# COMPLEMENTO DE LA PRÁCTICA 3

INDICE

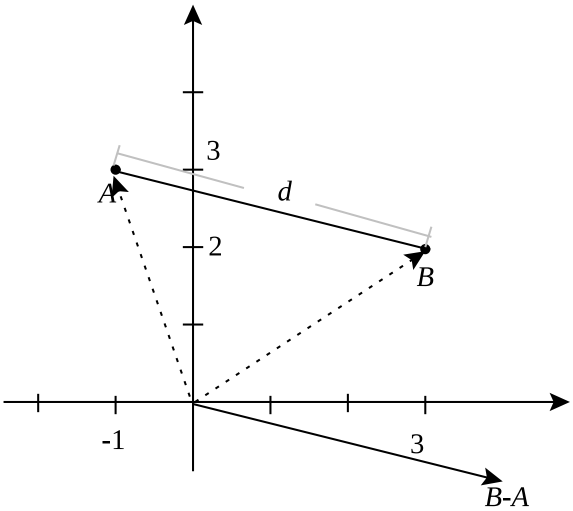
1. Calcule la distancia entre los pares de puntos dados

   a) $A = (-1, 3) \quad , \quad B = (3, 2)$

   b) $A = (3, -2) \quad , \quad B = (-3, 2)$

a)

Miremos la siguiente figura



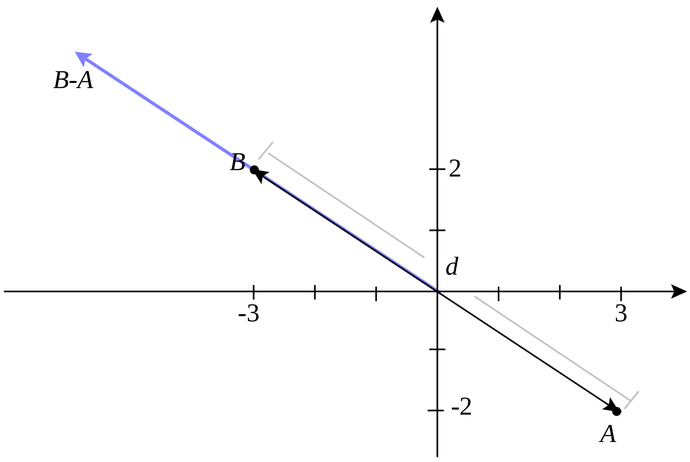

$d = \| B\text{-}A \|$

Siendo $B - A = (3, 2) - (-1, 3) = (4, -1)$ resulta

$$d(A, B) = \| (4, -1) \| = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

b)

Ahora la situación se representa en la forma




$d = \| B\text{-}A \|$

Siendo $B - A = (-3, 2) - (3, -2) = (-6, 4)$

$$d(A, B) = \| (-6, 4) \| = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

2. Halle las coordenadas polares del punto $P$ cuyas coordenadas cartesianas son

a) $(-\sqrt{3}, 1)$

b) $(1, -2)$

c) $(-2, -3)$

a)

Tal como hacíamos al calcular la forma trigonométrica de un complejo comenzamos calculando la norma de $P$:

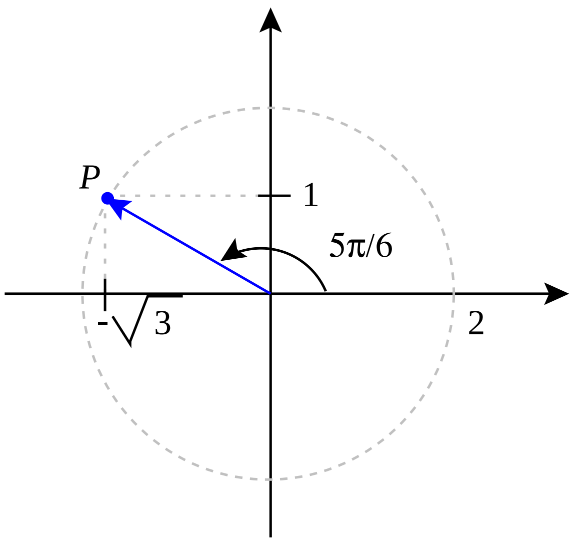
$$\| P \| = \left\| \left(-\sqrt{3}, 1\right) \right\| = \sqrt{3 + 1} = 2$$

de modo que

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Deducimos que $\theta$ está en el segundo cuadrante y vale

$$\theta = \frac{5\pi}{6}$$




Las coordenadas polares de $P$ son

$$\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$$

b)

