COMPLEMENTO DE LA PRÁCTICA 5

INDICE

1. Halle las soluciones del sistema

$$\begin{cases} xy^2 + x^3 - x = 0 \\ yx^2 + y^3 - y = 0 \end{cases}$$

Observemos que los primeros miembros de estas ecuaciones son funciones polinómicas que se pueden factorizar

$$xy^2 + x^3 - x = x(y^2 + x^2 - 1) \qquad , \qquad yx^2 + y^3 - y = y(x^2 + y^2 - 1)$$

por lo tanto,

$$\begin{cases} xy^2 + x^3 - x = 0 \\ yx^2 + y^3 - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(y^2 + x^2 - 1) = 0 \\ y(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \quad \text{o} \quad y^2 + x^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \quad \text{o} \quad y^2 + x^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = 0 \quad \text{o} \quad y^2 + x^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

y esto equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y^2 + x^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} y^2 + x^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

es decir,

$$(x, y) = (0, 0) \quad \text{o} \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = 1$$

Llegamos así a la solución del sistema que nos dieron. Los (x, y) de $\mathbb{R}^2$ que satisfacen

$$\begin{cases} xy^2 + x^3 - x = 0 \\ yx^2 + y^3 - y = 0 \end{cases}$$

son

$$(0, 0) \quad , \quad (1, 0) \quad , \quad (-1, 0) \quad , \quad (0, 1) \quad , \quad (0, -1)$$

y todos los puntos de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$

Esto se puede resumir, dado que los puntos $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$ están en la circunferencia, diciendo que la solución del sistema es:

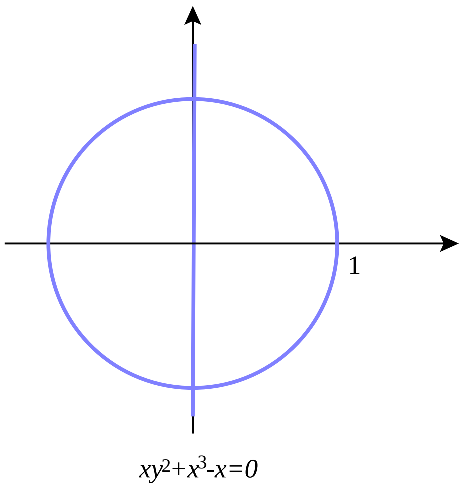
$$(0,0) \text{ y todos los puntos de la circunferencia: } x^2 + y^2 = 1$$

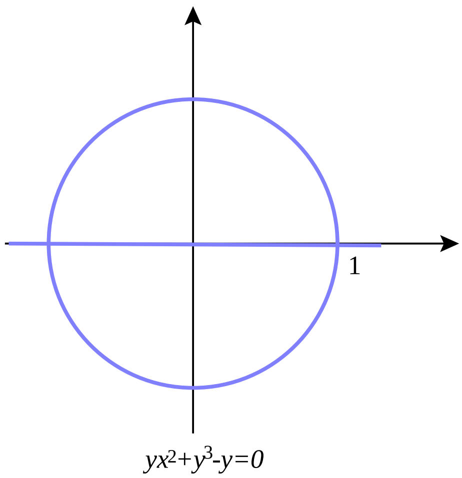
Para analizarlo gráficamente conviene notar que la primera ecuación representa a los (x, y) de $\mathbb{R}^2$ que satisfacen

$$x = 0 \qquad \text{o} \qquad y^2 + x^2 = 1$$

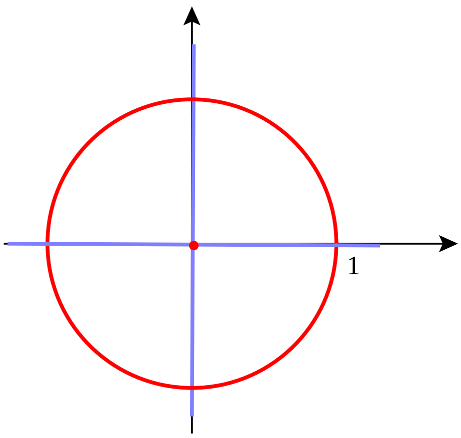
o sea, es la unión de la recta vertical $x = 0$ (el eje y) y la circunferencia unitaria.

