COMPLEMENTO DE LA PRÁCTICA 7

INDICE

1. Sea
$$\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad , \qquad \pi(x, y, z) = (x, y, 0)$$

   a) muestre que es una transformación lineal y represente en un esquema gráfico el efecto de aplicar π a un punto del espacio.

   b) calcule su núcleo y su imagen

   c) si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ satisfacen
   $$\pi(\mathbf{u}) = (2, 1, 0) \qquad \text{y} \qquad \pi(\mathbf{v}) = (-4, 7, 0)$$
   ¿necesita saber con precisión quiénes son $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ para calcular $\pi(\mathbf{u}+\mathbf{v})$? ¿Y para calcular $\pi(2\mathbf{u} - 5\mathbf{v})$?

a)

❑ Para cada $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$,

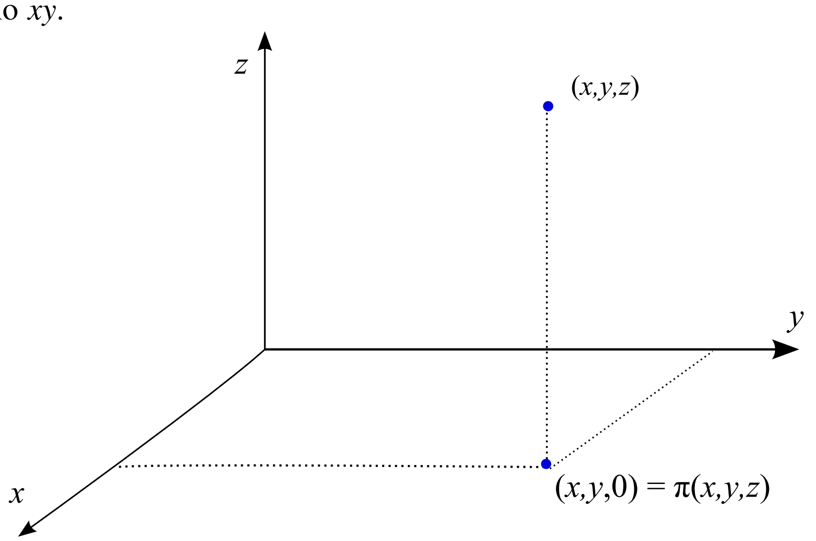
$$\begin{aligned}\pi((x, y, z) + (x', y', z')) = \pi(x + x', y + y', z + z') &= (x + x', y + y', 0) = (x, y, 0) + (x', y', 0)\\ &= \pi(x, y, z) + \pi(x', y', z')\end{aligned}$$

❑ Para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\pi(\lambda(x, y, z)) = \pi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x, \lambda y, 0) = \lambda(x, y, 0) = \lambda\pi(x, y, z)$$

Luego, π es una transformación lineal.

En el siguiente gráfico mostramos el efecto que tiene aplicar π: proyectar ortogonalmente sobre el plano xy.



b)

Para calcular su núcleo debemos encontrar todos los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a los que π manda al origen,

$$(x, y, z) \in \mathrm{Nu}\pi \iff \pi(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff (x, y, 0) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

es decir, lo que por otro lado es muy evidente viendo el dibujo anterior,

$$\mathrm{Nu}\pi = \text{eje } z$$

Para calcular la imagen debemos averiguar qué conjunto resulta ser

$$\mathrm{Im}\pi = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{existe un } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \pi(x, y, z) = (u, v, w)\}$$

pero $\pi(x, y, z) = (u, v, w)$ equivale a decir $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ 0 = w \end{cases}$. De modo que la única condición que debe cumplir (u, v, w) es: $w = 0$ ya que para todo u, v

$$(u, v, 0) = \pi(u, v, 0) \in \mathrm{Im}\pi$$

Luego,

$$\mathrm{Im}\pi = \text{ plano } xy$$

lo que también es evidente a partir del esquema gráfico anterior.

c)

Teniendo en cuenta que ya sabemos que π es una transformación lineal, no hace falta conocer con precisión quiénes son $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$; simplemente podemos asegurar que

$$\pi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \pi(\mathbf{u}) + \pi(\mathbf{v}) = (2, 1, 0) + (-4, 7, 0) = (-2, 8, 0)$$

y

$$\pi(2\mathbf{u} - 5\mathbf{v}) = 2\pi(\mathbf{u}) - 5\pi(\mathbf{v}) = 2(2, 1, 0) - 5(-4, 7, 0) = (24, -33, 0)$$

2. Interprete al conjunto de soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas en $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} 4x - 2y + w = 0 \\ 3y - 4z + 5w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases}$$

como el núcleo de una transformación lineal.
Calcule la dimesión de la imagen y decida si es epimorfismo.