En este caso la norma de $P$ es:

$$\| P \| = \| (1, -2) \| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

de modo que

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{-2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Deducimos que $\theta$ está en el cuarto cuadrante pero ahora no es tan fácil *reconocer* el ángulo. En este caso deberemos recurrir a alguno de los arcos. Estando en el cuarto cuadrante podemos usar tanto el arcoseno como el arcotangente pero el resultado no será el valor de $\theta$ pues

$$-\frac{\pi}{2} < \quad \operatorname{arcsen}\tfrac{-2}{\sqrt{5}} \quad , \quad \arctan(-2) \quad < 0$$

mientras que $\theta$ debe estar en $[0, 2\pi)$. Pero lo que sí podemos decir es que, usando por ejemplo arctan,

$$\theta = \arctan(-2) + 2k\pi \qquad \text{(para algún entero } k\text{)}$$

Y es fácil darse cuenta que, al ser

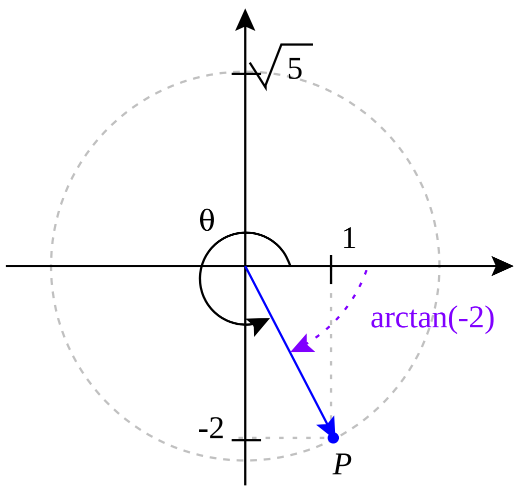
$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(-2) < 0$$

resulta que

$$0 < 2\pi - \frac{\pi}{2} < \arctan(-2) + 2\pi < 0 + 2\pi = 2\pi$$

con lo cual $k = 1$ y en consecuencia

$$\theta = \arctan(-2) + 2\pi$$




Las coordenadas polares de $P$ son

$$\left(\sqrt{5}, \arctan(-2) + 2\pi\right)$$

c)

La norma de $P$ es:

$$\| P \| = \| (-2, -3) \| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

de modo que

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-2}{\sqrt{13}} \\[2ex] \operatorname{sen}\theta = \dfrac{-3}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

Siendo tanto el seno como el coseno negativos concluimos que $\theta$ está en el tercer cuadrante y, como en el inciso anterior, no es tan fácil *reconocer* el ángulo. Aquí también deberemos recurrir a alguno de los arcos.

Estando en el tercer cuadrante ninguna de las inversas de las funciones trigonométricas nos dará –sin más– un valor del argumento. Pero sabemos que $-P = (2,3)$ está entonces en el primer cuadrante y, si llamamos $\alpha$ a la segunda coordenada polar de $-P$, la relación entre $\alpha$ y $\theta$ es

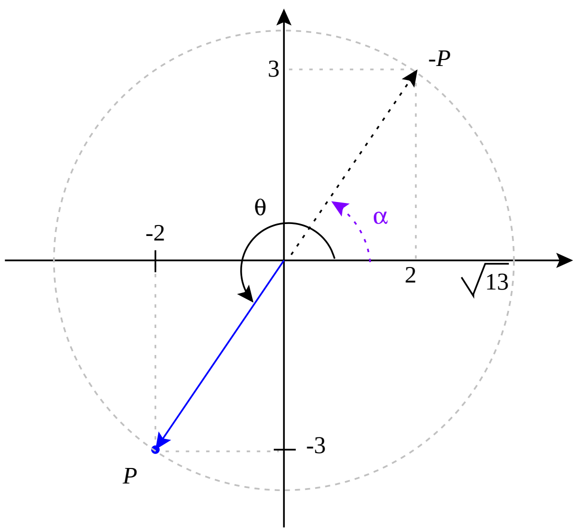
$$\theta = \alpha + \pi$$

Tenemos

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \\[2ex] \operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

y como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} = \operatorname{arcsen}\frac{3}{\sqrt{13}}$. De modo que podemos decir

$$\theta = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} + \pi$$




Las coordenadas polares de $P$ son

$$\left(\sqrt{13}, \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} + \pi\right)$$

