



Ingreso UTN

Unidad VI

Subimos este guía aunque falta pulir una serie de ejercicios y resolver algunos que nos quedaron en el tintero. Si encontrás algún error, estamos agradecidos que nos lo hagas saber! Lo mismo, si se te ocurre alguna resolución alternativa o alguna solución que falte, podés postearla como comentario del apunte. Muchas gracias y mucha suerte!

Trigonometría:

1. Complete la siguiente tabla:

$\sin(t)$	$\cos(t)$	$\sin(t+\pi)$	$\cos(t+\pi)$	$\sin(\pi-t)$	$\sin(2\pi-t)$	Menor valor positivo de t
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	60°
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	45°
$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	30°
-1	0	1	0	-1	1	90°
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	150°
1	0	-1	0	1	-1	90°

Para completar esta tabla vamos a usar la regla nemotécnica de la página 181, las relaciones de coseno seno y paridad. Con $k \in \mathbb{Z}$.

$\sin(-x) = -\sin(x)$ El seno es impar respecto del 0.

$\cos(-x) = \cos(x)$ El coseno es par respecto del 0.

Por ejemplo $\sin(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ de acá podemos sacar el valor de t: $t = 60^\circ + 2k\pi \wedge t = 120^\circ + 2k\pi$ Tenemos

dos ángulos posibles que nos dan el resultado querido y ponemos el $2k\pi$ para tener todas las soluciones cíclicas. Recordá que las funciones trigonométricas son armónicas y van repitiendo sus valores de la imagen hasta el infinito (por decirlo de alguna manera). Y poniendo ese $2k$ multiplicando, que pertenece a los enteros, completamos todas las soluciones posibles (podes usar la calculadora para chequearlo).

Una vez que tenemos el valor de t:

$\sin(t+\pi) = \sin(60 + 2k\pi + \pi)$ Le agrega media vuelta al valor del seno. Del apunte teórico de la página

182 desprendemos que ese $+\pi$ está agregando un menos al valor original de $\sin(t)$ entonces

$\sin(t+\pi) = -\sin(t)$. [Podemos usar tanto 60° como 120° , el resultado va a ser el mismo]

Seguimos con el seno: $\sin(\pi - t) = \sin(\pi - 60^\circ - 2k\pi)$ como el seno es impar sabemos que

$\sin(-60 - 2k\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y a eso le sumamos media vuelta (π) nos vuelve a cambiar el signo, casi igual

que en el caso anterior. Entonces $\sin(\pi - t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

En cambio si se le agrega 2π el signo se mantiene, se da una vuelta completa.

Ahora veamos la parte del coseno: $\cos(t) = -\frac{1}{2}$ llegamos a $t = 2k\pi - 120^\circ \wedge t = 2k\pi + 120^\circ$ y tenemos

$\cos(t + \pi)$ le sumamos media vuelta a nuestro ángulo provoca un cambio de signo entonces:

$$\cos(t + \pi) = \frac{1}{2}$$

Ahora veamos la segunda fila:

Tenemos que $\cos(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ entonces $t = 2k\pi + 45^\circ \wedge t = 2k\pi - 45^\circ$ si sumamos una vuelta nos va a cambiar el signo:

$$\cos(t + \pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Con el seno tenemos $\sin(t + \pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ entonces sabemos que $\sin(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y usando el mismo

procedimiento que en la fila anterior: $\sin(\pi - t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\sin(2\pi - t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolvemos las filas restantes con el mismo procedimiento.

2. Calcule sin utilizar la calculadora: (Solo vamos a resolver para el 1º valor posible que cumpla)

2.1) $\sin\left(2 \cdot \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ Primero veamos el valor de $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Por propiedades de la inversa

sabemos que el arco coseno me devuelve al valor del coseno. En otras palabras si $\cos(x) = y \Rightarrow \arccos(y) = x$ dentro de sus respectivos dominios.

Entonces: $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^\circ$ reemplazamos: $\sin(2 \cdot 45^\circ) = \sin(90^\circ) = 1$

2.2) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ De nuevo por propiedades de la inversa del seno:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -30^\circ \text{ Entonces } \cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.3) $\tan(\arctan(3))$ A diferencia de los casos anterior este usamos la misma propiedad para simplificar:

$\arctan(3) = \tan^{-1}(3)$ Entonces queda: $\tan(\tan^{-1}(3)) = 3$ Por propiedades de la inversa.

Bajate los resueltos y respondé tus dudas en www.exapuni.com

2.4) $\sec(\arctan(-1))$ Por formula de la secante:

$$\sec(\arctan(-1)) = \frac{1}{\cos(\arctan(-1))} \text{ Y por inversa } \arctan(-1) = -45$$

$$\text{Entonces } \frac{1}{\cos(\arctan(-1))} = \frac{1}{\cos(-45)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

2.5) $\arcsin(\arccos(1))$ Nuevamente por propiedades de la inversa:

$$\arccos(1) = 0 \text{ (Por que el coseno de 0 es 1)}$$

$$\arcsin(0) = 0 \text{ (Por que el seno de 0 es 1)}$$

3. Para cada una de las igualdades propuestas...

3.1) $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} \rightarrow \sin^2 x = (1 + \cos x) \cdot (1 - \cos x)$ Multiplicamos seno y 1 menos coseno de ambos lados, y ahora hacemos la distributiva:

$\sin^2 x = 1 - \cos x + \cos x - \cos^2 x$ Y de acá vemos que llegamos a la identidad $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
El conjunto existencia de esta identidad son todos los reales.

