COMPLEMENTO DE LA PRÁCTICA 1

INDICE

1. a) En cada una de las siguientes expresiones aplique la compleción de cuadrados

      (i) $x^2 + 4x + 7$

      (ii) $t^2 - 5t$

      (iii) $3x^2 - 12x - 3$

      (iv) $\text{sen}^2\theta - 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 1$

   b) Sean $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$. Compruebe que $u^2 + v^2 = w^2$ para algún $w \in \mathbb{R}$.

   c) Utilice uno de los cálculos anteriores para hallar las intersecciones entre la parábola $y = 3x^2 - 12x - 3$ y el eje x.

   d) Utilice uno de los resultados obtenidos para mostrar que

$$\text{sen}^2\theta - 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 1 > 0$$

   para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Inciso a)

(i)

$$x^2 + 4x + 7 = x^2 + 2.2x + 7 = (x+2)^2 - 4 + 7 = (x+2)^2 + 3$$

(ii)

$$t^2 - 5t = t^2 - 2\tfrac{5}{2}t = (t - \tfrac{5}{2})^2 - (\tfrac{5}{2})^2 = (t - \tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{25}{4}$$

(iii)

$$3x^2 - 12x - 3 = 3[x^2 - 4x] - 3 = 3[(x-2)^2 - 4] - 3 = 3(x-2)^2 - 15$$

(iv)

$$\begin{aligned}\text{sen}^2\theta - 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 1 &= \text{sen}^2\theta - 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta \\ &= \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta - 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + \text{sen}^2\theta \\ &= [\cos\theta - \text{sen}\,\theta]^2 + \text{sen}^2\theta\end{aligned}$$

Inciso b)

$$\begin{aligned}u^2 + v^2 &= (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2\end{aligned}$$

Entonces,

$$u^2 + v^2 = w^2 \qquad \text{con} \qquad w = x^2 + y^2$$

Inciso c)

Utilizando el resultado obtenido en el inciso a)-(iii) la ecuación de la parábola es

$$y = 3(x-2)^2 - 15$$

La intersección entre la parábola y el eje x está dada por

$$y = 3(x-2)^2 - 15 \qquad \text{e} \qquad y = 0$$

o sea,

$$3(x-2)^2 - 15 = 0 \qquad \text{e} \qquad y = 0$$

que equivale a

$$(x-2)^2 = 5 \qquad \text{e} \qquad y = 0$$

i.e.,

$$|x-2| = \sqrt{5} \qquad \text{e} \qquad y = 0$$

Por lo tanto los puntos de intersección son

$$(2-\sqrt{5}, 0) \qquad \text{y} \qquad (2+\sqrt{5}, 0)$$

Inciso d)

A partir del resultado obtenido en el inciso a)-(iv)

$$\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 1 = [\cos\theta - \operatorname{sen}\theta]^2 + \operatorname{sen}^2\theta \geqslant 0$$

Sólo nos resta entonces ver que no puede ser cero. Supongamos, razonando por el absurdo, que existe algún θ para el cual

$$[\cos\theta - \operatorname{sen}\theta]^2 + \operatorname{sen}^2\theta = 0$$

Siendo cada sumando mayor o igual que cero, esto implica que cada uno de ellos debe ser cero

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = 0$$

pero esto es decir

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi & \text{para algún } k \in \mathbb{Z} \\ m\pi & \text{para algún } m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

lo que es imposible. Luego,

$$\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 1 > 0$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

2. Escriba el número complejo $z = -2 - 3i$ en forma trigonométrica

Se trata de escribir a z en la forma

$$z = |z|(\cos \arg z + i \operatorname{sen} \arg z)$$

Por tanto, sólo necesitamos hallar

$$|-2-3i| \qquad , \qquad \arg(-2-3i)$$

◆ Cálculo del módulo

$$|-2-3i| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

es decir,

$$|-2-3i| = \sqrt{13}$$

Con esto ya podemos decir que,

$$-2-3i = \sqrt{13}(\cos \arg z + i \operatorname{sen} \arg z) = \sqrt{13}\ \cos \arg z\ +\ i\sqrt{13}\ \operatorname{sen} \arg z$$

◆ Cálculo del argumento

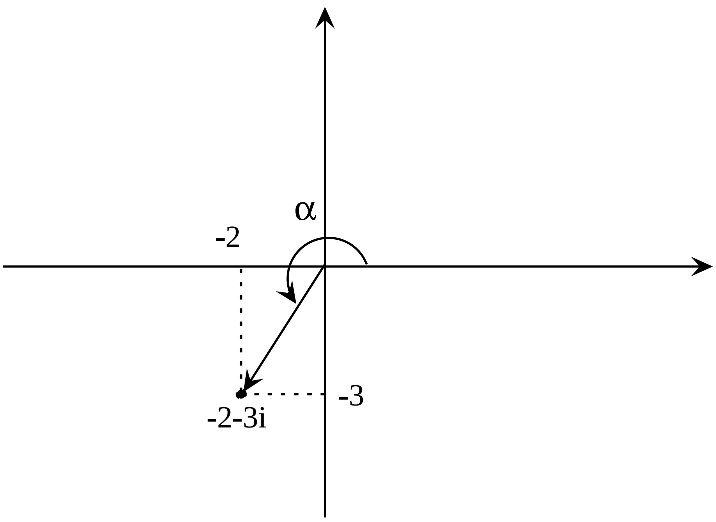
Igualando las partes reales y las partes imaginarias de ambos números,

$$\sqrt{13}\ \cos \arg z = -2 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{13}\ \operatorname{sen} \arg z = -3$$

entonces,

$$\cos \arg z = \frac{-2}{\sqrt{13}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} \arg z = \frac{-3}{\sqrt{13}}$$

Para entender mejor la situación es conveniente hacer un esquema gráfico



NOTA: α denota el valor del argumento de z que se encuentra entre 0 y 2π

Como z está en el tercer cuadrante, los valores

$$\operatorname{arcsen}(\tfrac{-3}{\sqrt{13}}) \quad \text{y} \quad \arccos(\tfrac{-2}{\sqrt{13}})$$

no pueden representar ningún valor de $\arg z$ dado que

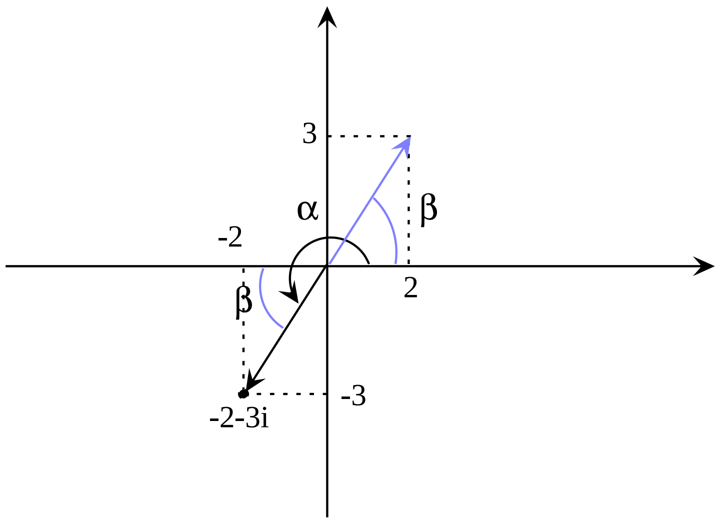
$$\operatorname{arcsen} t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \qquad \text{y} \qquad \arccos t \in [0, \pi]$$

cualquiera sea t entre -1 y 1; con lo cual

➢ $\operatorname{arcsen} t$ sólo puede ser argumento de puntos en el primero o cuarto cuadrante (nunca del tercero)

