: El diseño de un edredón está formado por dos figuras: son dos elipses congruentes que se intersecan. Determine la ubicación de los puntos intersección si las ecuaciones son $x^2 + 4y^2 = 4$ y la otra, es $4x^2 + y^2 = 4$.

Problema N° 17: Un vehículo sigue determinada trayectoria y emite señales sonoras que viajan a 1100 pies por segundo; llegan a dos receptores colocados a una distancia de 3 millas entre sí. Suponga que los receptores están en el eje x en los puntos A(-1,5 ; 0) y B(1,5 ; 0) y que las coordenadas del vehículo son (x,y). Si las señales llegan a A tres segundos antes que a B, deduzca la ecuación de la trayectoria del vehículo.
Equivalencias: 1 milla = 5280 pies

Problema N° 18: En el sistema de radionavegación LORAN (LONg RADio Navigation), dos estaciones de radio, o radiobalizas, situadas en A y en B, simultáneamente emiten sendas señales. La computadora de a bordo de un barco situado en P recibe la señal de B 1000 microsegundos (μs) antes que la de A. Supongamos que las estaciones están situadas en los puntos de coordenadas cartesianas (-150, 0) y (150, 0), y que el barco está recorriendo una trayectoria de coordenadas (x, 75). Las señales viajan a la velocidad de la luz (186000 millas / s). Hallar la coordenada x de la posición del barco.



Problema N° 19: Un guardabosque (R) se encuentra varado dentro de un camino boscoso que corre paralelo a una carretera, a 2 millas de ella. Hay dos vehículos de rescate (F_1 y F_2) en la carretera, estacionados 3 millas de distancia entre sí. El guardabosque activa una señal de explosión (señal de emergencia) y el sonido llega al vehículo de rescate A (que está al norte) 3 segundos antes que al B. Determinar la ubicación del explorador respecto de los vehículos de rescate. La velocidad del sonido es de 1100 pies por segundo (1 milla = 5280 pies)

Problema N° 20: Dos micrófonos (A y B), separados 1 milla, graban una explosión E. El sonido llegó al micrófono (A) 2 segundos antes que al (B). ¿Dónde ocurrió la explosión? Velocidad del sonido $V_s = 1100$ pies/seg.

Problema N° 21: Los planetas se mueven alrededor del sol en órbitas elípticas, con el sol en uno de los focos. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse que describe la tierra es

de 1.485×10^8 km y que la excentricidad es aproximadamente $1/62$, halla la máxima y la mínima distancia de la tierra al Sol.

Problema N° 22: Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de la tierra de tal modo que el centro de ésta es uno de los focos. El punto mas alejado del satélite a la superficie terrestre está a 2500 millas, y el mas cercano está a 1000 millas. Estas distancias se miden a lo largo del eje mayor, que se supone está en el eje y. Suponiendo que el radio de la tierra es de 4000 millas, deducir la ecuación de la órbita.

Problema N° 23: El ojo de un puente para paso inferior de una carretera de dos carriles tiene la forma de media elipse. El arco elíptico salva 50 m, que es la longitud del eje mayor, y la altura en el centro es de 20 m. Las orillas de los carriles están a 10 m de las bases del puente. ¿Cuál es la altura salvada sobre estas líneas?

Problema N° 24: El cable central de un puente colgante forma un arco parabólico (catenaria). El cable está colgado de los extremos superiores de dos torres separadas 80 m entre sí. Esos extremos están a 17 m por sobre la carretera (tablero del puente) y el punto inferior del cable está a 1 m sobre la carretera. Calcular la longitud del cable paralelo a una de las torres, ubicado a 10 m de ésta.

Problema N° 25: Se desea construir una elipse de 4 m de diámetro menor. El constructor utiliza, para marcar su forma, una cuerda de 5 m de largo. ¿Dónde debe clavar los extremos de la cuerda?

Problema N° 26: (Sistema de navegación de largo alcance: LORAN)

Dos estaciones LORAN están separadas 250 millas a lo largo de una costa recta.