Análogamente, la segunda ecuación representa la unión del eje x con la misma circunferencia,





Cuando intersecamos estos dos conjuntos nos queda



2. Halle las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$$

Notemos que estas ecuaciones se pueden escribir en la forma

$$x^3 - (x - y) = 0 \qquad , \qquad y^3 + (x - y) = 0$$

Esto sugiere

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - (x - y) = 0 \\ y^3 + (x - y) = 0 \end{cases} \underset{x-y=x^3}{\overset{\Longleftrightarrow}{\uparrow}} \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x^3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 = -x^3 = (-x)^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^3 - 2x = 0 \\ y = -x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \quad \text{o} \quad x^2 = 2 \\ y = -x \end{cases}$$

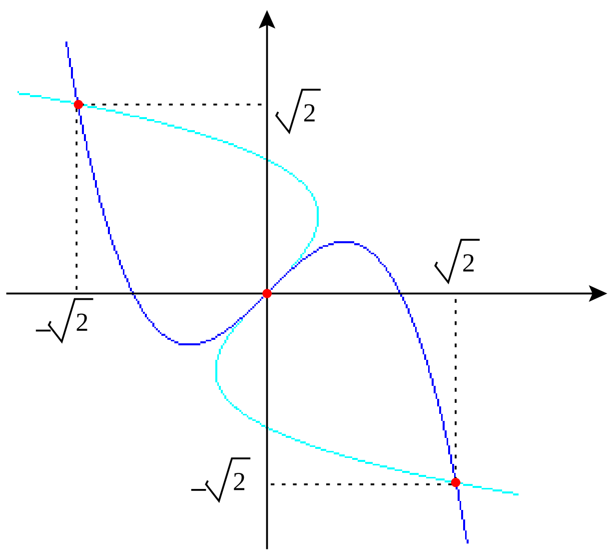
De modo que el sistema dado es equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \quad \text{o} \quad x = \sqrt{2} \quad \text{o} \quad x = -\sqrt{2} \\ y = -x \end{cases}$$

y esto nos dice que tiene exactamente tres puntos que lo satisfacen

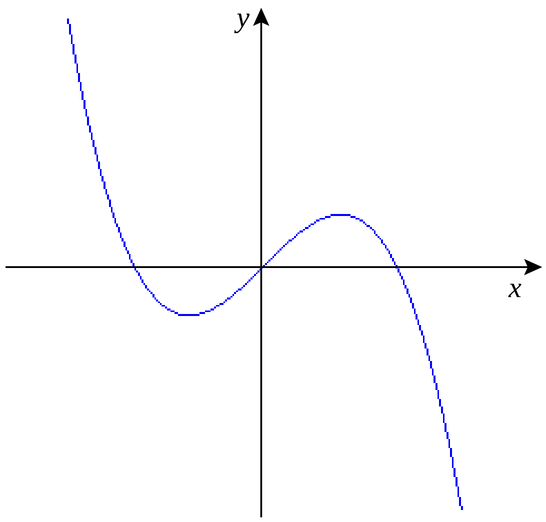
$$(0,0) \quad , \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad , \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Gráficamente,