➢ $\arccos t$ sólo puede ser argumento de puntos en el primero o segundo cuadrante (nunca del tercero)

Miremos el siguiente gráfico,



$$\alpha = \pi + \beta$$

El seno y coseno de α y β satisfacen

$$\cos\beta = -\cos\alpha \qquad , \qquad \operatorname{sen}\beta = -\operatorname{sen}\alpha$$

por lo tanto,

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

y como $0 \leqslant \beta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ ahora sí podemos decir que

$$\beta = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$$

y por supuesto también que

$$\beta = \operatorname{arcsen}\frac{3}{\sqrt{13}}$$

Finalmente, recordando que

$$\alpha = \pi + \beta$$

obtenemos:

$$\alpha = \pi + \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$$ [1]

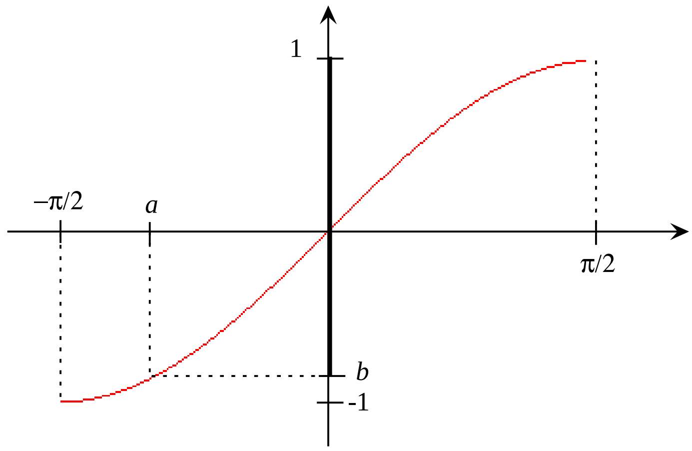
[1] por supuesto también podríamos haber dicho que $\alpha = \pi + \operatorname{arcsen}\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

Y entonces,

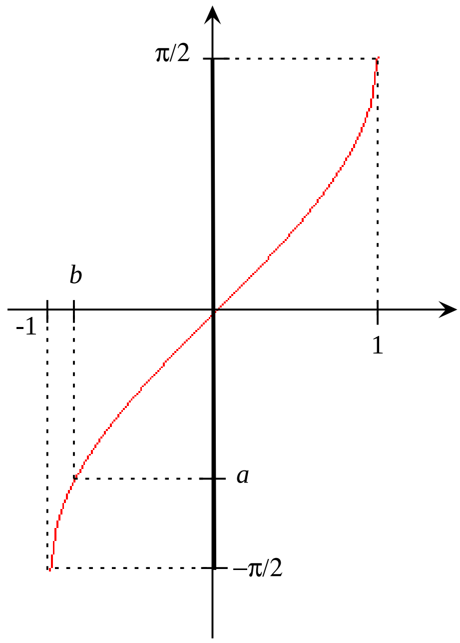
$$-2-3i = \sqrt{13}\,\left(\cos(\pi+\arccos\tfrac{2}{\sqrt{13}}) + i\,\mathrm{sen}(\pi+\arccos\tfrac{2}{\sqrt{13}})\right)$$

Apéndice

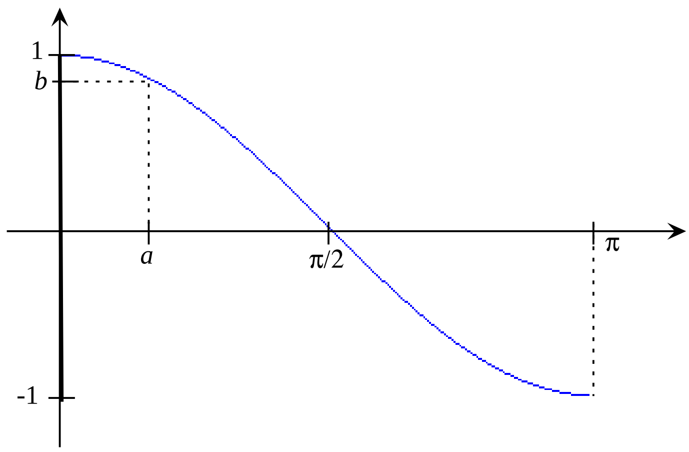
Es importante tener siempre presente la siguiente información sobre las funciones sen , cos y tan y sus inversas arcsen , arccos y arctan



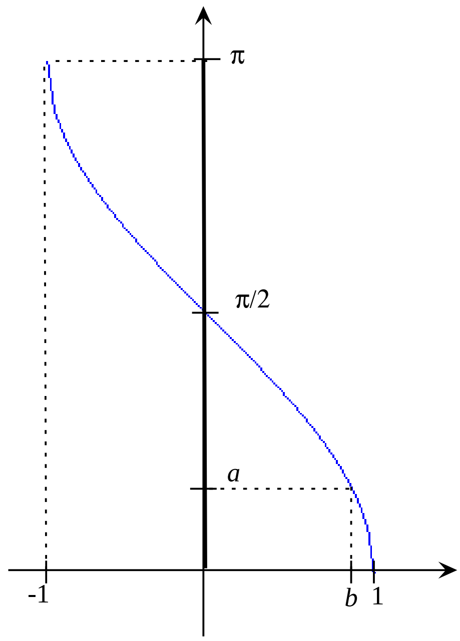
sen(a) = b



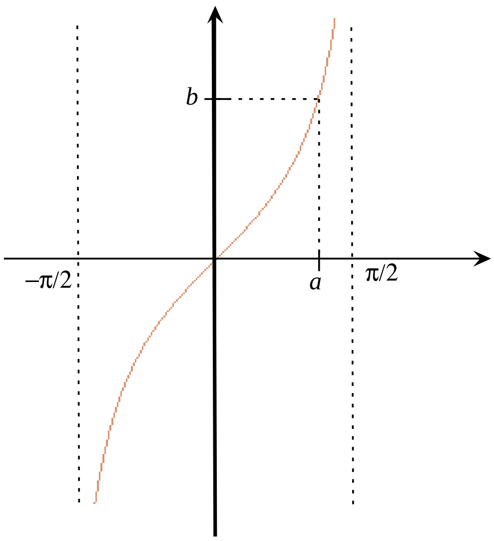
arcsen(b) = a



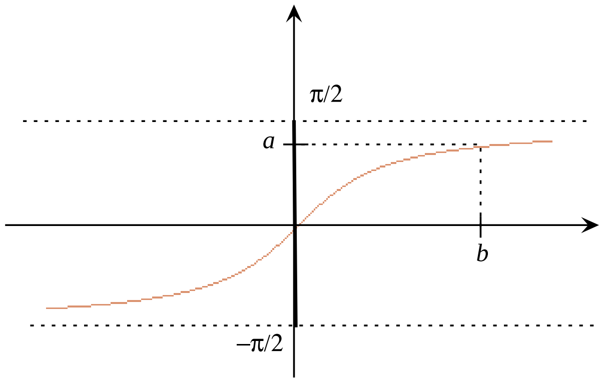
cos(a) = b



arccos(b) = a



tan(a) = b



arctan(b) = a

3. Halle un valor del argumento de $z = -2-3i$ que esté entre -3π y $-\pi$

Teniendo en cuenta que en el ejercicio anterior calculamos

$$|-2-3i| = \sqrt{13} \qquad \text{y} \qquad \arg(-2-3i) = \pi + \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

se trata ahora de encontrar el valor [2] de k que haga que

$$-3\pi \leqslant \pi + \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} + 2k\pi < -\pi$$

sumamos miembro a miembro $-\pi - \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$

$$-3\pi - \pi - \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} \leqslant 2k\pi < -\pi - \pi - \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$$

es decir,

$$-4\pi - \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} \leqslant 2k\pi < -2\pi - \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$$

recordando que el arccocoseno toma valores entre 0 y π, tenemos

$$0 \leqslant \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} \leqslant \pi$$

y por lo tanto,

$$-\pi \leqslant -\arccos\frac{2}{\sqrt{13}} \leqslant 0$$

Resulta así que

$$-5\pi \leqslant -4\pi - \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} \leqslant 2k\pi < -2\pi - \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} \leqslant -2\pi$$

