COMPLEMENTO DE LA PRÁCTICA 2

INDICE

Ejercicio 1 *(el símbolo Σ)* 1

Ejercicio 2 *(algoritmo de división de polinomios)* 3

Ejercicio 3 *(divisibilidad)* 4

Ejercicio 4 *(polinomio derivado)* 5

Ejercicio 5 *(multiplicidad)* 6

Ejercicio 6 *(factorización)* 6

Ejercicio 7 *(Teorema de Gauss)* 8

Ejercicio 8 *(reducibilidad — raíces reales)* 9

Ejercicio 9 *(fracciones simples)* 10

1. a) Desarrolle las siguientes sumas

   (i) $\sum_{i=1}^{4} i$

   (ii) $\sum_{j=2}^{5} 10^{j+2}$

   (iii) $\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}$

   (iv) $\sum_{j=0}^{7} a_j$

   (v) $\sum_{i=1}^{7} 1$

   (vi) $\sum_{j=0}^{4} a_j X^j$

   b) Escriba las siguientes expresiones utilizando el símbolo Σ

   (i) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$

   (ii) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$

   (iii) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100}$

   (iv) $(4 - 2) + (9 - 3) + (16 - 4) + (25 - 5) + (36 - 6) + (49 - 7)$

   (v) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{100}$

Inciso a)

(i) Los valores de i van desde 1 hasta 4 y tenemos que sumarlos todos. Luego,

$$\sum_{i=1}^{4} i = 1 + 2 + 3 + 4$$

(ii) Los valores de j van desde 2 hasta 5. Tenemos que sumar entonces los números: 10^{2+2}, 10^{2+3} , 10^{2+4} y 10^{2+5}. Por lo tanto,

$$\sum_{j=2}^{5} 10^{j+2} = 10^4 + 10^5 + 10^6 + 10^7$$

(iii) Los valores de k van desde 3 hasta n. Nos piden sumar los números: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\ldots$, $\frac{1}{n-1}$ y $\frac{1}{n}$. Entonces,

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

(iv) Los valores de j van de 0 a 7. Se trata entonces de sumar los números: a_0 , a_1 , a_2, a_3 , a_4 , a_5 , a_6 y a_7. Luego,

$$\sum_{j=0}^{7} a_j = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$$

(v) Los valores de i van de 1 a 7. Tenemos que sumar 7 números y son todos iguales a 1. Es decir,

$$\sum_{i=1}^{7} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

(vi) Los valores de j van de 0 a 4 y esta suma representa un polinomio formado por 5 monomios:

$$\sum_{j=0}^{4} a_j \mathrm{X}^j = a_0 + a_1 \mathrm{X} + a_2 \mathrm{X}^2 + a_3 \mathrm{X}^3 + a_4 \mathrm{X}^4$$

Inciso b)

(i) Si miramos cada sumando vemos que todos son pares y además son potencias de 2. En realidad,

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$

Podemos pensar que uno cualquiera de ellos tiene la forma

$$2^k$$

y los valores de k (los exponentes) van desde 0 hasta 6. Entonces,

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = \sum_{k=0}^{6} 2^k$$

(ii) Cada sumando es una fracción de la forma $\frac{1}{n}$ y todos los denominadores son pares que van de 2 a 10. Estos números pares se pueden escribir en la forma

$$2 = 2.1 \quad , \quad 4 = 2.2 \quad , \quad 6 = 2.3 \quad , \quad 8 = 2.4 \quad , \quad 10 = 2.5$$

Entonces,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2.1} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2.5} = \sum_{j=1}^{5} \frac{1}{2j}$$

(iii) Se trata de sumar los inversos multiplicativos de todos los naturales desde 1 hasta 100. Luego,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100} = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i}$$

(iv) Si miramos cada paréntesis notaremos que se trata de diferencias donde el minuendo es un cuadrado y el sustraendo es su base:

$$k^2 - k$$

y comienzan en $k = 2$ y terminan en $k = 7$. Luego,

$$(4 - 2) + (9 - 3) + (16 - 4) + (25 - 5) + (36 - 6) + (49 - 7) = \sum_{k=2}^{7} (k^2 - k)$$

