Ingreso UTN

Unidad V

Funciones:

1) Determine el dominio y los ceros de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\log(x-2)+\log(x)-\log(8)$

Nota: Llamamos argumento a lo que se le aplica una función.

Por ejemplo, $f(x)=\sqrt{\underbrace{x}_{\substack{argumento\\ de\ la\ función\\ raíz\ cuadrada}}}$ o $g(x)=ln\left(\underbrace{x^2+5}_{\substack{argumento\\ de\ la\ función\\ logaritmo\\ natural}}\right)$

Como en la función f solo tenemos logaritmos, sabemos que el dominio va a estar *restringido*, el argumento tiene que ser mayor *estricto* que 0:

$x-2>0 \wedge x>0 \rightarrow x>2$

Entonces, el dominio queda $D=(2,+\infty)$

Ahora veamos si hay algún cero:

$f(x)=\log(x-2)+\log(x)-\log(8)=0$

Por propiedades de logaritmos podemos escribir a f como:

$\log\left(\frac{[x-2].x}{8}\right)=\log\left(\frac{x^2-2x}{8}\right)$

Y sabemos que la función logaritmo tiene un 0 cuando el argumento es igual a 1 . Entonces solo basta igualar el argumento a 1:

$\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x=1\rightarrow\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x-1=0$

Usando la resolvente llegamos a: $x_1=4,x_2=-2$. El -2 queda afuera porque no está en el dominio. Entonces, la función tiene un cero en $x=4$.

b) $h(x)=\log(2x^2+7x+3)$

De nuevo, para ver el dominio miramos el argumento que el argumento de la función logaritmo sea mayor estricto que 0:

$$2x^2+7x+3>0 \to (2x+1).(x+3)>0 \to \left(x+\frac{1}{2}\right).(x+3)>0$$

Para que se cumpla la inecuación, ambos tienen que tener el mismo signo.

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}>0 \to x>-\frac{1}{2} \\ x+3>0 \to x>-3 \end{cases} \to x>-\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}<0 \to x<-\frac{1}{2} \\ x+3<0 \to x<-3 \end{cases} \to x<-3$$

Quedando la unión de estos dos intervalos: $D=(-\infty,-3)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

Para ver los ceros: $2x^2+7x+3=1 \to 2x^2+7x+2=0$

Usando la resolvente llegamos a $x_1=-0,3138, x_2=-3,1861$. Verificamos que ambos están dentro del dominio de la función.

c) $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$

Para hallar el dominio, tenemos que tener en cuenta tres cosas. Que el argumento del ln tiene que ser mayor estricto que 0, que el denominador no puede ser 0 y que el argumento de la raíz tiene que ser mayor igual a 0 (como trabajamos con números reales, no consideramos posibles las raíces pares de números negativos).

Entonces,

$x>0$, $\sqrt{\ln x}\neq 0 \to \ln x \neq 0 \to x\neq 1$ y $\ln x \geq 0 \to x \geq 1$

$D=(1,+\infty)$

Para ver los ceros, igualamos la función a cero (algunos dicen anular la función):

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{\ln x}}=0$$

No hay manera de que esta expresión sea nula, el denominador tendría que ser infinito. Por lo tanto, la función no tiene ceros en su dominio.

d) $s(x)=\dfrac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}$

Veamos el dominio: $x\neq 0$ y $2-2^{\frac{1}{x}}\neq 0 \to 2^{\frac{1}{x}}\neq 2 \to x\neq 1$

$D=\mathbb{R}-\{0,1\}$

Como en el caso anterior, no tenemos manera de generar un 0. Por lo tanto, no tiene ceros.

e) $t(x)=\sqrt{\ln\left(e^{2x}-1\right)}$

Para ver su dominio, el argumento de la raíz tiene que ser mayor igual a 0 y el argumento del ln tiene que ser mayor estricto a0:

$$\ln\left(e^{2x}-1\right)\geq 0 \rightarrow e^{2x}-1\geq 1 \rightarrow e^{2x}\geq 2 \rightarrow \ln\left(e^{2x}\right)\geq \ln(2) \rightarrow 2x\geq \ln 2 \rightarrow x\geq \frac{\ln 2}{2} \rightarrow x\geq \ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$$e^{2x}-1>0 \rightarrow e^{2x}>1 \rightarrow \ln\left(e^{2x}\right)>\ln 1 \rightarrow 2x>0 \rightarrow x>0$$

Entonces el dominio quedaría $D=\left[\ln\sqrt{2},+\infty\right)$

Para los ceros, planteamos lo mismo de siempre

$$\ln\left(e^{2x}-1\right)=0 \rightarrow e^{2x}-1=1 \rightarrow e^{2x}=2 \rightarrow 2x=\ln 2 \rightarrow x=\ln\sqrt{2}$$

La función tiene un cero en $\ln\sqrt{2}$

2) Dadas f y h, en cada caso determine…

Antes de comenzar, una función compuesta es una cadena de funciones aplicadas una a continuación de la otra. Ahora vamos a verlo mejor con los ejercicios.

a) $f(x)=|x|, h(x)=\log x$

Hacemos las funciones compuestas que nos piden:

$$f\circ h(x)=f\left(h(x)\right)=|h(x)|=|\log x|$$
$$h\circ f(x)=h\left(f(x)\right)=\log\left(f(x)\right)=\log|x|$$

b) $f(x)=e^{x}, h(x)=2x$

De la misma manera que en el punto anterior,

$$f\circ h(x)=f\left(h(x)\right)=e^{h(x)}=e^{2x}$$
$$h\circ f(x)=h\left(f(x)\right)=2\left(f(x)\right)=2e^{x}$$

c) $f(x)=\ln\left(x^{2}-1\right), h(x)=\sqrt{4-x}$

$$f\circ h(x)=f\left(h(x)\right)=\ln\left(h(x)^{2}-1\right)=\ln\left(\left[\sqrt{4-x}\right]^{2}-1\right)$$
$$h\circ f(x)=h\left(f(x)\right)=\sqrt{4-f(x)}=\sqrt{4-\ln\left(x^{2}-1\right)}$$