[2] ¿puede haber más de uno?

y por consiguiente

$$-5\pi \leqslant 2k\pi < -2\pi$$

multiplicando miembro a miembro por el número *positivo* $\dfrac{1}{2\pi}$

$$-\frac{5}{2} \leqslant k < -1$$

y como el único entero que es mayor que $-\dfrac{5}{2}$ y menor que -1 es -2, debe ser

$$k = -2$$

y entonces el valor de $\arg(-2-3i)$ que está entre -3π y $-\pi$ es

$$\pi + \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} + 2k\pi = \pi + \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} - 4\pi = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} - 3\pi$$

En consecuencia, la respuesta a este ejercicio es

$$|-2-3i| = \sqrt{13} \qquad , \qquad \arg(-2-3i) = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} - 3\pi$$

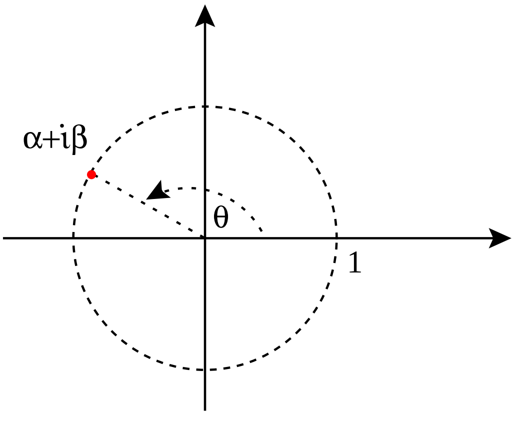
APÉNDICE

Dado $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ *tal que* $|\alpha + i\beta| = 1$, *el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} \cos t = \alpha \\ \operatorname{sen} t = \beta \end{cases}$$

tiene solución única si consideramos que t toma valores exclusivamente en un intervalo de longitud 2π.

Digamos que $[a, a+2\pi)$ es el intervalo de longitud 2π donde está t y llamemos θ al ángulo que forma $\alpha + i\beta$ —que está sobre la circunferencia unitaria— con el semieje real positivo. La siguiente figura ilustra la situación



Entonces podemos escribir (dado que $|\alpha + i\beta| = 1$)

$$\alpha = \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \beta = \operatorname{sen}\theta$$

con lo cual

$$\begin{cases} \cos t = \cos\theta \\ \operatorname{sen} t = \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

pero

$$\cos t = \cos\theta \iff t = \theta + 2k\pi \qquad , \qquad \operatorname{sen} t = \operatorname{sen}\theta \iff t = \theta + 2m\pi$$

para ciertos enteros k y m. Claramente $k = m$ y entonces tenemos que t debe cumplir

$$t = \theta + 2k\pi \qquad \text{y} \qquad a \leqslant t < a + 2\pi$$

es decir,

$$a \leqslant \theta + 2k\pi < a + 2\pi$$

sumando $-\theta$ miembro a miembro y luego multiplicando por el número *positivo* $\frac{1}{2\pi}$ llegamos a que

$$\frac{a-\theta}{2\pi} \leqslant k < \frac{a-\theta}{2\pi} + 1$$

y como en cualquier intervalo de longitud 1 (uno de cuyos extremos no está incluido) no puede haber más de un número entero, resulta que k es único y en consecuencia también lo es t, como afirmamos.

4. Escriba

$$(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)$$

en la forma $\cos\gamma + i\operatorname{sen}\gamma$ e interprete el valor de α, β y γ.

Es importante recordar las siguientes identidades trigonométricas

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$
$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x$$

Efectuamos entonces el producto de los números complejos

$$z = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha \qquad , \qquad w = \cos\beta + i\operatorname{sen}\beta$$

Usando la definición de este producto,

$$\begin{aligned} zw &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \ + \ i\,(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha) \\ &= \cos(\alpha+\beta) \ + \ i\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

es decir,

$$(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta) = \cos(\alpha+\beta) \ + \ i\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$

Interpretación:

notemos que

$$|z| = 1 \quad , \quad |w| = 1 \quad , \quad |zw| = 1$$

Entonces, al escribir

$$z = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad , \qquad w = \cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta \qquad , \qquad zw = \cos(\alpha+\beta) \;+\; i\;\, \mathrm{sen}(\alpha+\beta)$$

estamos dando sus respectivas formas trigonométricas; con lo cual,

- ❖ α es un valor del argumento de z
- ❖ β es un valor del argumento de w
- ❖ $\alpha+\beta$ es un valor del argumento de zw

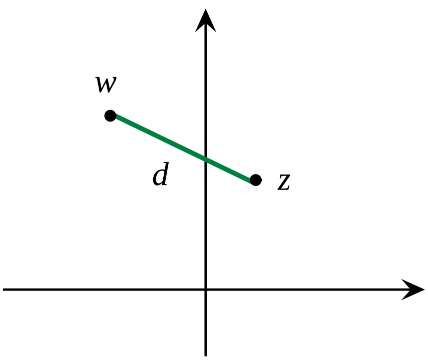
Conclusión:

la suma de los argumentos es un valor del argumento del producto.

5. Muestre que la distancia entre dos puntos z y w del plano complejo está dada por

$$|\, z - w \,|$$

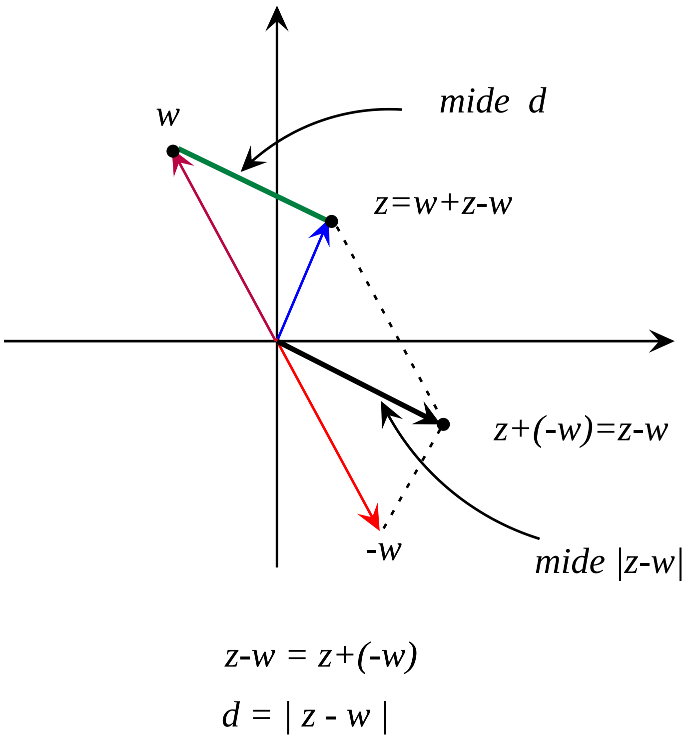
La distancia entre z y w está dada por la longitud del segmento que los une. Miremos el siguiente gráfico,



Debemos probar entonces que

$$d = |z - w|$$

Recordemos que $z-w = z+(-w)$ y hagamos un esquema gráfico de la situación representando los vectores z , w , $-w$ y $z - w = z + (-w)$



Como la suma la definimos a partir de la regla del paralelogramo resulta que el vector $z - w$ mide lo mismo que el segmento que une z con w; por consiguiente,

$$d = |z - w|$$

como debíamos probar.

