Ingreso UTN

Unidad II

Números y su aplicación a la geometría:

1) Obtenga dos números naturales consecutivos…

En este caso, nuestra incógnita es x y, como ya vimos en la unidad anterior, su consecutivo es $x+1$. Pasando al lenguaje algebraico lo que dice el enunciado, nos queda:

$$\underbrace{(x+1)^2 - x^2}_{\substack{diferencia\ de\\ cuadrados\ entre\\ la\ incógnita\ y\\ su\ consecutivo}} = 31.$$

Para el primer sumando, podemos aplicar el cuadrado de un binomio.

¿Qué era el *cuadrado de un binomio*?

Como dice el nombre, es un binomio (dos términos separados por el signo $+$ o $-$) que está elevado al cuadrado.

Supongamos que tenemos el cuadrado de binomio $\left(\underbrace{a+b}_{binomio}\right)^2$. Lo interesante es que podemos escribir esta expresión en una forma desarrollada (menos compacta), $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Más en detalle:

$$(a+b)^2 = \underbrace{a^2}_{\substack{cuadrado\ del\\ primer\\ término}} + \underbrace{2ab}_{\substack{doble\\ producto\\ del\ producto\\ de\\ ambos\ términos}} + \underbrace{b^2}_{\substack{cuadrado\ del\\ segundo\\ término}}.$$

Aparentemente, el objetivo de este ejercicio es recordar esta propiedad tan útil y utilizada.

En el ejercicio,

$$\underbrace{\cancel{x^2} + 2x + 1}_{\substack{cuadrado\\ del\ binomio}} - \cancel{x^2} = 31$$

$2x = 30$
$x = 15$

Por lo tanto, los números que estábamos buscando eran 15 y 16.

2) Si sabe que la suma de dos números es 30 y su máximo común divisor 6…

Del enunciado, podemos armar estas ecuaciones:

$$\underbrace{x + y}_{\substack{suma \\ de\ dos \\ números}} = 30$$

$$\begin{cases} x = 6a \\ y = 6b \end{cases}$$

Sustituyendo las últimas dos ecuaciones en la primera,

$$\underbrace{x}_{6a} + \underbrace{y}_{6b} = 30$$
$$6a + 6b = 30$$
$$6(a + b) \underbrace{=}_{\substack{factor \\ común}} 30$$
$$a + b = 5$$

Por lo tanto, los valores posibles de a y b son. Para a, los valores 1 o 2 y, para b, los valores 2 o 3. Si a estos valores se los multiplica por 6 para obtener los valores de x e y, llegamos a: 24 y 6; 18 y 12.

3) Tres ómnibus salen de la misma estación terminal…

Pasamos todos los tiempos a minutos y sumamos el tiempo total de viaje y espera para cada ómnibus. Haciendo eso, nos queda:

1º ómnibus: $120min$
2º ómnibus: $72min$
3º ómnibus: $90min$

a) Ahora, hallemos el mcm de $(120, 72, 90)$: 360 es el menor múltiplo. Entonces, después de $360min$ van a volver a salir juntos. Esto pasado a horas (dividimos por 60) es 6 $horas$.
Entonces, volverán a salir juntos a las 12 del mediodía, a las 18 de la tarde y a las 00 de la noche.

b) Para calcular la cantidad de viajes que hizo cada uno (en esas 6 horas hasta que se volvieron a encontrar) solo hay que dividir el tiempo transcurrido por el tiempo total de cada caso:

1º ómnibus: $\frac{360}{20} = 3\ viajes$
2º ómnibus: $\frac{360}{72} = 5\ viajes$
3º ómnibus: $\frac{360}{90} = 4\ viajes$

4) Si sabe que el producto de dos números es 1512…

Planteemos las ecuaciones:

$\underbrace{xy}_{\substack{producto \\ entre\ dos \\ número}} = 1512$
$x = 6a$
$y = 6b$

Sustituyendo estas últimas dos ecuaciones en la primera,

$(6a)(6b) = 1512$
$36ab = 1512$
$ab = 42$

Ahora tendremos que recordar la relación entre *m.c.m.* y *m.c.d.*:

$mcd\ (x, y).mcm\ (x, y) = xy$

Entonces, si reemplazamos para hallar el *mcm:*

$6mcm\ (x, y) = 1512$
$mcm\ (x, y) = 252$

5) Dos ruedas dentadas engranan una con otra…

Primero, hacemos $221.54 = 11934$, multiplicamos la cantidad de vueltas por la cantidad de dientes del engranaje grande. De esta manera, calculamos el total de dientes que pasaron al dar esas 221 vueltas. Esto es porque cada vuelta significa pasar por cada uno de los dientes.

Como en todos los problemas, siempre es bueno visualizar. Si visualizamos la situación, sabemos que la relación entre los dientes es $1:1$. Por cada diente que pasa de uno de los engranajes, pasa un diente del otro. Es decir, la cantidad de dientes que pasan por el engranaje grande y por el chico coinciden. Por lo tanto, si a esta cantidad de dientes que calculamos que pasan en el engranaje grande lo dividimos por la cantidad de dientes que tiene el engranaje más chico, vamos a obtener la cantidad de vueltas que da este.

$$\frac{11934}{34} = 351$$

Finalmente, podemos afirmar con seguridad que la rueda pequeña tiene 351 dientes.

6) La madre de Gabriela compra $6kg$…

Lo primero que queremos es averiguar el peso *neto* de la fruta. Es decir, quitando del peso de las frutas la parte que corresponde a los carozos:

La cuarta parte de la fruta, $\frac{1}{4}\underbrace{p}_{\substack{peso \\ de\ la \\ fruta}}$ es $\frac{1}{4}.6kg$. Porque el enunciado dice que se tienen $6kg$ de fruta. Haciendo esta multiplicación, hallamos el peso de los carozos, que es $1{,}5kg$. Por lo tanto, tendremos $(6 - 1{,}5)kg$ de fruta.

