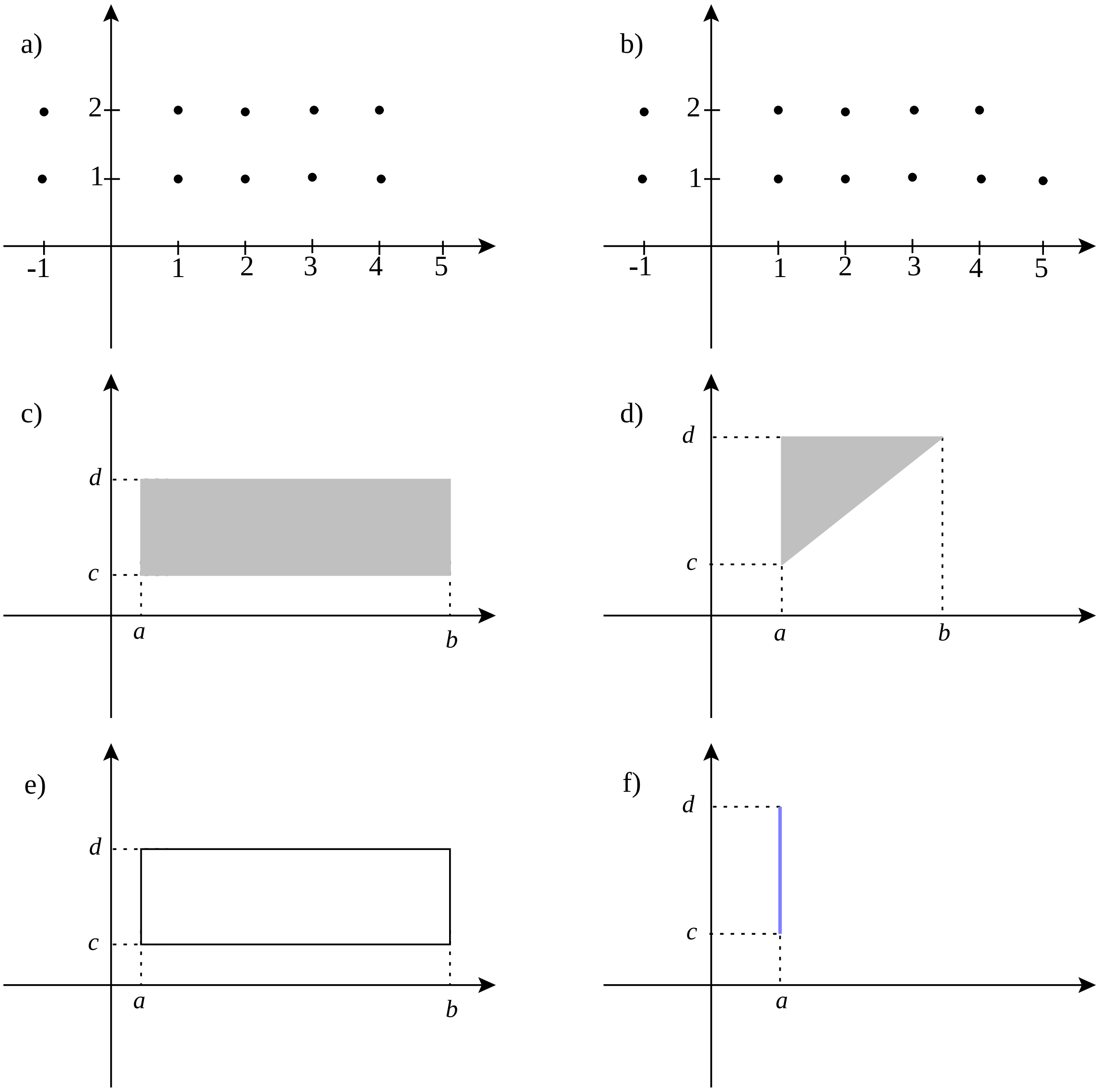
Ejercicios Adicionales

(Trabajos Prácticos 0 - 1 - 2)

1. Decida cuáles de los siguientes subconjuntos del plano son productos cartesianos de subconjuntos de la recta real. Para aquellos que lo sean, halle sus componentes.