Llamemos $\mathbb{S}$ al conjunto de soluciones de ese sistema que ya sabemos, por ser ecuaciones lineales y homogéneas, que es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

Observando que las ecuaciones dadas se pueden escribir también en la forma

$$(4x - 2y + w, 3y - 4z + 5w, x - y + z - w) = (0, 0, 0)$$

vemos que la transformación lineal

$$T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad , \qquad T(x, y, z, w) = (4x - 2y + w, 3y - 4z + 5w, x - y + z - w)$$

claramente cumple

$$\mathrm{Nu}T = \mathbb{S}$$

Para calcular la dimensión de la imagen bastaría calcular la dimensión del ncleo y usar el teorema de la dimensión, con lo cual

$$\dim \mathrm{Im}T = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Nu}T = 4 - \dim \mathrm{Nu}T$$

Calculemos entonces $\dim \mathrm{Nu}T$. Siendo que

$$(x, y, z, w) \in \mathrm{Nu}T \iff (x, y, z, w) \in \mathbb{S}$$

y recordando un argumento que utilizamos para hallar las ecuaciones que definen a un subespacio de $\mathbb{R}^n$ podemos decir que $(x, y, z, w) \in \mathrm{Nu}T$ si y sólo si (x, y, z, w) es ortogonal a los vectores

$$(4, -2, 0, 1)\ ,\ (0, 3, -4, 5)\ ,\ (1, -1, 1, -1)$$

es decir,

$$\mathrm{Nu}T = \langle (4, -2, 0, 1), (0, 3, -4, 5), (1, -1, 1, -1) \rangle^{\perp}$$

Una cuenta nada complicada muestra que estos tres vectores son linealmente independientes, con lo cual

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Nu}T &= \dim \left(\langle (4, -2, 0, 1), (0, 3, -4, 5), (1, -1, 1, -1) \rangle^{\perp} \right) \\ &= 4 - \dim \left(\langle (4, -2, 0, 1), (0, 3, -4, 5), (1, -1, 1, -1) \rangle \right) \\ &= 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

De modo que

$$\dim \mathrm{Im}T = 4 - 1 = 3$$

y como el codominio de T es $\mathbb{R}^3$ podemos afirmar que T es epimorfismo.

3. Para cada $f \in C[a,b]$ llamamos F a la función definida por

$$F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad F(x) = \int_a^b f(t)\, dt$$

Teniendo presente esta notación definimos la siguiente función

$$P : C[a,b] \longrightarrow C[a,b] \quad , \quad P(f) = F$$

Muestre que P está bien definida y que es una transformación lineal. ¿Es monomorfismo?

El Teorema Fundamental del Cálculo Integral nos dice que si $f \in C[a,b]$, F también es continua en el intervalo; luego, $F \in C[a,b]$ y por lo tanto P está bien definida.

Para comprobar que es una transformación lineal,

❒ $P(f+g) = P(f) + P(g)$

Llamemos $G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$ y $H(x) = \int_a^x (f+g)(t)\, dt$. Entonces,

$$\begin{aligned} P(f+g)(x) = H(x) &= \int_a^x (f+g)(t)\, dt = \int_a^x [f(t)+g(t)]\, dt = \int_a^x f(t)\, dt + \int_a^x g(t)\, dt \\ &= F(x) + G(x) = (F+G)(x) \\ &= (P(f)+P(g))(x) \end{aligned}$$

de modo que, como esto vale para todo $x \in [a,b]$ podemos asegurar que

$$P(f+g) = P(f) + P(g)$$

❒ $P(\alpha f) = \alpha P(f)$

Llamemos $H(x) = \int_a^x [\alpha f](t)\, dt$,

$$P(\alpha f)(x) = H(x) = \int_a^x [\alpha f](t)\, dt = \int_a^x \alpha f(t)\, dt = \alpha \int_a^x f(t)\, dt = \alpha F(x) = \alpha P(f)(x)$$

y como esto vale para todo $x \in [a,b]$,

$$P(\alpha f) = \alpha P(f)$$

Resta ver si P es monomorfismo. [1] Podemos decir que $f \in \mathrm{Nu}P$ si y sólo si $P(f)(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$; es decir, si

$$\int_a^x f(t)\, dt = 0$$

para todo $x \in [a,b]$.

[1] Para esta parte es necesario conocer con cierta profundidad algunos conceptos de Cálculo Elemental

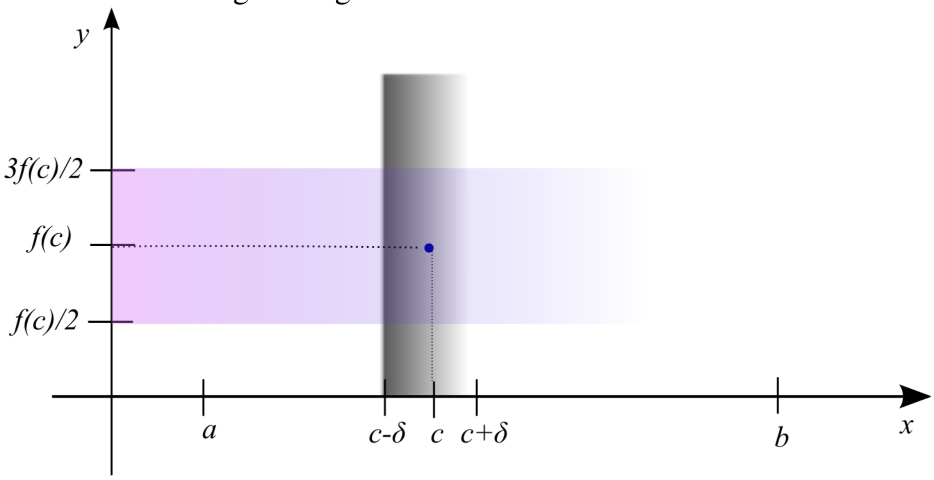
Supongamos que hubiese una $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y no nula que satisficiese