Ahora, tenemos que añadir el peso del azúcar, que es igual al de la fruta sin carozo. Es decir, tendremos $2.4{,}5kg = 9kg$

Por último, tenemos que descontar el peso que se pierde en la cocción. De estos $9kg$, el enunciado dice que se pierde la quinta parte:

$$\frac{1}{5}.9kg = 1,8kg$$

Por lo tanto, tendremos $(9-1,8)kg = 7,2kg$ del producto.

Ahora lo que falta es dividir esa cantidad de mermelada en frascos de $375g$.

Acá es importante tener cuidado con las unidades! La mermelada está expresada en kilogramos y la capacidad de los frascos en gramos. Recordemos que $1kg = 1000g$.

$$\frac{7200g}{375g} = 19,2$$

Por lo tanto, Gabriela podrá preparar 19 potes llenos y el 20% de otro pote adicional. Por lo que dice el enunciado, esto parece algo casero, así que no habría problema con que quede un pote incompleto.

7) Un campesino ha recolectado $6.720kg$…

Vamos a comenzar calculando la cantidad de alfalfa disponible por día para alimentar a las vacas. Consideramos que el grupo de las vacas come la misma cantidad todos los días. Vamos a dividir la cantidad de alimento por la cantidad de días:

$$\frac{6720kg}{120días} = 56\frac{kg}{día}$$

Pero esta es la cantidad de alimento que tiene que alcanzar para las siete vacas. Si dividimos la ración diaria por la cantidad de vacas, nos dará el consumo por cada vaca.

$$\frac{56\frac{kg}{día}}{7\ vacas} = 8\frac{kg}{\underbrace{vaca.día}_{*}}$$

*Esta unidad que parece medio fea, significa cantidad por vaca para un día.

Pasan 15 días y la cantidad de vacas aumenta a 10. Primero veamos cuanta comida le queda:

$$56\frac{kg}{día}.15días = 840kg$$
$$\underbrace{6720kg}_{\substack{alfalfa\\recolectada}} - 840kg = 5880kg$$

Con la misma fórmula que usamos antes averigüemos cuánta se necesitaría para alimentar 10 vacas durante los 105 días que quedan:

El consumo diario de las 10 vacas es $10\cancel{vacas}.8\frac{kg}{\cancel{vaca}.día} = 80\frac{kg}{día}$ (recordemos que habíamos calculado que cada vaca consumía $8kg$ por día).

$$\frac{x}{105\ días} = 80\frac{kg}{día}$$
$$x = 8400kg$$

Esta sería la cantidad necesaria para alimentar a todo el ganado por los 105 días restantes. Pero solo disponemos de $5880kg$, que son los que calculamos que nos quedaban antes de incorporar las tres vacas. Ahora solo basta restar lo necesario menos lo que le queda: $8400kg - 5880kg = 2520kg$.

8) Dadas las siguientes proposiciones indique cuál es verdadera y cuál es falsa:

"El producto de un número impar de números negativos es negativo"
Verdadero. Fíjate que si sacas factor $común\ -1$ de la multiplicación te va a aparecer un $(-1)^n$ donde n se dijo que era impar. Entonces te va a sobrevivir un menos. Suficiente para que el producto total sea negativo.

"La diferencia de dos números positivos es siempre positiva"
Falsa. Basta solo probar los números positivos 1 y 100 para darse cuenta que no siempre es cierto. En otras palabras, si el número que está restando es mayor al otro número el resultado va a ser negativo.

"El cociente de un número positivo y otro negativo es siempre un número negativo"
Verdadero, ya que por la regla de los signos, menos por más es menos.

"La diferencia de un número positivo y otro negativo es siempre un número negativo"
Falso, por el mismo motivo que en la segunda afirmación. Basta poner al número positivo mayor al negativo para que obtengamos un resultado positivo.

9) Piense un número, multiplíquelo por 2…

$$\frac{\left((2.n+33)-13\right)}{2}-n=x$$

Eliminamos los paréntesis para poder hacer bien la distributiva:

$$\frac{2n+20}{2}-n=x\rightarrow\frac{2n}{2}+10-n=x\rightarrow n-n+10=x\rightarrow x=10$$

Y vemos que después de simplificar los 2 se nos cancelan las n y queda $x=10$

10) Un taller producía 126 artículos diarios. Como resultado del perfeccionamiento…

Planteamos una regla de tres simple, si 126 es una producción del 100%, ¿cuánto es 189?

$$126\ \rightarrow 100\%$$
$$189\ \rightarrow x\ \% = \frac{189.100}{126} = 150$$

189 artículos diarios es una producción del 150%. Por lo tanto, el aumento fue del 50%.

11) En una bolsa de 200 caramelos hay 110 de fruta y el resto de leche…

Es necesario saber la cantidad de caramelos de leche que hay en la bolsa, haciendo la resta nos queda 90. Ahora, nosotros queremos que haya 70% de fruta y 30% de leche. Y también sabemos que la cantidad de caramelos de leche no va a variar, que son 90. Entonces planteamos una regla de 3 simple:

$$30\%\ \rightarrow 90\ caramelos$$
$$70\%\ \rightarrow x = \frac{70.90}{30} = 210\ caramelos$$

Por lo tanto, como inicialmente ya teníamos 110, solo vamos a necesitar agregar 100.

12) ¿La suma de dos números irracionales…

No necesariamente, basta mostrar un contraejemplo:

$1-\sqrt{2}$ y $2+\sqrt{2}$ son números irracionales.

$\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(2+\sqrt{2}\right)=3\ \in \mathbb{R}$

13) ¿Cuáles de los siguientes números…

$3\sqrt{2};\ -\frac{1}{3}; 7; 0; \frac{1}{5};\ 0{,}7; 1{,}2;\ \sqrt{2}-3+5-\sqrt{2}$

Fijate que en el último se cancelan las raíces y te queda 2.