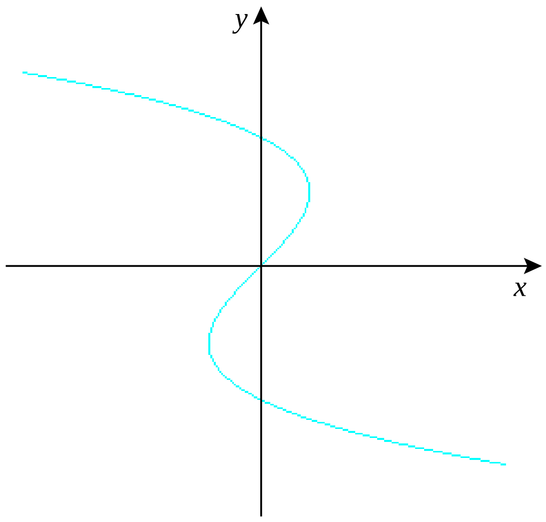


Tal vez ayude a entenderlo mejor hacer notar que cada una de las ecuaciones que componen el sistema representa el gráfico de una función,

$$y = x - x^3 \quad \text{(la primera)} \qquad \text{y} \qquad x = y - y^3 \quad \text{(la segunda)}$$



$y=x-x^3$



$x=y-y^3$

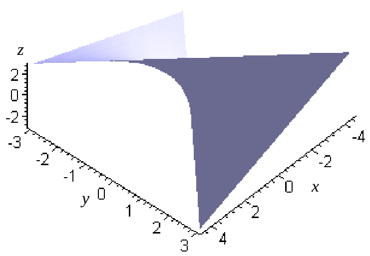
3. Halle las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 2x + yz = 0 \\ 2y + xz = 0 \\ 2z + xy = 0 \end{cases}$$

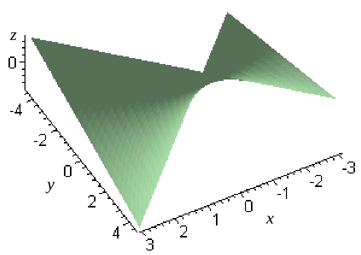
Para tratar de entender este resultado desde el punto de vista geométrico graficamos cada una de las superficies que estamos intersecando,

$$S: \quad 2x + yz = 0 \quad , \quad T: \quad 2y + xz = 0 \quad , \quad U: \quad 2z + xy = 0$$

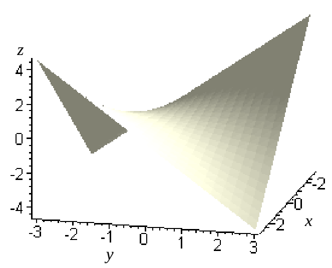
lo que se muestra en la siguiente figura



S



T



U

En realidad, es siempre la misma superficie que ha sido rotada [1].

Como en los casos anteriores trabajamos cuidando de mantener la equivalencia entre los sistemas de modo que podamos estar seguros de no haber perdido ni agregado puntos al conjunto de soluciones,

[1]se trata de paraboloides hiperbólicos cuyos ejes no son paralelos a los coordenados

$$\begin{cases}2x+yz=0\\2y+xz=0\\2z+xy=0\end{cases} \iff \begin{cases}-x=\frac{1}{2}yz\\2y=-xz\\2z=-xy\end{cases} \iff \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\2y=\frac{1}{2}yz^2\\2z=\frac{1}{2}y^2z\end{cases} \iff \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\4y-yz^2=0\\4z-y^2z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\y(4-z^2)=0\\z(4-y^2)=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\y=0 \quad \text{o} \quad 4-z^2=0\\z(4-y^2)=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\y=0\\z(4-y^2)=0\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\4-z^2=0\\z(4-y^2)=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\y=0\\z=0 \quad \text{o} \quad 4-y^2=0\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\4-z^2=0\\z=0 \quad \text{o} \quad 4-y^2=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\y=0\\z=0\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\y=0\\4-y^2=0\end{cases}$$

$$\text{o} \quad \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\4-z^2=0\\z=0\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\4-z^2=0\\4-y^2=0\end{cases}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ 2^{\text{o}} \text{ y } 3^{\text{o}} \text{ incomp.}}}{\iff} \begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\|y|=2\\|z|=2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\y=2\\|z|=2\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\y=-2\\|z|=2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\y=2\\z=2\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\y=2\\z=-2\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\y=-2\\z=2\end{cases}$$