3. a) Calcule en ángulo entre los siguientes pares de vectores

   (i) $\mathbf{u} = (1,4)$ , $\mathbf{v} = (-1,2)$

   (ii) $\mathbf{u} = (1,4)$ , $\mathbf{v} = (-1,-2)$

   (iii) $\mathbf{u} = (1,4)$ , $\mathbf{v} = (1,-2)$

   b) Calcule en ángulo entre los siguientes pares de rectas

   (i) $L_1 : (x,y) = (3,5) + t(1,4)$ , $(t \in \mathbb{R})$ , $L_2$: pasa por $(3,5)$ y $(2,7)$

   (ii) $L_1$: pasa por $(0,0)$ y $(1,4)$ , $L_2 : (x,y) = t(-1,-2)$ , $(t \in \mathbb{R})$

   (iii) $L_1 : 3x - 2y = 0$ , $L_2 : (x,y) = (2,3) + t(1, \frac{3}{2})$ , $(t \in \mathbb{R})$

   (iv) $L_1 : 3x - 2y = 0$ , $L_2 : (x,y) = (1,0) + t(1, \frac{3}{2})$ , $(t \in \mathbb{R})$

a)

(i) Calculamos el coseno de $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})$

$$\cos \angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{(1,4)\cdot(-1,2)}{\|(1,4)\|\,\|(-1,2)\|} = \frac{7}{\sqrt{17}\,\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{85}}$$

Luego,

$$\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \arccos \tfrac{7}{\sqrt{85}}$$

(ii) Calculamos el coseno de $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})$

$$\cos \angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{(1,4)\cdot(-1,-2)}{\|(1,4)\|\,\|(-1,-2)\|} = \frac{-9}{\sqrt{17}\,\sqrt{5}} = -\frac{9}{\sqrt{85}}$$

Luego,

$$\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \arccos\left(-\tfrac{9}{\sqrt{85}}\right)$$

(iii) Calculamos el coseno de $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})$

$$\cos \angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{(1,4)\cdot(1,-2)}{\|(1,4)\|\,\|(1,-2)\|} = \frac{-7}{\sqrt{17}\,\sqrt{5}} = -\frac{7}{\sqrt{85}}$$

Luego,

$$\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \arccos\left(-\tfrac{7}{\sqrt{85}}\right)$$

NOTA: en el primer caso el ángulo es agudo (su coseno es positivo). En los otros dos, es obtuso (su coseno es negativo). Un esquema gráfico puede ayudar a aclarar las distintas situaciones.

b)

(i) A partir de los datos podemos asegurar que $L_1$ está dirigida por $(1,4)$ , que $L_2$ está dirigida por $(2,7)-(3,5)=(-1,2)$ y que $L_1 \cap L_2 = \{(3,5)\}$ (se cortan).
En el inciso a)-(i) vimos que $\cos \angle((1,4),(-1,2)) > 0$ por lo cual

$$0 \leqslant \angle((1,4),(-1,2)) < \frac{\pi}{2}$$

Entonces,

$$\angle(L_1, L_2) = \angle((1,4),(-1,2))$$

$$\angle(L_1, L_2) = \arccos \tfrac{7}{\sqrt{85}}$$

(ii) A partir de los datos podemos asegurar que $L_1$ está dirigida por $(1,4)$ , que $L_2$ está dirigida por $(-1,-2)$ y que $L_1 \cap L_2 = \{(0,0)\}$ (se cortan).
En el inciso a)-(ii) vimos que $\cos \angle((1,4),(-1,-2)) < 0$ por lo cual

$$\frac{\pi}{2} < \angle((1,4),(-1,-2)) \leqslant \pi$$

Entonces,

$$\angle(L_1, L_2) = \pi - \angle((1,4),(-1,-2))$$

$$\angle(L_1, L_2) = \pi - \arccos\left(-\tfrac{9}{\sqrt{85}}\right)$$

(iii) Es claro que $L_1$ pasa por $(0,0)$ y por $(2,3)$ mientras que $L_2$ está dirigida por $(1,\frac{3}{2})$. Lo que tal vez no sea tan evidente a simple vista es que se corten. Veamos si esto ocurre. Tomemos un punto cualquiera de $L_2$

$$(2,3) + t(1,\tfrac{3}{2}) = \left(2+t, 3+\tfrac{3}{2}t\right)$$

y veamos qué condiciones debe cumplir el parámetro para que esté también en $L_1$. Debe satisfacer la ecuación de $L_1$

$$3(2+t) - 2\left(3 + \frac{3}{2}t\right) = 3t - 3t = 0 \qquad \text{(para todo } t \in \mathbb{R}\text{)}$$

Esto nos dice que $L_2 \subset L_1$, pero siendo rectas es lo mismo que decir

$$L_1 = L_2$$

Entonces,

$$\angle(L_1, L_2) = 0$$

(iv) En este caso $L_1$ y $L_2$ son paralelas pero distintas. Luego,

$$L_1 \cap L_2 = \varnothing$$

y por lo tanto no tiene sentido hablar del ángulo que forman.