- Un barco registra una diferencia de tiempo de 0,00086 segundos entre las señales LORAN. Establecer un sistema de coordenadas rectangulares apropiado para determinar donde el barco alcanzará la costa si continúa sobre la trayectoria de la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.
- Si el barco debe entrar a un puerto localizado entre las dos estaciones a 25 millas de la estación principal, ¿qué diferencia de tiempo debe observar?
- Si el barco está a 80 millas de la costa cuándo se obtiene la diferencia de tiempo deseada, ¿cuál es su ubicación exacta? (La velocidad de cada señal de radio es de 186.000 millas por segundo)

Problema N° 27: Una pieza de alambre de 8 pies de longitud será cortada en dos partes y cada parte se doblará para formar un cuadrado. ¿En donde debe cortarse el alambre si la suma de las áreas de los cuadrados debe ser de 2 pies cuadrados?

Problema N° 28: (satélite meteorológico). La tierra está representada en un mapa de una parte del sistema solar de modo que su superficie es el círculo de ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4091 = 0$. Un satélite da vueltas alrededor de la tierra 0,6 unidades por arriba de ella con el centro de su órbita circular en el centro del planeta. Encuentre la ecuación para la órbita del satélite en ese mapa.

Problema N° 29: (navegación). Un crucero sale del puerto de Miami rumbo al este a una velocidad constante de 5 nudos (1 nudo = 1 milla náutica). A las 5 de la tarde, el crucero se encuentra a cinco millas náuticas al sur de un yate que se mueve hacia el sur a una velocidad constante de 10 nudos. ¿En qué momento estarán más cercanas las dos embarcaciones?

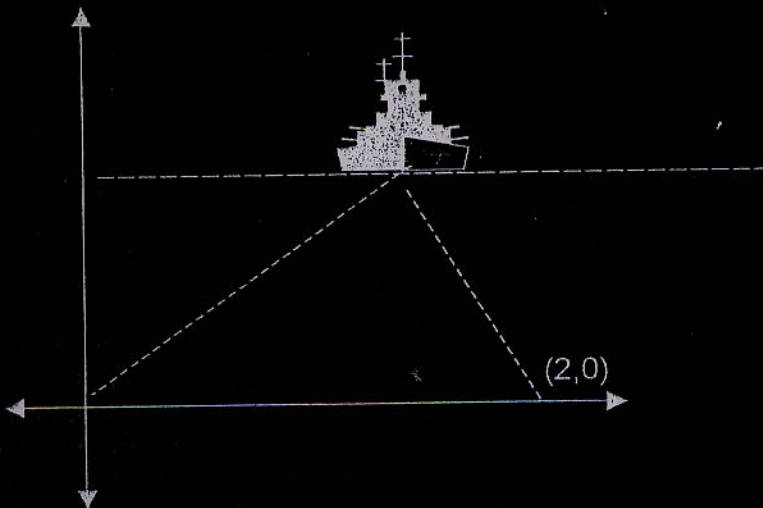
Problema N° 30: El puente Golden Gate enmarca la entrada de la Bahía de San Francisco. Sus torres de 746 pies de altura están separadas por una distancia de 4200 pies. El puente está suspendido de dos grandes cables que miden 3 pies de diámetro. El ancho de la calzada es de 90 pies y se encuentra aproximadamente a 220 pies del nivel del agua. Los cables forman una parábola y tocan la calzada en el centro del puente. Encuentre la altura de los cables a una distancia de 1000 pies del centro del puente.



Problema N° 31: (galería de murmullos). Un salón de 100 pies de longitud está diseñado como galería de murmullos. Si los focos están ubicados a 25 pies del centro ¿cuál es la altura del techo en el centro?

Problema N° 32: Un bote pequeño se encuentra anclado en el interior de un lago, cuando la niebla es muy densa. El bote manda una fuerte señal sonora con su bocina y la reciben dos estaciones separadas dos millas entre sí, en la orilla recta. El sonido, que viaja a 1100 pies por segundo, tarda 2.7 segundos más en llegar a una estación que a la otra. Use $(0,0)$ y $(2,0)$ como coordenadas de las estaciones y determine los lugares posibles (x,y) del bote, en relación con las estaciones.

- b) Suponga que la costa es recta y que el bote sigue una ruta paralela y a una milla de distancia de ella. Por la niebla, el bote ancló después de haber viajado al este más de una milla después de pasar por la estación en $(0,0)$, y a continuación mandó la señal que se describió en la parte a). Calcule las coordenadas del bote.