3) Determine el dominio e imagen…

a) $f(x)=3^{2x-1}$

Como no hay ninguna condición sobre el dominio, sabemos que $Df=\mathbb{R}$

Como el número 3 elevado a una potencia (negativa o positiva) nunca será negativa ni nula, el conjunto imagen será $If = \mathbb{R}^+$ (los reales positivos).

Veamos si podemos despejar y en función de x:

$$y = 3^{2x-1} \to \log_3(y) = 2x-1 \to \log_3(y)+1 = 2x \to \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_3(y) = x$$

Entonces, nuestra función inversa es $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_3(x)$ y $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

b) $f(x) = \ln(x-1)-2$

Veamos $Df = (1,+\infty)$ y como es una función logarítmica, sabemos que $If = \mathbb{R}$.

Ahora, intentemos de despejar y en función de x para encontrar la inversa:

$$y = \ln(x-1)-2 \to y+2 = \ln(x-1) \to e^{y+2} = x-1 \to e^{y+2}+1 = x$$

Entonces, nuestra función inversa es $f^{-1}(x) = 1 + e^{x+2}$ y $f^{-1}: \mathbb{R} \to (1,+\infty)$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{3-2x}$

Para hallar el dominio, tengamos en cuenta que el denominador tiene que ser distinto de 0:

$$3-2x \neq 0 \to x \neq \frac{3}{2}$$

Entonces, $Df = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

y $If = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ porque la restricción del dominio nos trae una restricción en la imagen.

Ahora, busquemos la inversa:

$$y = \frac{x-3}{3-2x} \to 3y-2xy = x-3 \to 3y-2xy+3 = x \to 3y+3 = x+2xy$$

$$3y+3 = x.(1+2y) \to \frac{3y+3}{1+2y} = x$$

Entonces, $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+3}{2x+1}$ con $f^{-1}: \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

.Por la forma en que quedó la inversa tenemos que cambiar la imagen de f:

$$If = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

d) $f(x) = x^2-4$

Tenemos $Df = \mathbb{R}$ porque no tenemos restricciones en el dominio.
$If = [-4, +\infty)$ (es una cuadrática común corrida)

Busquemos la inversa:
$y = x^2 - 4 \rightarrow y - 4 = x^2 \rightarrow \sqrt{y-4} = x$
Con $x > 0$.

Entonces, hay que cambiar el dominio de f por $Df = [0, +\infty)$. Mientras que $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ con $f^{-1} : [-4, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

4) Dadas $f(x) = \ln x$ y $h(x) = x + 3$

a) Halle dominio e imagen de cada función:

$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

b) Si es necesario efectué…

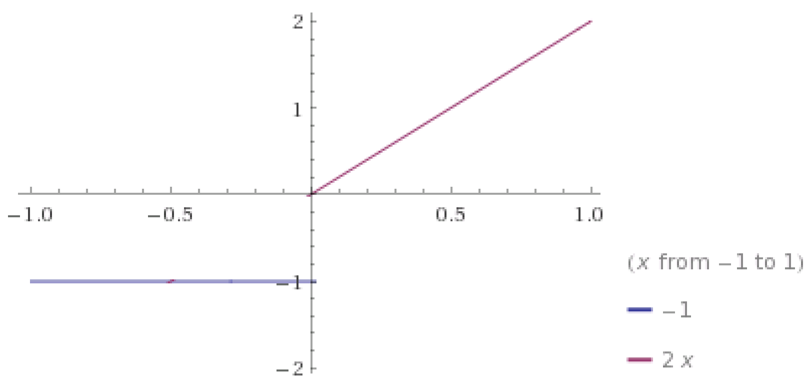
Primero, veamos la inversa de h: $y = x + 3 \rightarrow y - 3 = x$
$h^{-1}(x) = x - 3$ con $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Ahora veamos la compuesta:
$h^{-1} \circ f(x) = \ln(x) - 3$ con $h^{-1} \circ f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

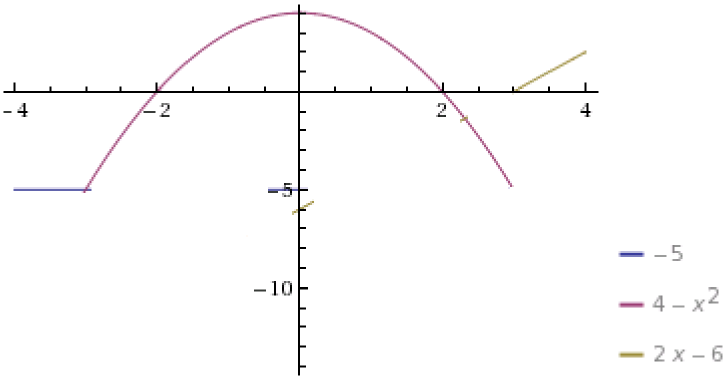
$f \circ h^{-1}(x) = \ln(x-3)$ con $f \circ h^{-1} : (3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