2. Grafique el subconjunto del plano complejo definido por las condiciones

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \arg(2z) < \frac{5\pi}{4} \qquad , \qquad -1 \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant 3$$

3. Halle todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$(z + 2i)^4 = 16i$$

y ubíquelos en un esquema gráfico.

4. Halle todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen
   a) $(z+3i)^3 = 8$.
   b) $z\bar{z} - 2z + 2\bar{z} = 4$
   c) $z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} = 4$
   d) $(z-1)^4 = 16i$
5. Halle todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que
   a) $z^3 = 8i$
   b) $(z+3i)^3 = 8i$
6. Grafique el subconjunto A del plano complejo definido por las condiciones

$$1 < |\, 2z + 3i \,| \leqslant 2$$

7. Utilizando la definción de módulo y las propiedades básicas de los números reales muestre que si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lambda < -1 \quad \Rightarrow \quad |\, \lambda \,| > 1$$

8. Si

$$\arg z = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{y} \qquad \arg w = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi \qquad\qquad (k, m \in \mathbb{Z})$$

   a) ¿sobre qué semirrecta debería ubicar al complejo zw?
   b) ¿sobre qué semirrecta debería ubicar al complejo $\dfrac{1}{z}$?
   c) ¿sobre qué semirrecta debería ubicar al complejo $\dfrac{z}{w}$?
   d) ¿sobre qué semirrecta debería ubicar al complejo $-z$?
   e) ¿le alcanza la información para calcular

$$\arg(zw) \quad , \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \quad , \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right)?$$

   f) halle el valor del argumento de zw que está en el intervalo $[0, 2\pi]$
   g) halle el valor del argumento de $\dfrac{1}{z}$ que está en el intervalo $(-\pi, \pi)$.
9. Halle todos los $z \in \mathbb{C}$ que cumplen las condiciones dadas
   a) $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi \quad$ y $\quad e^z = i$
   b) $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi \quad$ y $\quad e^z = 1 - i$
10. Sean $a, b, x \in \mathbb{R}$. Para que la afirmación

$$ax = bx \quad \Rightarrow \quad a = b$$

sea válida, ¿hace falta agregar alguna hipótesis? Si es así, ¿cuál? Utilice elementos provistos por la Práctica 0 para justificar su respuesta.

11. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. ¿Hace falta agregar alguna hipótesis para que la afirmación

$$a\,\mathrm{X} = b\,\mathrm{X} \quad \Rightarrow \quad a = b$$

sea válida? Explique el por qué de su respuesta.

12. Halle todas las raíces de $P = \mathrm{X}^6 - 16\,\mathrm{X}^2 + \frac{1}{3}\,\mathrm{X}^5 - \frac{16}{3}\,\mathrm{X}$.

13. Halle todas las raíces de $P = 2\,\mathrm{X}^5 - 18\,\mathrm{X} + \mathrm{X}^4 - 9$ sabiendo que $-\sqrt{3}\,i$ es raíz.

    Factorícelo en $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ y $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

14. Sean C y R, respectivamente, el cociente y el resto de la división del polinomio P por el polinomio Q. Si $C = S\,T$, analice si le alcanza la información para hallar cociente y resto de la división del P por

    a) QS

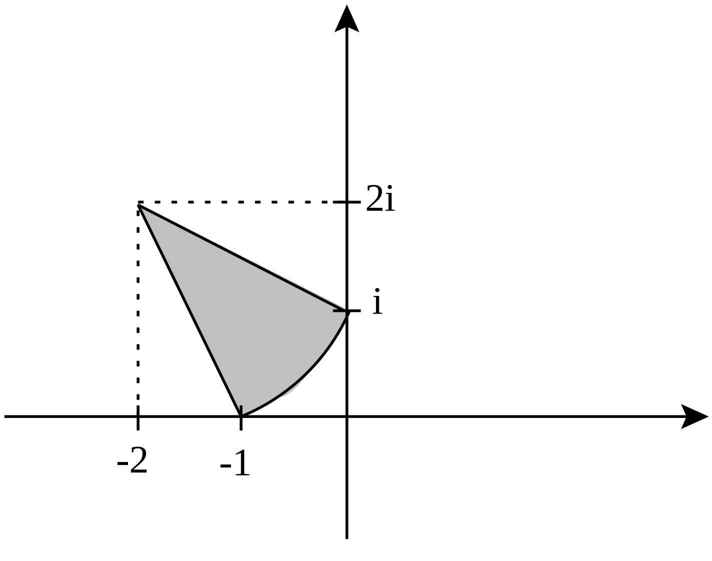
    b) QT

    c) C

15. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \pi\}$. Halle todos los $z \in A$ tales que

