

COMPLEMENTO DE LA PRÁCTICA 6

INDICE

Ejercicio 1	(<i>subespacio</i>)	1
Ejercicio 2	(<i>subespacios propios de \mathbb{R}^2</i>)	3
Ejercicio 3	(<i>subespacio generado</i>)	3
Ejercicio 4	(<i>subespacio generado - descripción</i>)	6
Ejercicio 5	(<i>coeficientes de ecuaciones pensados como vectores</i>)	7
Ejercicio 6	(<i>dependencia e independencia lineal</i>)	10
Ejercicio 7	(<i>componentes de un vector en una base</i>)	14
Ejercicio 8	(<i>cálculo de la dimensión de un subespacio generado</i>)	15
Ejercicio 9	(<i>extensión de una base de un subespacio</i>)	17
Ejercicio 10	(<i>ecuaciones de un subespacio</i>)	18
Ejercicio 11	(<i>complemento ortogonal</i>)	20
Ejercicio 12	(<i>base ortogonal — base ortonormal</i>)	21
Ejercicio 13	(<i>una ecuación diferencial</i>)	22

1. Analice si los siguientes conjuntos son subespacios

- a) $\mathbb{S} = \{t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \mid t, s \in \mathbb{R}\}$ $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ fijos
 b) $\mathbb{S} : ax + by + c = 0$ $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ o $b \neq 0$
 c) $\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\} \cup \{(0, 0)\}$

a)□ $(0, 0, 0) \in \mathbb{S}$

$$(0, 0, 0) = 0 \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{S}$$

pues $t = 0$ y $s = 0$ son números reales.

□ si $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{S}$, entonces $\mathbf{w} + \mathbf{z} \in \mathbb{S}$

Sabemos que

$$\mathbf{w} = t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{z} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$$

para ciertos $t, s, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$; con lo cual,

$$\mathbf{w} + \mathbf{z} = t\mathbf{u} + s\mathbf{v} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} = (t + \lambda)\mathbf{u} + (s + \mu)\mathbf{v} \in \mathbb{S}$$

pues $t + \lambda$ y $s + \mu$ son números reales.

□ si $\mathbf{w} \in \mathbb{S}$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces $a\mathbf{w} \in \mathbb{S}$

Por estar en \mathbb{S} , \mathbf{w} se escribe en la forma

$$\mathbf{w} = t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \in \mathbb{S}$$

para ciertos $t, s \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$a\mathbf{w} = a(t\mathbf{u} + s\mathbf{v}) = at\mathbf{u} + as\mathbf{v} \in \mathbb{S}$$

b)□ $(0, 0, 0) \in \mathbb{S}$

Basta reemplazar $x = 0$ e $y = 0$ en la ecuación para comprobar que $(0, 0, 0)$ la satisface *siempre y cuando*

$$c = 0$$

Luego, $(0, 0, 0)$ estará en \mathbb{S} si y sólo si $c = 0$. Concluimos entonces que si $c = 0$, \mathbb{S} *puede ser* subespacio de \mathbb{R}^3 ; en cambio, si $c \neq 0$, \mathbb{S} no es subespacio porque no contiene al origen.

De ahora en más vamos a suponer que $c = 0$; i.e.,

$$\mathbb{S} : ax + by = 0$$

□ si $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{S}$, entonces $\mathbf{w} + \mathbf{z} \in \mathbb{S}$

Digamos que

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \quad , \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$$

con lo cual,

$$\mathbf{w} + \mathbf{z} = (w_1 + z_1, w_2 + z_2, w_3 + z_3)$$

y dado que $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{S}$,

$$aw_1 + bw_2 = 0 \quad , \quad az_1 + bz_2 = 0$$

Tenemos entonces,

$$a(w_1 + z_1) + b(w_2 + z_2) = (aw_1 + bw_2) + (az_1 + bz_2) = 0 + 0 = 0$$

y con esto,

$$\mathbf{w} + \mathbf{z} \in \mathbb{S}$$

□ si $\mathbf{w} \in \mathbb{S}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda\mathbf{w} \in \mathbb{S}$

Volviendo a escribir $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, por estar en \mathbb{S} podemos decir que

$$aw_1 + bw_2 = 0$$

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda\mathbf{w} = (\lambda w_1, \lambda w_2, \lambda w_3)$$

de forma que $\lambda\mathbf{w} \in \mathbb{S}$ ya que

$$a\lambda w_1 + b\lambda w_2 = \lambda(aw_1 + bw_2) = \lambda \cdot 0 = 0$$

En resumen,

\mathbb{S} es subespacio de \mathbb{R}^3 si $c = 0$ y \mathbb{S} **no** es subespacio de \mathbb{R}^3 si $c \neq 0$

c)

□ $(0, 0) \in \mathbb{S}$

Estamos seguros de que esto sucede por la propia definición de \mathbb{S} .

□ si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{S}$

Digamos que

$$\mathbf{u} = (x_1, y_1) \quad , \quad \mathbf{v} = (x_2, y_2)$$

A menos que uno de ellos sea $(0, 0)$, se debe cumplir

$$x_1 \neq y_1 \quad , \quad x_2 \neq y_2$$

si los sumamos,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Para que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ estuviera en \mathbb{S} debería ser $x_1 + x_2 \neq y_1 + y_2$. Pero no podemos asegurar que esto pase siempre. Por ejemplo, si tomamos

$$\mathbf{u} = (1, 3) \quad , \quad \mathbf{v} = (3, 1)$$

ambos están en \mathbb{S} pues $1 \neq 3$ pero sin embargo,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (4, 4) \notin \mathbb{S}$$

pues tiene ambas coordenadas iguales.