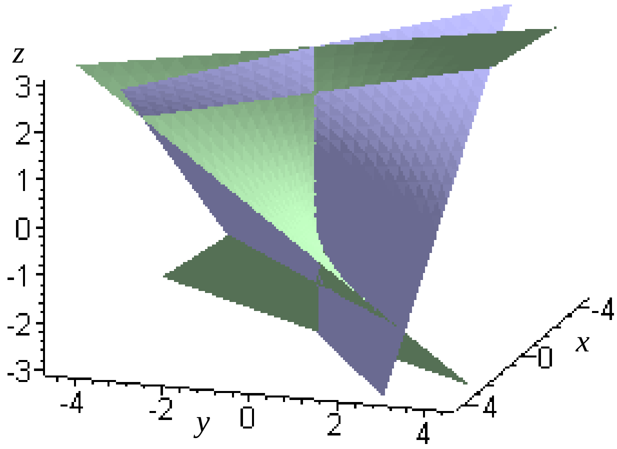
$$\text{o} \quad \begin{cases}x=-\frac{1}{2}yz\\y=-2\\z=-2\end{cases}$$

$$\iff \quad (x,y,z)=\begin{cases}(0,0,0)\ ,\ (-2,2,2)\ ,\ (2,2,-2)\\(2,-2,2)\ ,\ (-2,-2,-2)\end{cases}$$

Llegamos entonces a que la solución de este sistema está formada por cinco puntos,

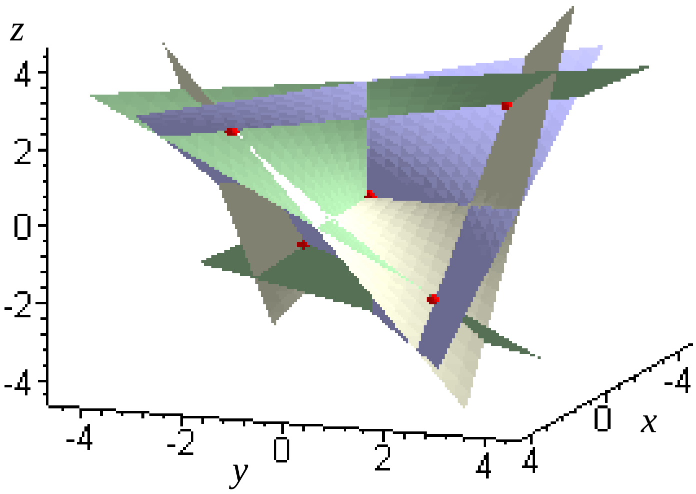
$$\{(0,0,0)\ ,\ (-2,2,2)\ ,\ (2,2,-2)\ ,\ (2,-2,2)\ ,\ (-2,-2,-2)\}$$

Antes de ver la intersección entre las tres, veamos cómo se cortan dos de ellas



$S \cap T$

Finalmente, en la siguiente figura se muestra el resultado de intersecarlas



$S \cap\ T \cap U$

4. Halle las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

La primera ecuación representa un paraboloide y la segunda un cilindro

$$S: \quad z = x^2 + y^2 \qquad , \qquad T: \quad x^2 + y^2 = 4$$

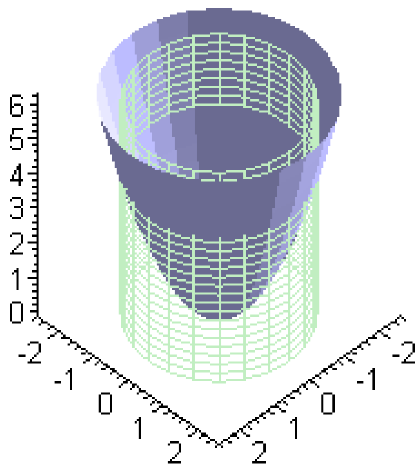
La solución del sistema será entonces la intersección de estas dos cuádricas.

