

Práctica 1

Álgebra vectorial - Primera parte

Ejercicios

Ejercicio 1. Dados los puntos $P = (3, 1)$ y $Q = (1, -5) \in \mathbb{R}^2$:

- a) Graficarlos en el plano.
- b) Calcular y representar gráficamente los puntos $P + Q$, $P - Q$, $3.P$, $-2.Q$ y $P + \frac{1}{2}Q$.
- c) Representar en un mismo gráfico $3.P$, $-2.Q$ y $3.P - 2.Q$.
- d) Graficar los conjuntos $A = \{a.P \in \mathbb{R}^2 / a \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{b.Q \in \mathbb{R}^2 / b \in \mathbb{R}\}$
- e) Determinar geoméricamente para qué valores de (x, y) existen a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a.P + b.Q = (x, y)$.

Ejercicio 2.

- a) Representar gráficamente en $\mathbb{R}^3$ los puntos $P = (1, 0, 0)$, $Q = (1, 1, 0)$, $R = (1, 1, 1)$ y calcular y representar gráficamente los puntos $S = P + Q$, $T = Q - R$ y $V = \frac{1}{2}.R - P$.
- b) Un cubo tiene vértices en $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$. Escribir las coordenadas de los otros 4 vértices.
- c) Hallar, si es posible, a , b y $c \in \mathbb{R}$ tales que $(1, 2, 3) = a.(1, 0, 0) + b.(1, 1, 0) + c.(1, 1, 1)$.

Ejercicio 3. Efectuar las operaciones indicadas en cada caso.

- a) Si $P = (2, 3, 0, -2)$ y $Q = (1, 4, -2, -1) \in \mathbb{R}^4$, calcular $R = P + 3.Q$ y $S = 2.P - \frac{1}{3}.Q$.
- b) Si $P = (1, 0, -3, 0, 2)$ y $Q = (0, -1, -2, 0, 4) \in \mathbb{R}^5$, calcular $R = -P + 2.Q$ y $S = -2.P - \frac{2}{3}.Q$.

Ejercicio 4. Dados en $\mathbb{R}^2$ los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 5)$ y $\mathbf{v}_3 = (3, -1)$:

- a) Graficarlos.
- b) Graficar $\mathbf{w}_1 = (-1, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (2, 5)$ y $\mathbf{w}_3 = (-3, -1)$. ¿Qué efecto geométrico produce cambiar el signo a la primera coordenada de un vector?

- c) Graficar $\mathbf{z}_1 = (1, -2)$, $\mathbf{z}_2 = (-2, -5)$ y $\mathbf{z}_3 = (3, 1)$. ¿Qué efecto geométrico produce cambiar el signo a la segunda coordenada de un vector?
- d) Graficar $-\mathbf{v}_1$, $-\mathbf{v}_2$ y $-\mathbf{v}_3$. ¿Qué efecto geométrico produce multiplicar un vector por -1 ?

Ejercicio 5. Dados en $\mathbb{R}^2$ el triángulo de vértices $P_1 = (-2, 1)$, $P_2 = (-2, 3)$ y $P_3 = (-3, 3)$ y el vector $\mathbf{t} = (4, 2)$:

- a) Graficarlos.
- b) Graficar, con la misma escala, el triángulo de vértices $P_1 + \mathbf{t}$, $P_2 + \mathbf{t}$ y $P_3 + \mathbf{t}$ y el triángulo de vértices $P_1 - \mathbf{t}$, $P_2 - \mathbf{t}$ y $P_3 - \mathbf{t}$. ¿Qué efecto geométrico produce sumar el vector $\mathbf{t}$? ¿Y restarlo?
- c) Graficar, con la misma escala, el triángulo de vértices $2.P_1$, $2.P_2$ y $2.P_3$ y el triángulo de vértices $\frac{1}{2}.P_1$, $\frac{1}{2}.P_2$ y $\frac{1}{2}.P_3$. ¿Qué efecto geométrico produce multiplicar por 2? ¿Y por $\frac{1}{2}$?