3.2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ Primero usemos la propiedad que separa la suma en cosenos y senos:

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y) \text{ Esta es para el coseno (identificar quien es x y quien y).}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y) \text{ Y esta es para el seno.}$$

$$\text{Entonces: } \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(x) \right] + \left[\sin(x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = 0$$

Sabiendo que: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ queda:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) = 0 \text{ Y ya acá podemos ver que todo se cancela y ganamos: D}$$

3.3) $\frac{1 - \cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)} = \tan(\alpha)$

[Falta terminar]

Vamos a subir la resolución pronto! Si querés colaborar, podés enviar tu resolución a info@exapuni.com

4. Determine el conjunto solución...

4.1) $2 \cdot \cos(x) + \sqrt{3} = 0 \rightarrow 2 \cos(x) = -\sqrt{3} \rightarrow \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Entonces nuestro conjunto solución es $x = 150 + 2k\pi \wedge x = 210 + 2k\pi$

Ahora como bien dice el enunciado hay que restringirlo a $[0, 2\pi)$

Entonces queda: $S = \{150^\circ, 210^\circ\}$

4.2) $\tan^2(x) - 1 = 0 \rightarrow \tan^2 x = 1$ Una vez que llegamos acá ya se podría resolver aunque también

podríamos matar el cuadrado $|\tan x| = \sqrt{1} \rightarrow |\tan x| = 1$ o también $\tan x = |1|$

Entonces nuestro conjunto solución en $[0, 2\pi)$ es $S = \{45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ\}$

4.3) $(2 \cos(x) + 1) \cdot (2 \sin(x) - \sqrt{2}) = 0$ Como tenemos una multiplicación del estilo $x \cdot y = 0$ para que se cumpla la igualdad o bien $x = 0$ o $y = 0$. Entonces planteamos esas 2 nuevas ecuaciones:

$$2 \cos(x) + 1 = 0 \rightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

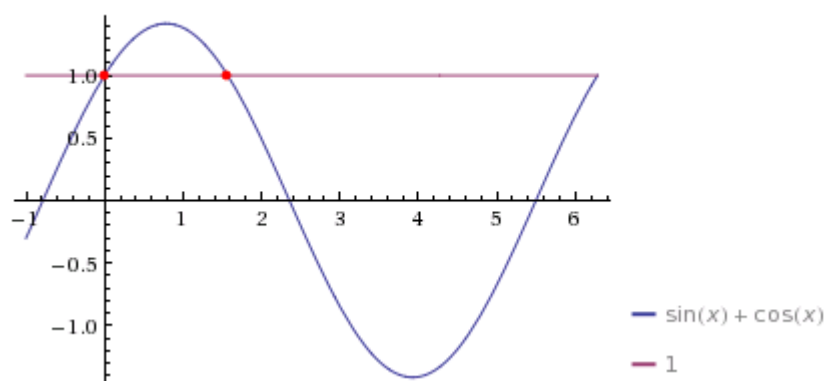
$$2 \sin(x) - \sqrt{2} = 0 \rightarrow \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quedando las soluciones en $[0, 2\pi)$: $S = \{45^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 240^\circ\}$

4.4) $\sin(x) + \cos(x) = 1$ Una forma fácil de resolver esta ecuación es graficar la función:

$f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ E igualarla a 1:

Plot:



Como se puede ver en el intervalo $[0, 2\pi)$ hay 2 intersecciones una en 0 y la otra en $\pi/2$. Podemos deducir esto por la simetría y además por saber que $\sin(0) = 0$ $\cos(0) = 1$ quedando la suma igual a 1, y $\cos(\pi/2) = 0$ $\sin(\pi/2) = 1$ quedando la suma igual a 1. El tercer punto de intersección que se puede ver en el gráfico corresponde a 2π que está fuera de nuestro intervalo $[0, 2\pi)$.

También para resolverlo de manera analítica elevamos todo al cuadrado $(\cos(x) + \sin(x))^2 = 1^2$

hacemos la distributiva $\sin^2(x) + \cos^2(x) + 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = 1$ usando la identidad del seno y coseno cuadrado igual a 1 llegamos a: $1 + 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = 1 \rightarrow \sin(x) \cdot \cos(x) = 0$

Entonces o bien el seno tiene que ser 0 o el coseno tiene que ser 0, llegando a las soluciones que hallamos gráficamente.