(v) Es casi lo mismo que lo que se plantea en el inciso (iii) salvo porque las operaciones de suma y resta se van alternando. Si recordamos que la expresión $(-1)^n$ va dando alternativamente 1 y -1, más precisamente

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & , n \text{ par} \\ -1 & , n \text{ impar} \end{cases}$$

si multiplicamos a la k–ésima fracción por $(-1)^{k+1}$ y sumamos obtenemos precisamente la suma que se plantea. Luego,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{100} = \sum_{k=1}^{100} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

2. En cada uno de los siguientes casos se da un polinomio P expresado en la forma

$$P = QC + R \qquad\qquad (Q, C, R \text{ poliniomios})$$

Determine en cuáles de ellos resulta ser C el cociente y R el resto de la división de P por Q

a) $P = (X^2 + 2X + 7)(2X + 1) + 2X + 3$

b) $P = (2X + 1)(X^2 + 2X + 7) + 2X + 3$

c) $P = (X + 1)(X^3 - X^2 + 1) + 2X + 2$

En los casos en que no lo sean, halle el cociente y resto.

Inciso a)

Tenemos

$$Q = X^2 + 2X + 7 \quad , \quad C = 2X + 1 \quad , \quad R = 2X + 3$$

Como gr $Q = 2 > 1 =$ gr R podemos asegurar que

$C = 2X + 1$ y $R = 2X + 3$ son, respectivamente, cociente y resto de la división de P por Q

Inciso b)

Tenemos

$$Q = 2X + 1 \quad , \quad C = X^2 + 2X + 7 \quad , \quad R = 2X + 3$$

Como gr $Q = 1 =$ gr R podemos asegurar que C y R no son cociente y resto de esta división.

Para hallar el cociente y el resto hacemos lo siguiente

$$\begin{aligned} P &= (2X + 1)(X^2 + 2X + 7) + 2X + 3 = (2X + 1)(X^2 + 2x + 7) + 2X + 1 + 2 \\ &= (2X + 1)[X^2 + 2X + 7 + 1] + 2 \end{aligned}$$

Ahora, gr $Q = 1 > 0 =$ gr (2), luego

$$\mathrm{X}^2 + 2\,\mathrm{X} + 8 \quad \text{y} \quad 2 \quad \text{son cociente y resto de la división de } P \text{ por } Q$$

Inciso c)

Tenemos

$$Q = \mathrm{X} + 1 \qquad , \qquad C = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 1 \qquad , \qquad R = 2\,\mathrm{X} + 2$$

Como gr $Q = 1 =$ gr R podemos asegurar que C y R no son cociente y resto de esta división.

Para hallar el cociente y el resto hacemos lo siguiente

$$\begin{aligned} P &= (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 1) + 2\,\mathrm{X} + 2 = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 1) + 2(\mathrm{X}+1) \\ &= (\mathrm{X}+1)[\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 1 + 2] \end{aligned}$$

Ahora el último sumando es 0, luego

$$\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 3 \quad \text{y} \quad 0 \quad \text{son cociente y resto de la división de } P \text{ por } Q$$

3. Averigüe si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Cuando sean verdaderas, dé las razones que lo justifiquen y cuando sean falsas, dé un contraejemplo.

   a) Si $(\mathrm{X}+1) \mid P$, entonces $(\mathrm{X}+1)^2 \mid P$
   b) Si $(\mathrm{X}+1)^2 \mid P$, entonces $(\mathrm{X}+1) \mid P$
   c) Si $(\mathrm{X}+1) \mid (P+Q)$, entonces $(\mathrm{X}+1) \mid P$ y $(\mathrm{X}+1) \mid Q$
   d) Si $(\mathrm{X}+1) \mid (P+Q)$ y $(\mathrm{X}+1) \mid P$, entonces $(\mathrm{X}+1) \mid Q$

Inciso a)

$$FALSA$$

Basta tomar

$$P = \mathrm{X} + 1$$

Claramente $(\mathrm{X}+1) \mid P$ pero $(\mathrm{X}+1)^2 \nmid P$.