5) Represente gráficamente las siguientes funciones…

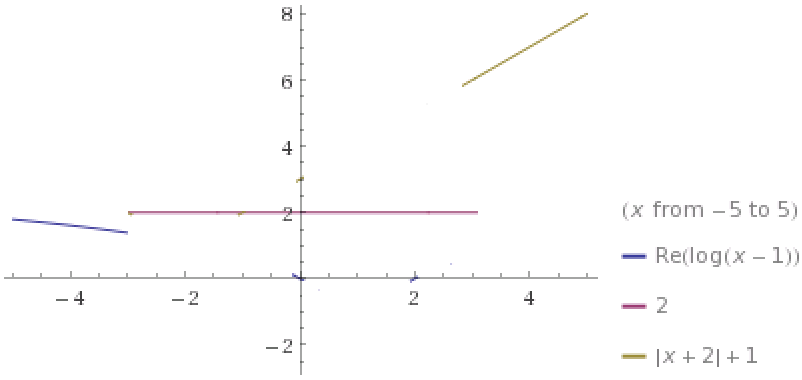
a) $f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$



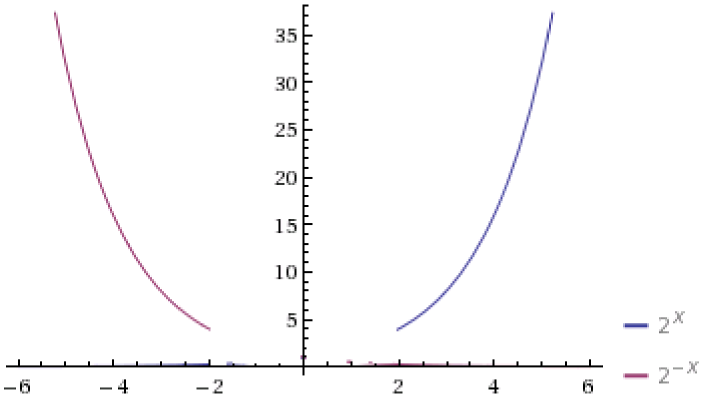
b) $h(x)=\begin{cases}-5 & x<-3\\ 4-x^2 & |x|\le 3\\ 2x-6 & x>3\end{cases}$



c) $g(x)=\begin{cases}\ln(x-1) & x<-3\\ 2 & |x|\le 3\\ |x+2|+1 & x>3\end{cases}$



d) $r(x)=\begin{cases}2^x & x>2\\ 2^{-x} & x<-2\end{cases}$



Problemas:

1) Escriba una fórmula para cada una de las siguientes funciones:

a) $A(x)$ es el área de un triángulo equilátero de perímetro x.

Sabemos que $a+b+c=x$ la suma de sus lados igual al perímetro. Como es un triángulo equilátero todos sus lados son iguales, $3a=x\rightarrow a=\dfrac{x}{3}$

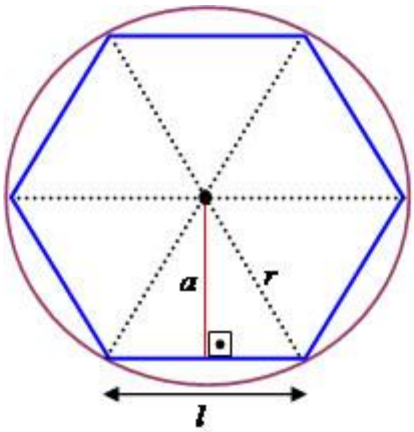
Mientras que la altura es $h=a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Para sacar esta altura, solo hay que dividir el triángulo equilátero en dos triángulos rectángulos y usando Pitágoras $a^2=h^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\rightarrow h^2=a^2-\dfrac{a^2}{4}\rightarrow h=\sqrt{a^2.\left(1-\dfrac{1}{4}\right)}\rightarrow h=\dfrac{a.\sqrt{3}}{2}$

Teniendo estos datos ya podemos sacar la fórmula del área:

$$A(x)=\frac{b.h}{2}\rightarrow A(x)=\frac{a.a\sqrt{3}}{2.2}\rightarrow A(x)=\sqrt{3}\frac{x^2}{4.3.3}\rightarrow A(x)=\sqrt{3}\frac{x^2}{36}$$

b) $F(x)$ es el área de un hexágono regular inscripto en una circunferencia de radio x.



De ser un hexágono regular $x=l$

Para sacar la apotema (a) tenemos en cuenta el triángulo rectángulo con catetos $l/2$ y $r(x)$:

$$x^2=a^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\rightarrow a^2=x^2-\frac{l^2}{4}\rightarrow a=\sqrt{x^2-\frac{x^2}{4}}\rightarrow a=\sqrt{\frac{3}{4}x^2}\rightarrow a=\sqrt{3}\frac{x}{2}$$

Entonces, la fórmula del área queda:

$$F(x)=\frac{6x.\sqrt{3}.x}{2.2}\rightarrow F(x)=\frac{3}{2}\sqrt{3}x^2$$

c) $V(x)$ es el volumen de agua de profundidad x contenida…

Tenemos la altura total del cono $(8m)$ y su diámetro (osea, su radio, $3m$). Con esto, podemos calcular el volumen *total* del cono. Pero lo que nosotros buscamos es una función que nos dé el volumen del cono para cualquier altura.

$V(8)=\dfrac{1}{3}\pi.3^2.8\rightarrow V(8)=24\pi m^3$ Esta sería el volumen total.

Ahora tenemos que buscar una relación entre la altura y el radio:

$$\frac{3}{8}=\frac{r}{x}\rightarrow r=\frac{3}{8}x$$

Fijate que si reemplazamos x por 8, llegamos a 3 que es el radio a los $8m$. Lo mismo si reemplazamos x por 0, tenemos radio 0.