4.5) $1 - \cos(x) = \sqrt{3} \cdot \sin(x)$

[Falta terminar]

Vamos a subir la resolución pronto! Si querés colaborar, podés enviar tu resolución a info@exapuni.com

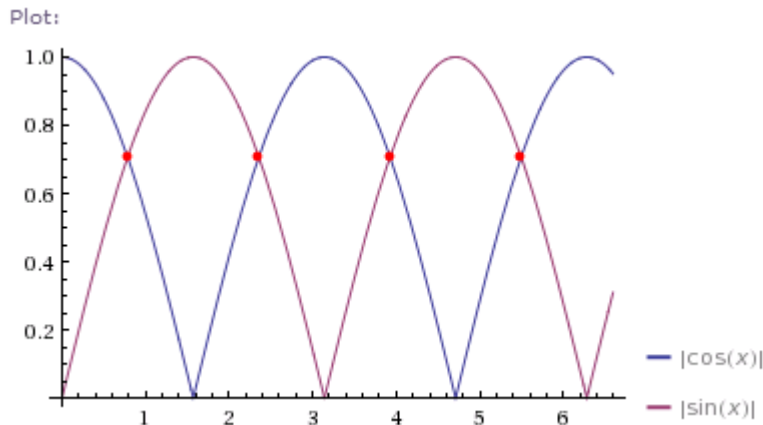
$$4.6) \cos(2x) - \cos(x) = 0 \rightarrow \cos(2x) = \cos(x)$$

[Falta terminar]

Vamos a subir la resolución pronto! Si querés colaborar, podés enviar tu resolución a info@exapuni.com

$$4.7) \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2$$

4.10) $\cos^8(x) - \sin^8(x) = 0 \rightarrow \cos^8(x) = \sin^8(x) \rightarrow \sqrt[8]{\cos^8(x)} = \sqrt[8]{\sin^8(x)}$ Simplificamos la raíz con la potencia y nos aparecen los módulos: $|\cos(x)| = |\sin(x)|$ Sabemos que la primera igualdad se cumple en 45° y como ambos están en modulo se va a repetir cada 90° (ahora el periodo es de π) podemos verlo más claro gráficamente:



Entonces nuestras soluciones son: $S = \{45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ\}$

5.

5.1) Encuentre la ecuación de la recta...

Interpretamos que la recta tiene un ángulo de 120° respecto del eje x entonces ya podemos saber que la pendiente es negativa. Calculamos la pendiente recordando $\tan(\alpha) = m \rightarrow \tan(120^\circ) = m = -\sqrt{3}$

Teniendo el punto $(1, 2)$ y su pendiente. Con la fórmula de la recta $y - y_1 = m(x - x_1)$

Reemplazamos y tenemos la ecuación buscada: $y - 2 = \sqrt{3}(x - 1)$

5.2) Determine el ángulo de inclinación...

Tenemos la recta: $5x + 2y = 6$ la escribimos de la forma: $y = \frac{6 - 5x}{2} \rightarrow y = 3 - \frac{5}{2}x$

Usando la misma fórmula que en el ejercicio anterior: $m = \tan(\alpha)$ podemos averiguar el ángulo de

inclinación de la recta. $-\frac{5}{2} = \tan(\alpha) \rightarrow \alpha = -\tan^{-1}(2,5) \rightarrow \alpha = -68^\circ 12'$

Nos da un ángulo negativo. Esto quiere decir que el α que encontramos es respecto del eje x pero contando para abajo. Si queremos hallar el ángulo positivo, gracias a que es una recta solo basta hacer $180^\circ - \alpha$ (si no te das cuenta de esto hace un gráfico chiquito en una hoja y sale solo).

Entonces: $\alpha^+ = 180^\circ - \alpha \rightarrow \alpha^+ = 111^\circ 48'$

Problemas:

1. En el triángulo $M\hat{N}P$...

Solo basta dibujar el triángulo para darse cuenta que $\cos(\alpha) = \frac{AD}{H}$ donde α es el ángulo de M, AD es el cateto adyacente MN y H es la hipotenusa MP que es igual a 5MN.

$$\text{Entonces: } \cos(\alpha) = \frac{\overline{MN}}{5\overline{MN}} \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{5} \text{ usando la inversa } \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) \rightarrow \alpha = 78^\circ 27' 47''$$

2. El hilo de un barrilete se encuentra tenso...

En los datos nos dicen la longitud del hilo (85m) y el ángulo con la horizontal. Si desde la posición del barrilete vamos en línea recta hasta la superficie del suelo, junto con la soga formamos un triángulo rectángulo de hipotenusa 85m y el ángulo del vértice que está más cerca del suelo $54^\circ 20'$ ya con esto podemos saber la altura (o sea el cateto opuesto al ángulo que tenemos de dato).

$$\sin(\alpha) = \frac{OP}{H} \rightarrow \sin(54^\circ 20') = \frac{OP}{85m} \rightarrow 0,812.85m = OP \rightarrow OP = 69,056m$$

Ya teniendo el cateto, para averiguar la altura del barrilete solo resta sumar la altura inicial del operador: $69,056m + 1,5m = 70,556m$

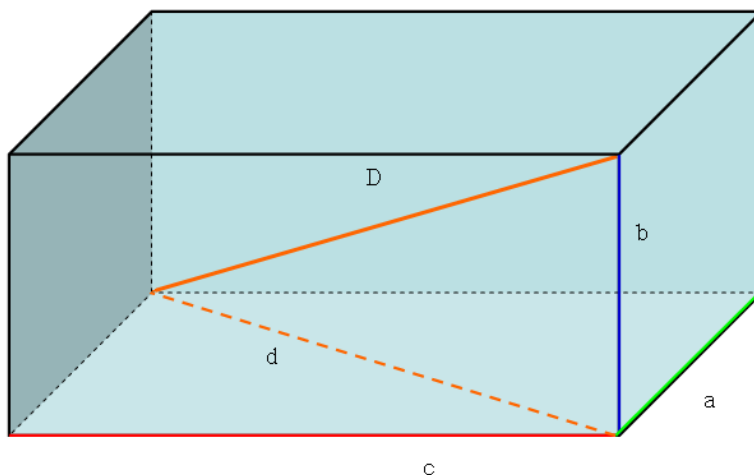
3. Un ingeniero desea construir una rampa de 50m...