Ejercicio 6. Dado un vector se le realizan dos operaciones consecutivas: primero se lo multiplica por un escalar fijo (dilatación) y luego se le suma otro vector fijo (traslación).

- a) Si se le aplican estas dos operaciones al vector $\mathbf{v} = (1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$ se llega al vector $\mathbf{w} = (-6, 12)$. ¿Se puede decidir cuál fue la dilatación y cuál la traslación? (Sugerencia: buscar si es posible llegar de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ de dos formas distintas).
- b) Si se le aplican las dos operaciones a $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ y a $\mathbf{v}_2 = (3, 4)$ en $\mathbb{R}^2$ se llega a $\mathbf{w}_1 = (-6, 12)$ y a $\mathbf{w}_2 = (-5, 13)$ respectivamente. Hallar el escalar que da la dilatación y el vector que da la traslación.
- c) ¿Puede ser que luego de aplicar la misma dilatación y la misma traslación a los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (2, -4)$ se llegue a los vectores $\mathbf{w}_1 = (2, 4)$ y $\mathbf{w}_2 = (-2, 3)$ respectivamente?
- d) Si se le aplican las dos operaciones en $\mathbb{R}^3$ a $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ se llega a $\mathbf{w}_1 = (2, 1, 5)$. Probar que, si λ es el escalar que da la dilatación, al aplicarle las mismas dos operaciones a $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 3)$ se llega a $(\lambda + 2, 1, 2\lambda + 5)$.

Ejercicio 7.

- a) En cada caso, graficar los vectores de $\mathbb{R}^2$ involucrados, calcular el producto escalar $\cdot$ indicado y determinar si son ortogonales:

$$(1, -1) \cdot (2, 4); \quad (1, 3) \cdot (-6, 2); \quad (1, 2) \cdot (1, 2); \quad (-1, 0) \cdot (0, 1)$$

- b) En cada caso, calcular el producto escalar indicado de vectores de $\mathbb{R}^3$ y decidir si son ortogonales:

$$(1, 3, 5) \cdot (3, 0, -2); \quad (-1, 2, 1) \cdot (6, 1, 4); \quad (2, 4, -2) \cdot (-3, -6, 3); \quad (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 1)$$

- c) Hallar tres vectores distintos de $\mathbb{R}^2$ que sean ortogonales a $(5, -3)$. ¿Qué relación cumplen entre sí?
- d) Encontrar dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $(1, 1, 2)$ que no sean paralelos entre sí.
- e) Hallar tres vectores distintos de $\mathbb{R}^3$ que sean ortogonales a $(1, 2, 1)$ y a $(1, -3, 0)$ simultáneamente. ¿Qué relación cumplen entre sí?
- f) Dados $\mathbf{v} = (1, 2)$; $\mathbf{w} = (-1, 5)$ y $\mathbf{z} = (3, 1)$, calcular

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}; \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}; \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{z}; \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{z}); \quad \mathbf{v} \cdot (2\mathbf{w}); \quad (5\mathbf{v}) \cdot \mathbf{z}; \quad \mathbf{v} \cdot (2\mathbf{w} - 3\mathbf{z}).$$

¿Qué relaciones se cumplen?

- g) Dados $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$; $\mathbf{w} = (1, -1, 3)$ y $\mathbf{z} = (2, -1, 1)$, calcular

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}; \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}; \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{z}; \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{z}); \quad \mathbf{v} \cdot (2\mathbf{w}); \quad (5\mathbf{v}) \cdot \mathbf{z}; \quad \mathbf{v} \cdot (2\mathbf{w} - 3\mathbf{z}).$$

¿Qué relaciones se cumplen?

Ejercicio 8. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas para vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{z}$:

- a) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $-\mathbf{w}$ y a $5\mathbf{w}$.
- b) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$ y a $\mathbf{z}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w} + \mathbf{z}$ y a $3\mathbf{w} - 2\mathbf{z}$.
- c) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$.
- d) Si $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$ y a $\mathbf{w} - 3\mathbf{z}$, entonces $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{z}$.