Una vez que tenemos nuestra x, reemplazamos en la fórmula del volumen:

$$V(x)=\frac{1}{3}\pi.r^2.h\rightarrow V(x)=\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{3}{8}x\right)^2.x\rightarrow V(x)=\frac{1}{3}\pi.\frac{9}{64}x^2.x\rightarrow V(x)=3\pi\frac{x^3}{64}$$

d) $C(x)$ es el costo de producción promedio…

Hacemos un promedio del costo por día (suponiendo que cada refrigerador tarda 1 día en terminarse)

$C(x)=\dfrac{1300+240x}{x}$, donde $240x$ es el costo de todos los refrigeradores. Y se lo divide por la cantidad total para obtener el promedio.

2) Para hacer una caja…

Como en cada esquina se corta un cuadrado de lado x, el largo y el ancho de la base rectangular pierden $2x$ cada uno. Mientras que gana x de altura al armar la caja. Quedando un paralelepípedo de $12-2x\ cm$ de ancho, $18-2x\ cm$ de largo y x de altura.

Expresamos el volumen:

$$V(x)=a.b.c\rightarrow V(x)=(18-2x).(12-2x).x\rightarrow V(x)=4x^2-60x+216$$

El dominio de esta función es $\mathbb{R}$ pero hay que restringirla a nuestro caso, ya que el cuadrado que cortamos a la base no puede tener cualquier medida. En otras palabras, el volumen no puede ser negativo ni 0.

Entonces, $18-2x>0\rightarrow x<9\wedge 12-2x>0\rightarrow x<6$

Nos quedamos con $x<6$ y no es posible cortar un cuadrado con el valor de lado negativo. Es decir, $x>0$.

$DV=(0,6)$

3) Un cable parabólico esta tendido entre dos torres…

Ponemos nuestro sistema de ejes alineados en la altura mínima. Y con ayuda de los datos sacamos:

$f(x=0)=5\quad f(x=-50)=30\quad f(x=50)=30$

Como la forma es parabólica la función correspondiente va a ser una parábola de la forma:

$f(x)=ax^2+bx+c$ y con los datos anteriores sabemos que:

$f(x=0)=a0^2+b0+c=5\rightarrow c=5$

Ahora, para determinar los valores de a y de b planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2500a+50b+5=30 \\ 2500a-50b+5=30 \end{cases}$$

Correspondiente a $x = 50$ y $x = -50$ despejamos y reemplazamos:

$$2500a = 25+50b \to a = \frac{1}{100}+\frac{1}{50}b$$

$$2500\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{50}b\right)+50b+5=30 \to 50b+30=30 \to b=0$$

Entonces, $a = \frac{1}{100}$

Finalmente, $f(x) = \frac{1}{100}x^2+5$

4) Escriba una ecuación que exprese el enunciado.

- R varía directamente con t: $R = k.t$
- V es inversamente proporcional a z: $V = \frac{k}{z}$
- W es conjuntamente proporcional a s y a r: $w = k.(s+r)$

  En este caso, también podríamos escribir $w = \underbrace{ks}_{\substack{proporcional \\ a \\ s}} + \underbrace{kr}_{\substack{proporcional \\ a \\ r}}$
- A es proporcional al cuadrado de t e inversamente proporcional al cubo de x: $A = kt^2+\frac{k}{x^3}$

5) Exprese el enunciado como una fórmula y utilice la información…

- M varía directamente con x e inversamente con y. Si $x = 2$ e $y = 6$, entonces $M = 5$

  $M = kx+\frac{k}{y} \to 5 = k.\left(2+\frac{1}{6}\right) \to k = \frac{5.6}{13} \to k = \frac{30}{13}$
- S varía proporcionalmente a p y a q. Si $p = 4$ y $q = 5$, entonces $S = 180$

  $S = kp+kq \to 180 = k.(4+5) \to k = \frac{180}{9} \to k = 20$
- W es inversamente proporcional al cuadrado de r. Si $r = 6$, entonces $w = 10$

  $W = \frac{k}{r^2} \to 10 = \frac{k}{36} \to k = 360$

6) El costo de imprimir una revista es directamente…

Según el enunciado, llegamos a una relación: $x = k.(y+z)$ donde x es el costo de cada revista, y el número de revistas y z la cantidad de páginas de cada revista.

Reemplazamos para los primeros datos: $15 = k.(4000+120) \to k = \frac{3}{824}$

Para la segunda parte: $x = \frac{3}{824}.(5000+92) \to x = 18,54$

7) La resistencia R de un alambre…

$R = kL + \frac{k}{d^2}$

Con los datos del primer caso: $140 = k\left(1,2 + \frac{1}{0,005}\right) \to 140 = 201,2k \to k = \frac{350}{503}$

Para el otro alambre: $R = \frac{350}{503}.\left(3 + \frac{1}{0,008}\right) \to R = 89,06$

8) Suponiendo que la población de cierta ciudad...

a) Cual ser la población en 2020? $p(t) = 4600.(1,016)^t$ para saber el t hacemos $2020 - 1980 = 40$

Entonces: $p(t) = 4600.(1,016)^{40} \to p(t) = 8680$

b) En 2080? $2080 - 1980 = 100$ Entonces: $p(t) = 4600.(1,016)^{100} \to p(t) = 22497$

c) Cuando se duplicara la población del 1980? Primero veamos la población en 1980, t=0
$p(0) = 4600$ Y queremos el doble, 9200:

$(1,016)^t = 2 \to \log_{1,016}(1,016^t) = \log_{1,016} 2 \to \log_{1,016} 2 = t \to t = 44$

9) Cierto elemento radioactivo tiene vida media...

a) Determine la constante k:

Tenemos $q(t) = 30.\left(\frac{1}{2}\right)^{k.t}$ y sabemos que la vida media es $q(1690) = 15$

Sabiendo esto, podemos determinar k:

$15 = 30.\left(\frac{1}{2}\right)^{1690.k}$ $1690.k = 1$ es la única posibilidad de otra manera el dato de la vida media no se va a cumplir. Ya que $30.\frac{1}{2} = 15$

Entonces, $k = \frac{1}{1690}$

b) Cuanto habrá después de 2500 $años$?