Notar que cuando dice que la rampa tiene 50m de largo, no son la base si no que es la hipotenusa. Una vez notado esto, sabemos la hipotenusa y la altura de nuestro triángulo, entonces solo basta usar la

$$\text{relación: } \sin(\alpha) = \frac{OP}{H} \rightarrow \sin(\alpha) = \frac{5m}{50m} \rightarrow \alpha = \sin^{-1}(0,1) \rightarrow \alpha = 5^\circ 44' 21''$$

4. Un paralelepípedo recto-rectangular tiene...

Para este problema recomiendo fuertemente hacer un dibujito de una caja rectangular y ver las diagonales que nos piden. Si no te sale acá ponemos un modelo:



El ángulo entre las diagonales d y D

es lo que nos pide el problema, teniendo como datos $c=8cm$ $a=6cm$ y $b=4cm$.

Primero del triángulo de la base usando Pitágoras averiguamos su longitud:

$$d^2 = 8^2 + 6^2 \rightarrow d = \sqrt{64 + 36} \rightarrow d = 10cm$$

Ahora que tenemos su longitud vemos el otro triángulo que está parado. Pero en vez de usar Pitágoras

$$\text{usamos la relación: } \tan(\alpha) = \frac{OP}{AD} \rightarrow \tan(\alpha) = \frac{4}{10} \rightarrow \alpha = \tan^{-1}(0,4) \rightarrow \alpha = 21^\circ 48'$$

5. La intensidad I de la corriente...

5.1) ¿Cuál es el periodo?

Una formula fácil para ver el periodo de una función seno es dividir 2π por la constante que acompaña a la variable. En este caso 100π , entonces: $T = \frac{2\pi}{100\pi} \rightarrow T = \frac{1}{50} s$

5.2) ¿Cuántos ciclos (periodos) hay en un segundo?

Simplemente vemos cuantos periodos entran en 1 segundo. Para este caso es bastante fácil que entran 50 ciclos.

5.3) ¿Cuál es la máxima intensidad en la corriente?

En otras palabras está preguntando cual es la amplitud. La amplitud del seno solo sabemos que es 1. Entonces es fácil deducir que tiene que ver con el coeficiente que multiplica al seno, en este caso 30. Por lo tanto la amplitud es 30 amperes.

6. Un objeto viaja por una vía circular...

Para ver cuando el objeto cruza el eje x solo basta con igualar la función a 0:

$$y = 2 \cdot \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{12}\right) = 0 \rightarrow \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{12}\right) = 0 \text{ Sabemos que la función coseno tiene ceros en } k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Entonces: } \pi t - \frac{\pi}{12} = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow t - \frac{1}{12} = k + \frac{1}{2} \rightarrow t = k + \frac{7}{12} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

7. Un generador eléctrico produce...

$$i(t) = 30 \cdot \sin\left[100\pi \cdot \left(t - \frac{7}{36}\right)\right] \text{ Como me pedí el tiempo para que la corriente sea de 15 amperes}$$

planteo lo siguiente:

$$\frac{15}{30} = \sin\left[100\pi \cdot \left(t - \frac{7}{36}\right)\right] \rightarrow \frac{1}{2} = \sin\left[100\pi \cdot \left(t - \frac{7}{36}\right)\right] \rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 100\pi \cdot \left(t - \frac{7}{36}\right)$$

$$\text{Entonces } 30^\circ = 100\pi t - \frac{175}{9}\pi \rightarrow \frac{1}{6}\pi + \frac{175}{9}\pi = 100\pi t \rightarrow 100t = \frac{353}{18} \rightarrow t = 0,196$$

8. Desde dos departamentos ubicados en el séptimo...

Formamos 2 triángulos para cada departamento que tienen el mismo vértice en la acera (lugar donde se encuentra el objeto) sabiendo los ángulos de los vértices correspondientes al edificio podemos plantear

$$\tan(60^\circ) = \frac{h}{b} \text{ y } \tan(45^\circ) = \frac{h-9}{b} \text{ ambos triángulos tienen la misma base, pero difieren en la altura por}$$

la separación entre el piso 4º y el 7º.

