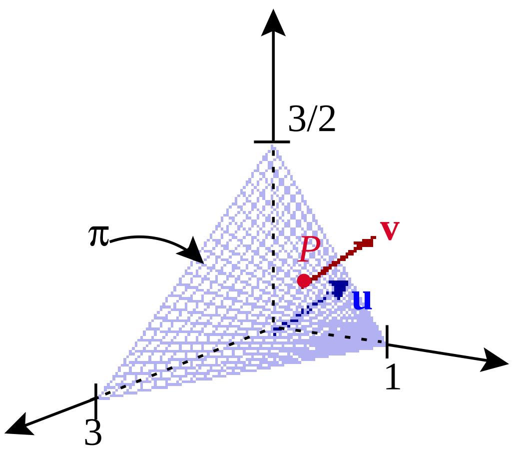
COMPLEMENTO DE LA PRÁCTICA 4

INDICE

1. Dado el plano
$$\pi: \; x + 3y + 2z = 3$$
halle un vector unitario que sea normal a π e indique sobre un esquema gráfico qué lado del plano determina.

Sabemos que el vector $(1, 3, 2)$ es normal a π pero no tiene norma 1. Consideremos el vector
$$\mathbf{u} = \frac{1}{\| (1,3,2) \|}(1,3,2)$$
Calculemos la norma de $\mathbf{u}$
$$\| \mathbf{u} \| = \left\| \frac{1}{\| (1,3,2) \|}(1,3,2) \right\| = \frac{1}{\| (1,3,2) \|} \| (1,3,2) \| = 1$$
Conseguimos entonces el vector unitario normal a π que nos pedían y podemos decir además que, por ser $\frac{1}{\| (1,3,2) \|} = \frac{1}{\sqrt{14}} > 0$, $\mathbf{u}$ y $(1, 3, 2)$ tienen el mismo sentido.

Sólo nos falta determinar qué lado de π determina $\mathbf{u}$. Para eso hagamos un esquema gráfico de π y ubiquemos en él a $\mathbf{u}$,



El origen de $\mathbf{u}$ es el $(0, 0, 0)$ que no está en π. Para averiguar cuál de los lados del plano determina $\mathbf{u}$ elegimos un punto cualquiera de π, por ejemplo el punto P que se muestra en el dibujo, y transladamos $\mathbf{u}$ hasta lograr que su origen coincida con P. Logramos así el vector $\mathbf{v}$ que se muestra en la figura y sí está *apoyado* sobre π. Como este vector $\mathbf{v}$ quedó de uno de los dos lados de π decimos que $\mathbf{u}$ *determina* ese lado de π. En este caso en particular podríamos decir que se trata del lado *que vemos* al mirar esta figura.

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$$

2. Halle la ecuación implícita del plano π que pasa por los puntos $A = (2, 0, 1)$, $B = (-3, 1, 0)$ y $C = (0, 3, -1)$.

Una forma de hacerlo sería plantear una ecuación genérica

$$ax + by + cz = d$$

y usar que los puntos A , B y C la deben satisfacer. Todo se reduce finalmente a resolver un sistema de ecuaciones.

Pero no vamos a hacer esto, lo que haremos es utilizar argumentos geométricos. Básicamente todo se reduce a recordar que los coeficientes de la ecuación que buscamos determinan una dirección ortogonal al plano. Buscamos entonces un vector con esta dirección.

Como los puntos $A, B, C \in \pi$ los vectores

$$\mathbf{u} = C - A = (-2, 3, -2) \qquad , \qquad \mathbf{v} = B - A = (-5, 1, -1)$$

son paralelos a π y por lo tanto

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-1, 8, 13)$$

nos provee la dirección normal a π que buscábamos. Luego,

$$\pi : \quad -x + 8y + 13z = d$$

Sólo nos falta hallar d. Para ello bastará usar, por ejemplo, que $A \in \pi$ y en consecuencia debe cumplir la ecuación; o sea,