Una vez comprobado esto nos podemos plantear: ¿qué mide $|z + w|$? ¿Es también una distancia? ¿Entre qué puntos?

6. En cada caso, encuentre todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las condiciones dadas

   a) $z^3 = i$

   b) $(z - 1 + 2i)^3 = i$

   c) $(z - 1 + 2i)^5 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

Inciso a)

La idea será trabajar con la forma trigonométrica dado que la fórmula de De Moivre nos facilita el cálculo de la parte real e imaginaria de una potencia.

◆ Cálculo del módulo de los z que buscamos

Como

$$z^3 = i$$

debe ser

$$|z|^3 = |i| = 1$$

es decir, todos los z que satisfacen la condición tienen

$$|z| = 1$$

◆ Cálculo de los argumentos de los z que buscamos

Como ya sabemos que z tiene módulo 1, se escribe en la forma

$$z = \cos \arg z + i \operatorname{sen} \arg z$$

elevamos al cubo y aplicamos De Moivre y nos queda

$$\cos(3 \arg z) + i \operatorname{sen}(3 \arg z) = i$$

esto equivale a

$$\begin{cases} \cos(3 \arg z) = 0 \\ \operatorname{sen}(3 \arg z) = 1 \end{cases}$$

Como cada vez que $\operatorname{sen} x = 1$ resulta $\cos x = 0$, las dos condiciones anteriores son equivalentes a

$$\operatorname{sen}(3 \arg z) = 1$$

o sea,

$$3 \arg z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

con lo cual, los z que satisfacen $z^3 = i$ son los de la forma

$$z = \cos \arg z + i \operatorname{sen} \arg z \qquad \text{con} \qquad \arg z = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Dejándolos expresados de esta forma alguien podría pensar que son infinitos, tantos como $k \in \mathbb{Z}$. Pero esto no es cierto, hay sólo tres (distintos) a pesar de que k pueda tomar todos los valores enteros [3].

Para ver esto, recordando que seno y coseno son 2π−periódicas, vamos a escribir $\frac{2k\pi}{3}$ en la forma

$$\frac{2k\pi}{3} = \frac{2r\pi}{3} + 2q\pi \qquad (r = 0, 1, 2\ ,\ q \in \mathbb{Z})$$

Para hacer esto nos va ser útil el algoritmo de división: dados los enteros k y 3 sabemos que existen únicos enteros q y r tales que

$$k = 3q + r \qquad \text{con} \qquad 0 \leqslant r < 3$$

[3]Es consecuencia de la periodicidad del seno y el coseno

entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3} &= \frac{\pi}{6}+\frac{2(3q+r)\pi}{3} = \frac{\pi}{6}+\frac{6q\pi+2r\pi}{3}\\ &= \frac{\pi}{6}+\frac{2r\pi}{3}+2q\pi\end{aligned}$$

entonces,

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2r\pi}{3}+2q\pi\right) \underset{\text{es } 2\pi-\text{periódica}}{\underset{\uparrow}{=}} \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2r\pi}{3}\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2r\pi}{3}+2q\pi\right) \underset{\text{es } 2\pi-\text{periódica}}{\underset{\uparrow}{=}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2r\pi}{3}\right)$$

y entonces,

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2r\pi}{3}\right) + i\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2r\pi}{3}\right)$$

lo que da exactamente 3 valores distintos dado que $r = 0, 1, 2$.

Llegamos así a que hay exactamente tres complejos z que satisfacen $z^3 = i$ y son

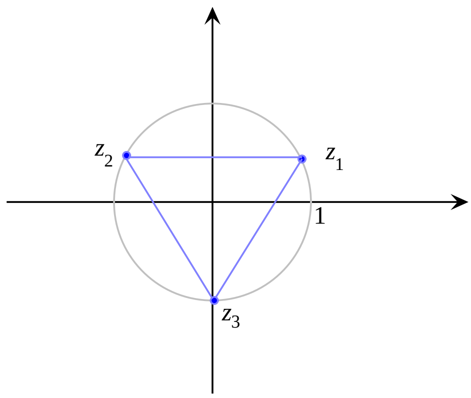
$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad , \quad z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)$$

y

$$z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)$$

o sea,

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \quad , \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \quad , \quad z_3 = -i$$



son los vértices de un triángulo equilátero inscripto en la circunferencia unitaria

Inciso b)

Notemos que z satisface $(z-1+2i)^3 = i$ si y sólo si $w = z-1+2i$ satisface $w^3 = i$. Pero en el inciso anterior encontramos que hay exactamente tres complejos que cumplen la última ecuación,

$$w_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \quad , \quad w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \quad , \quad w_3 = -i$$

por lo tanto, los z que satisfacen $(z-1+2i)^3 = i$ serán

$$z_1 = w_1 + 1 - 2i \quad , \quad z_2 = w_2 + 1 - 2i \quad , \quad z_3 = w_3 + 1 - 2i$$

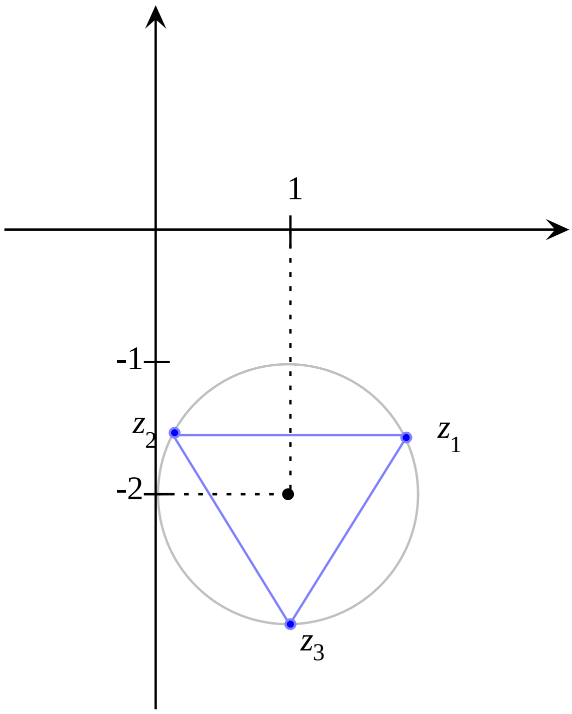
Es decir,

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{3}{2}\,i \quad , \quad z_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i \quad , \quad z_3 = 1 - 3i$$

Teniendo en cuenta lo hecho en el inciso anterior y que

$$z_j - w_j = 1 - 2i \qquad (j = 1, 2, 3)$$

podemos decir que los z que satisfacen $(z-1+2i)^3 = i$ son también vértices de un triángulo equilátero, ahora inscripto en la circunferencia de radio 1 pero con centro en $1 - 2i$



Inciso c)