Entonces de la tangente de 60 podemos despejar h: $h = \tan(60) \cdot b$ y la reemplazamos en la otra

$$\text{ecuación } \tan(45) = \frac{\tan(60) \cdot b}{b} - \frac{9}{b} \rightarrow \tan(45) - \tan(60) = -\frac{9}{b} \rightarrow (1 - \sqrt{3})b = -9 \rightarrow b = -\frac{9}{1 - \sqrt{3}}$$

Quedando $b = \frac{9}{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)$. Ahora metemos ese resultado en la ecuación de h despejada:

$$h = \tan(60) \cdot \left[\frac{9}{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)\right] \rightarrow h = \sqrt{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot (\sqrt{3} + 1) \rightarrow h = \frac{9}{2} \cdot (3 + \sqrt{3})$$

9. La sombra de una persona de 1,80m...

Siempre es bueno hacer un mini dibujo sobre el problema para poder entenderlo del todo.

Primero planteamos las 2 posiciones de la persona con su respectiva sombra, según los datos del enunciado la segunda comienza donde termina la 1ª. Formamos 2 triángulos rectángulos que tienen la misma altura pero distinta base. Luego planteamos la posición del foco detrás de la 1ª persona y a una mayor altura, si no la sombra no sería posible. Hacerlo a una distancia prudente ya que te tienen que quedar 2 triángulos más grandes que sean la continuación de los 2 más chicos y ambos tengan la misma altura h que es la posición del foco.

Una vez que tenemos esto tenemos que averiguar los ángulos de los triángulos más chicos planteando:

$\tan(\alpha) = \frac{b}{h}$ Para el primer triángulo según los datos $b=3,6$ $h=1,8$ y el α es el del vértice superior

$\tan(\alpha) = \frac{3,6}{1,8} \rightarrow \tan(\alpha) = 2$ vamos a ver que no es necesario saber el valor de α . Solo con saber su

tangente nos alcanza.

Ahora veamos el triángulo más grande correspondiente. Sabemos que el α es el mismo por propiedades de los ángulos.

Entonces planteamos lo mismo pero con $\tan(\alpha) = \frac{d+3,6}{a}$ donde d es la distancia del foco a la posición de la persona y a es la altura del foco.

Y despejamos a en función de d : $a = \frac{d}{2} + 1,8$

Ahora pasamos al otro par de triángulos, igual que antes empezamos por el más chiquito para averiguar la

tangente $\tan(\alpha') = \frac{b}{h} \rightarrow \tan(\alpha') = \frac{4}{1,8} \rightarrow \tan(\alpha') = \frac{20}{9}$ ahora vamos al más grande:

$\tan(\alpha') = \frac{d+7,6}{a}$

Reemplazamos el valor de a :

$\tan(\alpha') = \frac{d+7,6}{\left(\frac{d}{2}+1,8\right)} \rightarrow \frac{20}{18}d + 4 = d + 7,6 \rightarrow \frac{2}{18}d = 3,6 \rightarrow d = 32,4m$

Volvemos a la ecuación de a para ver su valor: $a = 16,2 + 1,8 \rightarrow a = 18m$

10. Desde la azotea de un edificio...

Este problema es casi idéntico al problema número 8, con la diferencia que cambian los ángulos de depresión.

Formamos los 2 triángulos y continuamos de la misma manera que el ejercicio 8:

$\tan(45) = \frac{h}{b} \rightarrow h = b$ y por otro lado $\tan(30) = \frac{h-9}{b} \rightarrow \tan(30) = \frac{b-9}{b} \rightarrow \tan(30) - 1 = -\frac{9}{b}$

Despejando b queda $b = -\frac{9}{\tan(30)-1} \rightarrow b = -\frac{9}{2} \cdot (3+\sqrt{3}) = h$

11. Una torre de 40m de altura...

Procedemos de igual forma que en el 8 y 10. Pero en este caso tenemos de datos la altura y el ángulo de depresión, necesitamos la base (o sea el ancho del lago).

$\tan(30) = \frac{40}{b} \rightarrow b = \frac{40}{\tan(30)} \rightarrow b = 69,28m$

12. El ángulo de elevación...

Usando la relación $\sin(\alpha) = \frac{OP}{H} \rightarrow \sin(21^\circ) = \frac{h}{9,5m} \rightarrow h = 3.4m$

13. Un puente sobre un río...

Vamos a suponer que el puente está diseñado de manera que la separación es justo en la mitad del puente. Teniendo la hipotenusa, 100m, y el ángulo de inclinación podemos averiguar la base para saber qué tan separados quedaron las dos partes del puente.

Usamos la relación $\cos(\alpha) = \frac{AD}{H} \rightarrow AD = \cos(30^\circ) \cdot 100 \rightarrow AD = 50\sqrt{3} \cong 86,60m$

Como los 2 triángulos son iguales la otra parte también mide lo mismo.

Entonces $2.86,60 + x = 200 \rightarrow x = 200 - 173,21 \rightarrow x = 26,79m$

Por lo tanto le faltan casi 7 metros para poder realizar el salto.

14. Un topógrafo determina que desde el punto A...

Problema parecido al de los edificios. Pero para este caso vamos a usar el teorema del seno de la página 205. Primero armamos 2 triángulos, el primero con vértices en A (la primera posición del topógrafo), B (la segunda posición del topógrafo) y C el punto más alto de la montaña. El otro triángulo con vértices en B, C y la base de la montaña.