$$d = (-1).2 + 8.0 + 1.13 = -2 + 13 = 11$$

De modo que

$$\pi : \quad -x + 8y + 13z = 11$$

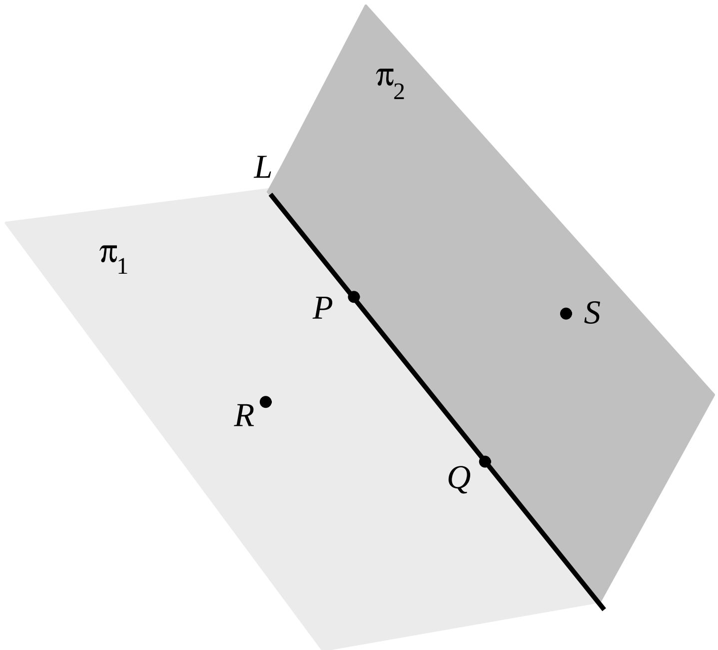
3. Halle las ecuaciones implícitas de la recta L que pasa por los puntos $P = (3, 1, 0)$ y $Q = (2, 0, -1)$.

También se puede resolver planteando un sistema de ecuaciones pero apelaremos nuevamente a argumentos geométricos.

Pretendemos encontrar dos ecuaciones de modo que

$$L : \quad \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Cada una de ellas representa a un plano. Estamos diciendo entonces que L es la intersección de dos planos. Conviene observar aquí que va a haber infinitos pares de planos cuya intersección da L [1]; esto nos anticipa que tenemos cierto grado de libertad para elegirlos. El siguiente esquema puede ayudarnos a entender la idea



Para hallar los planos π_1 y π_2 que buscamos basta hacer lo siguiente

- ➤ hallar un punto R que no esté en L. Los puntos P , Q y R generan π_1
- ➤ hallar un punto S que no esté en π_1. Los puntos P , Q y S generan π_2

Consideremos $R = (1, 0, 0)$. Como $R - P = (-2, -1, 0)$ y $Q - P = (-1, -1, -1)$ no son paralelos podemos asegurar que $R \notin L$. Trabajando como en el ejercicio anterior hallamos la ecuación de π_1

$$\pi_1 : \quad x - 2y + z = 1$$

Ahora es claro que $S = (2, 0, 0) \notin \pi_1$ [2]. De nuevo, como en el caso anterior, hallamos la ecuación de π_2

$$\pi_2 : \quad x - y = 2$$

Finalmente,

$$L : \quad \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

[1] en realidad hay un haz de planos que se interseca en L
[2] con lo cual seguro que tampoco está en L

4. Halle la región del espacio definida por la condición

$$R: \quad d(P,(1,0,3)) < 2$$

Podemos decir que

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ \| (x,y,z) - (1,0,3) \| < 2\}$$

Es decir, R es la esfera sólida de radio 2 centrada en $(1,0,3)$ excluyendo los puntos de la frontera

$$R: \ (x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 < 4$$

5. Dados los vectores $\mathbf{u} = (1,0,\sqrt{3})$ y $\mathbf{v} = (-1,0,\sqrt{3})$ halle $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ utilizando exclusivamente la definición.