Inciso b)

$$VERDADERA$$

Si $(X+1)^2 \mid P$, existe un polinomio Q tal que $P = (X+1)^2 Q$. Pero entonces, si llamamos $S = (X+1)Q$ es un polinomio que satisface

$$P = (X+1)S$$

con lo cual $(X+1) \mid P$.

Inciso c)

FALSA

Basta tomar

$$P = X \qquad \text{y} \qquad Q = 1$$

de esta forma $P + Q = X+1$ y por lo tanto se cumple la hipótesis pero $X+1$ no divide ni a X ni a 1.

Inciso d)

VERDADERA

Como $X+1$ divide a $P+Q$ existe un polinomio S tal que

$$P + Q = (X+1)S$$

Por dividir a P, existe un polinomio T tal que

$$P = (X+1)T$$

Entonces,

$$Q = P + Q - P = (X+1)S - (X+1)T = (X+1)(S-T)$$

con lo cual $(X+1) \mid Q$.

4. Se sabe que 2 es raíz triple del polinomio P. ¿Se puede asegurar que $X-2$ divide a P''?

Que 2 sea raíz triple de P significa que $(X-2)^3$ divide a P; i.e., existe un polinomio Q tal que

$$P = (X-2)^3 Q$$

Calculemos P''

$$\begin{aligned}
P' &= 3(X-2)^2 Q + (X-2)^3 Q' \\
P'' &= 6(X-2)Q + 3(X-2)^2 Q' + 3(X-2)^2 Q' + (X-2)^3 Q'' \\
&= 6(X-2)Q + 6(X-2)^2 Q' + (X-2)^3 Q'' \\
&= (X-2)\left[2Q + 6(X-2)Q' + (X-2)^2 Q''\right]
\end{aligned}$$

Luego,

podemos asegurar que $X-2$ divide a P''

5. Sea $P = 2(X-2)^3 X + 3X^3(X-2)^2 - 5(X-2)^5 + 2(X-2)(X+3)^2$.

   a) Compruebe que 2 es raíz de P

   b) Calcule la multiplicidad de 2 como raíz de P

Inciso a)

Calculemos

$$P(2) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Luego, 2 es raíz de P.

Inciso b)

Notemos que $X-2$ es factor común de todos los monomios, luego

$$P = (X-2)[2(X-2)^2 X + 3X^3(X-2) - 5(X-2)^4 + 2(X+3)^2]$$

si llamamos

$$Q = 2(X-2)^2 X + 3X^3(X-2) - 5(X-2)^4 + 2(X+3)^2$$

resulta

$$Q(2) = 0 + 0 + 0 + 18 = 18 \neq 0$$

luego, $(X-2) \nmid Q$ y por lo tanto $(X-2)^2 \nmid P$.

Concluimos entonces que

la multiplicidad de 2 como raíz de P es 1

6. Factorice el polinomio $P = 2X^4 - 3X^3 + 19X^2 - 27X + 9$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Como el polinomio tiene coeficientes enteros ($P \in \mathbb{Z}[X]$) podemos usar el teorema de Gauss para ver si tiene raíces racionales. De tener alguna, digamos que se escribe como $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$), p debe dividir a 9 y q debe dividir a 2, entonces:

$$p = \pm 1, \pm 3 \pm 9 \qquad , \qquad q = \pm 1, \pm 2$$

Una posibilidad, simple de verificar, es $1/1 = 1$

$$P(1) = 2 - 3 + 19 - 27 + 9 = 0$$

Tuvimos suerte y resulta que 1 es raíz de P. Sabemos ahora que $(\mathrm{X}-1) \mid P$. Hacemos la división y resulta que

$$P = (\mathrm{X}-1)(2\,\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 18\,\mathrm{X} - 9)$$