$$\int_a^x f(t)\, dt = 0$$

para todo $x \in [a, b]$. Por ser no nula existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) \neq 0$. Supongamos que $f(c) > 0$ [2]. Por conocidas propiedades de las funciones continuas resulta

$$f(x) > \frac{f(c)}{2} \qquad \text{(para } c - \delta < x < c + \delta\text{)}$$

tal como se ilustra en el siguiente gráfico



Pero entonces, como estamos suponiendo que $P(f)(x) = 0$ para todo x,

$$\begin{aligned} 0 = P(f)(c+\delta) &= \int_a^{c+\delta} f(t)\, dt = \int_a^{c-\delta} f(t)\, dt + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(t)\, dt = 0 + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(t)\, dt \\ &= \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(t)\, dt > \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}\, dt = 2\delta \frac{f(c)}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

lo que claramente es absurdo. Y este absurdo provino de suponer que había una función en el núcleo de P que no era nula. En consecuencia, debe ser $f \equiv 0$; por consiguiente

$$\mathrm{Nu}P = \mathbb{O}$$

y la respuesta a la pregunta es: P es monomorfismo.

4. Sean $\mathbb{S} = \langle(1, 2)\rangle$ y $\mathbb{T} = \langle(-1, 1)\rangle$.

   a) ¿qué particularidad de estos dos subespacios nos permite afirmar que cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se escribe —de manera única— como

$$(x, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

   para un $(x_1, y_1) \in \mathbb{S}$ y un $(x_2, y_2) \in \mathbb{T}$?

[2] si fuese $f(c) < 0$, se razona de manera enteramente análoga

b) para un (x, y) genérico halle los correspondientes (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

c) muestre que la función $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x_1, y_1)$ está bien definida y que es transformación lineal.

d) calcule NuT e ImT

e) interprete geométricamente el efecto de aplicar T.

a)

Para tratar de averiguarlo supongamos que fuera posible escribir a (x, y) de dos formas distintas como suma de elementos de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$

$$(x, y) = \begin{cases} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) & , (x_1, y_1) \in \mathbb{S} \, , \, (x_2, y_2) \in \mathbb{T} \\ (u_1, v_1) + (u_2, v_2) & , (u_1, v_1) \in \mathbb{S} \, , \, (u_2, v_2) \in \mathbb{T} \end{cases}$$

en tal caso,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2)$$

o, lo que es lo mismo,

$$(x_1, y_1) - (u_1, v_1) = (u_2, v_2) - (x_2, y_2)$$

pero el primer miembro de esta igualdad está en $\mathbb{S}$ y el segundo en $\mathbb{T}$. Esto dice que ambos están en la intersección; o sea, a menos que

$$(x_1, y_1) - (u_1, v_1) = (0, 0) \qquad \text{y} \qquad (u_2, v_2) - (x_2, y_2) = (0, 0)$$

tendríamos un elemento no nulo en la intersección. Pero por ser $(1, 2)$ y $(-1, 1)$ linealmente independientes, es

$$\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \mathbb{O}$$

Por otro lado,

$$\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = \dim \mathbb{S} + \dim \mathbb{T} - \dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

De modo que

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$$

Esta es entonces la particularidad de estos dos subespacios que hace que cada elemento de $\mathbb{R}^2$ se pueda escribir — y de manera única — como suma de un elemento en $\mathbb{S}$ y otro en $\mathbb{T}$.

b)

Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ buscamos $(x_1, y_1) \in \mathbb{S}$ y $(x_2, y_2) \in \mathbb{T}$ tales que

$$(x, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

pero siendo $\mathbb{S} = \langle(1,2)\rangle$ y $\mathbb{T} = \langle(-1,1)\rangle$, eso significa encontrar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x,y) = a(1,2) + b(-1,1)$$

o sea,

$$\begin{cases} x = a - b \\ y = 2a + b \end{cases}$$

resolvemos este sistema y obtenemos que

$$a = \frac{x+y}{3} \qquad , \qquad b = \frac{y-2x}{3}$$

Por lo tanto,

$$(x,y) = \frac{x+y}{3}\,(1,2) \;+\; \frac{y-2x}{3}\,(-1,1)$$

y llegamos finalmente a que

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{x+y}{3}, \frac{2x+2y}{3}\right) \qquad , \qquad (x_2, y_2) = \left(\frac{2x-y}{3}, \frac{y-2x}{3}\right)$$

c)

La unicidad de la descomposición de un vector como suma de uno de $\mathbb{S}$ y otro de $\mathbb{T}$ nos asegura que T está bien definida.

