FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS E INGENIERIA

UCA

ALGEBRA Y GEOMETRIA

Primer Cuatrimestre 2011

Trabajo Práctico 0

Conceptos básicos que el alumno necesita saber antes de comenzar a estudiar los temas de la materia

Contenido

Página de Algebra y Geometría	**Consultas Online**
`http://www.lirweb.com.ar` Una vez registrado podrá acceder a sus cursos	`http://mateingeuca.wordpress.com`

Números Reales

Los números reales —tanto los enteros como los decimales— son ampliamente conocidos y usados cotidianamente. Igualmente familiares son las operaciones fundamentales entre ellos

Suma	***Producto***
$a\ ,\ b \xrightarrow[\text{le asocia}]{} a+b$	$a\ ,\ b \xrightarrow[\text{le asocia}]{} a.b$

Asimismo es bien sabido que los números reales se pueden *ordenar*; es decir, si nos dan cualquier par de ellos podemos decir cuál de los dos es mayor y cuál menor.

A partir de estos conceptos surgen propiedades que usamos mecánicamente, sin deternernos a pensar por qué son válidas.

En esta sección no va a haber *novedades* simplemente veremos por qué son válidos un buen número de resultados ampliamente conocidos.
Más concretamente, vamos mencionar trece propiedades básicas que poseen estos números —nueve referidas a las operaciones suma y producto y cuatro relativas a la relación de orden— a partir de las cuales podremos deducir muchas otras que permitirán a su vez obtener una significativa cantidad de resultados muy importantes.

Comenzamos diciendo que denotaremos con la letra

$$\mathbb{R}$$

al conjunto [1] formado por todos estos números y a continuación enunciamos las prometidas trece propiedades básicas.

Suma

S1 $a+b=b+a$, cualesquiera sean a y b (*conmutatividad*)

S2 $(a+b)+c=a+(b+c)$, cualesquiera sean a , b y c (*asociatividad*)

S3 Existe O en $\mathbb{R}$ tal que $a+O=a$, cualquiera sea a (*O: elemento neutro de la suma*)

S4 Para cada a existe un b tal que $a+b=O$, (b: *inverso aditivo de* a)

[1] en la próxima sección daremos una definición de este concepto; de momento basta pensar en el significado que tiene esta palabra en el lenguaje habitual

Observaciones

1. Por supuesto cuando escribimos O en la propiedad **S3** nos estábamos refiriendo al *famoso* 0 (cero). Pero la propiedad no asegura que haya un *único* elemento neutro, solo dice que hay *al menos* uno. Ver que hay *solo* uno y tener entonces derecho a ponerle un nombre es algo que se deduce de esas cuatro propiedades que satisface la suma.

   Veamos entonces que no puede haber *dos* elementos neutros (con lo cual concluiremos que hay *exactamente* uno). Si hubiera otro –digamos que se llama O'– tendríamos que

   (i) al aplicar la propiedad **S3** a $a = O'$ resulta: $O' + O = O'$

   (ii) y al aplicar la misma propiedad pero usando ahora que O' es neutro y tomando $a = O$ resulta: $O + O' = O$

   En consecuencia,

$$O' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por (i)}}}{=} O' + O \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por } \mathbf{S1}}}{=} O + O' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por (ii)}}}{=} O$$

   Concluimos que no puede haber más de un neutro pues suponer que había dos nos llevó a que debían ser necesariamente iguales [2] .

   Ahora sí, dado que hay un único elemento que cumple esa propiedad, podemos ponerle un nombre. Lo llamamos ***cero*** y lo denotamos 0.

2. ¿Cuántos *inversos aditivos* puede tener un mismo número a?
   Sabemos por la propiedad **S4** que *por lo menos* hay uno. Supongamos que hubiese otro. Habría entonces dos números: b y c que satisfarían

$$a + b = 0 \tag{1}$$

$$a + c = 0 \tag{2}$$

   Entonces,

$$b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por } \mathbf{S3}}}{=} b + 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por (2)}}}{=} b + (a + c) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por } \mathbf{S2}}}{=} (b + a) + c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por } \mathbf{S1}}}{=} (a + b) + c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por (1)}}}{=} 0 + c \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por } \mathbf{S3}}}{=} c$$

   De modo que no puede haber más de un inverso aditivo para cada número a. Argumentando como en el caso del elemento neutro, al ser único podemos darle un nombre; al único número que es inverso aditivo del número a lo denotamos:

$$-a$$

   Y podemos decir que $-a$ es el UNICO número que sumado a a da 0.