Comenzamos ubicando en un esquema gráfico a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ que claramente están sobre el plano xz (la segunda coordenada de ambos extremos es 0). Luego, el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está sobre el eje y ya que debe ser ortogonal al plano xz. De modo que hasta ahora sólo podemos decir que el producto vectorial de $\mathbf{u}$ con $\mathbf{v}$ tiene la forma

$$(0,a,0)$$

para algún $a \in \mathbb{R}$.

Lo que todavía no sabemos es hacia qué lado apunta ni su longitud.

Comencemos por la longitud. Por definición,

$$\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \| = \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \| \operatorname{sen}(\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}))$$

Es muy simple hallar

$$\| \mathbf{u} \| = \sqrt{1+3} = 2 = \| \mathbf{v} \|$$

Respecto del ángulo,

$$\cos(\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \|} = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

y siendo que $0 \leqslant \angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leqslant \pi$ esto nos dice que $\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})$ está en el primer cuadrante y por lo tanto

$$\angle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\pi}{3}$$

con lo cual

$$\operatorname{sen}(\angle(\mathbf{u},\mathbf{v})) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

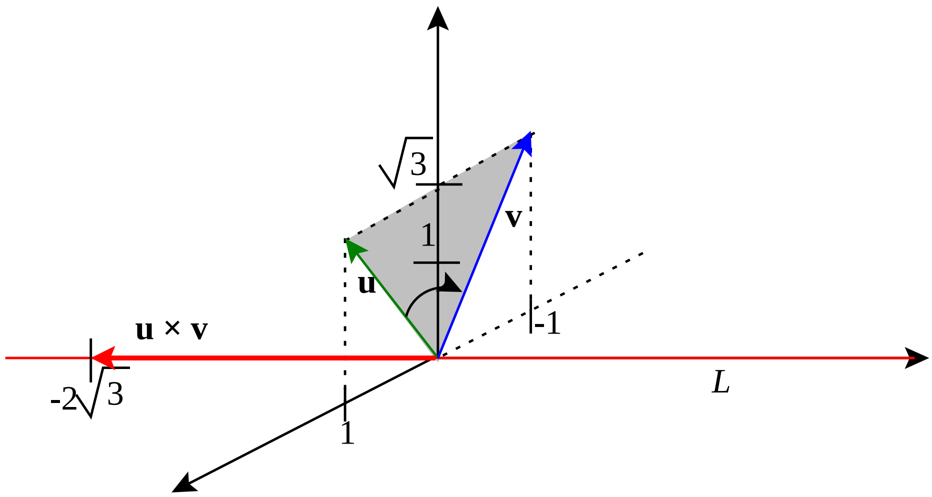
Obtenemos así que

$$\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \| = 2.2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Por último debemos determinar si el extremo de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está en el semieje real negativo del eje y o en el semieje real positivo de dicho eje. Aplicando la regla de la mano derecha es claro que debe estar en el semieje real negativo.

Concluimos entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(0, -2\sqrt{3}, 0\right)$$



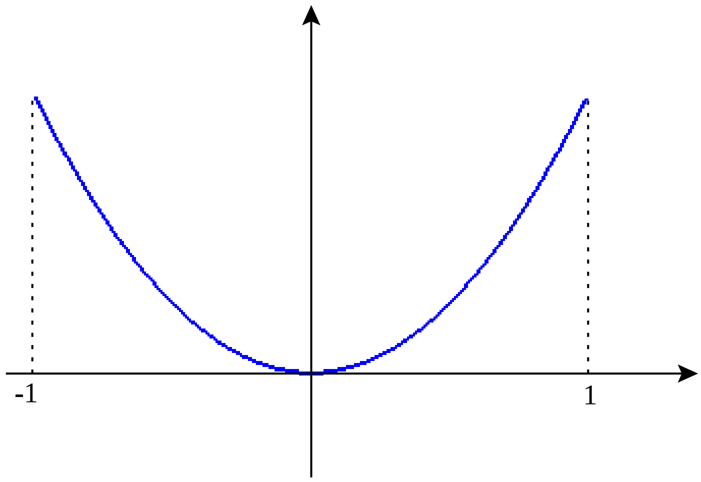
NOTA: si nos hubiesen permitido hallar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ usando propiedades, pero no simplemente la fórmula para hallar sus componentes, podríamos haber hecho lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \left[(-1)\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{k}\right] \times \left[\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{k}\right] = (-1)\mathbf{i} \times \mathbf{i} + (-\sqrt{3})\mathbf{i} \times \mathbf{k} + \sqrt{3}\mathbf{k} \times \mathbf{i} + 3\mathbf{k} \times \mathbf{k} \\
&= (-\sqrt{3})\mathbf{j} + \sqrt{3}(-\mathbf{j}) \\
&= -2\sqrt{3}\mathbf{j} \\
&= \left(0, -2\sqrt{3}, 0\right)
\end{aligned}$$