Por lo tanto, el único número irracional es $3\sqrt{2}$.

14) Determine, cuando sea posible, el resultado de:

14.1) $15.0=0$
14.2) $0.0=0$
14.3) $\frac{1}{0}$ No es posible, no se puede dividir por cero.
14.4) $\frac{0}{1}=0$ Cero dividido cualquier número da cero.
14.5) $0^{-1}=\frac{1}{0}$ Igual que en el punto 3, no es posible.
14.6) $\frac{0}{0}$ Tampoco es posible, se dice que es una indeterminación.

15) Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

Para este ejercicio, puede resultar conveniente graficar en la recta numérica.

15.1) $0<\sqrt{2}<1 \rightarrow F$ Raíz de 2 es más grande que 1!
15.2) $2<e<3 \rightarrow V$
15.3) $-7<-15 \rightarrow F$ Para ver este caso también se puede graficar en la recta y comprobar que -7 es mayor que -15.
15.4) $-9<\frac{1}{3} \rightarrow V$
15.5) $\frac{7}{6}<\frac{34}{9} \rightarrow V$
15.6) $0{,}3>0{,}4 \rightarrow F$
15.7) $-\frac{7}{6}<\frac{34}{39} \rightarrow V$
15.8) $-2>-17 \rightarrow V$ Otra manera de darte cuenta es multiplicar todo por -1, se invierte el sentido de la inecuación para quedar $2<17$.

16) Pablo realizó una compra que importa…

Hay que tener cuidado acá y hacer el 15% sobre el dinero de la compra. No sobre el dinero total!

En otras palabras, 15% de $\frac{2}{3}x$, donde x es el dinero que le dio la madre.

$$15\%\left(\frac{2}{3}x\right)=\frac{15}{100}\left(\frac{2}{3}x\right)=\frac{1}{10}x$$

El descuento es la décima parte de lo que le dio la madre.

Ahora veamos el dinero gastado con descuento:

$$\underbrace{\frac{2}{3}x}_{\substack{lo\ que\ iba\ a \\ gastar}} - \underbrace{\frac{1}{10}x}_{\substack{lo\ que\ le \\ descuentan}} = \underbrace{\frac{17}{30}x}_{\substack{lo\ que\ termina \\ gastando}}$$

Para determinar el dinero total solo hay que plantear que de lo que tiene inicial, gasta las $\frac{17}{30}$ partes:

$$\underbrace{x}_{\substack{lo\ que\ le \\ da\ la\ madre}} - \underbrace{\frac{17}{30}x}_{lo\ que\ gastó} = \underbrace{260}_{\substack{lo\ que\ el \\ enunciado \\ dice\ que\ le\ queda}}$$

Es decir, el dinero total menos el dinero gastando, con el descuento incluido, es igual al dinero sobrante.

Despejando x de la última ecuación, lo que le dio la madre es $\$600$.

17) Encuentre el conjunto solución de:

17.1) $-3x > 9 \to x < -3$ El mayor de la inecuación cambia siempre que multipliques o dividas por un número negativo.
Entonces nuestro conjunto solución van a ser todos los números menores estrictos (sin la igualdad) que -3.
$S = (-\infty, -3)$ Van desde el menos infinito hasta el -3, ambos abiertos (con paréntesis).

17.2) $\frac{1}{x} + 3 > 4 \to \frac{1}{x} > 1$ Hasta acá el único inconveniente que tenemos que tener en cuenta, y que no nos podemos olvidar nunca, es que $x \neq 0$ porque se encuentra en el denominador. Como ya vimos, no podemos dividir por cero. Ahora hay que tener cuidado cuando pasamos multiplicando el x. Se va a separar en 2 casos, uno donde se dice que $x > 0$ y el sentido de la inecuación se mantiene. Y otro donde $x < 0$ y cambia el sentido.

$$\frac{1}{x} > 1 \quad \begin{array}{l} \nearrow \quad x > 0 \to 1 > x \\ \searrow \quad x < 0 \to 1 < x \end{array}$$

Veamos primero el segundo caso, son todos los x mayores a 1 y menores a 0. Esto no es posible, así que el 2º caso no nos da ninguna solución.

En cambio, el primer caso nos dice todos los x menores a 1 y mayores a 0. Esta es nuestra solución, sin olvidar la restricción del 0!

$$S = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 1\}$$

17.3) $x^2 - 2x \geq 0 \to x^2 \geq 2x$ Como en el caso anterior, vamos a tener que separar en casos al dividir por x, para esto hay que pedir que $x \neq 0$ y analizar ese caso particular aparte.

$$x^2 \geq 2x \quad \begin{matrix} \nearrow & x > 0 \to x \geq 2 \\ \searrow & x < 0 \to x \leq 2 \end{matrix}$$

Los dos casos son posibles.

Ahora veamos el caso $x = 0$ si reemplazamos en la primera ecuación nos quedaría $0^2 - 2.0 \geq 0 \to 0 \geq 0$ Que cumple, entonces a nuestra solución anterior hay que agregarle el 0.
Entonces llegamos a: $S = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 0 \vee x \geq 2\}$

17.4) $\dfrac{2x-5}{5} - 1 > 3 - x \to \dfrac{2x-5}{5} > 4 - x \to 2x - 5 > 20 - 5x \to 7x > 25 \to x > \dfrac{25}{7}$

Como no hicimos ninguna operación que cambiara el signo nuestra solución va a ser:
$S = \left(\dfrac{25}{7}, +\infty\right)$ que es lo mismo que $S = \left\{x / x \in \mathbb{R} \wedge x > \dfrac{25}{7}\right\}$. Ambas formas son válidas.

17.5) $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$

Primero hay que tener en cuenta que $x \neq -1$ porque el denominador tiene que ser distinto de cero.