Problema N° 33: Salen tres partidas en busca de un cazador perdido en una zona boscosa. Dos de ellas toman posiciones de tal modo que quedan a una milla de distancia entre sí. El cazador dispara su rifle y el sonido llega a una de las partidas 3.6 segundos antes de llegar a la otra. Suponga que las coordenadas de las dos partidas de búsqueda son $(0, -0.5)$ y $(0, 0.5)$ y deduzca la ecuación de la hipérbola cuyos puntos sean ubicaciones posibles del cazador. (Suponga que la velocidad del sonido es 1100 pies por segundo.)

b) Ahora suponga que la tercera partida de búsqueda está en el punto $(2, 0.5)$ cuando el rifle fue disparado, y el sonido llegó a ese punto al mismo tiempo que llegaba a $(0, 0.5)$. Calcule las coordenadas del cazador si el sonido llegó a los puntos $(0, 0.5)$ y $(2, 0.5)$ antes de llegar a $(0, -0.5)$.

APLICACIONES: CURVAS DE SEGUNDO GRADO (Cónicas)

PROPIEDADES FÍSICAS

✓ Antenas parabólicas:

Al girar una parábola sobre su eje, se obtiene una superficie de revolución llamada paraboloides. Estas superficies tienen muchas aplicaciones, principalmente en óptica y electrónica, ya que si un rayo de luz paralelo al eje choca contra el paraboloides, entonces se refleja hacia su foco, e inversamente si un rayo de luz sale del foco y choca contra el paraboloides éste se refleja en la dirección de su eje. Esta propiedad, conocida como la propiedad de reflexión o propiedad óptica de la parábola, tiene muchas aplicaciones, por ejemplo, en los faros de los automóviles, las antenas parabólicas, los telescopios, los micrófonos direccionales, etc.

✓ Los puentes colgantes:

Si un cable sostiene un peso homogéneo mucho mayor que el peso del propio cable, éste toma la forma de una parábola. Esta propiedad se utiliza en los puentes colgantes, como el de la Laguna Setúbal de Santa Fe.

✓ Tiro parabólico:

La trayectoria de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo, describe una parábola abierta hacia abajo. Esta propiedad fue descubierta por Galileo en el siglo XVI.

✓ Propiedad de reflexión de la elipse:

Un rayo que emana de un foco de la elipse se refleja en ella hacia el otro foco. Una de las aplicaciones de esta propiedad, es en ciertos hornos de laboratorio para fabricar cristales. En un recipiente en forma de elipsoide de revolución, cuya pared interior sea de un material altamente reflejante se coloca una fuente de calor en uno de los focos de la elipse y el objeto que se desea calentar en el otro foco. Como todos los rayos que emanan de un foco se reflejan hacia el otro foco, después de un tiempo el segundo foco está extremadamente caliente.

✓ Movimiento Planetario - KEPLER:

Los planetas se mueven en órbitas elípticas, uno de cuyos focos es el Sol.

✓ Sistema de navegación de largo alcance (LORAN)

En el sistema de navegación de largo alcance (LORAN, por sus siglas en inglés), una estación principal de radio y una estación secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en el mar.

Aunque un barco recibe las dos señales, por lo regular se halla más cerca de una de las dos estaciones y, por lo tanto, hay cierta diferencia en las distancias que recorren las dos señales, lo cual se traduce en una pequeña diferencia de tiempo entre las señales registradas. Mientras la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia de las dos distancias también será constante. Si el barco sigue una ruta que mantenga fija la diferencia de tiempo, seguirá la trayectoria de una hipérbola cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones de radio. Así que para cada diferencia de tiempo se obtiene una trayectoria hiperbólica diferente, cada una llevando al barco a una posición distinta de la costa. Las cartas de navegación muestran las diferentes rutas hiperbólicas correspondientes a diferencias de tiempo distintas.

Problema N° 1:

Un jugador de béisbol lanza una pelota desde una altura de 2 metros sobre el nivel del suelo y ésta cae a una distancia de 50 metros de él, medida horizontalmente. Si el jugador se encuentra en el origen de coordenadas y la altura máxima que alcanza la pelota es de 20 metros ¿a que distancia del jugador, medida horizontalmente, alcanza dicha altura?