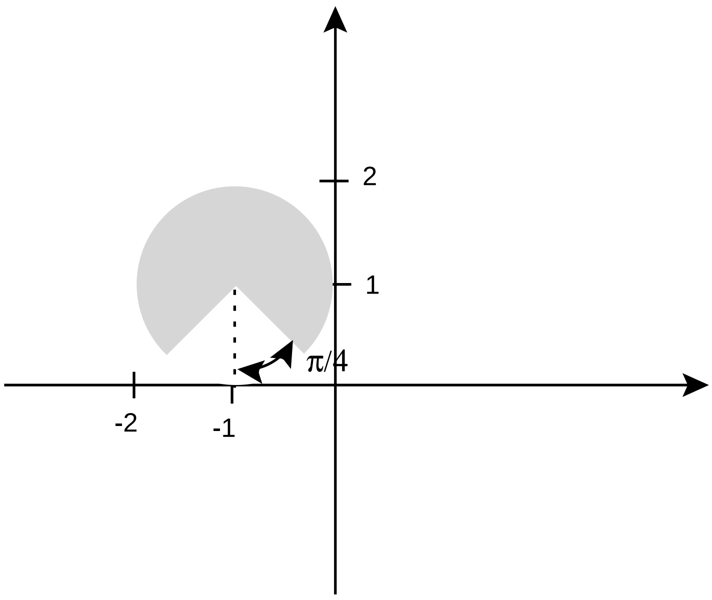
$$e^z = -3i$$

16. Halle un conjunto de inecuaciones que describan al siguiente conjunto del plano complejo

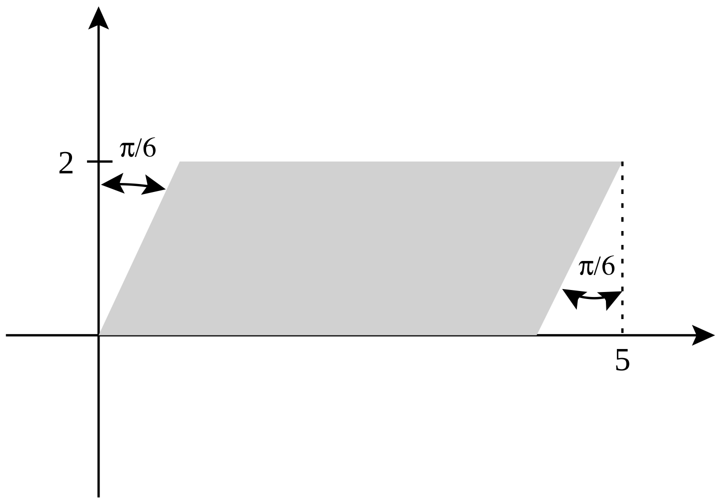


17. Exhiba un polinomio para el que $1 + i$ sea raíz pero no ocurra lo mismo con $1 - i$.

18. Dé un conjunto de ecuaciones o inecuaciones, según corresponda, que represente al siguiente subconjunto del plano complejo



19. Dé un conjunto de ecuaciones o inecuaciones, según corresponda, que represente al siguiente subconjunto del plano complejo



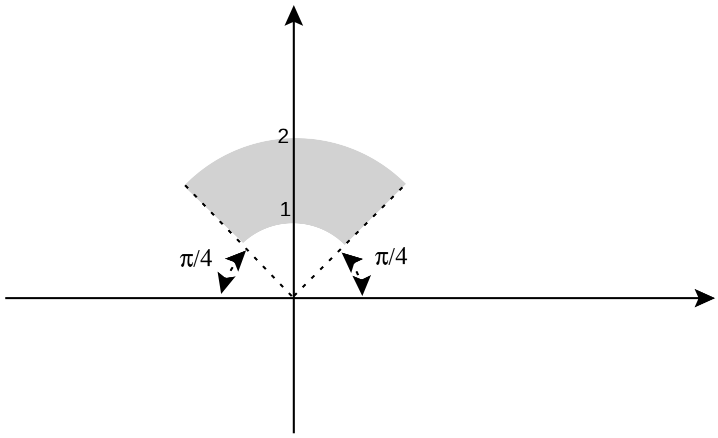
20. Se sabe que -1 y 2 son las únicas raíces reales del polinomio $P = X^4 - X^3 - X^2 - X - 2$.

    a) ¿Es cierto que $P \neq 0$?

    b) Encuentre todos los números reales x tales que $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0$.

    c) Explique por qué no tiiene sentido escribir: $X^4 - X^3 - X^2 - X - 2 = 0$.