Notemos que

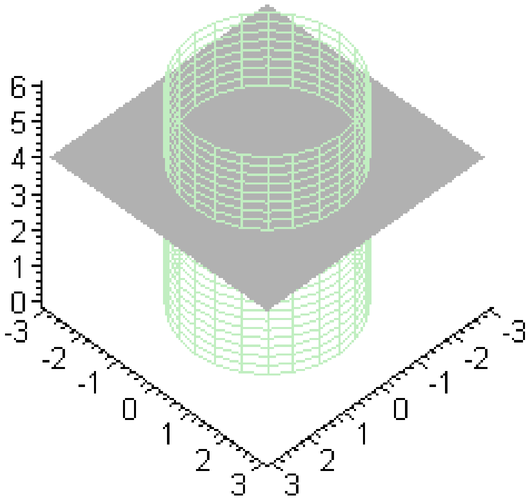
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Visto de esta manera es muy fácil darse cuenta que se trata de una circunferencia que está en el plano $z = 4$ siendo su centro la intersección del eje z con ese plano horizontal.

Gráficamente,

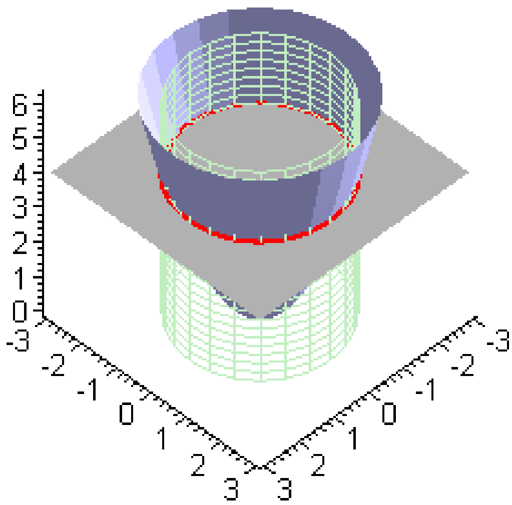


representa el sistema original, mientras que



representa el sistema equivalente.

En realidad, el paraboloide, el plano y el cilindro se intersecan sobre la curva que es solución del sistema; i.e., la circunferencia de centro $(0, 0, 4)$ y radio 2 que está sobre el plano $z = 4$. Esto se ilustra en la siguiente figura,



5. Haga un gráfico aproximado del sólido W limitado por las superficies

$$W: \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y + z = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Para que sea más fácil hacer mención a ellas les pondremos nombres a las superficies que bordean a W

$$S : x^2 - y = 0 \quad , \quad T : y + z = 2 \quad , \quad U : z = 0$$

No haremos una resolución directa del ejercicio sino que vamos a aprovechar la ocasión para mostrar la utilidad de saber describir paramétricamente los puntos de superficies y de curvas.

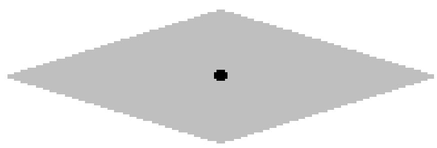
Para hacer los gráficos utilizaremos el programa Maple y para lograr el objetivo de graficar W veremos que necesitaremos saber cómo se escribe un punto genérico de las superficies que lo rodean.

La instrucción que debemos escribir para que Maple dibuje, por ejemplo a U, es

```
plot3d([s,t,0],s=-1..1,t=-1..1):
```
[2]

- `[s,t,0]`
  describe un punto genérico del plano U
- `s=-1..1,t=-1..1`
  indica el rango de cada parámetro; en este caso significa que $s, t \in [-1, 1]$

Esta instrucción produce como gráfico una parte de U (desde luego es imposible dibujar el plano completo); concretamente, el cuadrado de lado 2 centrado en $(0, 0, 0)$



El punto negro indica el origen de $\mathbb{R}^3$.