Conclusión: \mathbb{S} **no** es subespacio de \mathbb{R}^2 .

2. Compruebe que los únicos subespacios *propios* de \mathbb{R}^2 son las rectas que pasan por el origen.

Supongamos que \mathbb{S} es un subespacio propio de \mathbb{R}^2 ; es decir,

$$\mathbb{S} \neq \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbb{S} \neq \mathbb{R}^2$$

Intentaremos obtener consecuencias de estos hechos que nos hagan llegar a la conclusión.

Por ser no nulo,

$$\dim \mathbb{S} \geq 1$$

Por ser subespacio de \mathbb{R}^2 ,

$$\dim \mathbb{S} \leq 2$$

Pero si fuese $\dim \mathbb{S} = 2$, resultaría que $\mathbb{S} = \mathbb{R}^2$. En consecuencia debe ser

$$\dim \mathbb{S} = 1$$

y por consiguiente cualquier vector no nulo de \mathbb{S} lo genera. Como \mathbb{S} tiene dimensión mayor o igual que 1 podemos asegurar que existe $\mathbf{u} \in \mathbb{S}$ no nulo; luego,

$$\mathbb{S} = \langle \mathbf{u} \rangle$$

lo que nos lleva a decir que

$$\mathbb{S} = \{t\mathbf{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

o sea, \mathbb{S} es una recta.

3. Analice en cada caso si el vector dado pertenece o no a \mathbb{S}

a) $(1, 3, 2)$, $\mathbb{S} = \langle (1, -3, 5), (0, 4, -2) \rangle$

b) $(1, 1, 1)$, $\mathbb{S} = \langle (1, -3, 5), (0, 4, -2) \rangle$

c) $X + 4$, $\mathbb{S} = \langle 2X - 1, X^2 - 4 \rangle \subset \mathbb{R}[X]$

d) f , $\mathbb{S} = \langle g, h \rangle \subset C(-1, 1)$ siendo $f(x) = 3e^x$, $g(x) = \sinh x$, $h(x) = \cosh x$

a)

Si necesitáramos averiguar si un número considerable de vectores están o no están en \mathbb{S} tal vez nos convendría escribir a \mathbb{S} como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones; pero dado que sólo se trata de un vector abordaremos de otra forma este problema.

Decir que un vector está en \mathbb{S} es decir que se puede escribir como combinación lineal de sus generadores. Haremos esto. Vamos a suponer que $(1, 3, 2)$ se puede escribir en la forma

$$(1, 3, 2) = t(1, -3, 5) + s(0, 4, -2)$$

Si encontramos los valores de t y de s habremos probado que está en \mathbb{S} . Si, por el contrario, comprobamos que no pueden existir sabremos que no está en \mathbb{S} .

Partimos entonces de

$$(1, 3, 2) = t(1, -3, 5) + s(0, 4, -2)$$

que equivale a decir que

$$1 = t$$

$$3 = -3t + 4s$$

$$2 = 5t - 2s$$

Es simple comprobar que

$$t = 1 \quad \text{y} \quad s = \frac{3}{2}$$

satisfacen este sistema. Luego,

$$(1, 3, 2) = (1, -3, 5) + \frac{3}{2}(0, 4, -2)$$

y por lo tanto,

$$(1, 3, 2) \in \mathbb{S}$$

b)

Razonando como en el inciso anterior planteamos

$$(1, 1, 1) = t(1, -3, 5) + s(0, 4, -2)$$

que equivale al sistema

$$1 = t$$

$$1 = -3t + 4s$$

$$1 = 5t - 2s$$

Las dos primeras ecuaciones nos dicen que $t = 1$ y $s = 1$. Pero si los reemplazamos en la tercera obtenemos

$$1 = 5 - 2$$

lo que es absurdo. Esto nos dice que no es posible escribir a $(1, 1, 1)$ como combinación de los generadores de \mathbb{S} . En consecuencia,

$$(1, 1, 1) \notin \mathbb{S}$$

c)

Para probar que $X + 4 \in \mathbb{S}$ deberíamos poder encontrar escalares $t, s \in \mathbb{R}$ tales que

$$X + 4 = t(2X - 1) + s(X^2 - 4)$$

o sea que

$$X + 4 = sX^2 + 2tX - t - 4s$$

recordando que para que dos polinomios sean iguales deben tener el mismo grado y los mismos coeficientes (correspondientes a monomios del mismo grado) resulta que

$$s = 0 \quad , \quad 2t = 1 \quad \text{y} \quad -t - 4s = 4$$

i.e.,

$$s = 0 \quad , \quad t = \frac{1}{2} \quad , \quad t = -4$$

como esto es absurdo concluimos que

$$2X - 1 \notin \mathbb{S}$$

d)

Supongamos que

$$f = ag + bh \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Esto es decir que —para todo $x \in (-1, 1)$ — vale

$$3e^x = a \sinh x + b \cosh x$$

Recordando la definición de las funciones hiperbólicas esto se expresa en la forma

$$3e^x = \frac{a}{2}e^x - \frac{a}{2}e^{-x} + \frac{b}{2}e^x + \frac{b}{2}e^{-x} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)e^x + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)e^{-x}$$

y vale para todo $x \in (-1, 1)$.