Veamos los siguientes casos:

$$\begin{cases} 1-x > 0 \wedge 1+x > 0 \\ \vee \\ 1-x < 0 \wedge 1+x < 0 \end{cases} \to \begin{cases} x < 1 \wedge x > -1 \\ \vee \\ x > 1 \wedge x < -1 \end{cases}$$

Para el 1º caso nos queda el intervalo $(-1,1)$

Para el segundo, no hay solución ya que se contradicen las 2 condiciones.

Entonces nuestro conjunto solución queda: $S = (-1,1)$

17.6) $3x^2 - 6x + 3 < 0 \to 3.(x^2 - 2x + 1) < 0 \to x^2 - 2x + 1 < 0 \to (x-1)^2 < 0$

Llegamos un número elevado al cuadrado. Y eso siempre es positivo, sin importar el número que esté adentro. Por lo tanto, no existe solución en los reales: $S = \phi$

17.7) $\dfrac{1-x}{x+5} \leq 0$ Para que se cumpla esta inecuación pedimos (sin olvidar el $x \neq -5$):
$1 - x \leq 0 \wedge x + 5 > 0$ ó $1 - x \geq 0 \wedge x + 5 < 0$

Hacemos este paso gracias a la regla de los signos. Nos permite saber cuándo un producto de 2 números va a ser mayor o menor a 0.

El primer caso, nos dice: $x \neq -5$, $x \geq 1$ y $x > -5$ entonces: $1 \leq x$
El segundo caso, nos dice: $x \neq -5$, $x \leq 1$ y $x < -5$ entonces: $x < -5$
Y nuestra solución completa es: $S = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge x < -5 \vee x \geq 1\}$

17.8) $-1\leq\frac{2x-3}{4}<5\rightarrow -4\leq 2x-3<20$ Seguimos operando hasta que quede la x sola:

$-4\leq 2x-3<20\rightarrow -1\leq 2x<23\rightarrow -\frac{1}{2}\leq x<\frac{23}{2}$ y nuestra solución es $S=\left[-\frac{1}{2},\frac{23}{2}\right)$

Notar que el corchete representa el menor igual.

17.9) $-12<6-3x<-2\rightarrow -18<-3x<-8$

Para terminar de despejar la x multiplicamos por -3 que cambia el sentido de las 2 inecuaciones:

$6>x>\frac{8}{3}$

Entonces, nuestra solución es el conjunto $S=\left(\frac{8}{3},6\right)$

17.10) $x\leq 3x+2\leq x+6$ restamos x en las 2 inecuaciones:

$0\leq 2x+2\leq 6\rightarrow -2\leq 2x\leq 4\rightarrow -1\leq x\leq 2$

Entonces, nuestro conjunto solución es $S=[-1,2]$

18) Encuentre el conjunto solución de:

18.1) $|2x-1|\leq 2$ Siempre que tengamos módulo vamos a tener que separar en 2 casos. Uno en donde sea mayor, manteniendo el sentido de la inecuación y otro donde sea menor, cambiando el sentido de la inecuación y el signo también:

$$|2x-1|\leq 2 \begin{array}{l} \nearrow\ 2x-1\leq 2\rightarrow 2x\leq 3\rightarrow x\leq\frac{3}{2} \\ \searrow\ 2x-1\geq -2\rightarrow 2x\geq -1\rightarrow x\geq -\frac{1}{2} \end{array}$$

Entonces, nuestra solución es $S=\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

18.2) $|x+5|\geq 3$ Separamos en casos:

$x+5\geq 3\rightarrow x\geq -2$

$x+5\leq -3\rightarrow x\leq -8$

Juntando los 2 casos nuestro conjunto solución queda $S=(-\infty,-8]\cup[-2,+\infty)$

En este caso, la solución es la unión de los 2 y no la intersección como en el caso anterior. Ya que el ejercicio nos pide los mayores, mientras que en el anterior nos pedía menor. Esto aunque parezca mínimo, marca la diferencia.

18.3) $|2-4x|\leq 2$ Separamos en casos:

$2-4x\leq 2\rightarrow -4x\leq 0\rightarrow x\geq 0$

$2-4x\geq -2\rightarrow -4x\geq -4\rightarrow x\leq 1$

Entonces nuestra solución es $S=[0,+\infty)\cap(-\infty,1]$

Como para este caso es la intersección quedaría $S=[0,1]$

18.4) $\left|\frac{1}{x}+3\right|>4$ Separamos en casos:

$\frac{1}{x}+3>4 \rightarrow \frac{1}{x}>1$

Para este primer caso, vamos a tener que subdividirlo en $x<0$ y $x>0$:
$x<1$ para x mayores a 0 y $x>1$ para x menores a 0. Ya podemos descartar la 2º parte del 1º caso ya que no pueden cumplir las 2 cosas al mismo tiempo. Entonces del 1º caso solo nos quedan $0<x<1$.

$\frac{1}{x}+3<-4 \rightarrow \frac{1}{x}<-7$

Ahora vamos a tener que volver a subdividir en otras 2 partes:

$x>0$ queda $1<-7x \rightarrow 7x<-1 \rightarrow x<-\frac{1}{7}$ que podemos observar que tampoco se van a poder cumplir las 2 condiciones al mismo tiempo, así que este caso no nos da solución. Sigamos con la otra parte:

$x<0$ queda $1>-7x \rightarrow 7x>-1 \rightarrow x>-\frac{1}{7}$ para este caso si se van a poder cumplir las 2 condiciones. $-\frac{1}{7}<x<0$

Juntando el primer caso con el segundo $S=\left(-\frac{1}{7},0\right)\cup(0,1)$

18.5) $|2x-3|+4\geq 10 \rightarrow |2x-3|\geq 6$ Separamos en casos:

$x>0 \rightarrow 2x-3\geq 6 \rightarrow 2x\geq 9 \rightarrow x\geq \frac{9}{2}$ Entonces de este caso obtenemos $\left[\frac{9}{2},\infty\right)$