$q(t) = 30.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1690}.2500} \to q(t) = 30.\left(\frac{1}{2^{1,48}}\right) \to q(t) = 10,76$

Ejercicios integradores:

1) Dadas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ...

Primero, veamos $f \circ g(x) = f(g(x))$

Reemplazamos $x = -1$,
$f \circ g(-1) = f(g(-1))$

Necesitamos el valor de $g(-1)$, para esto, planteamos un sistema de ecuaciones con los datos de g^{-1} para hallar algún valor que corresponda:

$$\begin{cases} m.(-1)+n=-3 \\ m.(2)+n=3 \end{cases} \rightarrow n=-3+m$$

Reemplazamos $2m+m-3=3 \rightarrow 3m=6 \rightarrow m=2$. Entonces $n=-1$

Ahora que tenemos nuestra función $g^{-1}(x)=2x-1$ busquemos $g^{-1}(x)=-1$

$-1=2x-1 \rightarrow x=0$

Y por propiedades de función inversa tenemos:

$g^{-1}(0)=-1 \Rightarrow g(-1)=0$

Volviendo a nuestra compuesta nos queda $f\circ g(-1)=f(g(-1))=f(0)$.

Ahora tenemos que hacer un procedimiento parecido al anterior para encontrar la función *f* y podés hallar el valor de *f* (0):

$$\begin{cases} a(-3)^2-3b+c=-14 \\ a(2)^2+2b+c=-4 \\ a(1)^2+b+c=-2 \end{cases} \rightarrow c=-14-9a+3b$$ Reemplazamos

$4a+2b-14-9a+3b=-4 \rightarrow -5a+5b=10 \rightarrow b=2+a$ Volvemos a la anterior $c=-8-6a$

Metemos todo en la última ecuación:

$a+2+a-8-6a=-2 \rightarrow -4a=4 \rightarrow a=-1$ Entonces $c=-2$ y $b=1$

Y nuestra función queda:

$f(x)=-x^2+x-2$

Evaluemos en $f(0)=-0^2+0-2 \rightarrow f(0)=-2$

Por lo tanto, nuestra función compuesta:

$f\circ g(-1)=-2$

2) Sean las funciones…

a) $Df \cap Dh$ Primero veamos los dominios por separado:

Para la f:

$\sqrt{4-x}>0$ Esto cumple porque es una raíz.

$4-x\geq 0 \rightarrow x\leq 4$ Junto con la anterior nos quedaría $Df=(-\infty,4)$

Para la h:

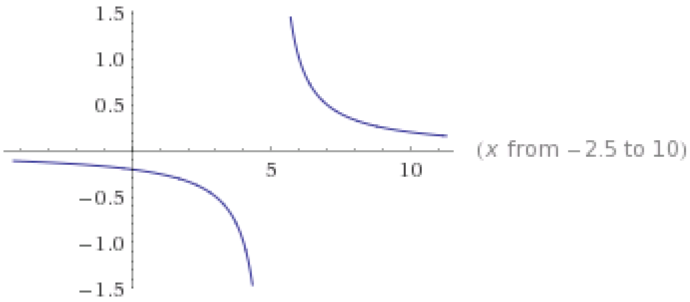
$x^2 - 8x + 15 \neq 0$ Con la resolvente tenemos $x_1 = 5, x_2 = 3$ $Dh = (-\infty, 3) \cup (3,5) \cup (5, +\infty)$

Veamos la intersección de ambos dominios: $Df \cap Dh = (-\infty, 3) \cup (3,4)$

b) El valor de $e^{f(x)}.e^{-2}$ en $x = 0$

Reemplazamos: $e^{2+\ln\sqrt{4}}.e^{-2} = e^{2+\ln 2}.e^{-2} = e^{2+0,693}.e^{-2} = e^2.e^{0,693}.e^{-2} = e^{0,693} = 2$

c) La ecuación de la asíntota vertical a la curva representativa de h



Del gráfico podemos ver la asíntota, que cumple la ecuación $x = 5$.

3) Sean las funciones…

a) Determinar $g\left(f^{-1}\right)(e)$:

Primero hallemos $f - 1$:

$$\ln\left(e^{3x-1}\right) = \ln y \rightarrow 3x + 1 = \ln y \rightarrow x = \frac{\ln y + 1}{3} = f^{-1}(x)$$

Entonces, $g\left(f^{-1}\right)(e) = g\left(\frac{\ln e + 1}{3}\right) = g\left(\frac{2}{3}\right) = -3.\frac{2}{3} + 1 = -1$

b) El conjunto de ceros de s:

$$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$$

Probemos $x = 1$:

$$3.1^3 - 1^2 - 3.1 + 1 = 3 - 1 - 3 + 1 = 0$$

Entonces, $x = 1$ es raíz. Usando el método de división por Gauss:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & & 3 & 2 & -1 \\ \hline & 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

