EJERCITACIÓN ADICIONAL

Parcialito 1

1. Habíamos definido la *división* o *cociente* entre números reales a y $b \neq 0$ a partir del producto y del inverso multiplicativo de la siguiente manera

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}$$

Utilizando esta definición de cociente y un resultado relativo a $(ab)^{-1}$ muestre que si $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \neq 0$ entonces

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$$

2. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $|\, x - 1\,| < 1$. ¿Es posible hallar un número positivo r de modo que sea válido decir que

$$|\, x\,| > r\ ?$$

Encuéntrelo o muestre que no puede existir.

3. Encuentre un número positivo r tal que si $|\, x - 1\,| < r$ entonces $|\, x\,| > \frac{1}{3}$. Justifique su respuesta a partir *exclusivamente* de las propiedades básicas de los números reales y de las propiedades del módulo.

4. Utilizando las propiedades básicas de los números reales y algún resultado relativo a la multiplicación por números negativos muestre que

$$a < b < 0 \quad \Rightarrow \quad b^{-1} < a^{-1}$$

5. Considere que $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. Imponga una condición sobre el número $|\, x + 2\,|$ que haga válida la afirmación

$$\frac{|\, x - 1\,|}{|\, x + 2\,|} \leqslant \frac{|\, x - 1\,|}{4}$$

y compruebe que efectivamente es así.

6. Sean A , B y C conjuntos. Muestre que

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

7. Sean A , B y C conjuntos. Muestre que

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$$

8. Siendo $A = [-2, 3) \subset \mathbb{R}$ y $B = \{-2, 3\} \subset \mathbb{R}$, calcule $\mathbb{R} - A$ y $\mathbb{R} - B$.

9. Compruebe que si $A, B \subset U$, entonces $U - (A \cup B) \subset U - A$.

10. Considere la relación $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \text{ divide a } m\}$. Determine si se trata de una relación reflexiva.

11. Se define en $\mathbb{Z}$ la siguiente relación

$$n \, R \, m \iff n - m \text{ es múltiplo de 3}$$

a) determine si es cierto que

$$3\,R\,6 \quad , \quad 3\,R\,5 \quad , \quad -2\,R\,10 \quad , \quad -1\,R\,-26 \quad , \quad 1\,R\,-26$$

b) Averigüe si R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

12. La función $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow B \subset \mathbb{R}$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{13}{2} & \text{si } -3 \leqslant x < -1 \\ -\frac{5}{3}x + 5 & \text{si } 0 < x < 3 \\ \frac{4}{3}x - 8 & \text{si } 3 \leqslant x \leqslant 6 \end{cases}$$

a) haga un esquema del gráfico de f

b) ¿es cierto que $(3, 0) \in \text{gráf}(f)$?

c) halle $\text{Dom}\, f$ e $\text{Im}\, f$

d) determine quiénes son los conjuntos A y B que hacen de f una función biyectiva.

NOTA: en caso de haber más de un conjunto A que cumpla lo pedido, tome el mayor posible.

13. Halle todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$(z - 1 - i)^6 = 64i$$

y ubíquelos en un esquema gráfico.

14. Represente gráficamente al subconjunto de $\mathbb{C}$ determinado por las condiciones

$$0 < \arg(iz - i) \leqslant \frac{\pi}{6} \qquad \text{y} \qquad d(z, -1) < 4$$

NOTA: $d(z, -1)$ indica la distancia de z a -1.

15. Haga un esquema gráfico del conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$2 \leqslant | 2z - 4 - 4i | < 4 \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$$

16. Esboce un gráfico que represente a todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$(1 - i)z + (1 + i)\bar{z} = 2 \qquad \text{y} \qquad | 3z - 3 - 3i | < 3$$

17. Haga un esquema gráfico de los números complejos z que satisfacen las siguientes condiciones

$$| z - 4 | \leqslant 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{3\pi}{8} \leqslant \arg z \leqslant \frac{5\pi}{8}$$

18. Ubique en un esquema gráfico a los números complejos que satisfacen

$$-\frac{\pi}{6} \leqslant \arg(z + 1 - i) \leqslant \frac{\pi}{6} \qquad \text{y} \qquad \frac{3\pi}{4} \leqslant \arg(z - 1 - i) \leqslant \frac{5\pi}{4}$$

19. Haga un esquema gráfico del conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ cuya distancia al punto $1 - i$ es mayor que 2 y menor que 4 y además satisface

$$\frac{\pi}{4} < \arg(2z) < \frac{5\pi}{4}$$

20. Ubique en un esquema gráfico los complejos z_1 , z_2 y z_3 sabiendo que

    a) $\mid z_1 \mid= 2 \quad , \quad \arg(z_1) = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

    b) $\mid z_2 - 1 \mid= 1 \quad , \quad \arg(z_2 - 1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

    c) $\mid z_3 - 1 - i \mid= 1 \quad , \quad \arg(z_3) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

    NOTA: debe resolver el ejercicio **sin** hallar la forma binómica del complejo.

21. Halle todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^2 - 2z + 1 = i$.

22. Sea $z = 3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$. Ubique en un esquema gráfico a los siguientes números complejos

$$z^2 \quad , \quad z - 1 \quad , \quad z - i \quad , \quad iz$$

    NOTA: debe resolver el ejercicio **sin** hallar la forma binómica del complejo.

23. Haga un esquema gráfico de la región del plano complejo determinada por las siguientes condiciones

$$\frac{\pi}{3} \leqslant \arg(z - i) \leqslant \frac{2\pi}{3} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Im} z < 2$$