$x<0 \rightarrow 2x-3\leq -6 \rightarrow 2x\leq -3 \rightarrow x\leq -\frac{3}{2}$ De este otro caso llegamos a $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$

Y nuestra solución va a ser la unión de estos dos conjuntos:

$$S=\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{9}{2},\infty\right)$$

18.6) $1-x^2>0 \rightarrow 1>x^2$ A simple vista, conociendo la función cuadrática, podemos darnos cuenta que la solución va a ser $(-1,1)$

Para darnos cuenta de eso, aplicamos raíz de ambos lados:

$\sqrt{1}>\sqrt{x^2}$ Y ahora hay que recordar que $\sqrt{x^2}=|x|$

$\sqrt{1}>|x|$ Separamos en casos:

$x>0 \rightarrow 1>x$

$x<0 \rightarrow -1<x$ Y llegamos a nuestra solución: $S=(-1,1)$

18.7) $0<|x-1|<4$ Veamos las 2 inecuaciones por separado:

$0<|x-1|$ Esto pide todos los x que tienen distancia mayor a 0 del 1:

$x-1>0 \to x>1$ y también $x-1<0 \to x<1$ entonces queda: $\mathbb{R}-\{1\}$ todos los números reales menos el 1 tienen distancia mayor a 0 del 1.

Ahora veamos la otra parte: $|x-1|<4 \to -4<x-1<4$ desarmamos el modulo y ahora sumamos 1 en los 3 miembros: $-3<x<5$ queda: $(-3,5)$

Juntando los 2 resultados tenemos: $S=(-3,1)\cap(1,5)$

18.8) $3x^2-1\leq 2 \to 3x^2 \leq 3 \to x^2 \leq 1$ Recordamos que la raíz de un cuadrado es su módulo:

$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{1} \to |x| \leq 1$ También acordate que cuando aplicas raíz es en ambos lados, para estos casos no nos molesta por que la raíz de 1 es 1.

Separamos el módulo: $|x| \leq 1 \to -1<x<1$ y nuestro conjunto solución es: $S=(-1,1)$

18.9) $4x-x^2>4 \to 4x-x^2-4>0$ Multiplicamos por -1 para que quede más cómodo:

$x^2-4x+4<0 \to (x-2)^2<0$ Aplicamos raíz para matar el cuadrado:

$\sqrt{(x-2)^2}<\sqrt{0} \to |x-2|<0$ Distancia menor estricto a 0 del 2. No existe solución para eso. Ya que el 2 tiene distancia 0 del 2 y no podemos pedir algo más chico (no existen distancias negativas).

Finalmente, $S=\phi$.

18.10) $|x^2-1|>3$ Separamos el módulo:

$x^2-1>3 \to x^2>4 \to \sqrt{x^2}>\sqrt{4} \to |x|>2$ Entonces de la 1º parte tenemos: $x>2 \vee x<-2$

$x^2-1<-3 \to x^2<-2$ Por definición sabemos que x^2 es un número positivo siempre, entonces nunca se puede pedir que sea menor a -2.

Entonces nuestro conjunto solución queda $S=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

19) Determine el conjunto de todos los números…

$x^2<3 \to \sqrt{x^2}<\sqrt{3} \to |x|<\sqrt{3}$ Desarmando el módulo $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$

Entonces, nuestro conjunto solución es $S=(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

20) Determine el conjunto de todos los números…

$|x-(-3)|<5 \to |x+3|<5$

Desarmando el módulo: $-5<x+3<5 \to -8<x<2$

Entonces, nuestro conjunto solución es $S=(-8,2)$

21) Determine el conjunto de todos los números…

$|x-3|\geq 4$

Desarmamos el módulo:

$$x-3\geq 4\rightarrow x\geq 7 \quad [7,+\infty)$$
$$x-3\leq -4\rightarrow x\leq -1 \quad (-\infty,-1]$$

Uniendo los dos casos, $S=(-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$

22) Para que números reales se verifica...

Recordá que el recíproco de x es $\frac{1}{x}$. Sabiendo esto:

$$x+\frac{1}{x}>2\rightarrow x+\frac{1}{x}-2>0\rightarrow \frac{x^2+1-2x}{x}>0$$

Entonces, decimos:

$$\begin{cases} x^2+1-2x>0\wedge x>0 \\ \vee \\ x^2+1-2x<0\wedge x<0 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} (x-1)^2>0\wedge x>0 \\ \vee \\ (x-1)^2<0\wedge x<0 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2}>0\wedge x>0 \\ \vee \\ \sqrt{(x-1)^2}<0\wedge x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-1|>0\wedge x>0 \\ \vee \\ |x-1|<0\wedge x<0 \end{cases}$$

Para el segundo caso, no tenemos solución, ya que las dos condiciones se contradicen.

Entonces, solo nos queda: $|x-1|>0\wedge x>0$, $(0,+\infty)\cap\mathbb{R}-\{1\}$

$S=(0,+\infty)-\{1\}$

23) $|x-(-3)|=8$

Nos paramos en el -3 y la distancia es 8 para ambos lados.

$$|x+3|=8\vee|x+3|=-8$$
$$x=5\wedge x=-11$$
$$|5-1|=4\wedge|-11-1|=12$$

Entonces, nuestro número tiene 2 posibilidades: $S=12\vee 4$

24) La distancia entre $x-1$ siendo...

$$|(x-1)-6|=|3x-3|$$

Una vez que tenemos esto resolvemos:

$$|x-7|=|3x-3|$$

Ahora matamos los módulos:

$$x-7=3x-3\rightarrow 2x=-4\rightarrow x=-2$$
$$x-7=-3x+3\rightarrow 4x=10\rightarrow x=\frac{5}{2}$$

El dato del enunciado también nos dice $x<0$

Entonces, nuestra solución es: $S=-2$

25) Efectúe las siguientes operaciones:

25.1) $\frac{10^{2n+1}}{10^{n+1}}=10^{[(2n+1)-(n+1)]}=10^{[2n+1-n-1]}=10^{n}$

Usando propiedades de la potencia. En este caso, como las bases son iguales y hay una división, los exponentes se restan: $\frac{a^b}{a^c}=a^{b-c}$

25.2) $\frac{x^{-3}.y^{4}}{x^{4}.y^{-3}},(x\neq 0\wedge y\neq 0)\rightarrow\frac{y^{4}.y^{3}}{x^{4}.x^{3}}=\frac{y^{7}}{x^{7}}$

En este caso, se aplica la propiedad de que en el producto de potencias de igual base podemos sumar los exponentes: $a^b.a^c=a^{b+c}$.