6. Represente geométricamente al conjunto

$$A = \{(x, x^2, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ 2 \leqslant z \leqslant 4\}$$

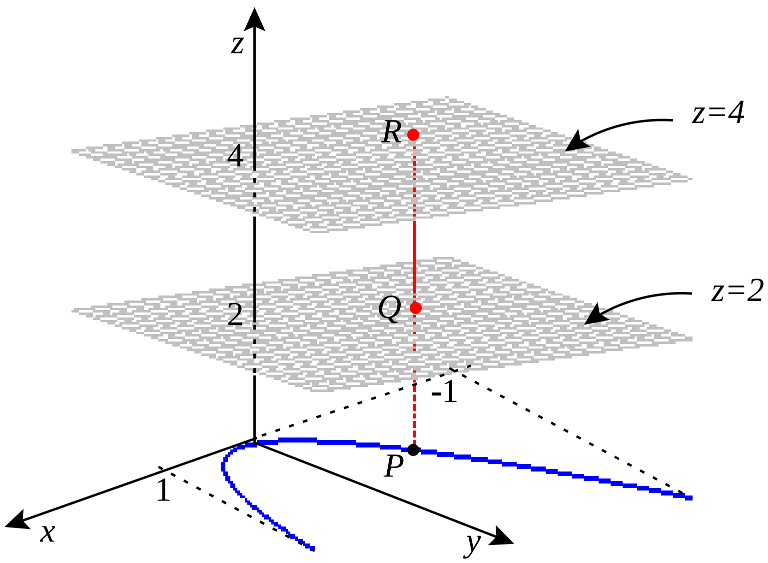
Los puntos de A tienen la particularidad que sus dos primeras coordendas describen parte de la parábola $y = x^2$.



Luego, si proyectáramos el conjunto A perpendicularmente al plano xy caería sobre esta porción de parábola. Por otro lado, como los puntos de A satisfacen

$$2 \leqslant z \leqslant 4$$

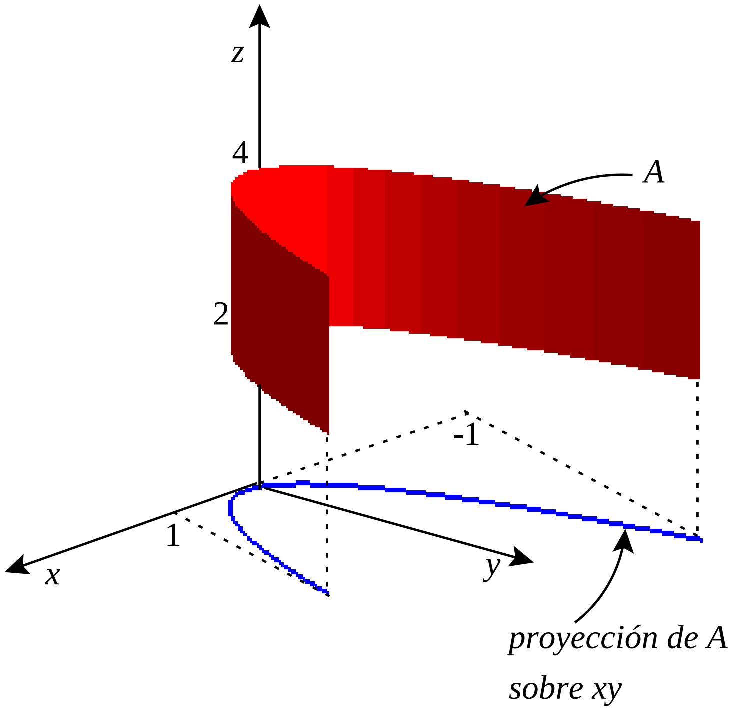
sabemos que este conjunto se encuentra entre los planos horizontales $z = 2$ y $z = 4$. Esto se muestra en la siguiente figura