En particular debe valer, por ejemplo, para $x = 0$ y para $x = \frac{1}{2}$; es decir,

$$3 = 3e^0 = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right) = b \quad \text{y} \quad 3e^{1/2} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)e^{1/2} + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)e^{-1/2}$$

equivalentemente, multiplicando miembro a miembro por $e^{1/2}$,

$$b = 3 \quad , \quad \left(\frac{3}{2} - \frac{a}{2}\right)e = \frac{3}{2} - \frac{a}{2}$$

Si fuese $a \neq 3$ resultaría $e = 1$, lo que es absurdo; luego,

$$a = b = 3$$

y entonces,

$$f = 3g + 3h$$

con lo cual,

$$f \in \mathbb{S}$$

4. Describa el subespacio generado por

a) $(-2, 0, 3)$ y $(4, 0, 1)$

b) X^3 , X^2 y 2

considere que el espacio vectorial es $\mathbb{R}[X]$

a)

Lo primero que debemos saber es si los dos vectores que generan \mathbb{S} son dependientes o no lo son. Esto nos permitirá calcular la dimensión del subespacio. Como estamos en \mathbb{R}^3 , una forma de saberlo es calcular el producto vectorial entre ambos; en este caso,

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 \cdot 1 - 0 \cdot 3 & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 1 & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ (-2) \cdot 0 - 4 \cdot 0 & & \end{pmatrix} \\ & & (0, 12 + 2, 0) \end{array}$$

es decir,

$$(-2, 0, 3) \times (4, 0, 1) = (0, 14, 0)$$

El hecho de ser no nulo el producto vectorial nos asegura que los vectores no son dependientes. Por lo tanto, $\dim \mathbb{S} = 2$.

Una forma de describir \mathbb{S} sería decir es plano de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = -2t + 4s \\ y = 0 \\ z = 3t + s \end{cases} \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

Otra forma de hacerlo, es dar su ecuación implícita. Para ello necesitamos una dirección normal a \mathbb{S} . Por supuesto podemos usar el producto vectorial, con lo cual

$$\mathbb{S} : (0, 14, 0) \cdot (x, y, z) = 0$$

es decir,

$$\mathbb{S} : y = 0$$

Se trata por supuesto del plano xz .

b)

Analicemos primero la independencia lineal de estos polinomios. Supongamos que existen escalares α, β, γ tales que

$$\alpha X^3 + \beta X^2 + 2\gamma = 0$$

Teniendo en cuenta las condiciones que hacen iguales a dos polinomios la igualdad anterior implica que

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

con lo cual resultan linealmente independientes.

Llamemos \mathbb{S} al subespacio en cuestión. Ya sabemos que

$$\dim \mathbb{S} = 3$$

Podemos decir que un polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$ está en \mathbb{S} si existen números $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$P = aX^3 + bX^2 + 2c$$

Luego,

$$\mathbb{S} = \{aX^3 + bX^2 + 2c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

5. Dado el subespacio $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^5$ definido por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\mathbb{S} : \begin{cases} x - y + z - u + w = 0 \\ 2y - z + 4u - w = 0 \\ 2x + 4y - z + 10u - w = 0 \end{cases}$$

a) considere los vectores $\mathbf{a} = (1, -1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 2, -1, 4, -1)$ y $\mathbf{c} = (2, 4, -1, 10, -1)$ ¹ y averigüe si son linealmente independientes. En caso de no serlo, escriba a uno de ellos como combinación lineal de los otros dos.

b) sea $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^5$ dado por

$$\mathbb{T} : \begin{cases} x - y + z - u + w = 0 \\ 2y - z + 4u - w = 0 \end{cases}$$

¿es cierto que $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}$?

c) calcule $\dim \mathbb{T}$ y $\dim \mathbb{S}$. ¿Qué conclusión saca?

d) ¿está relacionado el resultado anterior con el del inciso a)?

¹es decir, los coeficientes de cada ecuación

a)

Planteamos

$$A(1, -1, 1, -1, 1) + B(0, 2, -1, 4, -1) + C(2, 4, -1, 10, -1) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

y vemos si podemos concluir que todos los coeficientes son cero. De ser así serían linealmente independientes; de suceder lo contrario serían linealmente dependientes.

La condición anterior equivale al sistema

$$\begin{cases} A + 2C = 0 \\ -A + 2B + 4C = 0 \\ A - B - C = 0 \\ -A + 4B + 10C = 0 \\ A - B - C = 0 \end{cases} \quad \text{que es a su vez equivalente a} \quad \begin{cases} A = -2C \\ B = -3C \end{cases}$$

Evidentemente no son necesariamente todos cero; i.e., son dependientes. Como C puede tomar cualquier valor, tomamos $C = 1$ y entonces $A = -2$ y $B = -3$. De modo que

$$(-2)(1, -1, 1, -1, 1) + (-3)(0, 2, -1, 4, -1) + (2, 4, -1, 10, -1) = (0, 0, 0, 0, 0)$$

de donde,

$$(2, 4, -1, 10, -1) = 2(1, -1, 1, -1, 1) + 3(0, 2, -1, 4, -1)$$

b)

Para que el punto (x, y, z, u, w) esté en \mathbb{S} es necesario que cumpla sus tres ecuaciones. Pero dos de ellas son las ecuaciones que definen a \mathbb{T} . Luego, es cierto que

$$\mathbb{S} \subset \mathbb{T}$$

c)1. $\dim \mathbb{T}$ El sistema que define a \mathbb{T} equivale a

$$\begin{cases} x = -y - 3u \\ z = 2y + 4u - w \end{cases}$$

y por lo tanto podemos decir que $(x, y, z, u, w) \in \mathbb{T}$ si y sólo si

$$\begin{aligned} (x, y, z, u, w) &= (-y - 3u, y, 2y + 4u - w, u, w) = (-y, 2y, 0, 0, 0) + (-3u, 0, 4u, u, 0) + (0, 0, -w, 0, w) \\ &= y(-1, 2, 0, 0, 0) + u(-3, 0, 4, 1, 0) + w(0, 0, -1, 0, 1) \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\mathbb{T} = \langle (-1, 2, 0, 0, 0), (-3, 0, 4, 1, 0), (0, 0, -1, 0, 1) \rangle$$

pero es muy fácil probar que estos tres vectores son linealmente independientes.