25.3) $1+x^{-1},(x\neq 0)\rightarrow 1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$

En efecto, lo único que estamos haciendo es reescribir la misma expresión algebraica de una manera diferente.

25.4) $\left(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right).x,(x\geq 0)\rightarrow\left(x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{3}{2}}\right)$

Utilizamos la propiedad que vimos en el segundo punto.

25.5) $\frac{14a^{7}.b^{4}.\left(c^{3}\right)^{2}}{21a^{6}.b^{6}.c^{8}},(a,b,c\neq 0)\rightarrow\frac{14a.c^{3.2}}{21b^{2}.c^{8}}=\frac{2a}{3b^{2}.c^{2}}$

En este caso, utilizamos la siguiente propiedad: $\left(a^b\right)^c=a^{bc}$.

25.6) $\frac{10^{x+y}.10^{y-x}.10^{y+1}}{10^{y+1}.10^{2y+1}}=\frac{10^{x+y+y-x+y+1}}{10^{y+1+2y+1}}=\frac{10^{3y+1}}{10^{3y+2}}=10^{[(3y+1)-(3y+2)]}=10^{-1}=\frac{1}{10}$

Utilizamos las propiedades que vimos en el primer y segundo punto.

25.7) $\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^{-1}.\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^{-1},(|a|\neq|b|,a\neq 0,b\neq 0)\rightarrow\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{-1}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1}$

$$\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^{-1}=\left[\frac{1}{a^{2}}-\frac{1}{b^{2}}\right]^{-1}=\left[\frac{b^{2}-a^{2}}{a^{2}.b^{2}}\right]^{-1}=\frac{\left(b^{2}-a^{2}\right)^{-1}}{\left(a^{2}.b^{2}\right)^{-1}}=\frac{a^{2}.b^{2}}{b^{2}-a^{2}}$$

En este caso, utilizamos las propiedades $(a.b)^c=a^c.b^c$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^c=\frac{a^c}{b^c}$

25.8) $\sqrt{\frac{a}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2a}}-\sqrt{\frac{2}{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}.\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}=\frac{a-1-2}{\sqrt{2}.\sqrt{a}}=\frac{a-3}{\sqrt{2}.\sqrt{a}}$

25.9) $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^{-1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-1}=2+\sqrt{2}$

Lo que hicimos en el segundo paso, racionalizar el numerador, lo vamos a ver más en detalle en el próximo ejercicio.

25.10) $\frac{81^{0,25}+9^{-0,5}}{(-27)^{1/3}+(-8)^{2/3}}=\frac{\sqrt[4]{81}+\frac{1}{\sqrt{9}}}{\sqrt[3]{-27}+\sqrt[6]{-8^{2}}}=\frac{10}{3}$

26) Racionalice el numerador…

26.1) $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

Cuando hacemos esto, tenemos que pedir que $x+h\geq 0\wedge x\geq 0$

Una vez que pedimos esto seguimos,

$$\frac{x+h-x}{h.\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{h}{h.\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

26.2) $\frac{\sqrt{u}-2}{u-4}=\frac{\left(\sqrt{u}-2\right)}{u-4}.\frac{\sqrt{u}+2}{\sqrt{u}+2}=\frac{u-4}{(u-4).\left(\sqrt{u}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{u}+2}$

27) Racionalice el denominador.

27.1) $\frac{2}{2-\sqrt{5}}=\frac{2}{2-\sqrt{5}}.\frac{2+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}=\frac{4+2\sqrt{5}}{4-5}=\frac{4+2\sqrt{5}}{-1}$

27.2) $\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}.\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}=\frac{\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^{2}}{\left(2\sqrt{3}\right)^{2}-\left(3\sqrt{2}\right)^{2}}=\frac{4.3-6.\sqrt{3}.\sqrt{2}-6.\sqrt{3}.\sqrt{2}+9.2}{4.3-9.2}$

$$\frac{30-12\sqrt{3.2}}{12-18}=\frac{30-12\sqrt{6}}{-6}=\frac{-6\left(2\sqrt{6}-5\right)}{-6}=2\sqrt{6}-5$$

Respuesta del libro:

$$-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^{2}=-\left(2-2\sqrt{6}+3\right)=2\sqrt{6}-5$$

Aplicaciones a la geometría:

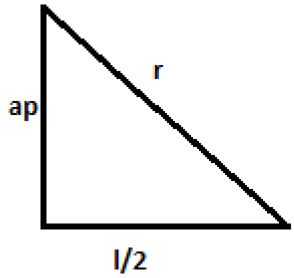
28) Sabiendo que RSPT es un cuadrado… **[Resuelto en la guía]**

29) Un cuadrado y un hexágono regular…

Sabiendo que el perímetro es 4m, podemos averiguar cuanto mide cada lado (l):
$p = 4l = 4 \rightarrow l = 1$ Ahora también podemos sacar el área $A = l^2 \rightarrow A = 1m^2$

Ahora veamos el hexágono:
$p = 6.t \rightarrow 4 = 6.t \rightarrow t = \frac{2}{3}$ Donde t es cada lado. Para calcular el área necesitamos la apotema.