Problema N° 2:

Un puente tiene una longitud de 160 metros. El cable que lo soporta tiene la forma de una parábola. Si el puntal en cada uno de los extremos tiene una altura de 25 metros ¿cual es la ecuación de la parábola?

Problema N° 3:

Un diseñador de automóviles desea diseñar un faro que tenga 16 centímetros de diámetro. La lámpara que va a utilizar en el, tiene el filamento a 2 centímetros del cuello. ¿Que profundidad debe tener el faro para que el filamento quede en el foco del faro, si el cuello de la lámpara se coloca a la altura del vértice del faro?

Problema N° 4:

Como el faro del problema anterior resulta demasiado profundo, el diseñador decide recortarlo 2 centímetros, de manera que la profundidad sea de 6 centímetros. ¿Cuál será el diámetro del nuevo diseño del faro?

Problema N° 5:

Un jugador de fútbol americano debe meter un gol de campo a una distancia de 40 yardas del arco. Sabiendo, que el balón pasó sobre el arco a una altura de 10 yardas sobre el piso y que alcanzó su altura máxima cuando había recorrido una distancia horizontal de 25 yardas ¿cuál es la altura que alcanzó?

Problema N° 6:

Una puerta tiene la forma de un arco elíptico, es decir está formada por media elipse. En la base mide 2 metros de ancho y la altura en el centro es de 4 metros. A través de ella deseamos pasar una caja de 2 metros de altura. ¿Cuál es la anchura máxima que puede tener la caja?

Problema N° 7:

Una galería tiene paredes verticales de 1,5 metros de altura y un techo abovedado en forma de medio elipsoide. Los focos que están a una altura de 1,5 metros sobre el piso, están separados 4 metros. Si la altura de la construcción en el centro de la bóveda es de 3,5 metros, ¿Cuánto mide su eje mayor?

Problema N° 8:

Se desea construir un puente de piedra sobre un río, de manera que el claro debajo de él sea un arco elíptico, es decir media elipse. El claro debe medir en la base 20 metros y es necesario que pueda pasar debajo del puente una barcaza de 6 metros de ancho y 3 metros de altura sobre el agua. ¿Cuál es la altura mínima sobre el nivel del agua desde el centro del puente?

Problema N° 9:

Se encontró parte de una rueda antigua. Fue una rueda sólida sin rayos. Para determinar su tamaño el arqueólogo colocó el pedazo en un sistema de ejes coordenados, con cuadrícula de una pulgada de lados. Localizó 3 puntos del borde, en A(3,-3), B(-1,11) y C(5,13) ¿Cuál fue la deducción del arqueólogo acerca del radio de la rueda original?

Problema N° 10:

Un guardabosques se encuentra varado en su vehículo, en un camino boscoso en una montaña en un camino de nieve. El camino corre paralelo a una carretera de norte a sur, a dos millas de ella. Hay dos vehículos de rescate en la carretera estacionados a tres millas de distancia entre sí. El guardabosques activa una señal de explosión (señal de emergencia) y el sonido llega al vehículo de rescate que está al norte 3 segundos antes de llegar al otro vehículo.

Determine la ubicación del explorador en relación con los vehículos de rescate. La velocidad del sonido es 1100 pies/segundo.

Problema N° 11:

Los cables de un puente de suspensión se encuentran a 50 pies por encima del pavimento en las torres del puente y a 10 pies por encima de la misma al centro del puente. El pavimento sobre el puente tiene una longitud de 200 pies. A lo largo del puente se encuentran espaciados cables verticales cada 20 pies.

- Hallar una ecuación que represente la trayectoria del cable suspendido.
- Calcular la longitud del primer cable vertical con referencia a la primera torre.

Problema N° 12:

El arco de un puente de mampostería es una semielipse de 27,43m. de luz; cuya altura en el centro es de 9,14m. ¿Cual es la altura del arco a 5,57m del centro?

Problema N° 13:

En un triángulo isósceles de base 12 y altura 10, se inscribe un rectángulo de tal manera que uno de sus lados este sobre la base del triángulo y dos de sus vértices toquen cada uno de sus lados iguales. ¿Cuales son las dimensiones del rectángulo que tiene mayor área?

Problema N° 14:

En 1957, los rusos lanzaron el primer satélite fabricado por el hombre, el Sputnik. Su órbita alrededor de la Tierra fue elíptica con el centro de la Tierra en un foco. La altura máxima sobre la superficie terrestre fue, aproximadamente, 580 millas, y la mínima, 130 millas.