4. Escriba la expresión

$$\| \mathbf{a} - \mathbf{b} \|^2 \qquad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2)$$

de modo que se la pueda calcular conociendo *exclusivamente* $\| \mathbf{a} \|$ , $\| \mathbf{b} \|$ y el producto escalar entre **a** y **b**.
Si **a** y **b** fuesen ortogonales, ¿qué igualdad obtendría?

Recordando que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \| \mathbf{u} \|^2$, podemos escribir

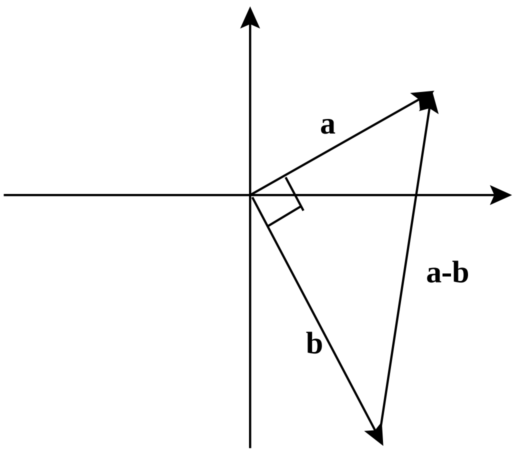
$$\begin{aligned} \| \mathbf{a} - \mathbf{b} \|^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= \| \mathbf{a} \|^2 + \| \mathbf{b} \|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

Luego,

$$\| \mathbf{a} + \mathbf{b} \|^2 = \| \mathbf{a} \|^2 + \| \mathbf{b} \|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

En caso de ser **a** y **b** ortogonales, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Luego, la igualdad anterior queda

$$\| \mathbf{a} - \mathbf{b} \|^2 = \| \mathbf{a} \|^2 + \| \mathbf{b} \|^2$$




5. Calcule la proyección ortogonal de $\mathbf{u} = (2, 3)$ sobre

a) $(-1, 5)$

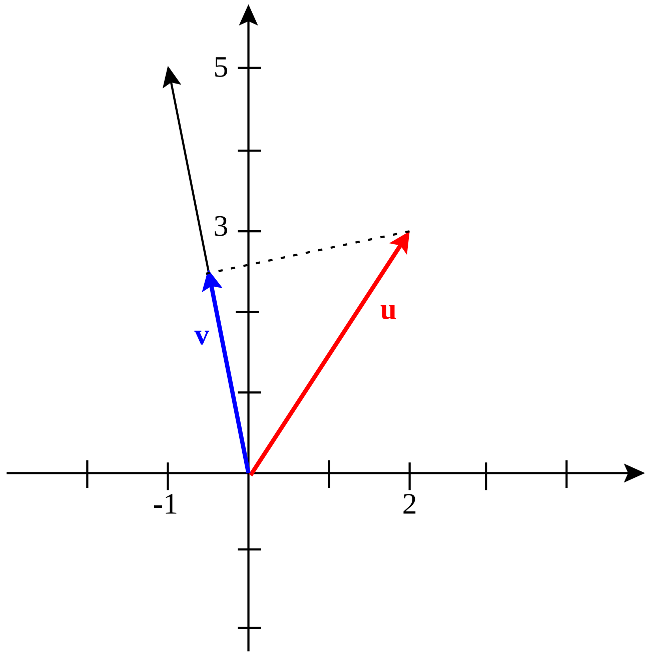
b) $(-1, -1)$

c) $(1, 0)$

d) $(0, 1)$

a)