donde también se aprecia que el segmento vertical $[Q, R]$, al proyectar A sobre el plano xy, *cae* sobre el punto P. Y esto ocurre no sólo para P sino para cada punto de esa parábola.

Resulta entonces que el conjunto A es parte de un cilindro parabólico; más específicamente del cilindro parabólico de ecuación

$$y = x^2$$



7. Encuentre un vector unitario $\mathbf{u}$ que satisfaga

$$\mathbf{u}\cdot(2,0,1)=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Una opción sería llamar (x, y, z) a las coordenadas de $\mathbf{u}$, plantear un sistema de ecuaciones de modo que satisfaga la condición que nos piden y resolverlo. Pero vamos a hacerlo de otra forma.

Sabemos que

$$\mathbf{u}\cdot(2,0,1)=\|\,\mathbf{u}\,\|\,\|\,(2,0,1)\,\|\cos\alpha$$

si llamamos $\alpha=\angle(\mathbf{u},(2,0,1))$. Entonces, recordando que $\mathbf{u}$ es unitario,

$$\|\,(2,0,1)\,\|\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

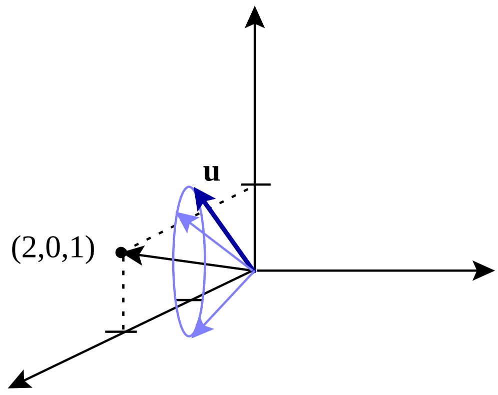
y como $\|\,(2,0,1)\,\|=\sqrt{5}$ obtenemos que

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}$$

Siendo $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, esto nos dice que

$$\alpha=\frac{\pi}{3}$$

Concluimos que hay infinitos vectores unitarios $\mathbf{u}$ que forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$ con $(2,0,1)$. Sus extremos están sobre la circunferencia que se muestra en la siguiente figura



Como nos piden *un* vector **u** que satisfaga la condición, podríamos elegir, por ejemplo, el que está señalado en el gráfico anterior que se encuentra en el plano $y = 0$. Sus coordenadas polares –en el plano xz– son

$$\left(1, \beta + \frac{\pi}{3}\right)$$

donde β representa la segunda coordenada polar –en el plano xz– de $(2, 0, 1)$; es decir,

$$\beta = \operatorname{arcsen} \tfrac{1}{\sqrt{5}}$$

A partir de aquí podemos también dar las coordenadas cartesianas de **u**

$$\mathbf{u} = \left(\cos(\operatorname{arcsen} \tfrac{1}{\sqrt{5}} + \tfrac{\pi}{3}), 0, \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} \tfrac{1}{\sqrt{5}} + \tfrac{\pi}{3})\right)$$

8. Halle las coordenadas cilíndricas y esféricas del punto P cuyas coordenadas cartesianas son $(1, 2, 3)$.

Coordenadas cilíndricas

Sabemos que

$$r = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \qquad , \qquad z = 3 \qquad , \qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Sólo nos falta hallar θ. Siendo $\cos\theta, \operatorname{sen}\theta > 0$ podemos decir que

$$\theta = \operatorname{arcsen} \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Entonces, las coordenadas cilíndricas de P son

$$\left(\sqrt{5}, \operatorname{arcsen} \frac{2}{\sqrt{5}}, 3\right)$$

Coordenadas esféricas

Sabemos que

$$\rho = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

y las otra dos están determinadas por

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{14}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ 2 &= \sqrt{14}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ 3 &= \sqrt{14}\cos\varphi \end{aligned}$$