- Suponiendo que el radio de la Tierra es 4000 millas, deduzca la ecuación de la órbita del Sputnik. (Deje sin simplificar el valor de b^2 .)
- Calcule el valor de b con precisión de una milla, y vuelva a escribir la ecuación de la elipse con este resultado.

Problema N° 15:

El cable central de un puente colgante forma un arco parabólico. El cable está colgado de los extremos superiores de las dos torres de soporte, separadas 800 pies entre sí. Esos extremos están a 170 pies sobre la carretera, y el punto del cable cuya altura es mínima está a la mitad del claro entre las torres y 10 pies sobre la carretera. Calcule la altura del cable sobre la carretera a 100 pies de una torre, medidos sobre la carretera.

Problema N° 16:

El diseño de un edredón está formado por dos figuras: son dos elipses congruentes que se intersecan. Determine la ubicación de los puntos intersección si las ecuaciones son $x^2 - 4y^2 = 4$ y la otra, es $4x^2 + y^2 = 4$.

Problema N° 17:

Un vehículo sigue determinada trayectoria y emite señales sonoras que viajan a 1100 pies por segundo; llegan a dos receptores colocados a una distancia de 3 millas entre sí. Suponga que los receptores están en el eje x en los puntos $A(-1.5, 0)$ y $B(1.5, 0)$ y que las coordenadas del vehículo son (x, y) . Si las señales llegan a A tres segundos antes que a B , deduzca la ecuación de la trayectoria del vehículo. Equivalencias: 1 milla = 5280 pies

Problema N° 18:

En el sistema de radionavegación LORAN (LONG RADIO NAVIGATION), dos estaciones de radio, o radiobalizas, situadas en A y en B , simultáneamente emiten sendas señales. La computadora de a bordo de un barco situado en P recibe la señal de B 1000 microsegundos antes que la de A . Supongamos que las estaciones están situadas en los puntos de coordenadas cartesianas $(-150, 0)$ y $(150, 0)$, y que el barco está recorriendo una trayectoria de coordenadas $(x, 75)$. Las señales viajan a la velocidad de la luz (186000 millas/s). Hallar la coordenada x de la posición del barco,

Problema N° 19:

Un guardabosque (R) se encuentra varado dentro de un camino boscoso que corre paralelo a una carretera, a 2 millas de ella. Hay dos vehículos de rescate ($F1$ y $F2$) en la carretera, estacionados 3 millas de distancia entre sí. El guardabosque activa una señal de explosión (señal de emergencia) y el sonido llega al vehículo de rescate A (que está al norte) 3 segundos antes que al B . Determinar la ubicación del explorador respecto de los vehículos de rescate. La

velocidad del sonido es de 1100 pies por segundo (1 milla = 5280 pies)

Problema N° 20:

Dos micrófonos (A y B), separados 1 milla, graban una explosión E. El sonido llegó al micrófono (A) 2 segundos antes que al (B). ¿Dónde ocurrió la explosión? Velocidad del sonido $V_s = 1100$ pies/seg.

Problema N° 21:

Los planetas se mueven alrededor del sol en órbitas elípticas, con el sol en uno de los focos. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse que describe la tierra es de 1.485×10^8 km y que la excentricidad es aproximadamente $1/62$, halla la máxima y la mínima distancia de la tierra al Sol.

Problema N° 22:

Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de la tierra de tal modo que el centro de ésta es uno de los focos. El punto más alejado del satélite a la superficie terrestre está a 2500 millas, y el más cercano está a 1000 millas. Estas distancias se miden a lo largo del eje mayor, que se supone está en el eje y. Suponiendo que el radio de la tierra es de 4000 millas, deducir la ecuación de la órbita.

Problema N° 23:

El ojo de un puente para paso inferior de una carretera de dos carriles tiene la forma de media elipse. El arco elíptico salva 50m, que es la longitud del eje mayor, y la altura en el centro es de 20m. Las orillas de los carriles están a 10m de las bases del puente. ¿Cuál es la altura salvada sobre estas líneas?