Gráficamente,



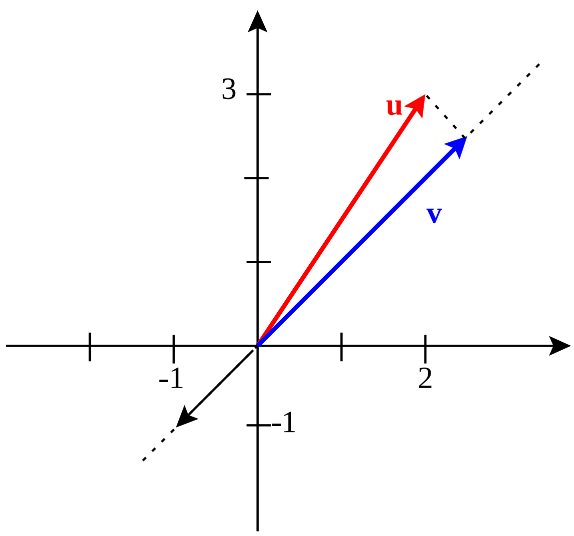

Analíticamente,

$$\mathrm{proy}_{(-1,5)}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot(-1,5)}{\|(-1,5)\|^2}\,(-1,5) = \frac{(2,3)\cdot(-1,5)}{26}(-1,5) = \frac{1}{2}(-1,5)$$

$$\mathrm{proy}_{(-1,5)}\mathbf{u} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

b)

Gráficamente,



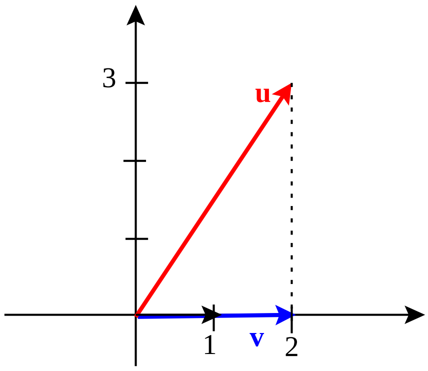
Analíticamente,

$$\text{proy}_{(-1,-1)}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot(-1,-1)}{\|\,(-1,-1)\,\|^2}\,(-1,-1) = \frac{(2,3)\cdot(-1,-1)}{2}(-1,-1) = \frac{-5}{2}(-1,-1) = \frac{5}{2}(1,1)$$

$$\text{proy}_{(-1,-1)}\mathbf{u} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

c)

Gráficamente,



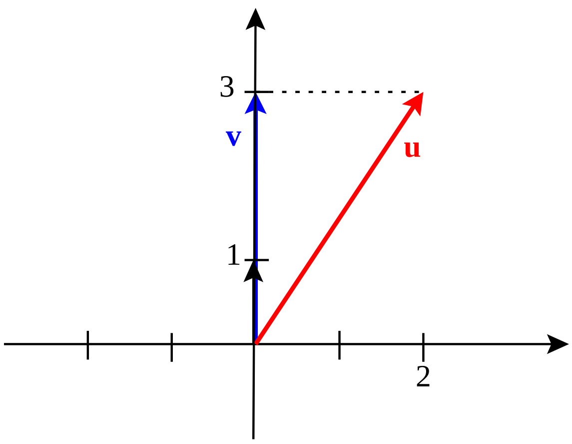

Analíticamente,

$$\text{proy}_{(1,0)}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot(1,0)}{\|\,(1,0)\,\|^2}\,(1,0) = \frac{(2,3)\cdot(1,0)}{1}(1,0) = 2(1,0) = (2,0)$$

$$\text{proy}_{(1,0)}\mathbf{u} = (2,0)$$

d)

Gráficamente,



Analíticamente,

$$\mathrm{proy}_{(0,1)}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot(0,1)}{\|\,(0,1)\,\|^2}\,(0,1) = \frac{(2,3)\cdot(0,1)}{1}(0,1) = 3(0,1) = (0,3)$$

$$\mathrm{proy}_{(0,1)}\mathbf{u} = (0,3)$$

6. Exhiba las ecuaciones paramétricas de la circunferencia $C$ con centro en $(-2,3)$ y radio 1.

Los puntos de esta circunferencia son los que están a distancia 2 del centro; luego, los puntos de la circunferencia son los que satisfacen