Los ángulos del 1º triángulo son 25º en A 138º en B (180-42) y 17º en C (180-25-138).

Usando el teorema sabemos que $\frac{BC}{\sin(25)} = \frac{AB}{\sin(17)}$ entonces $BC = \frac{200 \sin(25)}{\sin(17)}$

Y por último teniendo ya el lado BC podemos calcular la altura de la montaña usando $\sin(42) = \frac{h}{BC}$

Entonces queda determinada la altura de la montaña: $h = \frac{\sin(42) \cdot 200 \cdot \sin(25)}{\sin(17)} \rightarrow h = 193,44m$

15. Una escalera se apoya...

[Falta terminar]

Vamos a subir la resolución pronto! Si querés colaborar, podés enviar tu resolución a info@exapuni.com

16. Determine el área de un triángulo equilátero...

Teniendo la fórmula del área de un triángulo cualquiera: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$ (página 204)

Y sabiendo que al ser un equilátero $a=b=c$ y todos los ángulos son 60º queda:

$A = \frac{1}{2} a^2 \sin(60) \rightarrow A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ Para nuestro caso $a=10cm$ $A = 25\sqrt{3}cm^2$

17. Un triángulo tiene un área de...

Usando la misma fórmula que antes: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\alpha) \rightarrow 16 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin(\alpha)$

Entonces $\sin(\alpha) = 0,9142 \rightarrow \alpha = \sin^{-1}(0,9142) \rightarrow \alpha_1 = 66^\circ 6', \alpha_2 = 113^\circ 53'$

Para hallar de una manera fácil el segundo valor de alfa se puede hacer $180^\circ - \alpha_1$

18. Determine el área de un triángulo cuya base...

Por propiedades de los ángulos internos de un triángulo sabemos que:

$180^\circ = 65^\circ + 32^\circ + \alpha \rightarrow \alpha = 83^\circ$ Donde alfa es el ángulo que nos falta.

Ahora podemos usar el teorema del seno:

$\frac{16}{\sin(83)} = \frac{b}{\sin(65)} = \frac{c}{\sin(32)}$ Donde b y c son los lados restantes. Nos basta usar una de estas

igualdades para poder usar la fórmula del área.

Por ejemplo: $c = 16 \frac{\sin(32)}{\sin(83)}$ vamos a la fórmula del área

$$A = \frac{1}{2} a.c.\sin(65) \rightarrow A = \frac{16.16.\sin(32).\sin(65)}{2\sin(83)} \rightarrow A = 62\text{cm}^2$$

19. Dos observadores colocados a 110m...

Primero buscamos el ángulo faltante $\alpha = 180^\circ - 43^\circ - 57^\circ \rightarrow \alpha = 80^\circ$

Usando el teorema del seno:

$$\frac{110}{\sin(80)} = \frac{a}{\sin(57)} \rightarrow a = \frac{110\sin(57)}{\sin(80)} \rightarrow a = 93,7\text{m}$$

20. Un poste telegráfico está inclinado...

Primero sacamos el ángulo del poste respecto de la horizontal $90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$

Ya teniendo ese ángulo solo nos falta uno que es $\alpha = 180^\circ - 75^\circ - 24^\circ \rightarrow \alpha = 81^\circ$

Ahora planteando teorema del coseno:

$$\frac{10}{\sin(81)} = \frac{a}{\sin(24)} \rightarrow a = \frac{10\sin(24)}{\sin(81)} \rightarrow a = 4,1\text{m}$$

21. Los puntos A y B son los extremos de un túnel...

Respecto del gráfico reconocemos el ángulo y aplicamos el teorema del coseno (página 206):

$$x^2 = 480^2 + 320^2 - 2.480.320.\cos(72) \rightarrow x^2 = 332800 - 307200.\cos(72)$$

$$x^2 = 237869,9793 \rightarrow |x| = \sqrt{237869,9793} \rightarrow x = 487,72\text{m}$$

Como se trata de una distancia tomamos el valor positivo!

22. Los lados de un triángulo...

Dibujamos nuestro triángulo y ponemos los ángulos α ente el 8 y 12, β entre 8 y 5 y δ entre 5 y 12.

Ahora usamos el teorema del coseno:

$$5^2 = 12^2 + 8^2 - 2.8.12\cos(\alpha) \rightarrow 192\cos(\alpha) = 183 \rightarrow \cos(\alpha) = 0,953 \rightarrow \alpha = 18^\circ$$

Ahora vamos a hacer lo mismo pero con β :

$$12^2 = 5^2 + 8^2 - 2.5.8\cos(\beta) \rightarrow \cos(\beta) = -0,6875 \rightarrow \beta = 133^\circ$$

Teniendo ya 2 ángulos el tercero hacemos: $\delta = 180^\circ - 133^\circ - 18^\circ \rightarrow \delta = 29^\circ$

23. Un trozo de alambre de 60cm...

Como nos dan la longitud total de alambre sabemos el perímetro, entonces podemos sacar el tercer lado

$$l = 60 - 24 - 20 \rightarrow l = 16\text{cm}$$

Una vez que tenemos los 3 lados procedemos igual que en el ejercicio 22 para averiguar los ángulos y así determinar cuál es el mayor.

$$24^2 = 16^2 + 20^2 - 2.20.16\cos(\alpha) \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{80}{640} \rightarrow \alpha = 82^\circ 50'$$

Hacemos lo mismo para otro ángulo:

$$20^2 = 16^2 + 24^2 - 2.16.24\cos(\beta) \rightarrow \cos(\beta) = \frac{432}{768} \rightarrow \beta = 55^\circ 46'$$

Y a esta altura ya podemos afirmar que el mayor ángulo de ese alambre deformado es el α .