Problema N° 24:

El cable central de un puente colgante forma un arco parabólico (catenaria). El cable está colgado de los extremos superiores de dos torres separadas 80m entre sí. Esos extremos están a 17m por sobre la carretera (tablero del puente) y el punto inferior del cable está a 1m sobre la carretera. Calcular la longitud del cable paralelo a una de las torres, ubicado a 10m de ésta.

Problema N° 25:

Se desea construir una elipse de 4m de diámetro menor. El constructor utiliza, para marcar su forma, una cuerda de 5m de largo. ¿Dónde debe clavar los extremos de la cuerda?

Problema N° 26:

Dos estaciones LORAN están separadas 250 millas a lo largo de una costa recta.

- Un barco registra una diferencia de tiempo de 0,00086 segundos entre las señales LORAN. Establecer un sistema de coordenadas rectangulares apropiado para determinar donde el barco alcanzará la costa si continúa sobre la trayectoria de la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.
- Si el barco debe entrar a un puerto localizado entre las dos estaciones a 25 millas de la estación principal, ¿qué diferencia de tiempo debe observar?
- Si el barco está a 80 millas de la costa cuándo se obtiene la diferencia de tiempo deseada, ¿cuál es su ubicación exacta? (La velocidad de cada señal de radio es de 186.000 millas por segundo).

Problema N° 27:

Una pieza de alambre de 8 pies de longitud será cortada en dos partes y cada parte se doblará para formar un cuadrado. ¿En donde debe cortarse el alambre si la suma de las áreas de los cuadrados debe ser de 2 pies cuadrados?

Problema N° 28:

La tierra está representada en un "mapa de una parte del sistema solar" de modo que su superficie es el círculo de ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4091 = 0$. Un satélite da vueltas alrededor de la tierra 0,6 unidades por arriba de ella con el centro de su órbita circular en el centro del planeta. Encuentre la ecuación para la órbita del satélite en ese mapa.

Problema N° 29:

Un crucero sale del puerto de Miami rumbo al este a una velocidad constante de 5 nudos (1 nudo = 1 milla náutica). A las 5 de la tarde, el crucero se encuentra a cinco millas náuticas al sur de un yate que se mueve hacia el sur a una velocidad constante de 10 nudos. ¿En qué momento estarán más cercanas las dos embarcaciones?

Problema N° 30:

El puente Golden Gate enmarca la entrada de la Bahía de San Francisco. Sus torres de 746 pies de altura están separadas por una distancia de 4200 pies. El puente está suspendido de dos grandes cables que miden 3 pies de diámetro. El ancho de la calzada es de 90 pies y se encuentra aproximadamente a 220 pies del nivel del agua. Los cables forman una parábola y tocan la calzada en el centro del puente. Encuentre la altura de los cables a una distancia de 1000 pies del centro del puente.

Problema N°31:

Un salón de 100 pies de longitud está diseñado como galería de murmullos. Si los focos están ubicados a 25 pies del centro ¿cuál es la altura del techo en el centro?

Problema N° 32:

Un bote pequeño se encuentra anclado en el interior de un lago, cuando la niebla es muy densa. El bote manda una fuerte señal sonora con su bocina y la reciben dos estaciones separadas, dos millas entre sí, en la orilla recta. El sonido, que viaja a 1100 pies por segundo, tarda 2.7 segundos más en llegar a una estación que a la otra. Use $(0,0)$ y $(2,0)$ como coordenadas de las estaciones y determine los lugares posibles (x,y) del bote, en relación con las estaciones.

b) Suponga que la costa es recta y que el bote sigue una ruta paralela y a una milla, de distancia de ella. Por la niebla, el bote ancló después de haber viajado al este más de una milla después de pasar por la estación en $(0,0)$, y a continuación mandó la señal que se describió en la parte a). Calcule las coordenadas del bote.

Problema N° 33:

Salen tres partidas en busca de un cazador perdido en una zona boscosa. Dos de ellas toman posiciones de tal modo que quedan a una milla de distancia entre sí. El cazador dispara su rifle y el sonido llega a una de las partidas 3.6 segundos antes de llegar a la otra. Suponga que las coordenadas de las dos partidas de búsqueda son $(0, -0.5)$ y $(0, 0.5)$ y deduzca la ecuación de la hipérbola cuyos puntos sean ubicaciones posibles del cazador. (Suponga que la velocidad del sonido es 1100 pies por segundo).

b) Ahora suponga que la tercera partida de búsqueda está en el punto $(2, 0.5)$ cuando el rifle fue disparado, y el sonido llegó a ese punto al mismo tiempo que llegaba a $(0, 0.5)$. Calcule las coordenadas del cazador si el sonido llegó a los puntos $(0, 0.5)$ y $(2, 0.5)$ antes de llegar a $(0, -0.5)$.