Ejercicio 9. Dados $\mathbf{v} = (3, -4)$ y $\mathbf{w} = (1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$, calcular

$$\|\mathbf{v}\|, \quad \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|, \quad \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|, \quad \|2\mathbf{v}\|, \quad \left\|\frac{1}{2}\mathbf{v}\right\|, \quad \left\|\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}\right\|.$$

Ejercicio 10. Graficar en el plano el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = 2\}$.

Ejercicio 11. Calcular la distancia entre los puntos dados y el ángulo entre los vectores determinados por ellos.

a) $(2, 3)$ y $(5, 1)$

b) $(1, 0)$ y $(-\sqrt{3}, 1)$

c) $(1, 0, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 1, 1)$

d) $(0, -1, 1)$ y $(-\sqrt{2}, 1, 1)$

Ejercicio 12. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ tales que

a) la norma del vector $(2, -2, k)$ es igual a 3.

b) el ángulo entre los vectores $(2, 1, 1)$ y $(1, -1, k)$ es $\frac{\pi}{3}$.

Ejercicio 13. Hallar los ángulos que forman los vectores dados con los semiejes coordenados positivos.

a) $(1, -1)$, $(-1, \sqrt{3})$ y $(1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$.

b) $(1, 0, -1)$, $(0, 2, 0)$ y $(1, -1, 2)$ en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 14. Para cada vector $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^2$, notamos $\theta_{\mathbf{u}}$ al ángulo que forma con el semieje positivo de las x . En cada uno de los siguientes casos, dar las coordenadas del vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$:

a) $\|\mathbf{u}\| = 4$, $\theta_{\mathbf{u}} = 0$, $\|\mathbf{v}\| = 2$, $\theta_{\mathbf{v}} = \frac{2\pi}{3}$, $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

b) $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\theta_{\mathbf{u}} = \frac{\pi}{4}$, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$, $\theta_{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = \frac{\pi}{2}$, $\mathbf{w} = \mathbf{v}$.

Ejercicio 15. Sabiendo que el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $\frac{\pi}{3}$, $\|\mathbf{w}\| = 4$ y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, calcular $\|\mathbf{v}\|$.

Ejercicio 16. Sea $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(0, 0)$.

a) Graficarla.

b) Encontrar dos vectores dirección distintos para $\mathbb{L}$. Graficarlos.

- c) Dar una ecuación paramétrica para $\mathbb{L}$. ¿Es única?
- d) Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $\mathbb{L}$: $(-3, -2)$, $(2, 3)$, $(0, 0)$, $(-6x, -2x)$.
- e) ¿Es $\mathbb{L}$ igual a la recta $\mathbb{L}' : X = \lambda.(300, 200) + (3, 2)$?

Ejercicio 17. Sea $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(-2, 2)$.

- a) Graficarla.
- b) Encontrar dos vectores dirección distintos para $\mathbb{L}$. Graficarlos.
- c) Dar dos ecuaciones paramétricas para $\mathbb{L}$.
- d) Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta $\mathbb{L}$: $(-3, 1)$, $(4, 0)$, $(0, 0)$, $(-3x + 1, x + 1)$.
- e) ¿Es $\mathbb{L}$ igual a la recta $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-27, 9) + (-14, 6)$? ¿Y a la recta $\mathbb{L}'' : X = \lambda.(27, -9) + (-27, 9)$?

Ejercicio 18. Un móvil se desplaza por el plano $\mathbb{R}^2$ de forma tal que, en tiempo t , se encuentra en el punto $t.(3, -2) + (1, 1)$.

- a) Graficar la trayectoria del móvil si parte en tiempo $t = 0$.
- b) Graficar los puntos donde se encuentra en tiempo $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ y $t = 4$.
- c) Si $P(t)$ es el punto en el que se encuentra en tiempo t , calcular $P(0)$ y $P(t + 1) - P(t)$ para un valor genérico de t . ¿Qué relación tienen con los datos dados?
- d) Si hay una pared ubicada en la recta vertical de ecuación $x = 16$, ¿en qué momento choca el móvil contra la pared?
- e) Repetir los distintos ítems con un móvil que se desplaza según la ecuación $t.(6, -4) + (1, 1)$ para $t \geq 0$ y con otro que se desplaza según $t.(\frac{3}{2}, -1) + (1, 1)$ para $t \geq 0$. ¿Cómo son las trayectorias? ¿En qué se diferencian los movimientos?