Luego, forman una base de \mathbb{T} y en consecuencia

$$\dim \mathbb{T} = 3$$

2. \mathbb{S}

El sistema que define a \mathbb{S} equivale a

$$\begin{cases} x = -y - 3u \\ z = 2y + 4u - w \end{cases}$$

y por lo tanto podemos decir que $(x, y, z, u, w) \in \mathbb{S}$ si y sólo si

$$\begin{aligned} (x, y, z, u, w) &= (-y - 3u, y, 2y + 4u - w, u, w) = (-y, 2y, 0, 0, 0) + (-3u, 0, 4u, u, 0) + (0, 0, -w, 0, w) \\ &= y(-1, 2, 0, 0, 0) + u(-3, 0, 4, 1, 0) + w(0, 0, -1, 0, 1) \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\mathbb{S} = \langle (-1, 2, 0, 0, 0), (-3, 0, 4, 1, 0), (0, 0, -1, 0, 1) \rangle$$

pero estos tres vectores son linealmente independientes. Luego, forman una base de \mathbb{S} y en consecuencia

$$\dim \mathbb{S} = 3$$

La conclusión es que siendo

$$\mathbb{S} \subset \mathbb{T} \quad , \quad \dim \mathbb{T} = \dim \mathbb{S}$$

necesariamente resulta

$$\mathbb{S} = \mathbb{T}$$

d)

Efectivamente están relacionados.

A pesar de que \mathbb{S} está definido por tres ecuaciones y \mathbb{T} por sólo dos obtuvimos que ambos subespacios eran iguales. Eso se debe a que los sistemas

$$\begin{cases} x - y + z - u + w = 0 \\ 2y - z + 4u - w = 0 \\ 2x + 4y - z + 10u - w = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x - y + z - u + w = 0 \\ 2y - z + 4u - w = 0 \end{cases}$$

son equivalentes y eso quiere decir que una de las ecuaciones de definen a \mathbb{S} en realidad *está de más*.

Si pensamos en el subespacio generado por **a**, **b** y **c**, luego del estudio hecho en a) sabemos que coincide con el subespacio generado sólo por **a** y **b** dado que **c** es combinación lineal de los otros dos.

Algo análogo sucede con la tercer ecuación en la definición de \mathbb{S} :

$$\begin{aligned} 2x + 4y - z + 10u - w &= (2, 4, -1, 10, -1) \cdot (x, y, z, u, w) \\ &= [2(1, -1, 1, -1, 1) + 3(0, 2, -1, 4, -1)] \cdot (x, y, z, u, w) \\ &= 2(1, -1, 1, -1, 1) \cdot (x, y, z, u, w) + 3(0, 2, -1, 4, -1) \cdot (x, y, z, u, w) \\ &= 2(x - y + z - u + w) + 3(2y - z + 4u - w) \end{aligned}$$

es decir,

$$2x + 4y - z + 10u - w = 2(x - y + z - u + w) + 3(2y - z + 4u - w)$$

por lo tanto,

$$\begin{cases} x - y + z - u + w = 0 \\ 2y - z + 4u - w = 0 \\ 2x + 4y - z + 10u - w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z - u + w = 0 \\ 2y - z + 4u - w = 0 \\ 2(x - y + z - u + w) + 3(2y - z + 4u - w) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + z - u + w = 0 \\ 3(2y - z + 4u - w) = 0 \\ 2(x - y + z - u + w) + 3(2y - z + 4u - w) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + z - u + w = 0 \\ 3(2y - z + 4u - w) = 0 \\ 2(x - y + z - u + w) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + z - u + w = 0 \\ 2y - z + 4u - w = 0 \\ x - y + z - u + w = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + z - u + w = 0 \\ 2y - z + 4u - w = 0 \end{cases}$$

Piense si estas ideas le pueden resultar útiles en situaciones análogas.

6. Estudie la independencia lineal de los siguientes conjuntos. En caso de no serlo encuentre un subconjunto que sea linealmente independiente y siga generando \mathbb{S} .

a) $\{(4, -1, 3), (-1, 3, 5), (1, -1, 2)\}$

b) $\{(2, 0, 1, 3), (7, -1, -1, 1), (-3, 1, 3, 5), (-1, 1, 4, 8)\}$

c) $\{f, g, h\} \subset C(\mathbb{R})$ siendo $f(x) = x$, $g(x) = e^x$, $h(x) = xe^x$

d) $\{f, g, h\} \subset C[0, 1]$ siendo $f(x) = e^x$, $g(x) = \sinh x$, $h(x) = \cosh x$

a)