Ejercicios integradores:

1. Demuestre que si $x = a \cdot \cos(\alpha)$ y $y = b \cdot \sin(\alpha)$, entonces $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

Reemplazamos:

$$b^2 (a \cos \alpha)^2 + a^2 (b \sin \alpha)^2 = b^2 a^2 \cos^2 \alpha + a^2 b^2 \sin^2 \alpha = b^2 a^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = b^2 a^2$$

2. Demuestre que para cualquier...

$$2.1) 4 + 4 \sin(x) - \cos^2(x) \geq 0 \rightarrow 4 \sin(x) - \cos^2(x) \geq -4 \rightarrow \sin(x) - \frac{1}{4} \cos^2(x) \geq -1$$

Sabemos que el seno de x es siempre mayor a -1. Y la resta también cumple ya que el coseno cuadrado por un cuarto siempre es menor que $\frac{1}{4}$ y mayor que 0 y en los valores máximos el seno vale 0.

$$2.2) \sin^2(x) + 4 \cos(x) - 4 \leq 0 \rightarrow \sin^2(x) + 4 \cos(x) \leq 4 \rightarrow \frac{1}{4} \sin^2(x) + \cos(x) \leq 1$$

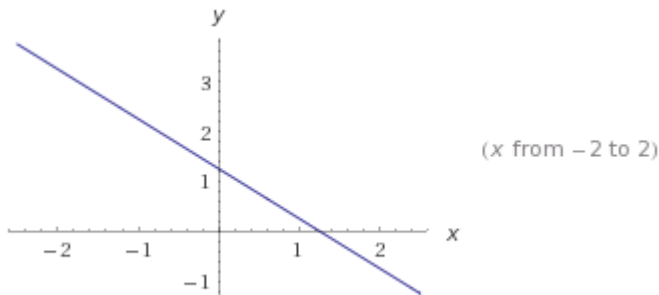
Con el mismo razonamiento que en el anterior se puede ver que la desigualdad se cumple.

Ya que el coseno siempre es menor que 1, mientras que el seno cuadrado por un cuarto también va a ser menor a 1 y mayor a 0.

3. Halle el valor de k para que la recta de ecuación...

$$4x + ky = 5 \rightarrow y = \frac{5}{k} - \frac{4}{k}x \text{ La pendiente es } -\frac{4}{k} = \tan\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -1 \rightarrow k = 4$$

Graficamos la recta $y = \frac{5}{4} - x$:



- 4.

$$4.1) \text{ Si considera: } \cos(\beta) = \frac{1+2k}{6k-1} \text{ y } \sec(\beta) = \frac{2}{4k-5}$$

Sabemos que beta está en el primer cuadrante entonces $0 \leq \beta \leq 90^\circ$.

Usando la identidad $\sec(\beta) = \frac{1}{\cos(\beta)}$ llegamos a:

$$\frac{1}{\cos(\beta)} = \frac{2}{4k-5} \rightarrow \frac{2}{4k-5} = \frac{6k-1}{1+2k} \rightarrow 24k^2 - 38k + 3 = 0 \text{ Que tiene raíces } k_1 = \frac{3}{2}, k_2 = \frac{1}{12}$$

Para k_2 verificamos que $\cos(\beta) = -\frac{7}{3}$ se nos va afuera de la imagen del coseno. Entonces descartamos este k.

Mientras que para k_1 vemos que:

$$\cos(\beta) = \frac{1}{2} \rightarrow \beta = 60^\circ \text{ y } \sec(\beta) = 2 \rightarrow \beta = 60^\circ$$

- 4.2) Encuentre los valores...

Bajate los resueltos y respondé tus dudas en www.exapuni.com

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right)}{-\tan(\pi - \gamma)} = \sqrt{3} \cos(\gamma) \text{ Con } 0 \leq \gamma \leq 2\pi \text{ usamos } -\tan(\gamma) = \tan(\pi - \gamma)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right) = \sqrt{3} \cos(\gamma) \tan(\gamma) \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(\gamma) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(\gamma) = \sqrt{3} \cos(\gamma) \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)}$$

$$\text{Luego: } \frac{1}{2} \cos(\gamma) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\gamma) = \sqrt{3} \sin(\gamma) \rightarrow \frac{1}{2} \cos(\gamma) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\gamma)$$

Y por último llegamos a $\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan(\gamma) \rightarrow \gamma = 30^\circ$ si le sumamos 180 encontramos el valor que nos falta entre 0 y 2π , 210° .