Nos ocupamos ahora de T. Para dibujar una parte de T necesitamos sus ecuaciones paramétricas

$$T : \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad , \qquad -1 \leqslant s, t \leqslant 1$$

[2] omitimos las instrucciones sobre color y estilo para evitar distraer la atención. Con esta instrucción se genera el gráfico pero para verlo es necesaria otra instrucción adicional

y entonces usamos la instrucción

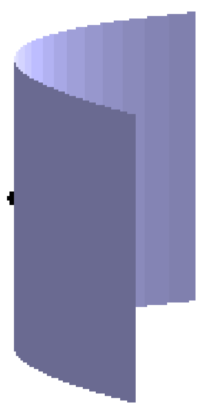
```
plot3d([s,t,2-t],s=-1..1,t=-1..1):
```


Ahora dibujamos una parte del cilindro parabólico S. Sus ecuaciones paramétricas

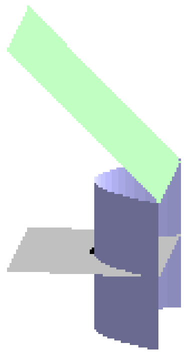
$$S\ :\quad \begin{cases} x = s \\ y = s^2 \\ z = t \end{cases} \qquad , \qquad -1 \leqslant s, t \leqslant 1$$

la instrucción correspondiente es

```
plot3d([s,s^2,t],s=-1..1,t=-1..1):
```



Si juntamos todo en un gráfico obtenemos



Mirando esta figura deberíamos sentir decepción. No se parece nada a un *sólido*. ¿Qué falló? Pensando un rato deberíamos concluir que *las partes* que dibujamos de cada superficie no son exactamente las que bordean a W. Y pensando un poquito más descubriremos que la falla no está en la descripción paramétrica de los puntos de S , T y U sino en el rango que le asignamos a los parámetros. Podemos decir que

– deberíamos extender hacia abajo la parte dibujada del plano T

– el cilindro S debería extenderse hacia arriba

– el plano U tal vez debería prolongarse hacia la derecha

Una posibilidad sería ir probando modificaciones en los valores que pueden tomar s y t hasta lograr lo que queremos. No parece muy eficiente. Tomemos un lápiz y hagamos algunas cuentas para tener un poco más claro cuáles son las modificaciones:

1. parece importante saber cuál es la intersección de T con U: $\begin{cases} z = 2 - y \\ z = 0 \end{cases}$. Se trata claramente de la recta $\begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

2. este dato y hecho que el cilindro parabólico S está incluido en el semiespacio $y \geqslant 0$ nos dicen que las segundas coordenadas de los puntos de W se mueven entre 0 y 2. Esto nos sugiere hacer estas primeras modificaciones

   ```
   plot3d([s,t,0],s=-1..1,t=0..2):
   ```

   ```
   plot3d([s,t,2-t],s=-1..1,t=0..2):
   ```

   para T y U. Para S hay que dar un paso más para lograr que la segunda coordenada –s^2– esté entre 0 y 2

$$0 \leqslant s^2 \leqslant 2$$

es decir

$$| s | \leqslant \sqrt{2}$$

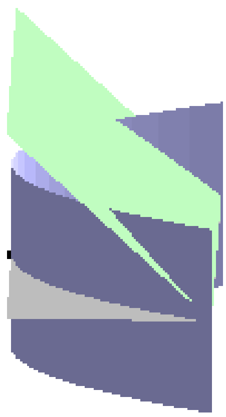
o sea, $-\sqrt{2} \leqslant s \leqslant \sqrt{2}$. De modo que la última instrucción queda

`plot3d([s,s^2,t],s=-sqrt(2)..sqrt(2),t=-1..1):` [3]

3. con la última modificación cambiamos también el rango de la primer variable en S. Hagamos entonces esa misma modificación en las otras dos. Con lo cual quedan

```
plot3d([s,t,0],s=-sqrt(2)..sqrt(2),t=0..2):

plot3d([s,t,2-t],s=-sqrt(2)..sqrt(2),t=0..2):

plot3d([s,s^2,t],s=-sqrt(2)..sqrt(2),t=-1..1):
```