Ejercicio 19. Dada la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 2) + (3, 2)$:

- a) Dar una ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}_1$ paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por $(0, 0)$.
- b) Dar una ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}_2$ paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por $(-1, -6)$.

- c) Graficar $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ en un mismo sistema de coordenadas. ¿Qué relación cumplen $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$? Justificar.

Ejercicio 20. Sea $\mathbb{L}$ la recta que pasa por $(-1, 2)$ y $(0, 3)$.

- Hallar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}_1$ perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por $(0, 0)$.
- Hallar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}_2$ perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por $(1, 2)$.
- Graficar las tres rectas en un mismo sistema de coordenadas. ¿En qué posición relativa están $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$?

Ejercicio 21. Sean $P = (4, 9)$, $Q = (-6, 5)$ y $\mathbb{L} : X = \lambda \cdot (1, 2)$. Hallar todos los puntos $R \in \mathbb{L}$ tales que:

- el triángulo PQR sea rectángulo en P .
- el triángulo PQR sea rectángulo en R .

Ejercicio 22. Dadas $\mathbb{L}_1 : X = \alpha \cdot (5, -1) + (2, 1)$, $\mathbb{L}_2$ la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(-3, 2)$, $\mathbb{L}_3$ la recta que pasa por los puntos $(5, 5)$ y $(5, -1)$, $\mathbb{L}_4 : X = \beta \cdot (1, 0) + (2, 1)$ y $\mathbb{L}_5 : x + 3y = -1$:

- Dar ecuaciones implícitas para $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$, $\mathbb{L}_3$ y $\mathbb{L}_4$.
- Dar una ecuación paramétrica para $\mathbb{L}_5$.

Ejercicio 23. Dadas las rectas $\mathbb{L}_1 : -x + 3y = 2$, $\mathbb{L}_2 : -2x + 6y = -3$ y $\mathbb{L}_3 : x - 3y = 0$:

- Representarlas gráficamente en el mismo plano. ¿Cuál es su posición relativa?
- Notar que las ecuaciones de las rectas anteriores pueden escribirse usando el producto escalar: $\mathbb{L}_1 : (-1, 3) \cdot (x, y) = 2$, $\mathbb{L}_2 : (-2, 6) \cdot (x, y) = -3$ y $\mathbb{L}_3 : (1, -3) \cdot (x, y) = 0$. ¿Qué relación tienen entre sí los vectores $(-1, 3)$, $(-2, 6)$ y $(1, -3)$ que aparecen en las ecuaciones?
- Buscar un vector dirección distinto para cada una de las rectas. ¿Qué relación tienen los vectores dirección encontrados con los vectores $(-1, 3)$, $(-2, 6)$ y $(1, -3)$?
- Dar una ecuación implícita de la recta paralela a $\mathbb{L}_1$ que pasa por $(-1, 1)$.

Ejercicio 24.

- a) Dar una ecuación paramétrica de la recta paralela a $\mathbb{L} : x = 2$ que pasa por $(3, 8)$.
- b) Dar una ecuación implícita de la recta perpendicular a $\mathbb{L} : X = \lambda \cdot (2, 3) + (1, 2)$ que pasa por $(5, -2)$.

Ejercicio 25. Hallar, en cada caso, la intersección de las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ y decidir sus posiciones relativas:

- a) $\mathbb{L}_1 : 3x + y = -3$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha(1, 3) + (2, 0)$.
- b) $\mathbb{L}_1 : -2x + 3y = -13$ y $\mathbb{L}_2 : y = 7x + 2$.
- c) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha \cdot (-4, 1) + (2, 1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \beta \cdot (-2, 1) + (0, -1)$.
- d) $\mathbb{L}_1 : X = \alpha \cdot (-3, 2) + (5, 1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \beta \cdot (6, -4) + (0, 1)$.
- e) $\mathbb{L}_1 : x - 2y = -1$ y $\mathbb{L}_2 : X = \alpha \cdot (2, 1) + (1, 1)$

Ejercicio 26. Sean $\mathbb{L}_1 : x - 2y = 3$, $\mathbb{L}_2 : -2x + y = -3$ y $\mathbb{L}_3 : X = \alpha \cdot (1, -7)$.