$$\|\,(x,y)-(-1,3)\,\| = 1$$

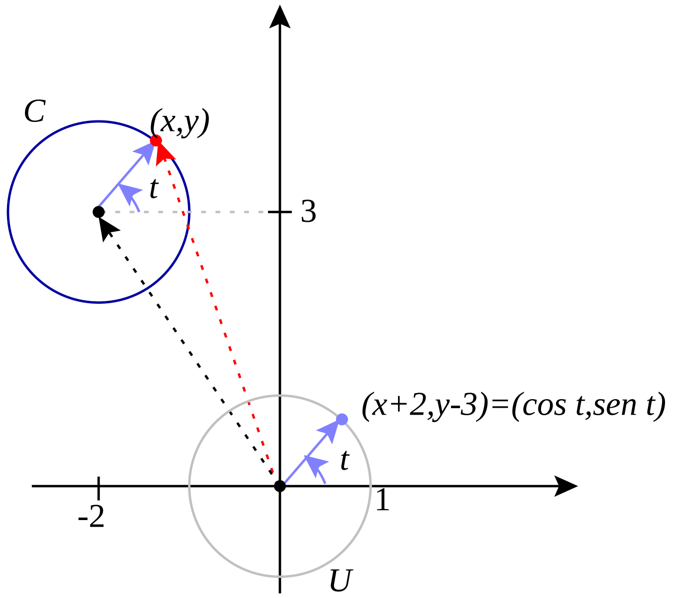
o, equivalentemente,

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$$

pero esto significa que, para cada $(x,y)$ en $C$, el punto

$$(x+2,\,y-3)$$

pertenece a la circunferencia unitaria, tal como se aprecia en el siguiente esquema




$C:\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$
$U:\ \ u^2 + v^2 = 1$

Por lo tanto, para cada uno de los $(x,y)\in C$ existe un $t\in[0,2\pi]$ tal que

$$\begin{cases} x+2 = \cos t \\ y-3 = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

En consecuenci, las ecuaciones paramétricas de $C$ son

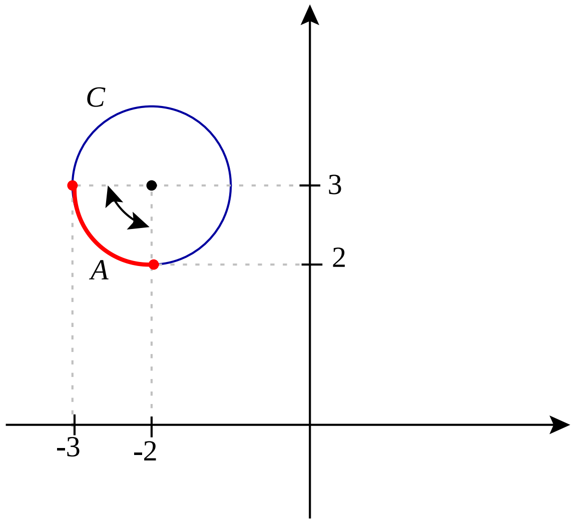
$$C: \begin{cases} x = \cos t - 2 \\ y = \operatorname{sen} t + 3 \end{cases} \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

7. Exhiba las ecuaciones paramétricas del arco $A$ de la circunferencia $C$ con centro en $(-2, 3)$ y radio 1 que une los puntos $(-3, 3)$ y $(-2, 2)$ yendo del primero al segundo en sentido antihorario.

El arco $A$ es parte de la circunferencia $C$ del ejercicio anterior; luego, los puntos $(x, y)$ de $A$ satisfacen

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

con lo cual sus ecuaciones paramétricas serán las mismas de $C$ salvo el rango de valores que toma el parámetro puesto que $A$ sólo es una parte de la circunferencia. Hagamos un esquema que nos ayude a determinar qué valores deberá tomar $t$




Queda claro entonces que para recorrer sólo los puntos de $A$ debe ser

$$\pi \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

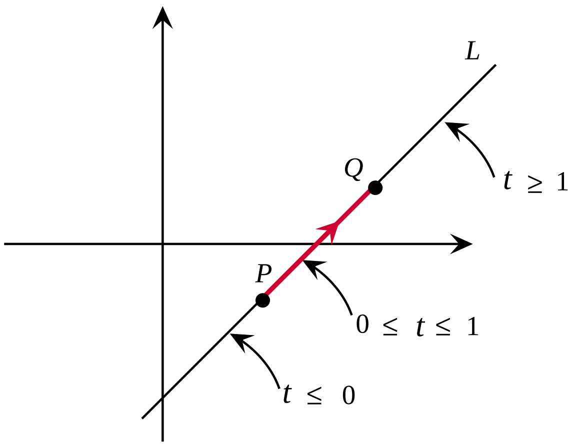
y en consecuencia, las ecuaciones paramétricas de $A$ son

$$A: \begin{cases} x = \cos t - 2 \\ y = \operatorname{sen} t + 3 \end{cases} \quad , \quad \pi \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

8. Dados los puntos $P = (x_0, y_0, z_0)$ y $Q = (x_1, y_1, z_1)$, el ***segmento con origen*** $P$ y ***extremo*** $Q$ es el conjunto

$$[P, Q] = \{R \in L \mid d(P, R), d(Q, R) \leqslant d(P, Q)\}$$

donde $L$ es la recta que une ambos puntos.