Para hallar las demás raíces de P, habrá que hallar las de

$$Q = 2\,\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 18\,\mathrm{X} - 9$$

También en este caso podemos aplicar Gauss. Intentemos con $\frac{1}{2}$,

$$Q(\tfrac{1}{2}) = 2\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{18}{2} - 9 = 0$$

Dividimos a Q por $\mathrm{X}-\frac{1}{2}$,

$$Q = (\mathrm{X}-\tfrac{1}{2})(2\,\mathrm{X}^2 + 18)$$

Luego,

$$P = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-\tfrac{1}{2})(2\,\mathrm{X}^2 + 18)$$

Llegado este punto vemos que P no tiene más raíces reales puesto que $2a^2 + 18 > 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Busquemos las dos raíces que faltan que son complejas (no reales). Sea z tal que

$$2z^2 + 18 = 0$$

esto es lo mismo que decir

$$z^2 = -9$$

y esto lo mismo que

$$\left(\frac{z}{3}\right)^2 = -1$$

Pero hay sólo dos números cuyo cuadrado es -1: $\pm i$. Luego, las raíces serán

$$\frac{z}{3} = i \qquad , \qquad \frac{z}{3} = -i$$

O sea,

$$z = 3i \qquad , \qquad z = -3i$$

Ahora estamos en condiciones de factorizar a P en los tres anillos,

$$\begin{aligned}
\text{En } \mathbb{Q}[\mathrm{X}] : &\quad P = 2(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-\tfrac{1}{2})(\mathrm{X}^2+9)\\
\text{En } \mathbb{R}[\mathrm{X}] : &\quad P = 2(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-\tfrac{1}{2})(\mathrm{X}^2+9)\\
\text{En } \mathbb{C}[\mathrm{X}] : &\quad P = 2(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-\tfrac{1}{2})(\mathrm{X}-3i)(\mathrm{X}+3i)
\end{aligned}$$

7. Halle todas las raíces del polinomio

$$P = \frac{1}{3}X^6 + \frac{1}{2}X^5 - \frac{2}{3}X^4 - \frac{5}{3}X^3 - 2X^2 - \frac{13}{6}X - 1$$

Comencemos buscando las raíces racionales. Para ello sería muy útil poder usar el Teorema de Gauss pero no se cumple la hipótesis que los coeficientes sean números enteros. Aunque sí son racionales; luego, teniendo en cuenta que las raíces de P y las de αP son las mismas cualquiera sea $\alpha \neq 0$, podemos considerar el polinomio

$$Q = 6P = 2X^6 + 3X^5 - 4X^4 - 10X^3 - 12X^2 - 13X - 6$$

Como $Q \in \mathbb{Z}[X]$ podemos aplicar el teorema de Gauss. Para ello consideramos los cocientes

$$\frac{p}{q}$$

donde p es un divisor de -6 y q un divisor de 2. Estos cocientes son los únicos racionales que pueden ser raíces de Q.

Los posibles valores de p son: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ y los de q son: $\pm1, \pm2$. Luego, los posibles cocientes serán

$$\pm1 \quad , \quad \pm2 \quad , \quad \pm3 \quad , \quad \pm6 \quad , \quad \pm\frac{1}{2} \quad , \quad \pm\frac{3}{2}$$

Evaluando Q en cada uno de ellos descubrimos que los únicos que son raíces de Q son

$$-\frac{3}{2} \quad , \quad -1 \quad , \quad 2$$

Además podemos verificar que -1 es también raíz de Q' pero no de Q''. De modo que -1 es raíz doble. Utilizando similares argumentos podemos comprobar que $-\frac{3}{2}$ y 2 son simples.