- a) Dar una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}$ que pasa por el punto de intersección de $\mathbb{L}_2$ y $\mathbb{L}_3$ y es paralela a $\mathbb{L}_1$.
- b) Dar una ecuación implícita de la recta $\mathbb{L}'$ que pasa por el punto de intersección de $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ y es perpendicular a $\mathbb{L}_3$.

Ejercicio 27. En cada caso, dar una ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^3$ que:

- a) tiene dirección $(1, -1, 2)$ y pasa por el origen de coordenadas.
- b) tiene dirección $(1, -1, 2)$ y pasa por el punto $(0, 2, -3)$.
- c) pasa por los puntos $(1, 5, 1)$ y $(-4, 3, 2)$.
- d) es paralela a $\mathbb{L} : X = \lambda \cdot (2, 1, -1) + (-2, 4, 1)$ y pasa por el punto $(0, 3, 2)$.
- e) pasa por el origen y es paralela a la recta que contiene a $(2, -2, 1)$ y a $(-3, 2, 1)$.
- f) es perpendicular a $(2, 1, 0)$ y a $(0, -1, 2)$ simultáneamente y pasa por el origen.
- g) es perpendicular a las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda \cdot (2, 1, -1) + (-2, 4, 1)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda \cdot (-1, 0, 2) + (2, 1, 0)$ simultáneamente y pasa por el punto $(0, 3, 2)$.

Ejercicio 28. Sean $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(1, 2, -1) + (1, 3, 5)$ y $\mathbb{L}_2$ la recta paralela a $\mathbb{L}_1$ que pasa por el punto $(3, 2, 4)$.

- a) Hallar el punto de $\mathbb{L}_2$ que tiene coordenada $z = 0$.
- b) Decidir si los puntos $(-1, -1, 7)$ y $(1, -2, 6)$ están en $\mathbb{L}_2$.

Ejercicio 29.

- a) Decidir si los puntos $(1, 2, -4)$, $(3, -2, 0)$ y $(2, 0, -2)$ están alineados.
- b) Decidir si los puntos $(1, 1, 3)$, $(2, 1, 4)$ y $(2, 1, 5)$ están alineados.
- c) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que los puntos $(2 + a, 3, -1)$, $(5, a + 3, -2)$ y $(a, -1, 1)$ están alineados.

Ejercicio 30. Sean $\mathbb{L} : X = \beta.(1, 1, -2) + (0, 0, 4)$ y $P = (3, 1, 0)$. Determinar un punto $Q \in \mathbb{R}^3$ tal que:

- a) la recta que pasa por P y Q sea paralela a $\mathbb{L}$.
- b) $Q \in \mathbb{L}$ y la recta que pasa por P y Q sea perpendicular a $\mathbb{L}$.

Ejercicio 31. Dadas las rectas

$$\mathbb{L}_1 : X = \alpha.(1, 2, 1) + (2, 3, 2)$$

$$\mathbb{L}_2 : X = \beta.(0, 1, -1) + (1, 3, -1)$$

$$\mathbb{L}_3 : X = \gamma.(2, 4, 2) + (1, 5, 0)$$

$$\mathbb{L}_4 : X = \delta.(2, 4, 2) + (3, 5, 3)$$

calcular las siguientes intersecciones y, en cada caso, dar la posición relativa de las rectas en el espacio:

- a) $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$
- b) $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3$
- c) $\mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3$
- d) $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_4$

Ejercicio 32.