21. Dé un conjunto de ecuaciones o inecuaciones, según corresponda, que represente al siguiente subconjunto del plano complejo



22. Imponga una hipótesis que asegure que sea válida la siguiente afirmación referida a números reales

$$a > 1 \quad \Rightarrow \quad ab > b$$

y compruebe su validez.

23. Dado $z = 2\left(\cos(4\frac{\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(4\frac{\pi}{3})\right)$, ubique en un esquema gráfico a los siguientes números

$$z \quad , \quad \frac{1}{\bar{z}} \quad , \quad -z^2 \quad , \quad \bar{z} \quad , \quad ze^{\ln 5 + i\pi/2}$$

24. Encuentre todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^{2z} = 3 - 4i$ y averigüe cuáles de ellos satisfacen $\mathrm{Im}\, z \in (-\pi, \pi)$.

25. Se define la función $f : [-2, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = |\, x + 1 \,|$.

    (a) Calcule: $\mathrm{dom}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{gráf}\, f$

    (b) Represente gráficamente el conjunto $\mathrm{gráf}\, f$

    (c) Analice si es inyectiva y si es suryectiva

    (d) Halle un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que $f : A \longrightarrow [0, 1]$ sea biyectiva.

26. Haga un esquema gráfico que represente al conjunto A determinado por las condiciones

$$A : \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg(z - 1) \leqslant \frac{\pi}{4} \\ 2\frac{\pi}{3} \leqslant \arg(z - 4 - 2i) \leqslant 7\frac{\pi}{6} \\ |2z - 4 + 2i| < 4 \end{cases}$$

27. Se sabe que $\sqrt{5}$ es raíz del polinomio $P = 4\,\mathrm{X}^6 - 8\,\mathrm{X}^5 - 7\,\mathrm{X}^4 + 22\,\mathrm{X}^3 - 56\,\mathrm{X}^2 + 90\,\mathrm{X} - 45$ que tiene también una raíz entera doble

    a) determine si P es divisible por $\mathrm{X}^2 - 5$

    b) utilice un resultado que le pueda decir cuál es esa raíz entera de P

    c) factorice a P en $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ y $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

d) plantee la descomposición en fracciones simples de la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{4x^6 - 8x^5 - 7x^4 + 22x^3 - 56x^2 + 90x - 45}$$

28. Dado $z = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{3})\right)$, ubique en un esquema gráfico a los siguientes números

$$z \quad , \quad \frac{1}{z} \quad , \quad -z^2 \quad , \quad \bar{z} \quad , \quad z^3$$

29. Se sabe que 1 y 2 son raíces simples de P

a) muestre que existe un polinomio S tal que $P = (\mathrm{X}-1)S$ y calcule $S(2)$

b) determine si es cierto que existe un polinomio C tal que $P = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)C$

30. Encuentre todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^{3z} = -4 + 3i$ y averigüe cuáles de ellos satisfacen $\mathrm{Im}\, z \in (0, 2\pi)$.

31. Analice si se le puede dar sentido a las siguientes igualdades

a) $2\,\mathrm{X}^2 + 3\,\mathrm{X} - 1 = \mathrm{X}^2 + 2\,\mathrm{X} - 1$

b) $2x^2 + 4x - 1 = x^2 + 2x - 1$

32. Haga un esquema gráfico que represente al conjunto A determinado por las condiciones

$$A : \begin{cases} 4\frac{\pi}{3} \leqslant \arg(z + 1 - 3i) \leqslant 13\frac{\pi}{6} \\ -3\frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z - 1 - i) \leqslant 2\frac{\pi}{3} \\ |2z + 1 - i| > 1 \end{cases}$$