Planteamos

$$a(4, -1, 3) + b(-1, 3, 5) + c(1, -1, 2) = (0, 0, 0)$$

que equivale al sistema

$$\begin{cases} 4a - b + c = 0 \\ -a + 3b - c = 0 \\ 3a + 5b + 2c = 0 \end{cases}$$

que tiene por solución

$$b = -\frac{3}{2}, \quad c = -\frac{11}{2}$$

lo que dice que

$$a \left[(4, -1, 3) - \frac{3}{2}(-1, 3, 5) - \frac{11}{2}(1, -1, 2) \right] = (0, 0, 0)$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Tomando, en particular, $a = 1$ obtenemos

$$(4, -1, 3) = \frac{3}{2}(-1, 3, 5) + \frac{11}{2}(1, -1, 2)$$

Esto muestra que $(4, -1, 3)$ es combinación lineal de los otros dos vectores. Por lo tanto,

$$\mathbb{S} = \langle (-1, 3, 5), (1, -1, 2) \rangle$$

Es inmediato ver que estos dos vectores son independientes, por lo tanto hemos encontrado un subconjunto del dado que es linealmente independiente y genera a \mathbb{S} .

b)

Planteamos

$$a(2, 0, 1, 3) + b(7, -1, -1, 1) + c(-3, 1, 3, 5) + d(-1, 1, 4, 8) = (0, 0, 0, 0)$$

y vemos si podemos concluir que todos los escalares son nulos (en cuyo caso serían linealmente independientes) o si esto no ocurre (en cuyo caso serían linealmente dependientes).

Nos queda el sistema,

$$\begin{cases} 2a + 7b - 3c - d = 0 \\ -b + c + d = 0 \\ a - b + 3c + 4d = 0 \\ 3a + b + 5c + 8d = 0 \end{cases}$$

Aplicando procedimientos vistos en la práctica 5 llegamos a que la solución de este sistema es

$$a = -2c - 3d, \quad b = c + d$$

lo que nos dice que

$$(-2c - 3d)(2, 0, 1, 3) + (c + d)(7, -1, -1, 1) + c(-3, 1, 3, 5) + d(-1, 1, 4, 8) = (0, 0, 0, 0)$$

para todo $c, d \in \mathbb{R}$.

Tomando, en particular, $c = 1$ y $d = 0$ obtenemos que

$$-2(2, 0, 1, 3) + (7, -1, -1, 1) + (-3, 1, 3, 5) = (0, 0, 0, 0)$$

es decir,

$$(7, -1, -1, 1) = 2(2, 0, 1, 3) - (-3, 1, 3, 5)$$

lo que implica que es combinación lineal de $(2, 0, 1, 3)$ y $(-3, 1, 3, 5)$ de modo que

$$\mathbb{S} = \langle (2, 0, 1, 3), (-3, 1, 3, 5), (-1, 1, 4, 8) \rangle$$

Pero también podríamos haber tomado $c = 0$ y $d = 1$ con lo cual

$$-3(2, 0, 1, 3) + (7, -1, -1, 1) + (-1, 1, 4, 8) = (0, 0, 0, 0)$$

y recordando que $(7, -1, -1, 1) = 2(2, 0, 1, 3) - (-3, 1, 3, 5)$

$$-(2, 0, 1, 3) - (-3, 1, 3, 5) + (-1, 1, 4, 8) = (0, 0, 0, 0)$$

de donde

$$(-1, 1, 4, 8) = (2, 0, 1, 3) + (-3, 1, 3, 5)$$

Esto dice que $(-1, 1, 4, 8)$ también es combinación lineal de los vectores $(2, 0, 1, 3)$ y $(-3, 1, 3, 5)$.

Por consiguiente,

$$\mathbb{S} = \langle (2, 0, 1, 3), (-3, 1, 3, 5) \rangle$$

Claramente estos dos vectores no son dependientes; por lo tanto hemos encontrado un subconjunto del dado que es linealmente independiente y genera a \mathbb{S} .

c)

Planteamos

$$a f + b g + c h = 0$$

lo que significa exactamente que

$$a f(x) + b g(x) + c h(x) = 0 \quad (\text{para todo } x \in \mathbb{R})$$

y vemos si podemos concluir que los tres coeficientes son nulos.

Como la igualdad es válida para todo x , en particular lo será para $x = 0$,

$$a f(0) + b g(0) + c h(0) = 0$$

o sea

$$b e = 0$$

de donde

$$b = 0$$

Podemos decir entonces que

$$a f(x) + c h(x) = 0 \quad (\text{para todo } x \in \mathbb{R})$$

y tomando, en particular, $x = 1$ obtenemos

$$a + c e = 0$$

pero si tomamos $x = 2$ resulta

$$2a + 2c e^2 = 0$$

o bien,

$$a + c e^2 = 0$$

de donde, restando ambas ecuaciones

$$c(e^2 - e) = 0$$

lo que implica que

$$c = 0$$

y por lo tanto lo mismo le pasa a a .

Hemos probado entonces que necesariamente debe ser

$$a = b = c = 0$$

Es decir, el conjunto $\{f, g, h\}$ es linealmente independiente en $C(\mathbb{R})$.

d)

Planteamos

$$a f + b g + c h = 0$$

y vemos si podemos concluir que los coeficientes son cero; en tal caso el conjunto sería linealmente independiente.