4.3) Calcule los valores...

$$3 \tan(\beta - \pi) = \sqrt{3} \sec(\beta) \sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow 3 \tan(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{\cos(\beta)} \cdot \left[\sin(\beta) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos(\beta) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$\text{Luego: } 3 \sin(\beta) = \frac{3}{2} \sin(\beta) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\beta) \rightarrow \frac{3}{2} \sin(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\beta) \rightarrow \tan(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Quedando $\beta = 30^\circ$ le sumamos π para encontrar el otro valor dentro de 0 y 2π . 210° .

5. Sean las funciones...

La unión esta va a vivir en el dominio de la función más chica, en este caso g, y va a ser $[0, 2\pi)$

Primero veamos que polinomio tiene una sola raíz que es 1. Para ello podemos usar factorización por gauss o una calculadora :D

Ahora solo falta ver los ceros de la otra función:

$$g(x) = 0 \rightarrow \cos(x) = \sqrt{3} \sin(x) \rightarrow \tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Entonces como ya sabemos la solución de esta ecuación de ejercicios anteriores $x=30^\circ$ $x=210^\circ$

Entonces la unión de los 2 queda $\{1, 30^\circ, 210^\circ\}$

6. Si $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{3}{2}$ son respectivamente...

Recordando las fórmulas de las asíntotas tenemos: $x = -\frac{1}{n} \rightarrow n = 2$ para la vertical $y = \frac{m}{2} \rightarrow m = -3$ la horizontal.

Entonces queda $f(x) = \frac{-3x+5}{2x-1}$. Ahora necesitamos la inversa entonces:

$$y = \frac{-3x+5}{2x-1} \rightarrow 2xy - y = -3x+5 \rightarrow 2xy + 3x = y+5 \rightarrow x = \frac{y+5}{2y+3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2x+3}$$

Veamos la compuesta ahora:

$$(f^{-1} \circ g)(\pi) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(0) = \frac{5}{3}$$

7. Determine el conjunto solución de la ecuación:

Bajate los resueltos y respondé tus dudas en www.exapuni.com

$2^{1-\cos(x)} = \sqrt{2} \quad \forall x \in [0, 2\pi)$ Hacemos una igualdad de exponentes:

$$1 - \cos(x) = \frac{1}{2} \rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60^\circ$$

Si a 60° le sumamos 2π quedamos afuera de nuestra restricción. Pero si tenemos en cuenta la otra solución, -60° y le sumamos 2π entra dentro de nuestro rango. Por lo tanto las soluciones en $[0, 2\pi)$ son: $\{60^\circ, 300^\circ\}$

8. Dadas las siguientes funciones...

8.1) Determine las raíces reales de la ecuación $g(x) + \frac{3}{g(x)} - 4 = 0 \rightarrow 3^x + \frac{3}{3^x} - 4 = 0 \rightarrow 3^x + \frac{3}{3^x} = 4$

$$3^x + 3 \cdot 3^{-x} = 4 \rightarrow 3^x + 3^{1-x} = 4 \rightarrow 3^x + 3^{1-x} = 3^{\log_3 4} \rightarrow$$

[Falta terminar]

Vamos a subir la resolución pronto! Si querés colaborar, podés enviar tu resolución a info@exapuni.com

8.2) La amplitud y el periodo de f:

$$f(x) = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$
 La amplitud es la constante que multiplica al seno, 3. Y para el periodo tenemos

que ver nuestra variable adentro del argumento del seno, el $+\pi/3$ no afecta el periodo en cambio el $2x$ sí. Por decirlo de alguna manera el seno se mueve más rápido (aumenta la frecuencia) entonces podemos decir que el periodo es π (hacemos el periodo del seno común, $2\pi/2$).

8.3) $h^{-1}(0)$. Primero hallemos la inversa:

$$y = \frac{3-x}{2+x} \rightarrow 2y + yx = 3-x \rightarrow yx + x = 3-2y \rightarrow x = \frac{3-2y}{y+1}$$

$$\text{Entonces } h^{-1}(x) = \frac{3-2x}{x+1} \rightarrow h^{-1}(0) = 3$$

8.4) $(t \circ f)(-\pi) = t(f(-\pi)) = t(3 \sin(-360 + 60^\circ)) = t\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$

$$(t \circ f)(-\pi) = \frac{27}{4} - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

9. Si se sabe que...

$$\tan(\alpha) = \sqrt{2} \rightarrow \alpha = 54^\circ 45'$$

$$\sin(\beta) = \frac{1}{3} \rightarrow \beta = 19^\circ 28'$$

$$\text{Entonces ya podemos calcular el valor de } \sin(2\alpha + \beta) = \sin(109^\circ 30' + 19^\circ 28') = \frac{7}{9}$$

10. Sean las funciones...

Primeo veamos:

$$f(x) = 12 \cdot 3^{\log_4 x} \rightarrow 9^{\log_4 x} + 27 = 12 \cdot 3^{\log_4 x} \rightarrow 3^{2\log_4 x} + 3^3 = 4 \cdot 3^{1+2\log_4 x}$$

[Falta terminar]

Vamos a subir la resolución pronto! Si querés colaborar, podés enviar tu resolución a info@exapuni.com

Esto fue todo! Gracias por seguirnos, estaremos subiendo la versión mejorada pronto!