Siguiendo el razonamiento del inciso anterior, vamos a encontrar primero todos los $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen,

$$w^5 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

para concluir finalmente que los z buscados serán

$$z = w + 1 - 2i \qquad \text{(siendo } w \text{ cada uno de los anteriores)}$$

◆ Calculamos el módulo de w

$$|w|^5 = |\sqrt{2} + i\sqrt{2}| = \sqrt{2+2} = 2$$

por lo tanto, todos los w que buscamos tienen

$$|w| = \sqrt[5]{2}$$

◆ Calculamos los argumentos de los w que buscamos

Como ya conocemos el módulo, podemos escribir

$$w = \sqrt[5]{2}(\cos \arg w + i \operatorname{sen} \arg w)$$

elevando a la quinta y recordando De Moivre,

$$w^5 = 2(\cos 5 \arg w + i \operatorname{sen} 5 \arg w)$$

tenemos entonces

$$2(\cos 5 \arg w + i \operatorname{sen} 5 \arg w) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

pero

$$\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

por lo tanto, la condición sobre $\arg w$ es

$$2(\cos 5 \arg w + i \operatorname{sen} 5 \arg w) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

es decir,

$$\begin{cases} \cos 5 \arg w = \cos \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen} 5 \arg w = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

lo cual, teniendo en cuenta la periodicidad del seno y del coseno, equivale a decir

$$5 \arg w = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

o sea,

$$\arg w = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Y ahora, para comprobar que a pesar de haber *infinitos* valores de k, sólo hay *finitos* w que son solución, procedemos como en el inciso a); i.e., aplicamos el algoritmo de división para dividir a k por 5

$$k = 5q + r \qquad \text{(para únicos enteros } q \text{ y } 0 \leqslant r < 5)$$

con lo cual

$$2k\pi = 2(5q + r)\pi = 2r\pi + 2.5q\pi \qquad \text{(para únicos enteros } q \text{ y } 0 \leqslant r < 5)$$

y entonces

$$\frac{2k\pi}{5} = \frac{2r\pi}{5} + 2q\pi \qquad \text{(para únicos enteros } q \text{ y } 0 \leqslant r < 5)$$

Finalmente, como

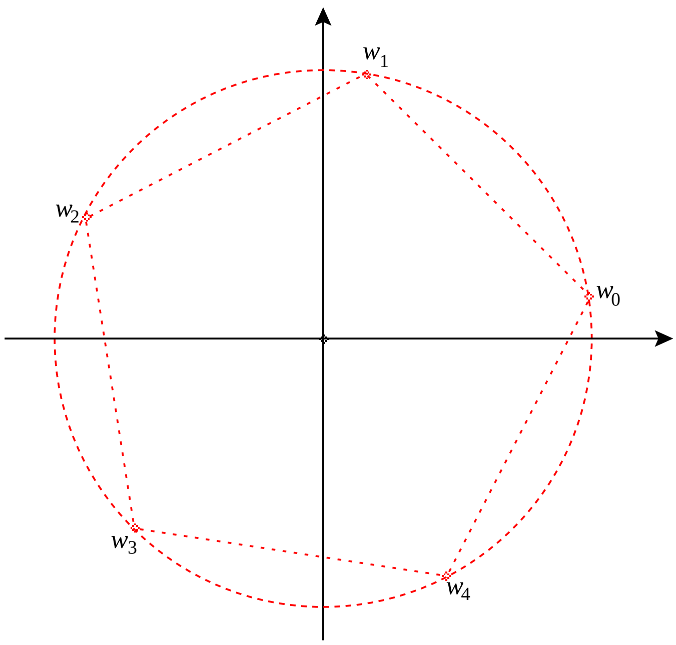
$$\cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2r\pi}{5} + 2q\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2r\pi}{5}\right)$$

y

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2r\pi}{5} + 2q\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2r\pi}{5}\right)$$

llegamos a que hay exactamente 5 complejos w que satisfacen $w^5 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ y son

$$w_r = \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2r\pi}{5}\right) + i \ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2r\pi}{5}\right)\right) \qquad (r = 0, 1, 2, 3, 4)$$

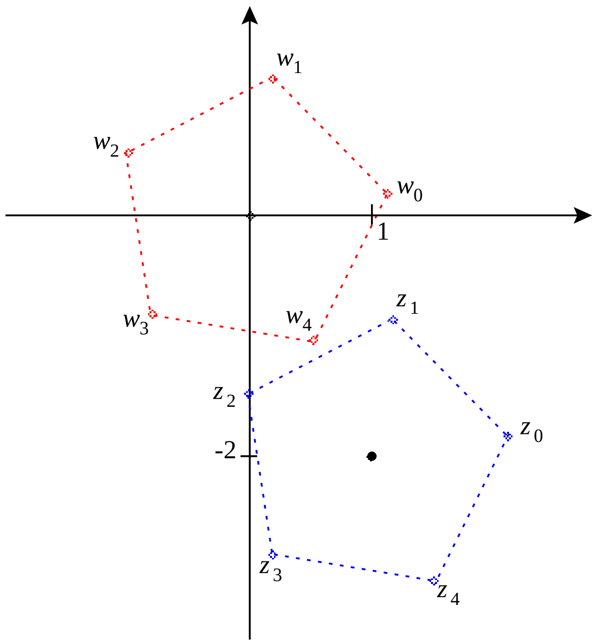


Resulta entonces que hay exactamente 5 complejos z que satisfacen

$$(z - 1 + 2i)^5 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

y son

$$z_r = \sqrt[5]{2}\cos\frac{(8r+1)\pi}{20} + 1 \; + \; i\left[\sqrt[5]{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{(8r+1)\pi}{20} - 2\right] \qquad (r = 0, 1, 2, 3, 4)$$



Apéndice

Raíces n−ésimas de la unidad

Llamamos así a los complejos z que satisfacen

$$z^n = 1 \qquad (n \in \mathbb{N} \text{ fijo})$$

Después de lo hecho recién, esto nos va a resultar mucho más simple. Comenzamos por calcular el módulo de tales z. Debe ser

$$|z|^n = 1$$

es decir, todos estos z están sobre la circunferencia unitaria. Lo único que nos falta determinar es su argumento. Para ello escribimos a z en forma trigonométrica

$$z = \cos\arg z + i\,\mathrm{sen}\arg z$$

elevamos a la n y usamos De Moivre,

$$z^n = \cos n\arg z + i\,\mathrm{sen}\, n\arg z$$

entonces, como z^n debe ser 1,

$$\cos n\arg z + i\,\mathrm{sen}\, n\arg z = 1$$

es decir,

$$\begin{cases} \cos n \arg z = 1 \\ \operatorname{sen} n \arg z = 0 \end{cases}$$

y siendo que cada vez que el coseno vale 1, el seno se anula, esto equivale a

$$\cos n \arg z = 1$$

o sea,

$$n \arg z = 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

y por consiguiente los valores de $\arg z$ que buscamos son

$$\arg z = \frac{2k\pi}{n} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

para determinar cuántos z *realmente* hay usamos el algoritmo de división para dividir al entero k por el natural n

$$k = nq + r \qquad \text{(para únicos enteros } q \text{ y } 0 \leqslant r < n)$$

con lo cual,

$$\frac{2k\pi}{n} = \frac{2nq\pi + 2r\pi}{n} = \frac{2r\pi}{n} + 2q\pi \qquad \text{(para únicos enteros } q \text{ y } 0 \leqslant r < n)$$