*R=P+t(Q-P)*

Es decir, son los puntos de $L$ que están *entre* $P$ y $Q$.

Consideremos el caso interesante: $P \neq Q$ [1]. Dado cualquier $R \in [P, Q]$, como en particular $R \in L$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$R = P + t(Q - P)$$

Vamos a tratar de encontrar una condición sobre el parámetro $t$ que nos permita identificar a los puntos de la recta $L$ que están en $[P, Q]$. Para ello consideremos las distancias de $R$ a los extremos

$$\begin{aligned} d(P, R) &= \| R - P \| = \| t(Q - P) \| \\ &= | t | \, \|Q - P\| \\ d(Q, R) &= \| P + t(Q - P) - Q \| = \| (t - 1)(Q - P) \| \\ &= | t - 1 | \, \| Q - P \| \end{aligned}$$

La condición necesaria y suficiente para que los puntos de $L$ estén *entre* $P$ y $Q$ es que estas dos distancias sean menores o iguales que $d(P, Q) = \|Q - P\|$. Resulta entonces que los valores de $t$ deben satisfacer

$$| t | \, \| Q - P \| \leqslant \| Q - P \| \quad \text{y} \quad | t - 1 | \, \| Q - P \| \leqslant \| Q - P \|$$

lo que, simplificando el número positivo $\| Q - P \|$, equivale a que

$$| t | \leqslant 1 \qquad \text{y} \qquad | t - 1 | \leqslant 1$$

es decir,

$$-1 \leqslant t \leqslant 1 \qquad \text{y} \qquad -1 \leqslant t - 1 \leqslant 1$$

[1] si $P = Q$, el segmento se reduce a un punto

que es lo mismo que decir

$$-1 \leqslant t \leqslant 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2$$

de modo que para que $R$ esté en el segmento es necesario y suficiente que satisfaga

$$R = P + t(Q - P) \quad \text{con} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Finalmente, podemos afirmar que

$$[P, Q] = \{(1 - t)P + tQ \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\} = \{P + t(Q - P) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

*Aplicación*: cálculo del punto medio del segmento $[P, Q]$.

El punto medio de este segmento es el que verifica

$$M = P + t(Q - P)\ (0 \leqslant t \leqslant 1) \qquad \text{y} \qquad d(P, M) = d(Q, M)$$

luego,

$$td(P, Q) = (1 - t)d(P, Q)$$

por ser $P \neq Q$ resulta $d(P, Q) > 0$ y entonces la igualdad anterior implica

$$t = 1 - t$$

es decir,

$$t = \frac{1}{2}$$

y en consecuencia

$$M = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$$

9. Determine en cada caso de qué curva se trata y haga un esquema gráfico

a) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 2y = 0$

b) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 11$

c) $9x^2 - 4y^2 + 18x + 16y = 43$

d) $4y^2 - 3x^2 + 16y + 6x = -12$

e) $x - 2y^2 - 4y - 6 = 0$

f) $x^2 - 6x - 2y + 5 = 0$

a)

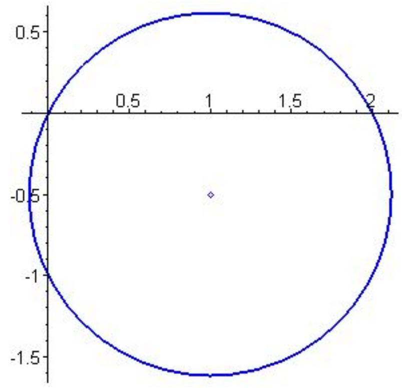
Para averiguar de qué cónica se trata completamos cuadrados en $x$ e $y$ separadamente

$$\begin{aligned} 2x^2+2y^2-4x+2y=0 &\iff 2x^2-4x+2y^2+2y=0 \iff 2[x-2x]+2[y^2+y]=0 \\ &\iff 2[(x-1)^2-1]+2[(y+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}]=0 \\ &\iff 2(x-1)^2+2(y+\tfrac{1}{2})^2-2-\tfrac{1}{2}=0 \\ &\iff 2(x-1)^2+2(y+\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{5}{2} \\ &\iff (x-1)^2+(y+\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{5}{4} \end{aligned}$$