Por otro lado,

- ❑ $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
  Sabemos que cada uno de estos vectores se escribre –de manera única– como suma de un vector en $\mathbb{S}$ y un vector en $\mathbb{T}$. Luego,

  $$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \qquad , \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

  para únicos $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{T}$. De esta forma, $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (\mathbf{u}_1+\mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2+\mathbf{v}_2)$ con $\mathbf{u}_1+\mathbf{v}_1 \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{u}_2+\mathbf{v}_2 \in \mathbb{T}$; luego,

  $$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 \qquad , \qquad T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_1 \qquad , \qquad T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_1$$

  y esto dice que

  $$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

- ❑ $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$
  Ahora tenemos que $\alpha\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{u}_2$ y $\alpha\mathbf{u}_1$, $\alpha\mathbf{u}_2$ son los únicos elementos de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$, respectivamente, que satisfacen que su suma da $\alpha\mathbf{u}$. Luego,

  $$T(\alpha\mathbf{u}) = T(\alpha\mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{u}_2) = \alpha\mathbf{u}_1 = \alpha T(\mathbf{u})$$

Por consiguiente, T es transformación lineal.

d)

Sabemos que cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se escribe en forma única como

$$(x, y) = \frac{x+y}{3}(1, 2) + \frac{y-2x}{3}(-1, 1)$$

luego, estará en el núcleo de T si y sólo si

$$(0, 0) = T(x, y) = \frac{x+y}{3}(1, 2)$$

es decir, si y sólo si

$$(x, y) = \frac{y-2x}{3}(-1, 1)$$

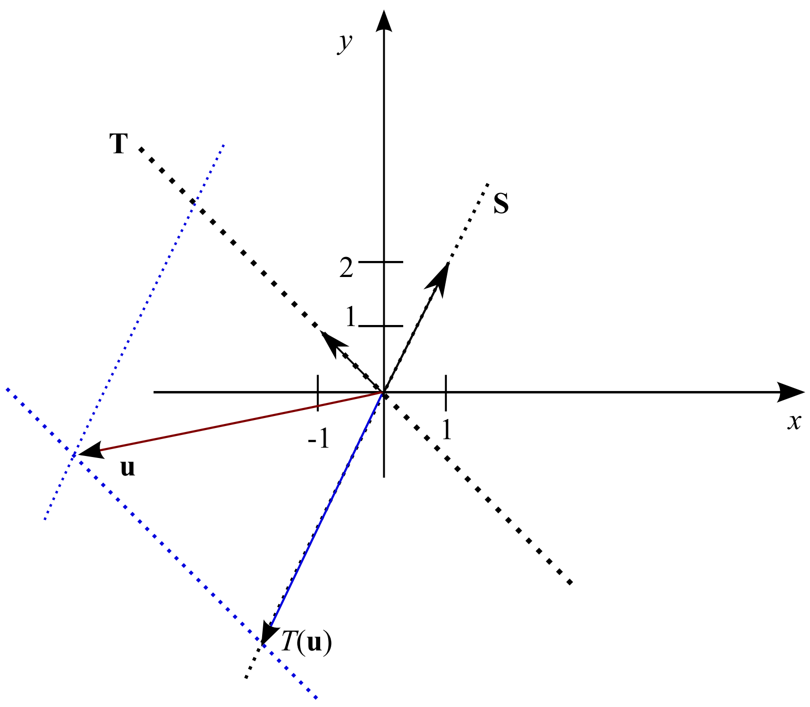
debido a unicidad de la escritura. Pero esto es decir que

$$(x, y) \in \mathrm{Nu}T \iff (x, y) \in \mathbb{T}$$

por lo que

$$\mathrm{Nu}T = \mathbb{T}$$

e)



5. Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que $\mathrm{Nu}T = \langle(1,0,0,0)\rangle$ y sea $\mathbb{S}$ un subespacio de $\mathbb{R}^4$ [3] tal que $\mathrm{Nu}T \oplus \mathbb{S} = \mathbb{R}^4$.

   a) explique por qué T no puede ser monomorfismo

   b) Si restrigimos T al subespacio $\mathbb{S}$; es decir, si consideramos

$$\tilde{T} : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R}^4 \qquad , \qquad \tilde{T}(\mathbf{u}) = T(\mathbf{u})$$

   ¿es monomorfismo? ¿es isomorfismo?

a)

T no puede ser monomorfismo porque $\mathrm{Nu}T \neq \mathbb{O}$.

b)

Si $\mathbf{u} \in \mathbb{S}$ y $\tilde{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ resulta que

$$\mathbf{u} \in \mathbb{S} \qquad \text{y} \qquad T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

o sea,

$$\mathbf{u} \in \mathbb{S} \cap \mathrm{Nu}T = \mathbb{O}$$

Luego, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y por consiguiente $\mathrm{Nu}\tilde{T} = \mathbb{O}$. Es decir, $\tilde{T}$ es monomorfismo.