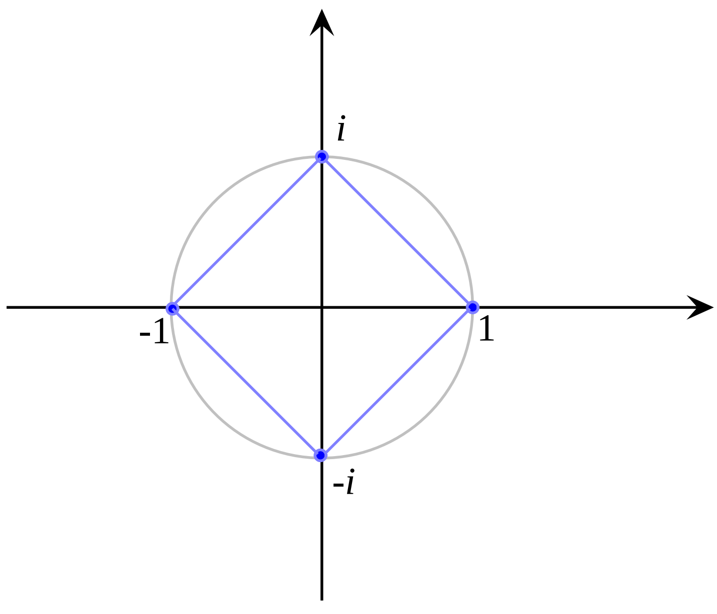
y dada la periodicidad del seno y del coseno vemos que hay exactamente n raíces $n-$ésimas de la unidad que son

$$z_r = \cos\frac{2r\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2r\pi}{n} \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Si tomamos en particular $n = 4$, obtenemos

$$z_0 = 1 \quad , \quad z_1 = i \quad , \quad z_2 = -1 \quad , \quad z_3 = -i$$

que resultan ser los vértices de un cuadrado inscripto en la circunferencia unitaria



En el caso general, las raíces $n-$énsimas de la unidad son los vértices de un polígono regular de n lados inscripto en la circunferencia unitaria, siendo siempre uno de sus vértices $z = 1$.

7. En cada caso indique, y represente gráficamente, qué subconjuntos del plano complejo determinan las siguientes condiciones

a) $|z - 2 + 3i| = 2$

b) $|z - 2 + 3i| \leqslant 2$

c) $|z - 2 + 3i| > 2$

d) $\arg z = 2\frac{\pi}{3}$

e) $\arg z \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

f) $-\frac{\pi}{4} < \arg(w - 2) < \frac{\pi}{4}$

g) $\arg z \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ y $\mathrm{Re}(z) \leqslant 4$

Inciso a)

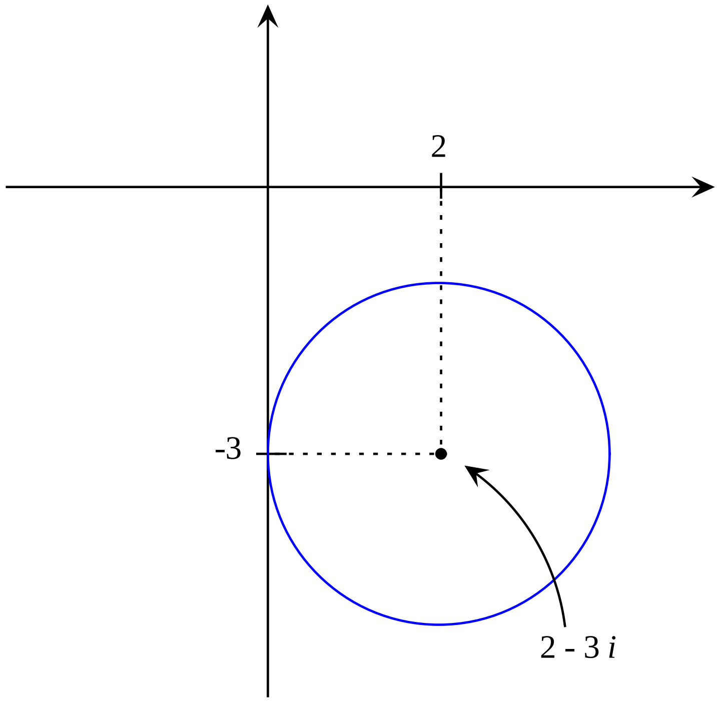
Recordando lo hecho en el Ejercicio 5

$$|z - 2 + 3i| = |z - (2 - 3i)| = \text{ distancia de } z \text{ a } 2 - 3i$$

por lo tanto,

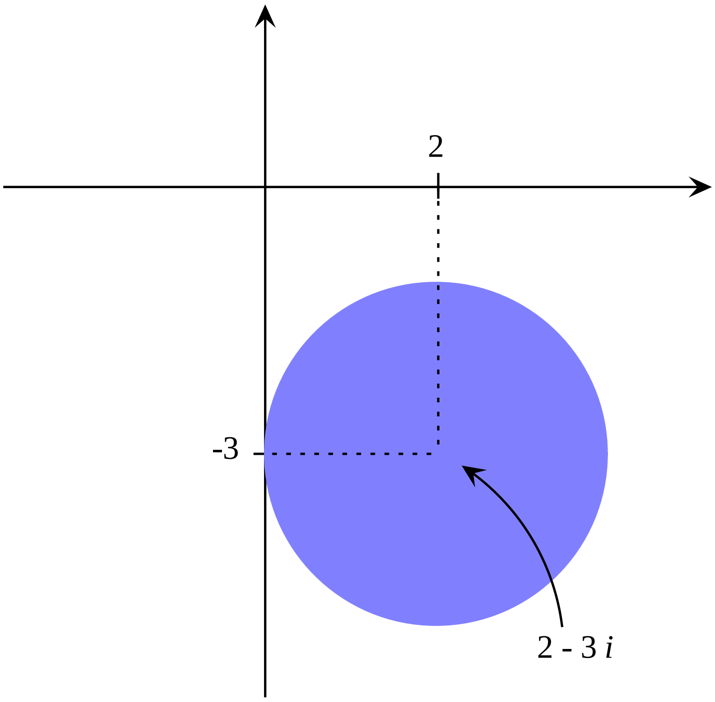
$$|z - 2 + 3i| = 2$$

significa que los z buscados son los que *distan* 2 *de* $2 - 3i$. Claramente esto representa la circunferencia de radio 2 centrada en $2 - 3i$



Inciso b)

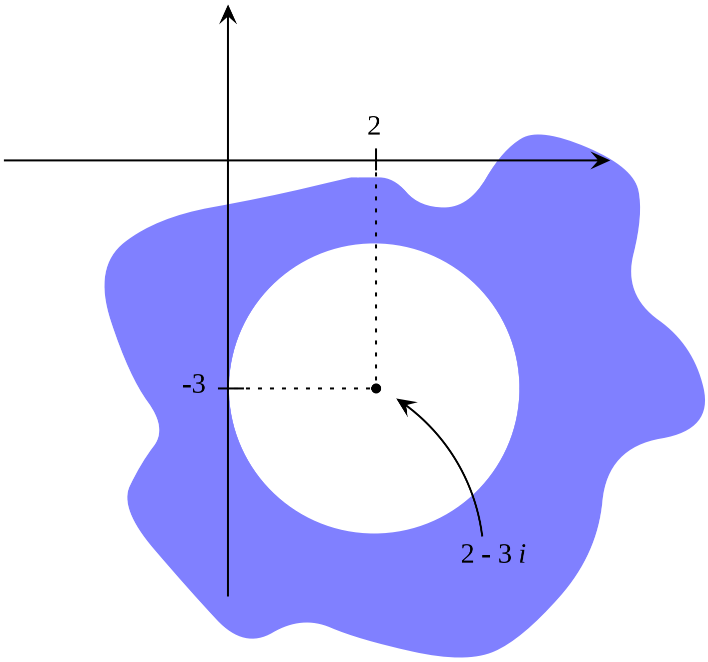
Ahora debemos agregar su interior a la circunferencia del inciso anterior, dado que ahí están los que distan del centro *menos* que 2.



NOTA: como pide $|z - 2 + 3i| \leqslant 2$, el borde está incluido.