Recordando que P es un múltiplo (no nulo) de Q podemos asegurar que

- -1 es raíz doble de P
- $-\frac{3}{2}$ y 2 son raíces simples de P

Siendo gr $P = 6$ es claro que nos falta encontrar 2 raíces. Como $(X+1)^2(X-2)(X-\frac{3}{2}) \mid P$, existe un polinomio S (de grado 2) tal que

$$P = (X+1)^2(X-2)(X-\tfrac{3}{2})\, S = \left(X^4 + \tfrac{3}{2}X^3 - 3X^2 - \tfrac{13}{2}X - 3\right) S$$

Didivimos a P por $X^4 + \frac{3}{2}X^3 - 3X^2 - \frac{13}{2}X - 3$ y obtenemos que

$$S = X^2 + 1$$

No tenemos que hacer muchas cuentas para saber que las dos raíces que faltaban son: $\pm i$.

Finalmente, las raíces de son

$$-\frac{3}{2} \quad , \quad -1 \quad , \quad 2 \quad , \quad i \quad , \quad -i$$

8. Compruebe que el polinomio $P = X^4 + 1$

   a) no tiene raíces reales

   b) es reducible en $\mathbb{R}[X]$

   Factorice a P en $\mathbb{R}[X]$

Inciso a)

Basta notar que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$x^4 + 1 \geqslant 1 > 0$$

luego,

$$P(x) \neq 0 \qquad \text{(para todo } x \in \mathbb{R})$$

Inciso b)

Al no tener raíces reales, todas las raíces de P son complejas (no reales) y como los coeficientes son reales, estas cuatro raíces resultan ser dos pares de complejos conjugados. Esto nos da una forma de hallar la factorización de P en $\mathbb{R}[X]$.

Utilizando los conocimientos adquiridos al resolver la Práctica 1 podemos hallar las raíces de P que resultan ser

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Comprobamos así que

$$z_4 = \overline{z_1} \quad , \quad z_3 = \overline{z_2}$$

Entonces, los polinomios

$$(X - z_1)(X - z_4) = X^2 - \sqrt{2}\,X + 1 \qquad \text{y} \qquad (X - z_2)(X - z_3) = X^2 + \sqrt{2}\,X + 1$$

tienen coeficientes reales y dividen a P. De forma que, al ser P mónico, tenemos la factorización de P en $\mathbb{R}[X]$

$$P = \left(X^2 - \sqrt{2}\,X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}\,X + 1\right)$$

NOTA 1: cada uno de estos factores es irreducible en $\mathbb{R}[X]$ por ser de grado 2 y no tener P raíces reales.

NOTA 2: esta factorización podría ser de mucha utilidad si nos pidieran descomponer en fracciones simples a la función racional

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$$

obteniendo la siguiente descomposición

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

9. Halle la descomposición en fracciones simples de $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 9}{2x^3 - x^2 + 18x - 9}$.

Trabajando como en el Ejercicio 6 llegamos a que el denominador se factoriza en la forma

$$2x^3 - x^2 + 18x - 9 = (x - \tfrac{1}{2})(2x^2 + 18) = (2x - 1)(x^2 + 9)$$

Debemos considerar primero la relación entre los grados del numerador y denominador. En nuestro caso, el numerador tiene grado menor [1].

Entonces, planteamos las siguientes fracciones simples

$$f(x) = \frac{A}{2x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 9}$$

Resulta entonces que los coeficientes A, B, C deben satisfacer

$$\frac{-x^2 + x + 9}{2x^3 - x^2 + 18x - 9} = \frac{(A + 2B)x^2 + (2C - B)x + 9A - C}{2x^3 - x^2 + 18x - 9}$$

Como los denominadores son iguales, deben serlo también los numeradores y entonces, por igualdad entre polinomios, resulta que A, B, C deben satisfacer el siguiente sistema,

$$\begin{cases} A + 2B = -1 \\ 2C - B = 1 \\ 9A - C = 9 \end{cases}$$

que tiene por solución

$$A = 1 \quad , \quad B = -1 \quad , \quad C = 0$$

Finalmente, la descomposición de f en fracciones simples es

$$f(x) = \frac{1}{2x - 1} - \frac{x}{x^2 + 9}$$

[1]por lo cual no necesitamos dividir el numerador por el denominador