Por ser un polígono regular sabemos que r=t y que el área del hexágono cumple la fórmula: $A = \frac{6.t.ap}{2}$



Tranzando un triángulo interno, usando Pitágoras, podemos sacar el valor de ap.
$r^2 = (ap)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 = (ap)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \rightarrow \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = (ap)^2 \rightarrow (ap)^2 = \frac{1}{3}$

Aplicamos raíz para sacar el cuadrado: $\sqrt{(ap)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow |ap| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Como ap es una distancia positiva, descartamos la parte negativa del módulo y nos quedamos con:
$ap = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Entonces, el área del hexágono es: $A = \frac{6.\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{3}}{2} \rightarrow A = \frac{2}{3}\sqrt{3}m^2$

Es mayor al área del cuadrado.

30) Si una pizza de 32cm de diámetro…

Una forma muy fácil de resolver este problema es aprovechar los datos que nos dan.
Por un lado nos dicen que el diámetro de la pizza (suponemos a esta como un círculo perfecto). Y sabiendo que el radio es la mitad del diámetro, podemos sacar el área de este círculo:
$A = \pi.r^2 \rightarrow A = 16^2\pi \rightarrow A = 256\pi cm^2$

Y ahora usamos el dato de que fue dividido en 8 partes iguales, lo que quiere decir que tienen todas el mismo área y que multiplicadas por 8 dan el área total del círculo original.
$\frac{A}{8} = a$ Donde a es el área de cada porción.
Entonces, $a = 32\pi cm^2$

31) Calcule el área de la zona sombreada…

De los datos sabemos que $r = 10cm$ y $\alpha = \frac{2}{3}\beta$.

Del gráfico, sabemos que α y β son complementarios:

$$\alpha + \beta = 90 \to \frac{2}{3}\beta + \beta = 90 \to \frac{5}{3}\beta = 90 \to \beta = 54^o$$

Sabemos que el área del círculo es πr^2. Si ahora dividimos por $360°$, obtenemos el área de cada porción de ángulo. Y también sabemos que cada porción sombreada tiene $54°$. Por lo tanto, si multiplicamos lo anterior por la cantidad de ángulos total de todas las porciones sombreadas vamos a tener su área:

$$\frac{4\beta.\pi.r^2}{360} = \frac{216.100.\pi}{360} = 60\pi cm^2$$

32) Si rodeáramos la tierra por el ecuador…

Este problema es mucho más fácil de lo que aparenta. Y no es necesario saber cuál es el radio de la tierra. Nos alcanza con suponer que es una esfera perfecta.
Primero, llamamos r al radio de la tierra. Luego, calculamos su perímetro, $p = 2\pi.r$. Esa va a ser la longitud de la cuerda que rodea la tierra. Ahora, separémosla $1m$ de la superficie. Esto quiere decir que el radio aumenta en $1m$. Entonces, el nuevo perímetro quedaría como: $p' = 2\pi.(r+1)$ es el radio de la tierra más $1m$.

Ahora, para saber cuánta cuerda demás vamos a necesitar basta con restar los dos perímetros:

$$p' - p = 2\pi.(r+1) - 2\pi.r \to p' - p = 2\pi.r + 2\pi - 2\pi.r \to p' - p = 2\pi$$

Finalmente, vamos a necesitar $2\pi m$ de cuerda extra.

33) $ABCD$ es un cuadrado de lado $5cm$…

Primero, veamos los datos. Dicen que los lados del cuadrado son $5cm$ entonces podemos deducir:

$$\overline{BA} = 5, \overline{AD} = 5, \overline{DC} = 5, \overline{CB} = 5$$

También nos dan BS, y usando CB, podemos sacar la longitud de CS:

$$\overline{CS} = \overline{BS} - \overline{CB} \to \overline{CS} = 10.\sqrt{2} - 5 \to \overline{CS} = 5.\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

Una vez que ya tenemos todos estos datos podemos calcular el área de los dos triángulos sin ningún problema:

$$\overline{ABC} = \frac{\overline{BC}.\overline{BA}}{2} \to \overline{ABC} = \frac{5.5}{2} \to \overline{ABC} = \frac{25}{2}cm^2$$ Para el primer triangulo.

$$\overline{DCS} = \frac{\overline{DC}.\overline{CS}}{2} \to \overline{DCS} = \frac{5.5.\left(2\sqrt{2}-1\right)}{2} \to \overline{DCS} = \frac{25}{2}.\left(2\sqrt{2}-1\right) \to \overline{DCS} = 25\sqrt{2} - \frac{25}{2}cm^2$$ Para el segundo triangulo.

Ahora basta sumar las dos áreas:

$$\overline{ABC} + \overline{DCS} = \frac{25}{2} + 25\sqrt{2} - \frac{25}{2} \to \overline{ABC} + \overline{DCS} = 25\sqrt{2}cm^2$$

34) La figura representa una mesa…

Dividamos la mesa en dos partes: El rectángulo del medio y los dos semicírculos que los podemos pensar juntos formando un círculo. Ahora, hay que calcular el perímetro total de ambos cuerpos:

Para el rectángulo hay que restarle los laterales, que esos van a parar al círculo. Entonces, del perímetro del rectángulo, solo nos queda $0,94.2=1,88m$

Mientras que el círculo está completo, $2\pi.r=2.3,14.0,475=2,983\,m$

Ahora sumemos las dos partes, $2,983+1,88=4,863$

Para ver cuántas personas entran, dividimos el perímetro por el espacio ocupado por cada una,
$\frac{4,863}{0,54}=9,00$

35) R, S y T son centros de circunferencias…

Como tenemos un hexágono regular el dato nos da los lados $(4cm)$

Así que primero calculemos el área del hexágono:

$A=\frac{p.ap}{2}$

Para calcular la apotema trazamos un triángulo y aplicamos Pitágoras.