PROBLEMA N° 1:

Un objeto que pesa 120 N. se encuentra sobre la cabeza de un trípode, correspondiente al punto $P(0;0;4)$. Las patas apoyan en $Q_1(0;-1;0)$; $Q_2(3/2;1/2;0)$ y $Q_3(-3/2;3/2;0)$. Hallar la fuerza que ejerce cada pata en el suelo.

PROBLEMA N° 2:

Dos fuerzas F_1 y F_2 están aplicadas a un punto. La magnitud de F_1 es 8 kg. y su dirección forma 60° con el eje X en el primer cuadrante. La magnitud de F_2 es 5 kg. y su dirección forma 53° con el eje X en el cuarto cuadrante.

- a) ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza resultante?
- b) ¿Cuál es la magnitud de esa resultante?
- c) ¿Cuál es la magnitud del vector diferencia F_1-F_2 ?

PROBLEMA N° 3:

Hállese la resultante del siguiente sistema de fuerzas: 40 kg. verticalmente hacia abajo, 50 kg. 53.13° por encima de la horizontal hacia la derecha, 30 kg. horizontal y hacia la izquierda.

PROBLEMA N° 4:

Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) con los siguientes vértices: $A(-1,1,0)$, $B(1, 0,-1)$, $C(0,1,-1)$ (en una cara triangular) y $A'(1,-1,\square)$ en la cara opuesta. Calcular:

- a) La ecuación del plano \square que pasa por los puntos A, B y C.
- b) El valor de a para que el plano \square , que contiene los puntos A' , B' y C' , diste una unidad del plano \square
- c) Para $\square = 1$ el plano \square y el volumen del prisma.

PROBLEMA N° 5:

Un niño tira de una cuerda sujeta a un trineo con una fuerza de 60N. La cuerda traza un Angulo de 40° con la horizontal.

Calcular:

- a) El valor de la fuerza que tiende a mover al trineo a lo largo del suelo.
- b) La fuerza que tiende a levantar verticalmente al trineo,

PROBLEMA N° 6:

(Determinación de la dirección y velocidad real de un avión)

Un avión Boeing 737 mantiene en el aire una velocidad constante de 500 millas por hora en dirección sur. La velocidad de la corriente de chorro es de 80 millas por hora en dirección noreste.

- a) Determinar un vector unitario con dirección noreste.
- b) Determinar un vector con magnitud de 80 unidades en la misma dirección que el vector unitario de la parte a)
- c) Determinar la velocidad real del avión respecto de la tierra.
- d) Determinar la dirección (ángulo) real del avión respecto del suelo.

PROBLEMA N° 7:

(Cálculo de trabajo)

Determinar el trabajo realizado por una fuerza de 5 libras que actúa en la dirección $i + j$ al mover un objeto una distancia de 1 pie, de $(0, 0)$ hasta $(1, 0)$.

PROBLEMA N° 8:

Determinar las ecuaciones de las rectas que representan los límites de un terreno cuadrado por

medio de los siguientes datos:

a) Dos postes que se conservan y constituyen los vértices opuestos, estando determinados los postes en el plano por las coordenadas $A(2; 1)$ y $C(4; 5)$.

b) Tres postes que se han conservado; uno en el centro y dos en los vértices de uno de sus lados, estando determinados los postes en el plano por las siguientes coordenadas: el del centro $N(1; 6)$ y los laterales $A(5; 9)$ y $B(4; 2)$.

PROBLEMA N° 9:

En la planimetría de un campo, se observa que la cañería de un acueducto que lo atraviesa, tiene por referencia dos puntos de paso del mismo cuyas coordenadas son: $A(1200, 5000)$ y $B(-500, 8000)$. Para llevar agua a un estanque, situado en el punto $C(9000, 3000)$, se necesita conocer la menor longitud de cañería a utilizar y las coordenadas del punto del acueducto, en donde deberá realizarse el enlace.