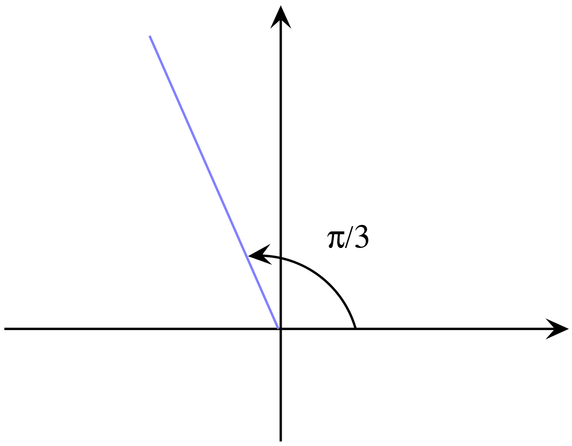
Inciso c)

En este caso la condición es que z diste *más* que 2 del centro. Por lo tanto, el conjunto resulta ser el *exterior* de la circunferencia, excluyéndola, dado que la desigualdad es estricta.



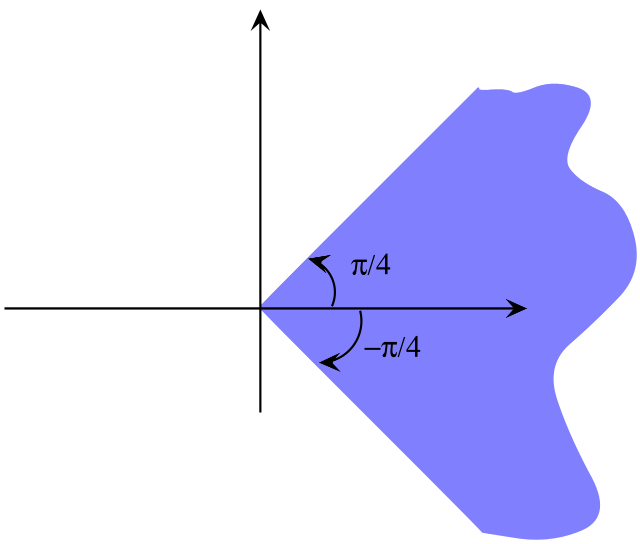
Inciso d)

Al fijar el argumento estamos determinando una semirrecta y, en realidad, todos sus puntos deben ser incluidos ya que no se está condicionando el módulo



Inciso e)

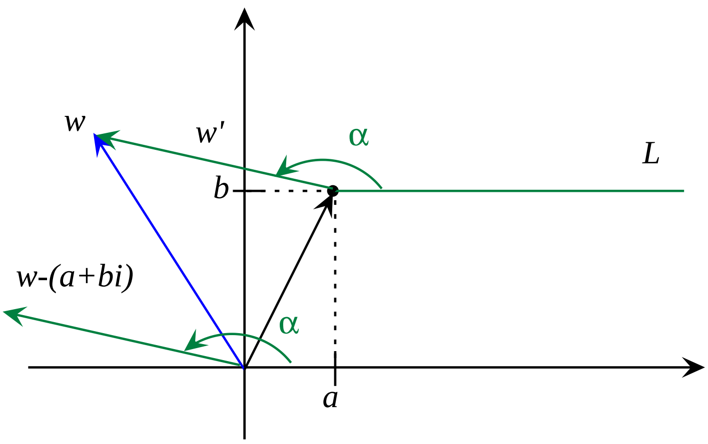
Esta región está limitada por las semirrectas $\arg z = -\frac{\pi}{4}$ y $\arg z = \frac{\pi}{4}$



Como las desigualdades son estrictas, las semirrectas $\arg z = -\frac{\pi}{4}$ y $\arg z = \frac{\pi}{4}$ no están incluidas.

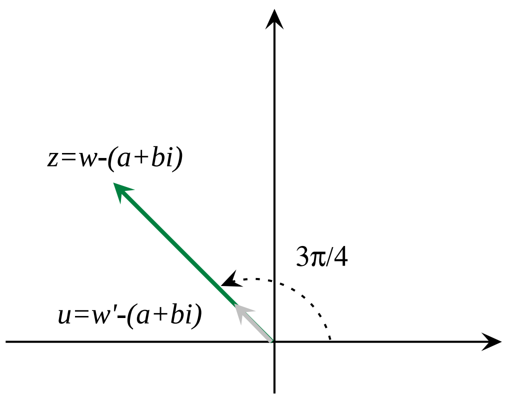
Inciso f)

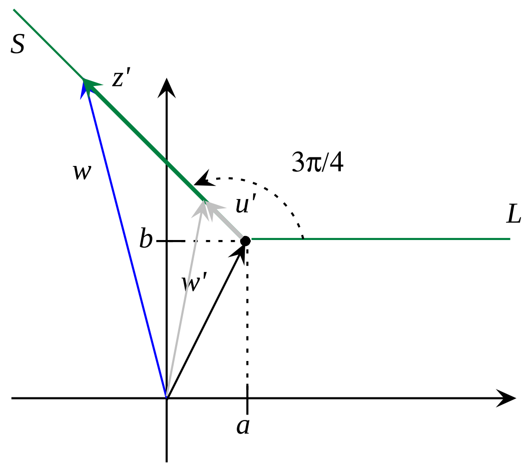
Para poder entender mejor lo que nos pide el ejercicio, analicemos primero la siguiente situación



De la definición de suma de vectores [4] resulta que el ángulo que forma $w - (a + bi)$ con el semieje real positivo es igual al que forma w' con la semirrecta L, que es paralela al eje real.

Por lo tanto si, por ejemplo, nos pidieran hallar el conjunto de complejos w tales que $\arg(w - (a + ib)) = \dfrac{3\pi}{4}$, obtendríamos como resultado





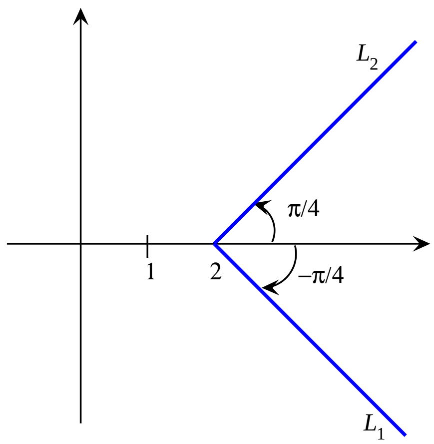
Vemos así que todos los w cuyo extremo está sobre la semirrecta S satisface que su diferencia con $a + bi$ es paralela y con el mismo sentido que esta semirrecta, con lo cual su argumento es siempre $\dfrac{3\pi}{4}$.

[4] a partir de la regla del paralelogramo

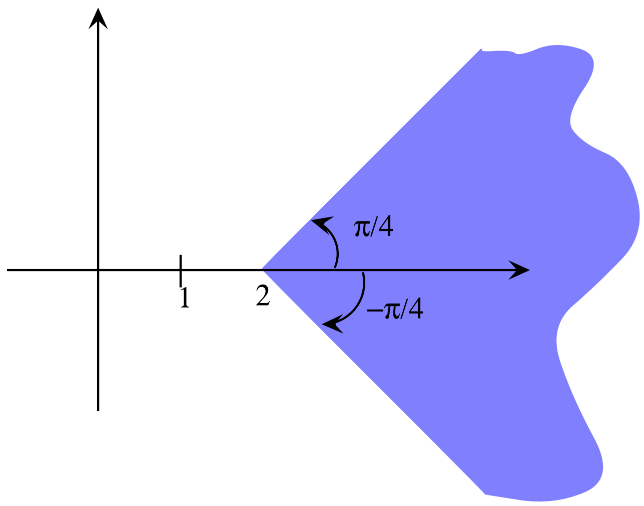
Por lo tanto, las semirrectas

$$L_1 : \quad \arg(w-2) = -\frac{\pi}{4} \qquad , \qquad L_2 : \quad \arg(w-2) = \frac{\pi}{4} \qquad [5]$$

resultan ser



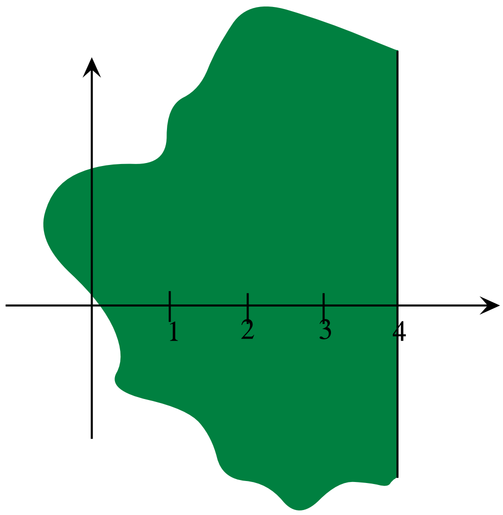
y entonces, la respuesta a este inciso es