Nos queda el polinomio $3x^2 + 2x - 1$. Buscamos las raíces de este nuevo polinomio usando la resolvente: $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -1$

Entonces, los ceros de la función s son: $\left\{1,-1,\frac{1}{3}\right\}$

4) Sean las funciones…

a) Determine $\left\{x\in\mathbb{R}/\left[f\left(x\right)\right]^2+9f\left(0\right)=10f\left(x\right)\right\}$

b) Reemplazamos:

$\left(e^{3x}\right)^2+9.e^0=10e^{3x}\rightarrow e^{6x}+9=10e^{3x}$

$\left(e^x\right)^6-10\left(e^x\right)^3+9=0$ Y planteamos un cambio de variable $z=e^x$

$\left(z^3\right)^2-10z^3+9=0$ Volvemos a poner otro cambio de variable $y=z^3$

$y^2-10y+9=0$ Con la resolvente llegamos a $y_1=1, y_2=9$

Ahora, el procedimiento para volver atrás y llegar a x:

$y=z^3\rightarrow z=\sqrt[3]{y}$

Entonces, quedan: $z_1=1, z_2=\sqrt[3]{9}$ y por último:

$z=e^x$

Entonces, $e^x=1\rightarrow x=0$ y $e^x=\sqrt[3]{3^2}\rightarrow \ln e^x=\ln\left(3^{\frac{2}{3}}\right)\rightarrow x=\frac{2}{3}\ln 3$

c) Determine $h^{-1}\left(2\right)$

Primero buscamos la inversa: $\frac{2x}{1-x}=y\rightarrow 2x=y-xy\rightarrow 2x+xy=y\rightarrow x.\left(2+y\right)=y\rightarrow x=\frac{y}{2+y}$

Evaluamos: $h^{-1}\left(x\right)=\frac{x}{x+2}\rightarrow h^{-1}\left(2\right)=\frac{2}{2+2}\rightarrow h^{-1}\left(2\right)=\frac{1}{2}$

5) Dadas las funciones…

Determine $Df\cap Dg$

Primero, veamos los dominios por separados:

Para f: $2-\left|1-x\right|\geq 0\rightarrow\left|1-x\right|\leq 2$

Separamos el modulo:

$1-x\leq 2\vee 1-x\geq -2$

$x\geq -1\vee x\leq 3$

Quedando $-1\leq x\leq 3$ y también $\sqrt{2-\left|1-x\right|}\neq 0\rightarrow 2-\left|1-x\right|\neq 0$

Solo cumple el menor estricto: $-1<x<3$ $Df=\left(-1,3\right)$

Ahora veamos g:

$1+x\neq 0 \rightarrow x\neq -1$ y $\frac{1-x}{1+x}>0$

Veamos entonces:

$$\begin{cases} 1-x>0 \wedge 1+x>0 \rightarrow x<1 \wedge x>-1 \\ \vee \\ 1-x<0 \wedge 1+x<0 \rightarrow x>1 \wedge x<1 \end{cases}$$

El segundo caso no cumple las dos condiciones.

Entonces $Dg=(-1,1)$

Y $Df \cap Dg=(-1,1)$

6) Determine $[k,1]\cap Dg$ si la función…

Primero, veamos el dominio de *g*:

$$\frac{-x+1}{x+1}>0 \quad \begin{cases} -x+1>0 \wedge x+1>0 \rightarrow x<1 \wedge x>-1 \\ \vee \\ -x+1<0 \wedge x+1<0 \rightarrow x>1 \wedge x<-1 \end{cases}$$

Como siempre, el segundo caso no cumple.

A esto hay que agregarle $x+1\neq 0 \rightarrow x\neq -1$

Entonces, $Dg=(-1,1)$

Veamos los ceros *f*:

$$x_{1,2}=\frac{-8k\pm\sqrt{64k^2-4.(1-2k).(-2-8k)}}{2-4k} \rightarrow x_{1,2}=\frac{-8k\pm\sqrt{64k^2+8+16k-64k^2}}{2-4k}$$

$$\frac{-8k\pm\sqrt{64k^2+8+16k-64k^2}}{2-4k}=\frac{-8k\pm\sqrt{16k+8}}{2-4k}$$

Como nos dicen que la raíz es doble (los ceros son iguales)

Planteamos $\sqrt{16k+8}=0 \rightarrow 16k+8=0 \rightarrow k=-\frac{1}{2}$

Entonces, $[k,1]\cap Dg=\left[-\frac{1}{2},1\right)$

7) Sean las funciones…

a) Determine las ecuaciones de la asíntota horizontal y vertical…

$$\frac{g^{-1}(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x-b}{m}}{mx+b}=\frac{x-b}{m^2x+mb}$$

Para ver la asíntota vertical, $m^2x+mb=0\rightarrow m.(mx+b)=0$

Entonces, $m=0$ o $x=-b/m$. Si $m=0$, no existe función inversa ni lineal. Entonces, la ecuación de la asíntota vertical cumple $x=-\frac{b}{m},m\neq 0$

Para la horizontal $y=\frac{1}{m^2}$ [Usando la teoría sobre funciones homográficas de la página 147]

b) Determine $\{x\in\mathbb{R}/(f\circ h)(x)=0\}\cup\{x\in\mathbb{R}/(f\circ p)(x)=1\}$

Veamos las funciones compuestas:

$$f\circ h(x)=f(\ln x)=e^{\frac{1}{2}\ln x-1}=0$$

$$f\circ p(x)=f\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)=e^{\frac{1}{2}\left|\frac{1}{x}\right|-1}=1$$

Veamos f compuesta con p:

Para que sea igual a 1 el exponente tiene que ser igual a 0:

$$\frac{1}{2}.\left|\frac{1}{x}\right|-1=0\rightarrow\frac{1}{2}.\left|\frac{1}{x}\right|=1\rightarrow\left|\frac{1}{x}\right|=2\text{ Entonces }x=\pm\frac{1}{2}$$

Para f compuesta con h:

$$e^{\frac{1}{2}}.e^{\ln x}.e^{-1}=0\rightarrow\frac{\sqrt{e}.e^{\ln x}}{e}=0$$

No tiene solución.