- a) Dos móviles se desplazan por el espacio de forma tal que las ecuaciones de sus movimientos están dadas por $t.(1, 2, -4) + (-1, 3, 0)$ y $t.(1, 6, -10) + (2, 1, 0)$ para $t \geq 0$. Decidir si las trayectorias de los móviles se cruzan y, en caso afirmativo, decir en qué punto. ¿Se encuentran los dos móviles?
- b) Mismo problema para las ecuaciones de movimiento $t.(1, 2, 0) + (0, 3, 2)$ y $t.(3, -4, 0) + (1, 5, 7)$. ¿Son paralelas estas trayectorias?

Ejercicio 33.

- a) En cada caso, calcular el producto vectorial indicado de vectores de $\mathbb{R}^3$. ¿En qué casos da $(0,0,0)$?

$$(1,3,5) \times (3,0,-2); \quad (-1,2,1) \times (6,1,4); \quad (2,4,-2) \times (-3,-6,3);$$

$$(0,0,0) \times (1,-1,3); \quad (a,b,c) \times (ka,kb,kc)$$

- b) Dados $\mathbf{v} = (1,1,1)$; $\mathbf{w} = (1,-1,0)$ y $\mathbf{z} = (2,-1,1)$, calcular

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w}; \quad \mathbf{w} \times \mathbf{v}; \quad \mathbf{v} \times \mathbf{z}; \quad \mathbf{v} \times (\mathbf{w} + \mathbf{z}); \quad \mathbf{v} \times (3\mathbf{w}); \quad (5\mathbf{v}) \times \mathbf{z}; \quad \mathbf{v} \times (2\mathbf{w} - 3\mathbf{z})$$

¿Qué relaciones se cumplen?

- c) Dados $\mathbf{v} = (1,1,1)$; $\mathbf{w} = (1,-1,0)$, calcular

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}; \quad (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}$$

¿Cómo resulta ser el vector $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ con respecto a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$?

- d) Dar un vector que sea ortogonal a $(1,3,5)$ y a $(3,0,-2)$ simultáneamente.

Ejercicio 34. Dados los puntos $P = (1,-1,1)$, $Q = (2,0,3)$ y $R = (0,1,2)$, calcular el perímetro, los ángulos interiores y el área de:

- a) el paralelogramo de lados PQ y PR .
- b) el triángulo PQR . Decidir si es un triángulo isósceles, equilátero o escaleno.

Ejercicio 35. En cada caso, dar una ecuación implícita de:

- a) los planos coordenados xy , xz y yz .
- b) el plano Π perpendicular al vector $(1,-1,2)$ que pasa por el origen de coordenadas.
- c) el plano Π perpendicular al vector $(1,-1,2)$ que pasa por el punto $(1,1,2)$.
- d) el plano Π perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \lambda \cdot (2,1,-1) + (-2,4,1)$ que pasa por el punto $(-4,3,2)$.
- e) el plano Π paralelo al plano $\Pi_1 : 2x - 3y + z = 3$ que pasa por el punto $(0,1,2)$.
- f) el plano Π que contiene a los puntos $(1,0,0)$, $(2,1,0)$ y $(1,1,-1)$.

Ejercicio 36.

- a) Decidir si el punto $(1, 2, -3)$ está en el plano que pasa por los puntos $(1, 1, 0)$, $(2, 3, -1)$ y $(5, 0, 2)$.
- b) Decidir si los puntos $(1, 1, 0)$, $(2, 3, -1)$, $(5, 0, 2)$ y $(0, -1, 1)$ son coplanares (es decir, están en un mismo plano).

Ejercicio 37. Dados el plano $\Pi : 2x - 3y + 7z = 3$ y las rectas $\mathbb{L}_1 : X = \lambda.(2, 1, -1) + (-2, 4, 1)$, $\mathbb{L}_2 : X = \lambda.(2, -1, -1) + (-7, -1, 2)$ y $\mathbb{L}_3 : X = \lambda.(-1, 4, 2) + (1, 0, 1)$:

- a) Calcular las intersecciones $\Pi \cap \mathbb{L}_1$, $\Pi \cap \mathbb{L}_2$ y $\Pi \cap \mathbb{L}_3$ y dar sus posiciones relativas.
- b) Un móvil se dirige hacia el plano Π según la ecuación de movimiento $t.(1, 1, 1) + (-7, 0, -1)$ para $t \geq 0$. Calcular en qué tiempo llega al plano y en qué punto lo impacta.