Resulta entonces

$$2x^2+2y^2-4x+2y=0 \iff (x-1)^2+(y-(-\tfrac{1}{2}))^2=\tfrac{5}{4}$$

Se trata entonces de una circunferencia (caso particular de elipse) de centro en $(1,-\frac{1}{2})$ y radio $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$. El siguiente gráfico ilustra esta curva

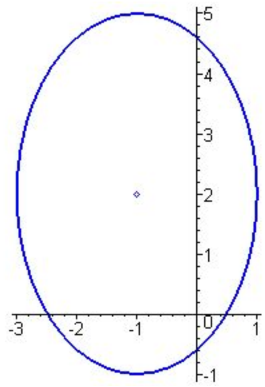



b)

Trabajando como en el caso anterior obtenemos

$$9x^2+4y^2+18x-16y=11 \iff \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

Se trata entonces de una elipse con centro $(-1,2)$ y semiejes $a=2$ y $b=3$. Su gráfico se muestra en la siguiente figura

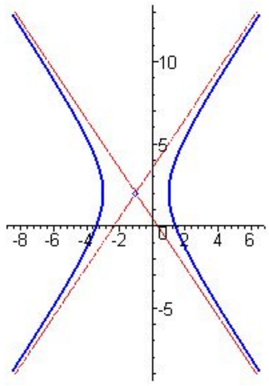


c)

En este caso

$$9x^2 - 4y^2 + 18x + 16y = 43 \iff \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Esta ecuación corresponde a una hipérbola de centro en $(-1, 2)$ y semiejes $a = 2$ y $b = 3$ que se muestra en el siguiente gráfico




Sus asíntotas (rojas en el gráfico) constituyen otra cuádrica de ecuación

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 0$$

Cada una de ellas tiene ecuación implícita

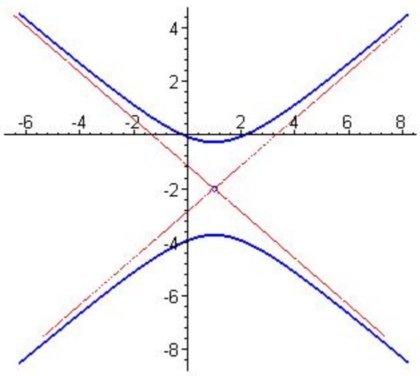
$$L_1 : \frac{x-1}{2} - \frac{y-2}{3} = 0 \qquad , \qquad L_2 : \frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{3} = 0$$

d)

Se tiene

$$4y^2 - 3x^2 + 16y + 6x = -12 \iff \frac{(y-2)^2}{3} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

Obtenemos de nuevo una hipérbola pero ahora su eje focal es vertical, su centro es $(1, 2)$ y los semiejes $a = 2$ y $b = \sqrt{3}$. Su gráfico es el siguiente



Sus asíntotas (rojas en el gráfico) constituyen otra cuádrica de ecuación

$$\frac{(y+2)^2}{3} - \frac{(x-1)^2}{4} = 0$$

Cada una de ellas tiene ecuación implícita

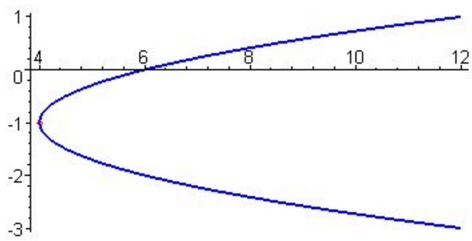
$$L_1 : \frac{y+2}{\sqrt{3}} - \frac{x-1}{2} = 0 \quad , \quad L_2 : \frac{y+2}{\sqrt{3}} + \frac{x-1}{2} = 0$$

e)

Completando cuadrados en la variable $y$ obtenemos que

$$x - 2y^2 - 4y - 6 = 0 \iff x - 4 = 2(y+1)^2$$

Se trata de una parábola de eje horizontal con vértice en $(4, -1)$. Se muestra en la siguiente figura




f)

Completando cuadrados en la variable $x$ obtenemos que

$$x^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \iff y + 2 = -\frac{1}{2}(x-3)^2$$

Se trata de una parábola de eje horizontal con vértice en $(3, -2)$. Se muestra en la siguiente figura