

## Práctica 2

### Matrices y sistemas lineales

#### Ejercicios

**Ejercicio 1.** Dadas las siguientes matrices, efectuar, cuando sea posible, los cálculos indicados.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a)  $B + C$

b)  $2A - E$

c)  $BA$

d)  $BC$

e)  $CB$

f)  $AB$

g)  $ED$

h)  $AE$

i)  $EA$

**Ejercicio 2.** Dadas  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ , hallar

a) la segunda fila de  $AB$ ;

b) la tercera columna de  $BA$ ;

c) el elemento  $c_{23}$  de  $C = ABA$ .

**Ejercicio 3.** Dado el sistema lineal

$$\mathcal{S} : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 & = 2 \\ x_1 + 3x_2 & - x_4 = 0 \\ 2x_1 & + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

¿Cuáles de las siguientes 4-uplas son soluciones de  $\mathcal{S}$ ? ¿Y del sistema homogéneo asociado?

a)  $\mathbf{x} = (2, 2, 1, 0)$

b)  $\mathbf{y} = (1, 1, 1, 4)$

c)  $\mathbf{z} = (0, 0, 0, 0)$

d)  $\mathbf{u} = (-2, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -7)$

e)  $\mathbf{v} = (-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$

f)  $\mathbf{w} = (-1, -2, 3, -7)$

**Ejercicio 4.** Determinar todos los  $a \in \mathbb{R}$  para los que  $(a, -a, a - 1)$  es solución del sistema

$$\begin{cases} x_1 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \end{cases}$$

**Ejercicio 5.** Obtener un sistema equivalente al dado, cuya matriz ampliada sea escalonada en las filas reducida.

$$a) \begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \end{cases}$$

**Ejercicio 6.** Resolver por el método de eliminación de Gauss el sistema cuya matriz ampliada es  $(A|\mathbf{b})$ .

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{b} = (1, 2) \\ \mathbf{b} = (0, 0) \end{array}$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{b} = (3, 1, -1) \\ \mathbf{b} = (0, 0, 0) \\ \mathbf{b} = (1, 1, 2) \end{array}$$

$$c) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{b} = (5, 3, 2) \\ \mathbf{b} = (-1, 1, 2) \\ \mathbf{b} = (0, 0, 0) \end{array}$$

$$d) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{b} = (0, 0, 0) \\ \mathbf{b} = (1, 0, 0) \\ \mathbf{b} = (0, 1, 0) \end{array}$$

$$e) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathbf{b} = (1, 2, 1, 2) \\ \mathbf{b} = (2, 0, -1, 2) \\ \mathbf{b} = (0, 0, 0, 0) \end{array}$$

**Ejercicio 7.** Determinar todas las matrices  $B$  que verifican

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 8.** Determinar cuáles de las siguientes matrices son inversibles y exhibir la inversa cuando exista.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad G + H; \quad G \cdot H.$$

**Ejercicio 9.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Decidir si  $A^{-1}$  es solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 10.** Sean

$$\mathcal{S}_1 = \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

y

$$\mathcal{S}_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Encontrar todos los  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$  que son soluciones de  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  simultáneamente.

**Ejercicio 11.** Determinar si el sistema tiene soluciones no triviales, sin resolverlo

$$a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 12.**

a) Encontrar todos los valores de  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales el sistema  $\mathcal{S}$  tiene solución única.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} (k^2 - 1)x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \\ (k - 1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k + 2)x_3 = 0 \end{cases}$$

b) Determinar todos los valores de  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales el sistema  $\mathcal{S}$  admite solución no trivial.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} (k + 1)x_1 + kx_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + (k + 2)x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 13.** Determinar todos los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para los cuales el sistema  $\mathcal{S}$  es compatible.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = c \end{cases}$$

**Ejercicio 14.** Resolver el sistema para todos los valores de  $k$ .

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + 2x_3 - x_4 = k + 2 \\ x_1 + kx_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3kx_2 + 2x_3 - 2x_4 = k \end{cases}$$

**Ejercicio 15.** Encontrar todos los valores de  $a$  y  $b$  para los cuales los sistemas cuyas matrices ampliadas se dan a continuación son compatibles. En cada caso, para los valores hallados, determinar si el sistema es compatible determinado o indeterminado.

$$a) \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & b \end{array} \right)$$

$$b) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & b \\ 0 & a+1 & a^2-1 & b+2 \end{array} \right)$$

$$c) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & a+1 & -a-1 & b \end{array} \right)$$

**Ejercicio 16.** Encontrar todos los valores de  $a$  y  $b$  para los cuales  $(2, 0, -1)$  es la única solución del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - ax_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - bx_3 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

**Ejercicio 17.** Hallar todos los valores de  $k$  para los cuales el conjunto de soluciones del siguiente sistema es  $M = \{\lambda(1, 1, 0, 0) + (2, 0, -1, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k^2 - 1)x_2 + 2x_4 = -k^2 + 1 \\ (k + 1)x_3 + 4x_4 = -k - 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 18.** Encontrar todos los valores de  $a$  y  $b$  para los cuales el sistema cuya matriz

ampliada es  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array} \right)$  tiene como conjunto de soluciones una recta.