Dibujemos a ver si vamos por buen camino



Está mucho mejor pero aun tenemos que modificar el cilindro parabólico. Necesitamos saber cuál es el mayor valor que toma la última coordenada. Recordando que la segunda está entre 0 y 2 y los (x, y, z) de T satisfacen $z = 2 - y$ resulta que

$$0 \leqslant z \leqslant 2$$

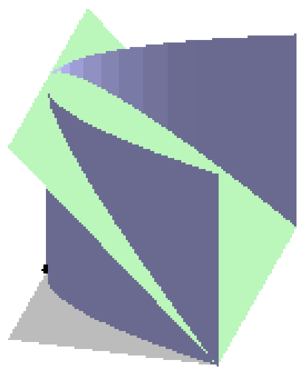
Modifiquemos entonces las terceras coordenadas en las instrucciones

```
plot3d([s,t,0],s=-sqrt(2)..sqrt(2),t=0..2):

plot3d([s,t,2-t],s=-sqrt(2)..sqrt(2),t=0..2):

plot3d([s,s^2,t],s=-sqrt(2)..sqrt(2),t=0..2):
```

[3] `sqrt(2)` es la instrucción de Maple para $\sqrt{2}$

NOTA: en realidad sólo tuvimos que corregir la última instrucción. En los dos primeros casos, o bien no hacía falta porque en U la última coordenada sólo puede valer 0 o bien la segunda coordenada está dada en función de la primera (para T).

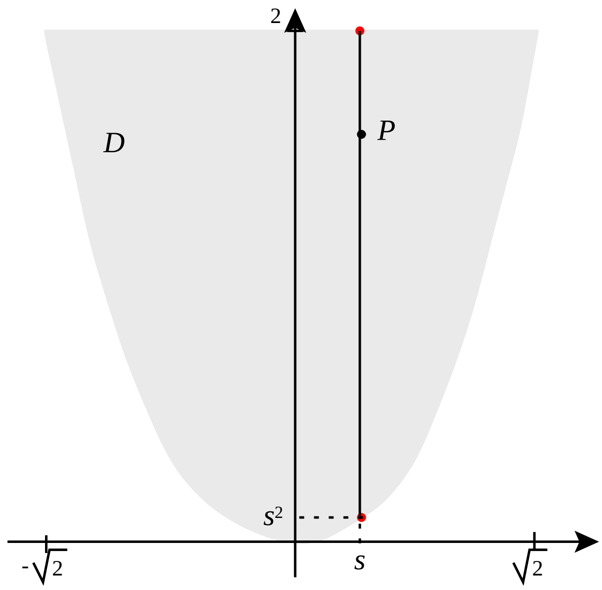
Volvamos a dibujar,



Ya estamos mucho más cerca del objetivo. Tenemos una idea bastante clara de quién es W pero podríamos decir que está un poco *desprolijo*: falta *recortar* las partes de S , T y U que no forman parte de W.

➤ Recortamos U

Mirando el gráfico es claro que de la parte de U que dibujamos tenemos que *sacar* lo que está fuera de la parábola que se obtiene al intersecar S con U. Se trata entonces de describir paramétricamente esa parte de U –que llamaremos D– para poder utilizar la instrucción correspondiente.



El esquema gráfico anterior nos va a ayudar a entender la situación. El punto P representa un punto genérico de D y se proyecta sobre eje x en s por lo que pertenece al segmento vertical que une los puntos (rojos)

$$(s, s^2) \quad , \quad (s, 2)$$

sabemos que en tal caso existe un $t \in [0, 1]$

$$P = (s, s^2) + t[(s, 2) - (s, s^2)] = (s, s^2 + t(2 - s^2))$$

Tenemos ya las ecuaciones paramétricas de D

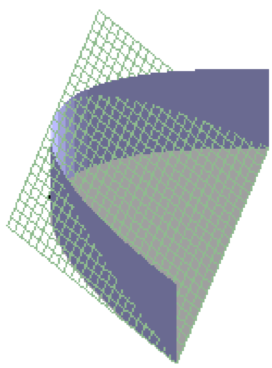
$$D : \quad \begin{cases} x = s \\ y = s^2 + t(2 - s^2) \\ z = 0 \end{cases} \qquad , \qquad -\sqrt{2} \leqslant s \leqslant \sqrt{2}\ ,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Reemplazamos la instrucción de U por la de D (=U recortado)

```
plot3d([s,s^2+t*(2-s^2),0],s=-sqrt(2)..sqrt(2),t=0..1):
```