Tenemos entonces que

$$a e^x + b \sinh x + c \cosh x = 0 \quad (\text{para todo } x \in [0, 1])$$

Tomamos $x = 0$ y obtenemos

$$a + c = 0$$

y si ahora tomamos $x = 1$

$$a e + b \frac{e - e^{-1}}{2} - a \frac{e + e^{-1}}{2} = 0$$

que es lo mismo que

$$(a + b) \left[\frac{e}{2} - \frac{e^{-1}}{2} \right] = 0$$

lo que nos permite concluir que

$$b = -a$$

si reemplazamos en la ecuación original

$$a e^x - a \frac{e^x - e^{-x}}{2} - a \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0$$

b)

Por un lado es claro que

$$(-2, 1, 3) = 0(1, 1, -1) + 0(1, 0, 2) + 1(-2, 1, 3)$$

y como los escalares que permiten escribir a un vector en una base son únicos podemos asegurar que las componentes de $(-2, 1, 3)$ en la base $\{(1, 1, -1), (1, 0, 2), (-2, 1, 3)\}$ son

$$(0, 0, 1)$$

c)

Buscamos escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sinh x = a x + b e^x + c e^{-x}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Notemos que como $\{f, g, h\}$ no es una base de $C(\mathbb{R})$ podría ocurrir que la función seno hiperbólico no estuviera en el subespacio generado por f , g y h y en consecuencia no fuera posible encontrar estos escalares. El conjunto $\{f, g, h\}$ es sí una base del subespacio generado por las funciones f , g y h .

Ahora bien, recordando la definición de $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ es claro que

$$\sinh x = 0 x + \frac{1}{2} e^x + \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-x}$$

con lo cual las componentes de $\sinh x$ en la base $\{f, g, h\}$ son

$$\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

8. Halle la dimensión del subespacio generado por los vectores

$$(-2, 4, 0, 1), (0, 2, 3, 1), (0, 1, 0, 0), (-2, 7, 3, 2)$$

Sea

$$\mathbb{S} = \langle (-2, 4, 0, 1), (0, 2, 3, 1), (0, 1, 0, 0), (-2, 7, 3, 2) \rangle$$

Necesitamos saber cuántos vectores linealmente independientes generan a \mathbb{S} . Investiguemos primero si estos vectores son linealmente independientes; para ello planteamos

$$a(-2, 4, 0, 1) + b(0, 2, 3, 1) + c(0, 1, 0, 0) + d(-2, 7, 3, 2) = (0, 0, 0, 0)$$

y vemos si podemos concluir que todos los escalares son nulos. De ser así, serían linealmente independientes. Si eso no ocurriese, por lo menos uno de ellos sería combinación lineal del resto.

Nos queda por resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} -2a - 2d = 0 \\ 4a + 2b + c + 7d = 0 \\ 3b + 3d = 0 \\ a + b + 2d = 0 \end{cases}$$

que equivale a

$$\begin{cases} d = -a \\ 4a + 2b + c + 7d = 0 \\ b = a \\ a + b + 2d = 0 \end{cases}$$

y a

$$\begin{cases} d = -a \\ c = a \\ b = a \end{cases}$$

es decir,

$$(a, b, c, d) = (a, a, a, -a)$$

y como cualquier valor de a hace que $(a, a, a, -a)$ satisfaga ese sistema resulta que no es cierto que todos los escalares son cero. De modo que al menos uno de los vectores es combinación lineal de los demás y en consecuencia si lo quitamos los demás siguen generando a \mathbb{S} .

Sabemos entonces que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ vale

$$a(-2, 4, 0, 1) + a(0, 2, 3, 1) + a(0, 1, 0, 0) - a(-2, 7, 3, 2) = (0, 0, 0, 0)$$

tomando, en particular, $a = 1$

$$(-2, 4, 0, 1) + (0, 2, 3, 1) + (0, 1, 0, 0) - (-2, 7, 3, 2) = (0, 0, 0, 0)$$

lo que implica

$$(-2, 7, 3, 2) = (-2, 4, 0, 1) + (0, 2, 3, 1) + (0, 1, 0, 0)$$

y por lo tanto,

$$\mathbb{S} = \langle (-2, 4, 0, 1), (0, 2, 3, 1), (0, 1, 0, 0) \rangle$$

Como estos tres vectores son linealmente independientes podemos asegurar que

$$\{(-2, 4, 0, 1), (0, 2, 3, 1), (0, 1, 0, 0)\}$$

es una base de \mathbb{S} y por lo tanto,

$$\dim \mathbb{S} = 3$$

9. Halle una base de \mathbb{R}^4 que tenga entre sus elementos a los de una base del subespacio

$$\mathbb{S} : \begin{cases} 2x - y + 3z - w = 0 \\ x + y + z - 2w = 0 \\ x - 2y + 2z + w = 0 \end{cases}$$

NOTA: a este proceso se lo suele llamar *compleción a una base del espacio*.

Base de \mathbb{S}

El sistema de ecuaciones que define a \mathbb{S} es equivalente a

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - w = 0 \\ x + y + z - 2w = 0 \\ 2x - y + 3z - w = 0 \end{cases}$$

a su vez equivalente a

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - w = 0 \\ x + y + z - 2w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} w = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}y \\ z = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases}$$

De modo que un $(x, y, z, w) \in \mathbb{S}$ si y sólo si

$$\begin{aligned} (x, y, z, w) &= \left(x, y, -\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}y, \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}y\right) = \left(x, 0, -\frac{3}{5}x, \frac{1}{5}x\right) + \left(0, y, \frac{3}{5}y, -\frac{4}{5}y\right) \\ &= x \left(1, 0, -\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) + y \left(0, 1, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \end{aligned}$$

Esto nos dice que

$$\mathbb{S} = \left\langle \left(1, 0, -\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(0, 1, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \right\rangle$$

pero como claramente estos vectores son independientes resulta que

$$\left\{ \left(1, 0, -\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(0, 1, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \right\}$$

es una base de \mathbb{S} .