$r^2=(ap)^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\to 16=(ap)^2+4\to(ap)^2=12\to(ap)^2=\sqrt{12}$ Ahora que tenemos la apotema calculamos el área:

$A=\frac{24}{2}.\sqrt{12}\to A=12.\sqrt{4.3}\to A=24\sqrt{3}$

Ahora pasemos a los semicírculos:

$A=\frac{3\pi.r^2}{2}\to A=\frac{3}{2}\pi.4\to A=6\pi$ Restamos las 2 áreas para obtener el área sombreada:

$24\sqrt{3}-6\pi=A$

36) En la figura…

Como nos dan de dato el perímetro del círculo podemos encontrar el radio:

$p=2\pi.r\to\sqrt{2}\pi=2\pi.r\to r=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Y ahora con Pitágoras podemos averiguar el lado del cuadrado:

$\overline{AB}^2=r^2+r^2\to\overline{AB}^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\to\overline{AB}=1$

Por lo tanto, el área es igual a $A=1$

Ahora, veamos el área del círculo: $A=\pi r^2\to A=\frac{\pi}{2}$

Restamos las dos áreas para ver el área sombreada: $A=\frac{\pi}{2}-1$

37) La figura tiene una superficie…

Nos dan de dato la superficie total de la figura, $111=20x+20x-x^2$.
Se suman los dos rectángulos, pero sin olvidarse de restar 1 el cuadrado de la esquina. Si no estarías contando esa parte dos veces.

Averigüemos x, $-x^2+40x-111=0$ Usando la formula resolvente para esta cuadrática llegamos a $x_1=3, x_2=37$ descartamos el x_2 ya que no cumple las limitaciones del problema. Y la respuesta es $x=3$.

38) Calcule el área total de un tanque…

Tenemos de datos: $h = 2, r = 0,5$

Usando la fórmula de área de un cilindro, $2\pi.r.h + 2\pi.r^2 = 2\pi.0,5.2 + 2\pi.0,25 \to 2\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi$

Usando la fórmula de volumen del cilindro: $\pi.r^2.h = \pi\frac{1}{4}.2 = \frac{1}{2}\pi$

39) Para construir una caja sin tapa…

Al cortarse un cuadrado en cada esquina de $2cm$ de lado, se pierde $4cm$ en cada lado de la placa. Entonces, al doblarla para armar la caja quedaría con un largo de $28cm$ y un ancho de $2cm$ mientras que la altura va a ser correspondiente al lado del cuadrado $2cm$.

Entonces, el volumen queda será $V = a.l.h \to V = 28.20.2 \to V = 1120cm^3$

40) Calcule el volumen de material…

Entendemos este ejercicio como una esfera dentro de otra esfera más grande y hueca. Calculamos el volumen de la más grande:

$V = \frac{4}{3}\pi.r^3 \to V = \frac{4}{3}\pi.134,61 \to V = 179,48\pi$

Mientras que el volumen del más chico será:

$V = \frac{4}{3}\pi.125 \to V = 166,66\pi$

Restamos los dos para obtener el de la cascara:

$V = 179,48\pi - 166,66\pi \to V = 12,82\pi$

La unidad correspondiente es cm^3.

41) Calcule la altura de un tanque australiano…

De los datos sacamos que: $\frac{1}{3}V = 18,84m^3 \to V = 56,52m^3$ y $\frac{1}{3}r = h \to r = 3h$

Sabiendo que:

$V = \pi.r^2.h \to 56,52 = \pi.9h^2.h \to h^3 = \frac{56,52}{9\pi} \to h = \sqrt[3]{\frac{56,52}{9\pi}} \to h \cong 1,26m$

42) Halle el radio de una esfera…

Calculamos el volumen del cono:

$V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h \to V = \frac{1}{3}\pi.100.30 \to V = 1000\pi$

Veamos ahora la esfera:

$V = \frac{4}{3}\pi.r^3 \to 1000\pi = \frac{4}{3}\pi.r^3 \to r = \sqrt[3]{750}cm$

43) Calcule en cuanto tiempo se llenará…

Primero, calculemos la capacidad de la pileta (suponiendo que esta es un rectángulo):

$V = 10.5.2 \to V = 100m^3$

Mientras que las 5 canillas vierten un total de $50l$ por minuto.
Sabiendo que $1000l = 1m^3$ las canillas vierten $0{,}05m^3$ por minuto.

Para saber cuánto tiempo va a tardar solo basta hacer: $t = \dfrac{100m^3}{0{,}05\dfrac{m^3}{mi}} \rightarrow t = 2000mi$

$2000min$ son $33{,}33hs$, que son $1\ día, 9\ horas\ y\ 33\ minutos$.

44) Halle el porcentaje de reducción de volumen…

Entendemos por muesca cónica por dos conos. Entonces, a nuestra barra cilíndrica se le quitan dos conos de volumen:

$V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h \rightarrow V = \frac{1}{3}\pi.\frac{1}{4}.1 \rightarrow V = \frac{1}{12}\pi$ Como son 2 conos quedaría: $\frac{1}{6}\pi$

Mientras que el volumen de la barra es: $V = \pi.r^2.h \rightarrow V = 4\pi$

Restamos los volúmenes:

$V = 4\pi - \frac{1}{6}\pi \rightarrow V = \frac{23}{6}\pi$

Con regla de tres simple averiguamos el porcentaje:

Si 4π es el 100%, $23/6\pi$ es el $95{,}83\%$.

45) Un canal que conduce agua…

Primero pasemos la velocidad del agua a segundos dividiendo por 60, haciendo la cuenta, queda $\frac{7}{3}\frac{m}{s}$.

Calculemos el área del canal:

$\frac{(4+3).1{,}5}{2} = 5{,}52m^2$

Ahora solo hay que multiplicar el área por la velocidad del agua:

$5{,}52m^2.\frac{7}{3}\frac{m}{s} = 12{,}25\frac{m^3}{s}$