Como $\dim \mathbb{S} = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Nu}T = 3$,

$$\dim \mathrm{Im}\tilde{T} = \dim \mathbb{S} - \dim \mathrm{Nu}\tilde{T} = 3$$

es prueba que $\tilde{T}$ no puede ser epimorfismo.

6. Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Muestre que

$$T \text{ es ortogonal} \qquad \text{si y sólo si} \qquad \| T(\mathbf{u}) \| = \| \mathbf{u} \| \quad \text{para todo } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

▹ Como T es ortogonal se debe cumplir

$$T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. En particular, si $\mathbf{u} = \mathbf{v}$,

$$\| T(\mathbf{u}) \|^2 = T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \| \mathbf{u} \|^2$$

y por lo tanto,

$$\| T(\mathbf{u}) \| = \| \mathbf{u} \|$$

[3] ¿es único?

▹ Suponemos ahora que se cumple

$$\| T(\mathbf{u}) \| = \| \mathbf{u} \|$$

para todo $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^n$ y debemos probar que es ortogonal. Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, por hipótesis sabemos que

$$\| T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \|^2 = \| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2$$

pero esto equivale a decir

$$\| T(\mathbf{u}) \|^2 + \| T(\mathbf{v}) \|^2 + 2T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{v}) = \| \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{v} \|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

usando la hipótesis podemos simplificar los primeros sumandos de cada miembro y obtenemos

$$T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

y siendo que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ representan a cualquier par de vectores de $\mathbb{R}^n$, hemos probado que T es ortogonal.

7. Es sabido que las rotaciones son isomorfismos. ¿Es cierto que la inversa de una rotación es también una rotación?
En caso afirmativo, ¿cómo se relacionan los ángulos?

Lo haremos para rotaciones en $\mathbb{R}^2$; de forma similar se puede analizar para rotaciones en $\mathbb{R}^3$.

La función $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (\cos\theta\, x - \operatorname{sen}\theta\, y, \operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y)$$

representa una rotación de ángulo θ alrededor del origen: a cada vector $\mathbf{u}$ lo rota en un ángulo θ en sentido antihorario.

La función T^{-1} debería devolverlo a su lugar, para lo cual también debería rotarlo hasta llegar de nuevo a $\mathbf{u}$; i.e., también debe ser una rotación. Para comprobarlo analíticamente buscamos su expresión. Llamemos

$$(u, v) = (\cos\theta\, x - \operatorname{sen}\theta\, y, \operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y)$$

se trata de hallar la expresión de

$$T^{-1}(u, v) = T^{-1}(\cos\theta\, x - \operatorname{sen}\theta\, y, \operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y) = T^{-1}(T(x, y)) = (x, y)$$

Sólo tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} u = \cos\theta\, x - \operatorname{sen}\theta\, y \\ v = \operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y \end{cases}$$

Multiplicando miembro a miembro por $\cos\theta$ la segunda ecuación y por $\operatorname{sen}\theta$ la primera y sumando miembro a miembro obtenemos

$$x = \cos\theta\, u + \operatorname{sen}\theta\, v = \cos(2\pi-\theta)\, u \;-\; \operatorname{sen}(2\pi-\theta)\, v$$

y multiplicando miembro a miembro por $-\operatorname{sen}\theta$ la primera ecuación y por $\cos\theta$ la segunda y sumando miembro a miembro obtenemos

$$y = -\operatorname{sen}\theta\, u + \cos\theta\, v = \operatorname{sen}(2\pi-\theta)\, u \;+\; \cos(2\pi-\theta)\, v$$

$$\begin{cases} x = \cos(2\pi-\theta)\, u \;-\; \operatorname{sen}(2\pi-\theta)\, v \\ y = \operatorname{sen}(2\pi-\theta)\, u \;+\; \cos(2\pi-\theta)\, v \end{cases}$$

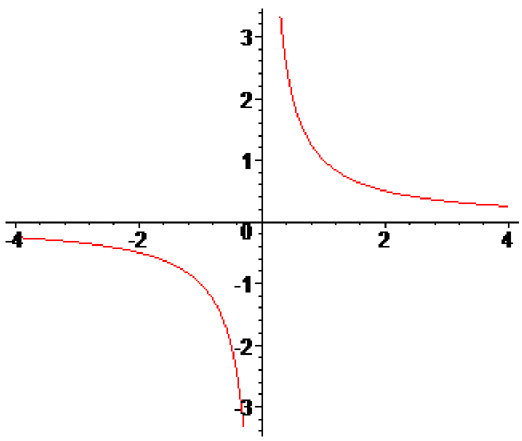
lo que es decir,

$$T^{-1}(u,v) = (\cos(2\pi-\theta)\, u \;-\; \operatorname{sen}(2\pi-\theta)\, v, \operatorname{sen}(2\pi-\theta)\, u \;+\; \cos(2\pi-\theta)\, v)$$

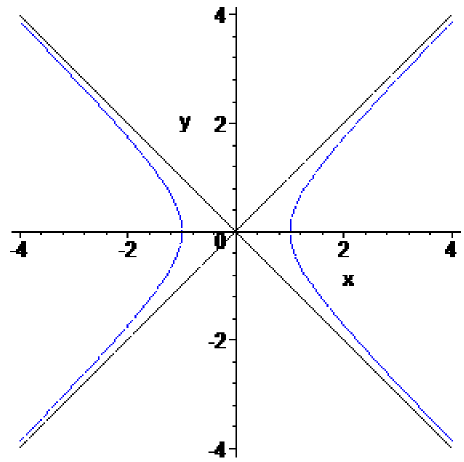
y resulta ser entonces una rotación de ángulo $2\pi-\theta$ en sentido antihorario.