33. Se sabe que $\sqrt{3}$ es raíz del polinomio $P = 9\,\mathrm{X}^6 + 18\,\mathrm{X}^5 - 14\,\mathrm{X}^4 - 46\,\mathrm{X}^3 - 35\,\mathrm{X}^2 - 24\,\mathrm{X} - 12$ que tiene también una raíz entera doble

a) determine si P es divisible por $\mathrm{X}^2 - 3$

b) utilice un resultado que le pueda decir cuál es esa raíz entera de P

c) factorice a P en $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$, $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ y $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

d) plantee la descomposición en fracciones simples de la función

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{9x^6 + 18x^5 - 14x^4 - 46x^3 - 35x^2 - 24x - 12}$$

34. Dado $z = 2\left(\cos(5\frac{\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(5\frac{\pi}{3})\right)$, ubique en un esquema gráfico a los siguientes números

$$z \quad , \quad -\frac{1}{z} \quad , \quad \tfrac{1}{2}z \quad , \quad \bar{z} \quad , \quad \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, i\right) z$$

35. El número a es raíz simple de los polinomios P y Q. ¿Es cierto que

a) a es raíz de $P + Q$?

b) a es raíz simple de $P + Q$?

36. Encuentre todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^{2z} = 4 - 3i$ y averigüe si alguno de ellos satisface $\operatorname{Im} z \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$.

37. Se sabe que $\sqrt{2}$ es raíz del polinomio $P = 9\,X^6 - 18\,X^5 - 8\,X^4 + 34\,X^3 - 19\,X^2 + 4\,X - 2$ que tiene también una raíz entera doble

a) determine si P es divisible por $X^2 - 2$

b) utilice un resultado que le pueda decir cuál es esa raíz entera de P

c) factorice a P en $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

d) plantee la descomposición en fracciones simples de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{9x^6 - 18x^5 - 8x^4 + 34x^3 - 19x^2 + 4x - 2}$$

38. Dado $z = 2\left(\cos(7\frac{\pi}{6}) + i\,\text{sen}(7\frac{\pi}{6})\right)$, ubique en un esquema gráfico a los siguientes números

$$-2z \quad , \quad \frac{1}{z} \quad , \quad ze^{i\pi} \quad , \quad \bar{z} \quad , \quad iz^2$$

39. ¿Es cierto que si el número b es raíz doble de PQ entonces es raíz doble de alguno de los dos polinomios?

40. Haga un esquema gráfico que represente al conjunto A determinado por las condiciones

$$A : \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{3} \leqslant \arg(z - 2i) \leqslant 4\frac{\pi}{3} \\ 2\frac{\pi}{3} \leqslant \arg(z + 2i) \leqslant 7\frac{\pi}{3} \\ |z| \leqslant 3 \end{cases}$$

41. Halle todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las siguientes condiciones y represéntelos gráficamente

$$(z - 2 + i)^3 = 8i \qquad \text{y} -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}$$

42. Se sabe que $3 - 4i$ y -2 son raíces de $P \in \mathbb{R}[X]$. Halle un polinomio $Q \in \mathbb{R}[X]$ de grado 3 que divida a P.

43. Haga un gráfico aproximado de la región de $\mathbb{C}$ dada por las siguientes condiciones

$$0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{3} \qquad , \qquad 2\frac{\pi}{3} \leqslant \arg(z - 2 - 2i) \leqslant 3\frac{\pi}{2}$$

44. Halle todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$z^2 - 2z + 2iz - 6i = 0$$

y represéntelos gráficamente.

45. Haga un esquema gráfico del conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las siguientes condiciones

$$\frac{5\pi}{4} \leqslant \arg(z-1-i) \leqslant \frac{3\pi}{2} \quad , \quad \frac{3\pi}{2} \leqslant \arg(z+1-i) \leqslant \frac{7\pi}{4} \quad , \quad |z| \leqslant \sqrt{2}$$

46. Sean

$$Q = \mathrm{X}^5 + 15\,\mathrm{X}^4 + 20\,\mathrm{X}^3 + 100\,\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 73 \quad , \quad R = \mathrm{X}^2 - 4 \quad , \quad P = (\mathrm{X}^2 + \mathrm{X})Q + R$$

¿Se puede asegurar que R es el resto de la división de P por

a) Q?

b) $\mathrm{X}^2 + 2\,\mathrm{X}$?

De ser cierto, indique cuál es el cociente. De ser falso halle cociente y resto.

NOTA: no necesita hacer cuentas largas ni complicadas.