Entonces, los x que cumplen la unión de las dos restricciones $\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$

c) $\{x\in\mathbb{R}/\,p(x-1)=p(x+3)\}$

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|=\left|\frac{1}{x+3}\right|\rightarrow|x-1|=|x+3|\rightarrow x-1=-x-3\rightarrow 2x=-2\rightarrow x=-1$$

d) $f^{-1}(1)$

Primero encontremos la inversa,

$$e^{\frac{1}{2}x-1}=y\rightarrow\frac{1}{2}x-1=\ln y\rightarrow x=2\ln y+2\text{ Entonces }f^{-1}(x)=2\ln y+2$$

Evaluamos: $f^{-1}(1)=2\ln(1)+2\rightarrow f^{-1}(1)=2$

8) Determine el valor real de x…

$$2\log(\log x)=\log(3\log x+2)-\log 2 \to 2\log(\log x)=\log\left(\frac{3}{2}\log x+1\right)$$

$$\log\left(\log(x)^2\right)=\log\left(\frac{3}{2}\log x+1\right)\to(\log x)^2=\frac{3}{2}\log x+1\to(\log x)^2-\frac{3}{2}\log x-1=0$$

Planteamos un cambio de variable (CV): $y=\log x\to y^2-\frac{3}{2}y-1=0$

Con la resolvente tenemos:

$y_1=2, y_2=-\frac{1}{2}$

Descartamos el y_2 ya que es negativo y no cumple con las restricciones del cambio de variable.

$2=\log x\to 10^2=x\to x=100$

9) Determine el conjunto solución…

$$e^{3x+2}+3e^{6x+2}=4e^2\to e^{3x+2}+e^{6x+2}+e^{6x+2}+e^{6x+2}=e^2+e^2+e^2+e^2$$

Entonces, ahora los exponentes y su cantidad tienen que ser iguales:

$3x+2+3.(6x+2)=4.2\to 21x+8=8\to x=0$

10) Determine los valores reales…

$$x^{\frac{1}{2}\log_2 x}=16x$$

Aplicamos log en base 2 de ambos lados:

$$\log_2\left(x^{\frac{1}{2}\log_2 x}\right)=\log_2 16x\to\log_2 x.\frac{1}{2}.\log_2 x=\log_2 16+\log_2 x\to\frac{1}{2}(\log_2 x)^2=4+\log_2 x$$

Ahora hacemos un cambio de variable $z=\log_2 x$ y ordenamos para que quede una cuadrática:

$$\frac{1}{2}z^2-z-4=0$$

Con la resolvente llegamos a $z_1=4, z_2=-2$

Volvemos atrás con nuestro cambio de variable:

$4=\log_2 x\to x=16$ y $-2=\log_2 x\to x=\frac{1}{4}$

11) Sean las funciones…

a) Determine las ecuaciones…

Para la asíntota vertical tenemos: $x=1$
Para la asíntota horizontal tenemos: $y=-2$

b) Determinar el dominio de g:

Por un lado, tenemos $\sqrt{1-x^2}\neq 0\to 1-x^2\neq 0$ para no dividir por 0.

Y, por otro, el dominio de la raíz $1-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow \sqrt{x^2} \leq 1 \rightarrow |x| \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$

Juntando ambos casos queda $-1 < x < 1$

c) El conjunto de ceros de h:

$$h(x)=0 \rightarrow -|2x+1|+1=0 \rightarrow |2x+1|=1$$

Separamos en casos:

$2x+1=1 \rightarrow 2x=0 \rightarrow x=0$

$2x+1=-1 \rightarrow 2x=-2 \rightarrow x=-1$

Entonces, el conjunto de ceros queda como: $\{-1,0\}$

d) La función f^{-1}…

Despejamos y en función de x:

$$y=\frac{2x-1}{1-x} \rightarrow y-yx=2x-1 \rightarrow y+1=2x+yx \rightarrow y+1=x.(2+y) \rightarrow x=\frac{y+1}{y+2}$$

Entonces, $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ con $f^{-1}:\mathbb{R}-\{-2\} \rightarrow \mathbb{R}-\{-1\}$ (Para ver el dominio igualamos el denominador a 0 y despejamos).

12) Determine las coordenadas…

Antes de ver la intersección, armemos un sistema de ecuaciones con los datos de cada función para poder encontrar la fórmula de la función:

$$\begin{cases} a-b+c=3 \\ 4a+2b+c=0 \rightarrow a=3+b-c \quad , \quad 3+2b=1 \rightarrow b=-1 \quad , \quad a=2-c \\ a+b+c=1 \end{cases}$$

$$8-4c-2+c=0 \rightarrow 3c=6 \rightarrow c=2$$

Volvemos a la ecuación de a: $a=0$

Entonces, $f(x)=-x+2$

Ahora hacemos lo mismo pero con los datos de g:

$$\begin{cases} 4+2p+q=2 \\ 1-p+q=5 \end{cases} \rightarrow q=4+p \quad , \quad 4+2p+4+p=2 \rightarrow 3p=-6 \rightarrow p=-2 \quad q=2$$