Si reemplazamos a estos vectores por alguno de sus múltiplos seguirán siendo base. Luego, podemos decir que

$$\{(5, 0, -3, 1), (0, 5, 3, -4)\}$$

es también una base de \mathbb{S} .

Compleción a una base de \mathbb{R}^4

Buscamos dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} tales que

$$\{(5, 0, -3, 1), (0, 5, 3, -4), \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$$

sea una base de \mathbb{R}^4 .

Podemos tomar, por ejemplo,

$$\mathbf{u} = (0, 0, 1, 0) \quad , \quad \mathbf{v} = (0, 0, 0, 1)$$

Es fácil comprobar que los cuatro vectores son linealmente independientes y por lo tanto constituyen una base de \mathbb{R}^4 (que contiene a una base de \mathbb{S}).

10. Encuentre un conjunto de ecuaciones cuyo espacio de soluciones sea el subespacio

$$\mathbb{S} = \langle (1, 2, -1, 0), (0, 2, -3, 4), (1, 4, -4, 4) \rangle$$

NOTA: a este conjunto de ecuaciones se lo suele llamar *ecuaciones del subespacio*.

Estamos buscando un sistema de ecuaciones ² tal que \mathbb{S} resulte ser el espacio de soluciones de ese sistema.

Cada una de ellas tiene la forma,

$$ax + by + cz + dw = 0$$

Notemos que

$$ax + by + cz + dw = (a, b, c, d) \cdot (x, y, z, w)$$

De modo que cuando decimos que un (x, y, z, w) está en \mathbb{S} estamos diciendo en particular que

$$(x, y, z, w) \text{ es ortogonal a } (a, b, c, d)$$

y esto sucede con cada una de las ecuaciones del sistema.

Conclusión: las uplas formadas con los coeficientes de cada una de las ecuaciones del sistema deben ser ortogonales a todos los puntos de \mathbb{S} ; en particular a un sistema de generadores de \mathbb{S} .

²podría ser una única ecuación

En nuestro caso, cada (a, b, c, d) debe cumplir

$$\begin{cases} (1, 2, -1, 0) \cdot (a, b, c, d) = 0 \\ (0, 2 - 3, 4) \cdot (a, b, c, d) = 0 \\ (1, 4, -4, 4) \cdot (a, b, c, d) = 0 \end{cases}$$

o sea,

$$\begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ 2b - 3c + 4d = 0 \\ a + 4b - 4c + 4d = 0 \end{cases}$$

Este sistema es equivalente a

$$\begin{cases} a = c - 2b \\ d = \frac{3}{4}c - \frac{1}{2}b \end{cases}$$

Por lo tanto los coeficientes del sistema que represente a \mathbb{S} tendrán que tener la forma

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &= (c - 2b, b, c, \frac{3}{4}c - \frac{1}{2}b) = (-2b, b, 0, -\frac{1}{2}b) + (c, 0, c, \frac{3}{4}c) \\ &= b(-2, 1, 0, -\frac{1}{2}) + c(1, 0, 1, \frac{3}{4}) \end{aligned}$$

donde b y c pueden tomar cualquier valor real.

Está claro entonces que los puntos de \mathbb{S} seguramente van a tener que satisfacer las ecuaciones

$$\begin{cases} -2x + y - \frac{1}{2}w = 0 \\ x + z + \frac{3}{4}w = 0 \end{cases}$$

La pregunta ahora es: ¿tendrán que satisfacer alguna otra ecuación o será cierto que el sistema anterior es precisamente el que buscamos?

Pensemos, si agregáramos alguna otra ecuación, sería de la forma

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

con $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ combinación lineal de los vectores

$$\left(-2, 1, 0, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(1, 0, 1, \frac{3}{4}\right)$$

pero en tal caso los sistemas

$$\begin{cases} -2x + y - \frac{1}{2}w = 0 \\ x + z + \frac{3}{4}w = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} -2x + y - \frac{1}{2}w = 0 \\ x + z + \frac{3}{4}w = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0 \end{cases}$$

resultarían equivalentes. En consecuencia la última ecuación es innecesaria.

De modo entonces que el conjunto de ecuaciones que definen a \mathbb{S} es

$$\begin{cases} -2x + y - \frac{1}{2}w = 0 \\ x + z + \frac{3}{4}w = 0 \end{cases}$$

NOTA: teniendo en cuenta que \mathbb{S} fue dado como el subespacio generado por tres vectores alguien podría pensar que $\dim \mathbb{S} = 3$ y en consecuencia bastaba una ecuación para representarlo. Lo que ocurre es que esos tres generadores dados no son linealmente independientes. En realidad, $\dim \mathbb{S} = 2$ y por eso —dado que estamos en \mathbb{R}^4 — necesitamos dos ecuaciones (no equivalentes) para determinarlo.

11. Halle el complemento ortogonal de los subespacios

$$\mathbb{S} : \begin{cases} 2x + 3y - z + 4z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mathbb{T} = \langle (4, -1, 3), (1, 1, -1) \rangle$$

Complemento ortogonal de \mathbb{S}

Notemos que los coeficientes de las ecuaciones de \mathbb{S}

$$(2, 3, -1, 4) \quad \text{y} \quad (1, -1, 1, 0)$$

son linealmente independientes y además ortogonales a \mathbb{S} .