8. Encuentre una rotación $R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que lleve cada punto de la hipérbola $H_1 : \; xy = 1$ a cada punto de la hipérbola $H_2 : \; x^2 - y^2 = 2$.
¿Es cierto que R^{-1} lleva los puntos de H_2 en los de H_1?

Mirando el siguiente gráfico



H_1: xy=1



H_2 : x²-y²= 2

se observa que las asíntotas de H_1 son las de H_2 rotadas en $\frac{\pi}{4}$. Esto da la idea de utilizar una rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ para transformar a H_1 en H_2. Consideremos entonces,

$$T(x,y) = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\, x - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, y, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, y\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(x-y, x+y)$$

Debemos ver que cada vez que $(x,y) \in H_1$ resulta que $T(x,y) \in H_2$. Llamemos

$$(u,v) = T(x,y)$$

Se trata entonces de comprobar que

$$u^2 - v^2 = 2$$

cada vez que $xy = 1$. Pero, $u = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$ y $v = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$; luego,

$$u^2 - v^2 = \tfrac{1}{2}(x-y)^2 - \tfrac{1}{2}(x+y)^2 = \tfrac{1}{2}[x^2 + y^2 - 2xy - x^2 - y^2 - 2xy] = -2xy = -2$$

si $xy = 1$. Esto no es precisamente lo que queríamos pero no estamos muy lejos.

Aquí conviene volver al gráfico para observar que el ángulo $\frac{\pi}{4}$ se recorre en sentido horario. Luego, la rotación que nos va a servir es

$$R(x, y) = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,y, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,y\right) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y, -x + y)$$

Si ahora $(u, v) = R(x, y)$ tenemos

$$u^2 - v^2 = \tfrac{1}{2}(x+y)^2 - \tfrac{1}{2}(y-x)^2 = \tfrac{1}{2}[x^2 + y^2 + 2xy - y^2 - x^2 + 2xy] = 2xy = 2$$

cada vez que $xy = 1$.

Esto muestra que la rotación R transforma los puntos de H_1 en puntos de H_2.

Para ver que R^{-1} transforma H_2 en H_1 llamemos ahora $(x, y) = R^{-1}(u, v) = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v, u + v)$ [4]. Entonces,

$$xy = \tfrac{1}{2}(u - v)(u + v) = \tfrac{1}{2}[u^2 - v^2] = \tfrac{1}{2}.2 = 1$$

cada vez que $u^2 - v^2 = 1$.

9. Interprete el efecto de aplicar estas transformaciones lineales

a) $T(x, y) = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,x - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,y, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,x + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,y\right)$

b) $\tilde{T}(x, y) = (x - y, x + y)$

a)

Recordando que $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$,

$$T(x, y) = \left(\cos\tfrac{\pi}{4}\,x - \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4}\,y, \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4}\,x + \cos\tfrac{\pi}{4}\,y\right)$$

y por lo tanto se trata de una rotación en un ángulo $\frac{\pi}{4}$ en sentido antihorario.

[4] ¿por qué?

b)

Basta notar que

$$T(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y, x + y) = \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{T}(x, y)$$

o sea,

$$\tilde{T}(x, y) = \sqrt{2}\, T(x, y)$$

De modo que $\tilde{T}$ produce una rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ en sentido antihorario y al mismo tiempo multiplica por $\sqrt{2}$ la longitud del vector.

10. Halle $T(A)$ siendo

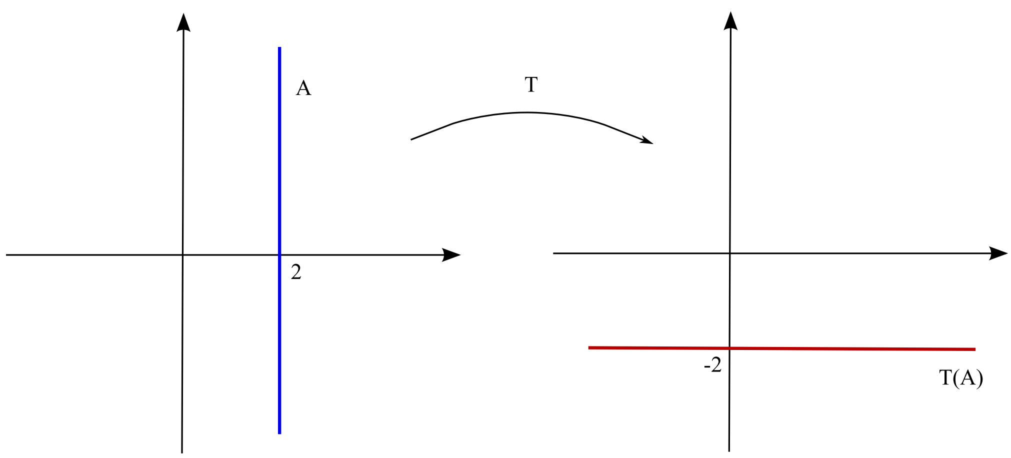
$$T(x, y) = (y, -x) \qquad , \qquad A = \{(2, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Notemos que A es la recta vertical de ecuación implícita: $x = 2$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} (u, v) \in T(A) &\iff (u, v) = T(2, t) \quad \text{para un } t \in \mathbb{R} \\ &\iff (u, v) = (t, -2) \quad \text{para un } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