Entonces, $g(x)=x^2-2x+2$

Ahora para ver la intersección:

$-x+2=x^2-2x+2 \rightarrow x^2-x=0$

Con la resolvente llegamos a: $x_1=0, x_2=1$ reemplazamos en cada función para hallar la coordenada restante (y) para los 2 casos:

Caso $x = 0$: $-1.0+2=2$
Caso $x = 1$: $-1.1+2=1$

Entonces, tenemos dos puntos de intersección: $\{(0,2),(1,1)\}$

13) Dadas las funciones…

a) Determine $\{x \in \mathbb{R} / 2 < t(x) \leq 10\}$

$$2<(x+1)^2+1\leq 10 \to 1<(x+1)^2 \leq 9 \to \sqrt{1}<\sqrt{(x+1)^2} \leq \sqrt{9}$$

Cuando eliminamos la raíz y el cuadrado aparece un módulo y vemos las dos inecuaciones por separado:

$$1<|x+1| \to 1<x+1 \to x>0 \vee -1>x+1 \to x<-2$$

$$|x+1| \leq 3 \to x+1 \leq 3 \to x \leq 2 \vee x+1 \geq -3 \to x \geq -4$$

Entonces, quedarían las restricciones: $[-4,-2)\cup(0,2]$

b) Determine $f^{-1}(0)$

Primero veamos la inversa:

$$y=\log_3(4x+2) \to 3^y=4x+2 \to \frac{3^y-2}{4}=x$$

Ahora, evaluamos en $f^{-1}(0)=\frac{3^0-2}{4} \to f^{-1}(0)=-\frac{1}{2}$

c) El dominio de g:

$\sqrt{5x^2-10x} \neq 0$ y $5x^2-10x \geq 0$

De la resolvente sacamos $x_1=0, x_2=2$

Finalmente, vemos que cumple para $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

14) Indique Df e If si es $f : Dg \to If \ / \ f(x)=\frac{|2x-1|}{2x-1}$

Observemos que si no estuviera el módulo se podrían simplificar todos los términos quedando $\frac{1}{1}$. Como está el módulo lo único que afecta es en el signo.

Por lo tanto, si tenemos el módulo lo único que va a cambiar es el resultado $\frac{1}{1}$ si son mayores a 0 o $\frac{1}{-1}$ si son menores a 0.

Entonces queda $If=\{-1,1\}$

Para el dominio: $2x-1\neq 0 \rightarrow x\neq \frac{1}{2}$ Entonces $Df=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

15) En el grafico la parábola pasa por los puntos…

a) Determine la ecuación de la parábola: $y=ax^2+bx+c$
Por el grafico nos damos cuenta que $a<0$ y $c=0$
Entonces nuestra ecuación va a ser de la pinta $y=ax^2+bx$ con $a<0$
Planteamos un sistema de ecuación con los datos que nos dan:
$\begin{cases} a+b=3 \\ 25a+5b=-5 \end{cases} \rightarrow a=3-b$, $15-5b+b=-1 \rightarrow 4b=16 \rightarrow b=4$ y $a=-1$
Entonces: $y=-x^2+4x$

b) Determine la ecuación de la recta:
Tiene la forma: $y=mx+b$ con los datos armamos otro sistema:
$\begin{cases} 2m+b=-2 \\ -2m+b=-6 \end{cases} \rightarrow b=-2-2m$, $-2m-2m-2=-6 \rightarrow -4m=-4 \rightarrow m=1$ y $b=-4$
Entonces: $y=x-4$

c) Las coordenadas de los puntos de intersección:

De ver el grafico sabemos que hay dos intersecciones. Una de las cuales se da en $y=0$.
Para ver estas igualamos las dos ecuaciones:
$x-4=-x^2+4x \rightarrow x^2-3x-4=0$ De la resolvente sacamos $x_1=4, x_2=-1$

Reemplazando x en la función llegamos al valor de y:
$y=4-4 \rightarrow y=0$
$y=-1-4 \rightarrow y=-5$

Entonces, las intersecciones son: $\{(4,0),(-1,-5)\}$

16) Dadas las funciones…

Determine $Dh\cap Dt$. Primero veamos los dominios por separado:

Para h:
$|5-x|-|x+2|\geq 0 \rightarrow |5-x|\geq |x+2|$

Vemos los casos:
$5-x\geq x+2 \rightarrow 2x\leq 3 \rightarrow x\leq \frac{3}{2}$
$5-x\leq -x-2 \rightarrow 5\leq -2$ Absurdo.

Entonces queda: $Dh=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$

Para t:

$x^2 - 4x + 5 \neq 0$

Por la resolvente llegamos a: $\dfrac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$ que no tiene solución dentro de los reales.

Entonces: $Dt = \mathbb{R}$

Y la intersección queda como: $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$

17) Observe el grafico…

a) Determine $g^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ Buscamos en el eje y el valor $\dfrac{1}{2}$ y vemos que por donde pasa la recta, el valor correspondiente a x es $-\dfrac{3}{2}$. Esto se puede deducir gracias a las propiedades de la función inversa y por ser biyectiva.

b) $(f \circ g)(1) = f(g(1))$ Y por el gráfico sabemos que $g(1) = -2$ quedando $f(-2)$ y ahora hay que darse cuenta que la recta f la parte de la izquierda tiene una pinta de $y = -x + 1$
Entonces $f(-2) = 3$.

c) $(f - g)(-1)$ Entendemos esto por: $f(-1) - g(-1)$
Entonces, sacamos $g(-1) = 0$ y $f(-1) = 2$ quedando $f(-1) - g(-1) = 2$