Teniendo presente que $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ podemos decir que

$$\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{14}}$$

Respecto de θ como tiene la misma interpretación que en las coordenadas cilíndricas ya sabemos que

$$\theta = \mathrm{arcsen}\,\frac{2}{\sqrt{14}}$$

Entonces, las coordenadas esféricas de P son

$$\left(\sqrt{14}, \mathrm{arcsen}\,\frac{2}{\sqrt{5}}, \arccos\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

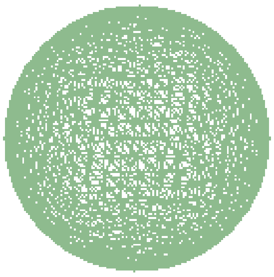
9. Haga un esquema gráfico de los siguientes subconjuntos del espacio

a) $R: \begin{cases} \rho = 2 \\ \frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \end{cases}$ *(expresado en coordenadas esféricas)*

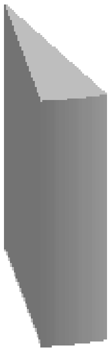
b) $R: \begin{cases} r \leqslant 2 \\ \frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \\ 0 \leqslant z \leqslant 1 \end{cases}$ *(expresado en coordenadas cilíndricas)*

a)

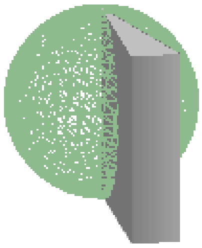
La ecuación $\rho = 2$ representa la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 2 mientras que las inecuaciones $\frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ indica la región del espacio que se encuentra *entre* los semiplanos $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$. La región R es entoncss la intersección de estos dos conjuntos



esfera (hueca)



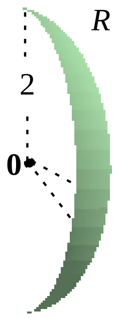
región sólida



intersección

NOTA: es importante que quede claro que la *región sólida* no está limitada verticalmente ni tampoco hacia adelante. Lógicamente el gráfico representa sólo una porción de ella.

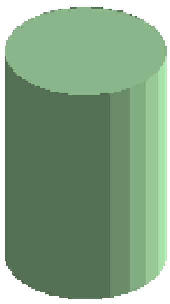
Entonces la región R resulta ser



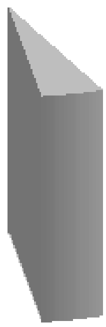
Informalmente podríamos decir que R es la *cáscara* de un *gajo* de la esfera sólida. ¿Cómo deberíamos haber condicionado a las variables esféricas para obtener el *gajo* completo?

b)

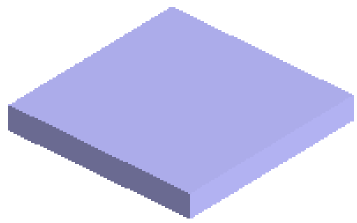
La siguiente figura muestra lo que representa cada inecuación o cadena de inecuaciones



$r \leq 2$



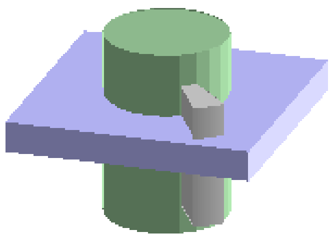
$\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/4$



$0 \leq z \leq 1$

NOTA: en todos los casos son conjuntos sólidos. Los dos primeros no están limitados verticalmente, ni hacia adelante en el caso del segundo y el último sólo está limitado verticalmente.

Si ponemos a todas estas regiones juntas podemos comenzar a tener una idea de la intersección



Finalmente, la región R resulta ser