Por otro lado,

$$\dim \mathbb{S} + \dim \mathbb{S}^\perp = 4$$

con lo cual,

$$\dim \mathbb{S} = \dim \mathbb{S}^\perp = 2$$

Pero entonces,

$$\mathbb{S}^\perp = \langle (2, 3, -1, 4), (1, -1, 1, 0) \rangle$$

Complemento ortogonal de \mathbb{T}

Por definición de complemento ortogonal,

$$\mathbb{T}^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ para todo } \mathbf{u} \in \mathbb{T}\}$$

pero como todo $\mathbf{u} \in \mathbb{T}$ se escribe como combinación lineal de los generadores de \mathbb{T} resulta que

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^\perp &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \cdot (4, -1, 3) = 0 \quad \text{y} \quad (x, y, z) \cdot (1, 1, -1)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x - y + 3z = 0 \quad \text{y} \quad x + y - z = 0\} \end{aligned}$$

Esto es decir,

$$\mathbb{T}^\perp : \begin{cases} 4x - y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

12. Encuentre una base ortogonal del subespacio

$$\mathbb{T} = \langle (4, -1, 3), (1, 1, -1) \rangle$$

y complete a una base ortogonal de \mathbb{R}^3 .

Una base ortogonal de \mathbb{T} consta de dos vectores de \mathbb{T} que son ortogonales entre sí. Podemos tomar como primer vector a

$$\mathbf{u} = (4, -1, 3)$$

y buscamos $\mathbf{v} = (x, y, z)$ tal que

$$\mathbf{v} \in \mathbb{T} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$$

que $\mathbf{v} \in \mathbb{T}$ significa que existen escalares $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{v} = a(4, -1, 3) + b(1, 1, -1)$$

para que este \mathbf{v} sea el que estamos buscando deberá cumplir también

$$[a(4, -1, 3) + b(1, 1, -1)] \cdot (4, -1, 3) = 0$$

es decir,

$$a(16 + 1 + 9) + b(4 - 1 - 3) = 0$$

de forma que a, b están relacionados por

$$26a = 0$$

por lo que debe ser $a = 0$ y b puede tomar cualquier valor. Entonces basta tomar

$$\mathbf{v} = (1, 1, -1)$$

que cumple ambas condiciones: está en \mathbb{T} y es ortogonal a $(4, -1, 3)$.

Finalmente,

$$\{(4, -1, 3), (1, 1, -1)\}$$

es una base ortogonal de \mathbb{T} .

Sólo nos falta completarla a una base ortogonal de \mathbb{R}^3 . Para lograrlo debemos encontrar un vector \mathbf{w} que satisfaga,

$$\mathbf{w} \perp \mathbb{T}$$

pues de esa forma nos aseguramos que los tres vectores son ortogonales entre sí y además se cumple que son linealmente independientes³.

Si $\mathbf{w} = (x, y, z)$ tiene que ser

$$4x - y + 3z = 0 \quad y \quad x + y - z = 0$$

o sea,

$$z = x + y \quad y \quad y = -\frac{7}{2}x$$

de modo que

$$\mathbf{w} = (x, -\frac{7}{2}x, -\frac{5}{2}x)$$

Este vector cumple todo lo necesario cualquiera sea $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Luego, podemos elegir, por ejemplo,

$$\mathbf{w} = (2, -7, -5)$$

Finalmente,

$$\{(4, -1, 3), (1, 1, -1), (2, -7, -5)\}$$

es una base ortogonal de \mathbb{R}^3 cuyos dos primeros elementos forman una base ortogonal de \mathbb{T} .

NOTA: desde luego no siempre se va dar que los generadores de \mathbb{T} que nos den sean precisamente una base ortogonal de \mathbb{T} .

13. Sea $\mathbb{S} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f' = af\}$.

- a) Muestre que \mathbb{S} es un subespacio de $C^1(\mathbb{R})$
- b) Compruebe que $\dim \mathbb{S} = 1$
- c) Halle una base de \mathbb{S} .

a)

— $f = 0$ está en \mathbb{S}

En efecto, la función nula tiene dominio en todo \mathbb{R} , es de clase C^1 y satisface $f' = 0$. Con lo cual

$$f' = 0 = a0 = af$$

— $f, g \in \mathbb{S} \implies f + g \in \mathbb{S}$

Claramente, $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es de clase C^1 y además

$$(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$$

³¿por qué?

i.e., $f + g \in \mathbb{S}$.

— $f \in \mathbb{S}$ y $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha f \in \mathbb{S}$

$$(\alpha f)' = \alpha f' = \alpha a f = a \alpha f$$

i.e., $\alpha f \in \mathbb{S}$.

Concluimos entonces que \mathbb{S} es subespacio de $C^1(\mathbb{R})$.

b)

Es fácil comprobar que $f(x) = e^{ax}$ está en \mathbb{S} , pues $f'(x) = ae^{ax} = af(x)$.

Supongamos que $g \in \mathbb{S}$ y calculemos

$$\left(\frac{g(x)}{e^{ax}}\right)' = \frac{g'(x)e^{ax} - g(x)ae^{ax}}{e^{2ax}} = \frac{ag(x)e^{ax} - g(x)ae^{ax}}{e^{2ax}} = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Luego,

$$\frac{g(x)}{e^{ax}} = A \quad (A \text{ constante})$$

Pero esto dice que todo elemento de \mathbb{S} es un múltiplo de e^{ax} . En consecuencia,

$$\mathbb{S} = \langle e^{ax} \rangle$$

y por lo tanto,

$$\dim \mathbb{S} = 1$$

c)

Siendo que la dimensión es 1 y que e^{ax} genera a \mathbb{S} ,

$$\{e^{ax}\}$$

es una base de \mathbb{S} .