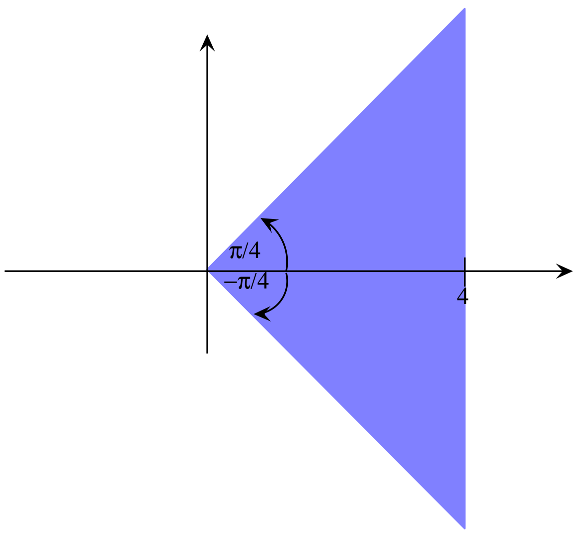
Inciso g)

La región del plano que tratamos de determinar es claramente la intersección de la que encontramos en el inciso e) con

[5]Desde luego aquí debemos pedir que $w \neq 2$ dado que no está definido el argumento del origen.



Entonces, la respuesta en este caso es



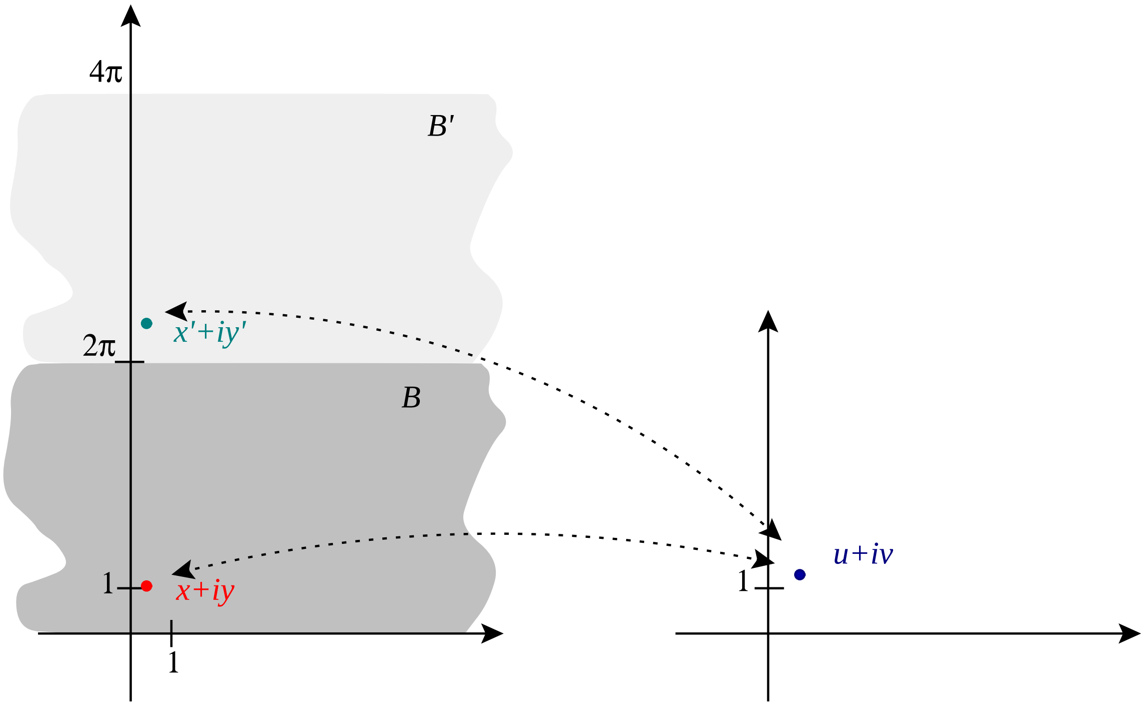
8. *Inyectividad de la exponencial compleja sobre bandas horizontales*
Consideremos la banda horizontal

$$B = \mathbb{R} \times [0, 2\pi) = \{x + iy \mid 0 \leqslant y < 2\pi\} \subset \mathbb{C}$$

cuyo ancho es 2π. Dado $u + iv \in \mathbb{C}$ muestre que hay un único $z \in B$ tal que

$$e^z = u + iv$$

Tenemos dos trabajos por hacer: encontrar un z y luego ver que no puede haber otro. La siguiente figura ilustra esta situación



$$x' = x \qquad y' = y+2\pi$$

Si escribimos $z = x + iy$ tenemos que hallar x e y de modo que

$$e^{x+iy} = u + iv \qquad \text{(con } 0 \leqslant y < 2\pi\text{)}$$

Recordando la definición de la exponencial compleja, esto es decir

$$e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = u + iv \qquad \text{(con } 0 \leqslant y < 2\pi\text{)}$$

Calculando el módulo de cada miembro encontramos x pues debe ser

$$e^x = \sqrt{u^2 + v^2}$$

o sea,

$$x = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$$

y ahora, igualando partes real e imaginaria [6] obtenemos que y debe cumplir

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \operatorname{sen} y = \dfrac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{cases} \tag{1}$$

Pero el vector $\left(\dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$ es unitario; entonces, lo visto en el Apéndice del ejercicio 3 nos permite asegurar que en $[0, 2\pi)$ [7] hay un único y que satisface (1).

[6] y reemplazando e^x por $\sqrt{u^2 + v^2}$
[7] y también en cualquier otro intervalo de longitud 2π

Hemos encontrado el z que buscábamos y además obtuvimos la unicidad pues

$$x = \ln \sqrt{u^2 + v^2} \qquad \text{e} \qquad y \text{ es el único que cumple (1) y está en el intervalo } [0, 2\pi)$$

Como caso particular vamos a considerar la situación de la figura. Ahí tomamos

$$u + iv = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

En este caso resulta que los valores de x e y están dados por

$$e^x = \sqrt{2} \qquad , \qquad \begin{cases} \cos y = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad , \qquad 0 \leqslant y < 2\pi$$

o sea,

$$x = \ln \sqrt{2} \qquad , \qquad y = \frac{\pi}{3}$$

De modo que el *único* z que satisface

$$e^z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad \text{y} \qquad z \in B$$

es

$$z = \ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{3}$$

Con referencia al $x' + iy'$ que se representa en la figura, resulta ser

$$x' + iy' = \ln \sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = z + 2\pi i$$

y es el único complejo *de la banda horizontal* B' al que la exponencial manda a $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.