y esto nos dice que $T(A)$ es la recta horizontal de ecuación implícita: y=-2.

Esto se ilustra en el siguiente gráfico

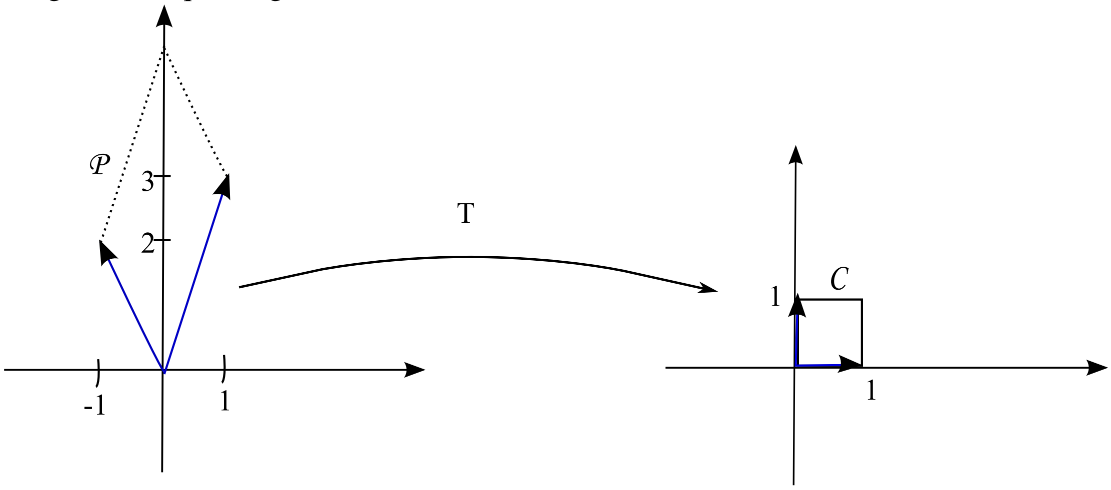


11. Halle una transformación lineal que transforme al paralelogramo determinado por los vectores [5] $(-1,2)$ y $(1,3)$ en el cuadrado de vértices: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y $(1,1)$.

Podemos describir paramétricamente tanto al paralelogramo como al cuadrado de la siguiente manera

$$\mathcal{P}: \begin{cases} x = -t + s \\ y = 2t + 3s \end{cases} \quad (0 \leqslant s,t \leqslant 1) \qquad , \qquad \mathcal{C}: \begin{cases} x = s \\ y = t \end{cases} \quad (0 \leqslant s,t \leqslant 1)$$

El siguiente esquema gráfico



nos sugiere tomar $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como la *única* transformación lineal que satisface

$$T(1,3) = (1,0) \qquad \text{y} \qquad T(-1,2) = (0,1)$$

Siendo que cualquier (x,y) de $\mathbb{R}^2$ se escribe en la forma

$$(x,y) = \tfrac{2x+y}{5}\,(1,3) + \tfrac{y-3x}{5}\,(-1,2)$$

resulta que

$$T(x,y) = T\left(\tfrac{2x+y}{5}\,(1,3) + \tfrac{y-3x}{5}\,(-1,2)\right) = \tfrac{2x+y}{5}T(1,3) + \tfrac{y-3x}{5}T(-1,2) = \left(\tfrac{2x+y}{5}, \tfrac{y-3x}{5}\right)$$

o sea,

$$T(x,y) = \left(\tfrac{2x+y}{5}, \tfrac{y-3x}{5}\right)$$

Una simple cuenta muestra que T es un isomorfismo.

Tomamos un punto genérico de $\mathcal{P}$, le aplicamos T y comprobamos que cae dentro de $\mathcal{C}$; en efecto,

$$\begin{aligned} T(-t+s, 2t+3s) &= \left(\frac{2(-t+s)+2t+3s}{5}, \frac{2t+3s-3(-t+s)}{5}\right) \\ &= (s,t) \in \mathcal{C} \qquad\qquad (0 \leqslant s,t \leqslant 1) \end{aligned}$$

pues $0 \leqslant s,t \leqslant 1$. Con esto probamos que $T(\mathcal{P}) \subset \mathcal{C}$. Pero en realidad también que $\mathcal{C} \subset T(\mathcal{P})$, pues dado cualquier punto (s,t) de $\mathcal{C}$ es claro que proviene del punto $(-t+s, 2t+3s) \in \mathcal{P}$.