con lo cual obtenemos

A modo de control, dibujamos W nuevamente cambiando U por D



Comprobamos que recortamos bien a U.

➤ Recortamos T
Mirando este último gráfico queda claro que todos los puntos de la parte de T que limita a W *caen* en D. Luego, sus dos primeras coordenadas son las de D. Tenemos entonces las ecuaciones paramétricas de T *recortado* al que llamaremos E

$$E: \quad \begin{cases} x = s \\ y = s^2 + t(2 - s^2) \\ z = (2 - s^2)(1 - t) \end{cases} \qquad , \qquad -\sqrt{2} \leqslant s \leqslant \sqrt{2}\,,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

La instrucción es

```
plot3d([s,s^2+t*(2-s^2),(2-s^2)*(1-t)],s=-sqrt(2)..sqrt(2),t=0..1):
```

y su aspecto

Volvemos a controlar cómo va quedando W

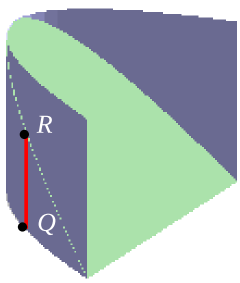
Nos quedamos tranquilos: recortamos bien a T.

➤ Recortamos S

Está claro que todos los puntos de S, en particular los que forman parte de W, al proyectarlos sobre el plano *xy caen* sobre la parábola $y = x^2$ y más específicamente para valores de x entre $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$. Con lo cual ya tenemos las dos primeras coordenadas

$$x = s \quad , \quad y = s^2 \qquad\qquad (-\sqrt{2} \leqslant s \leqslant \sqrt{2})$$

Lo que nos va a costar un poco más es determinar qué valores debe tomar z. Pero en realidad no tanto porque podemos reproducir el argumento usado al recortar U. Si llamamos F a la parte de S que limita a W, es claro que cada punto P de F está sobre un segmento vertical que se proyecta sobre un punto genérico de la parábola



El extremo inferior de este segmento es $Q = (s, s^2, 0)$ y el extremo superior es $R = (s, s^2, 2 - s^2)$ pues R está también en el plano T. En consecuencia, por estar en el segmento QR, P se escribe

$$P = Q + t(R - Q) = (s, s^2, t(2 - s^2)) \qquad\qquad (\text{para un } t \in [0, 1])$$

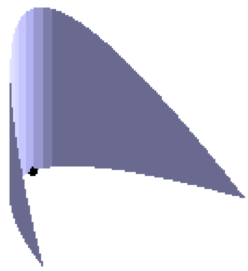
De modo que las ecuaciones paramétricas de F son

$$F : \begin{cases} x = s \\ y = s^2 \\ z = t(2 - s^2) \end{cases} \quad , \qquad -\sqrt{2} \leqslant s \leqslant \sqrt{2}\,,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

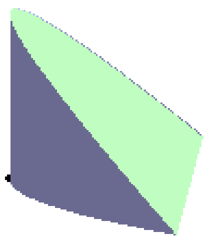
La instrucción para dibujar a F es

```
plot3d([s,s^2,t*(2-s^2)],s=-sqrt(2)..sqrt(2),t=0..1):
```

que produce



Finalmente llegamos a W



Nota: sacamos como conclusión que fue muy importante saber proyectar sobre el plano xy[4] y desde luego saber encontrar las ecuaciones paramétricas de las superficies que limitan al sólido.

[4]en este caso; debido a que el cilindro S es vertical