Ejercicio 38. En cada caso, dar una ecuación paramétrica de una recta en $\mathbb{R}^3$ que:

- a) es perpendicular al plano $\Pi : 4x - 2y + z = 3$ y pasa por el punto $(0, 1, -2)$.
- b) es paralela a los planos $\Pi_1 : 3x - y + 2z = 4$ y $\Pi_2 : y + z = 3$ simultáneamente y pasa por el punto $(1, 3, 1)$.
- c) es perpendicular a la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(0, 0, 1) + (1, 3, -2)$ y está incluida en el plano $\Pi : x + y + z = 2$.

Ejercicio 39. Para cada $k \in \mathbb{R}$, se considera la recta $\mathbb{L}_k : X = \lambda.(k, k + 2, 1) + (1, 1, 1)$.

- a) Probar que, si $k \neq k'$, $\mathbb{L}_k$ y $\mathbb{L}_{k'}$ son rectas distintas.
- b) Probar que, para cualquier valor de k , $\mathbb{L}_k$ está incluida en el plano $\Pi : x - y + 2z = 2$.
- c) Probar que la recta $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 1, 0) + (1, 1, 1)$ es una recta incluida en el plano Π pero no es igual a $\mathbb{L}_k$ para ningún valor de k .

Ejercicio 40.

- a) Dar una ecuación implícita del plano Π que contiene a las rectas transversales $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 2, -1) + (3, 0, 0)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2, -4, 1) + (5, 4, -3)$.
- b) Dar una ecuación implícita del plano Π que contiene a las rectas paralelas $\mathbb{L} : X = \lambda.(1, 2, -1) + (3, 0, 0)$ y $\mathbb{L}' : X = \lambda.(-2, -4, 2) + (0, 1, 1)$.

- c) la recta $\mathbb{L}_3$ perpendicular al plano $\Pi_1 : X = \alpha.(1,0,5) + \beta.(-1,3,1) + (1,-1,2)$ que pasa por $(1,0,1)$.
- d) la recta $\mathbb{L}_4$ perpendicular al plano $\Pi_2 : 2x + 2y - 2z = 3$ que pasa por el punto $(2,1,-1)$.
- e) la recta $\mathbb{L}_5$ que pasa por el origen y es paralela a los planos $\Pi_3 : 2x - y + z = 3$ y $\Pi_4 : X = \alpha.(1,3,1) + \beta.(0,2,1) + (1,-1,2)$ simultáneamente.
- f) la recta $\mathbb{L}_6$ que pasa por el punto $(2,0,-1)$, está incluida en el plano $\Pi_5 : 3x - z = 7$ y es paralela al plano $\Pi_6 : X = \alpha.(2,0,-2) + \beta.(3,1,1) + (1,0,2)$ simultáneamente.

Ejercicio 46. Dadas las rectas

$$\mathbb{L}_1 : \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \quad y \quad \mathbb{L}_2 : \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

- a) Dar ecuaciones paramétricas para $\mathbb{L}_1$ y para $\mathbb{L}_2$.
- b) Decidir si son paralelas, coincidentes, alabeadas o se cortan en un punto.

Ejercicio 47. En cada caso, hallar la intersección de la recta $\mathbb{L}$ con el plano Π y decidir su posición relativa:

- a) $\mathbb{L} : X = \alpha.(1,2,1) + (2,2,3)$ b) $\mathbb{L} : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = -2 \end{cases}$ $\Pi : y = 3$
 $\Pi : z = 0$
- c) $\mathbb{L} : X = \alpha.(0,1,-1) + (0,1,1)$ d) $\mathbb{L} : X = \alpha.(0,1,-1) + (0,1,1)$
 $\Pi : y + z = 2$ $\Pi : y + z = 0$.
- e) $\mathbb{L} : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = -2 \end{cases}$ $\Pi : X = \alpha.(1,0,0) + \beta.(0,1,-2) + (0,0,1)$