[5] es decir, estos dos vectores son dos lados consecutivos del paralelogramo que concurren en el origen

12. Se tienen los siguientes datos

$$\dim \mathbb{V} = n \quad , \quad \dim \mathbb{W} = m \quad , \quad T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W} \text{ es isomorfismo} \quad , \quad \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \text{ base de } \mathbb{V}$$

a) ¿es cierto que debe ser $n = m$?

b) ¿se puede afirmar que $\{T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)\}$ es una base de $\mathbb{W}$?

c) si $\mathbf{v} = 3\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_{n-1} - 2\mathbf{u}_n$,

(i) ¿cuáles son las componentes de $\mathbf{v}$ en la base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$?

(ii) ¿y las de $T(\mathbf{v})$ en $\{T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)\}$?

a)

Sí. Por ser T isomorfismo sabemos que

$$\mathrm{Nu}T = \mathbb{O} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}T = \mathbb{W}$$

Entonces, el teorema de la dimensión nos dice que

$$\dim \mathrm{Im}T = \dim \mathbb{V}$$

pero entonces,

$$\dim \mathbb{W} = \dim \mathrm{Im}T = \dim \mathbb{V}$$

o sea, $n = m$.

b)

Por ser T una transformación lineal y $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ generadores de $\mathbb{V}$,

$$\langle T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n) \rangle = \mathrm{Im}T = \mathbb{W}$$

y por ser T monomorfismo y $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ linealmente independientes,

$$T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)$$

son linealmente independientes; luego,

$$\{T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

es base de $\mathbb{W}$.

c) - (i)

Siendo

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_{n-1} - 2\mathbf{u}_n = 0\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3 + \cdots + 0\mathbf{u}_{n-2} + 4\mathbf{u}_{n-1} - 2\mathbf{u}_n$$

podemos asegurar que las componentes de $\mathbf{v}$ en esta base son

$$(0, 3, 0, \dots, 0, 4, -2)$$

c) - (ii)

Como $T(\mathbf{v}) = 3T(\mathbf{u}_2) + 4T(\mathbf{u}_{n-1}) - 2T(\mathbf{u}_n)$, $T(\mathbf{v})$ tiene las mismas componentes en la base $\{T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)\}$ que $\mathbf{v}$ en la base $\{(\mathbf{u}_1), \dots, (\mathbf{u}_n)\}$.

13. Sea $\mathbb{V} = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty[a, b] \quad \text{y} \quad f(a) = 0\}$. Muestre que

a) $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial y subespacio de $C^\infty[a, b]$

b) las funciones

$$D : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \quad , \quad D(f) = f' \qquad \text{y} \qquad P : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \quad , \quad P(f)(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

son transformaciones lineales

c) D y P son inversas una de otra

d) D y P son isomorfismos

¿Se llega al mismo resultado si se reemplaza $\mathbb{V}$ por $C^\infty[a, b]$?

a)

Basta ver que $\mathbb{V}$ es un subespacio de $C^\infty[a, b]$.

- $f \equiv 0$ está en $\mathbb{V}$
  Pues la función idénticamente nula es infinitamente derivable y además cumple $f(a) = 0$.
- si $f, g \in \mathbb{V}$, entonces $f + g \in \mathbb{V}$
  Pues suma de funciones C^∞ es una función C^∞ y además

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) = 0 + 0 = 0$$

- si $f \in \mathbb{V}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f \in \mathbb{V}$
  Pues cualquier múltiplo de una función infinitamente derivable es infinitamente derivable y además

$$(\alpha f)(a) = \alpha f(a) = \alpha.0 = 0$$

b)

Fue probado en ejercicios anteriores.

c)

Basta comprobar que $D \circ P(f) = f$ y que $P \circ D(f) = f$ para todo $f \in \mathbb{V}$. Por tratarse de igualdades entre funciones, debemos ver que

$$D \circ P(f)(x) = f(x) \qquad , \qquad P \circ D(f)(x) = f(x) \qquad\qquad \text{(para todo } x \in [a, b])$$

pero,

$$D \circ P(f)(x) = D(P(f))(x) = P(f)'(x) = f(x)$$

en virtud del Teorema Fundamental del Clculo Integral.

Por otro lado,

$$P \circ D(f)(x) = P(f')(x) = \int_a^x f'(t)\, dt = f(x) - f(a) = f(x)$$

en virtud de la regla de Barrow —f es una primitiva de f'— y del hecho que $f(a) = 0$ porque $f \in \mathbb{V}$.

d)

Es consecuencia de ser transformaciones lineales inversibles.

Repasando lo hecho en los incisos anteriores notamos que la condición $f(a) = 0$ fue esencial para probar que $P \circ Df = f$ para toda f.