[2] En el lenguaje matemático decir que un objeto *es igual* a otro significa que ambos son en realidad *el mismo objeto*, no solamente *muy parecidos* o *indistinguibles a la vista* que es el significado que tiene en el lenguaje cotidiano.

Como aplicación veamos cómo resolver una ecuación *muy simple*

$$x + 5 = 0$$

Lo que probamos recién nos dice que x es *el* inverso aditivo de 5; por lo tanto, sin más estamos en condiciones de asegurar que

$$x = -5$$ [3]

3. ¿Quién es $-(-a)$?
   Es, por definición, el inverso aditivo de $-a$ y en consecuencia el *único* número tal que sumado a $-a$ da 0. Pero, también por definición, $-a$ es el inverso aditivo de a; por lo tanto, es el único número que sumado a a da 0. Estos dos hechos

$$(-a) + [-(-a)] = 0$$
$$(-a) + a = 0$$

   nos llevan a decir que a y $-(-a)$ no tienen más remedio que ser iguales por ser ambos inversos aditivos del mismo número: $-a$. En conclusión, la respuesta es

$$-(-a) = a$$

Antes de pasar al próximo tema es conveniente asegurarse de que quedaron claros los conceptos anteriores. Para averiguarlo resuelva estos ejercicios y consulte luego si lo hizo correctamente. *Se recomienda enfáticamente aceptar este consejo y aplicarlo al resto de los temas de la materia.*

Ejercicio 1

¿Hace falta agregar a las propiedades básicas de la suma a estas dos

$$0 + a = a \qquad \text{y} \qquad (-a) + a = 0$$

o se pueden deducir de las cuatro dadas?

Ejercicio 2

Muestre que si $a + a = a$, entonces $a = 0$. ¿Son equivalentes estas dos afirmaciones?

Ejercicio 3

Complete el segundo miembro de la igualdad

$$-(a + b) =$$

y dé razones que justifiquen que es cierta.

[3]Si no se convenció, piense esto: *El Sr. '. . . ' es hermano de Ana Prado. Ana solo tiene un hermano; se llama Juan. ¿Alcanza esta información para saber nombre y apellido del Sr. '. . . '?*

Producto

P1 $a.b = b.a$, cualesquiera sean a y b (*conmutatividad*)

P2 $(a.b).c = a.(b.c)$, cualesquiera sean a , b y c (*asociatividad*)

P3 Existe $u \neq 0$ en $\mathbb{R}$ tal que $a.u = a$, cualquiera sea a (u: *elemento neutro del producto*)

P4 Para cada $a \neq 0$ existe un b tal que $a.b = u$, (b: *inverso multiplicativo de* a)

Observaciones

1. Como en el caso de la suma, el neutro del producto también es único. Lo llamamos ***uno*** y lo denotamos 1.
2. También como en el caso aditivo, el inverso multiplicativo —de cada uno de los números distintos de cero— es único. Dado el número $a \neq 0$ denotamos a su inverso multiplicativo por
$$a^{-1}$$
Lo que carateriza a este número a^{-1} es que es el único que multiplicado por a da 1.
3. NOTACIÓN DE LA OPERACIÓN PRODUCTO
Hasta ahora hemos escrito
$$a.b$$
para indicar que estamos multiplicando los números a y b.

   Si bien en un comienzo se utiliza el punto para que, como en el caso de la suma, esté representada gráficamente es costumbre no incluir el punto al escribir el producto del número a por el número b. Es por eso que de ahora en más vamos escribir simplemente
$$ab$$
para indicar el producto de ambos números.

Ejercicio 4

Demuestre que el neutro del producto es único.

Sugerencia: puede utilizar argumentos similares a los empleados para probar la unicidad del neutro de la suma

Ejercicio 5

Demuestre que el inverso multiplicativo de un número $a \neq 0$ es único.

Sugerencia: puede utilizar argumentos similares a los empleados para probar la unicidad del inverso aditivo

La última propiedad básica referida a las operaciones es

Distributividad

D $(a+b)c = ac + bc$, cualesquiera sean a , b y c

Ejercicio 6

Dé razones que justifiquen que

$$a(b+c) = ab + ac$$

cualesquiera sean a , b y c.

Ejercicio 7

Utilice las propiedades básicas vistas hasta ahora y los resultados mencionados en los ejercicios previos para demostrar

a) $a0 = 0$ cualquiera sea a en $\mathbb{R}$

b) $a(-b) = -\,ab$

c) Si $a \neq 0$, $(a^{-1})^{-1} = a$

d) Si $a, b \neq 0$, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

Comentario

Hasta ahora hemos trabajado solo con dos operaciones: " + " y " . ". A partir de ellas y de los inversos aditivo y multiplicativo se pueden definir otras dos (muy conocidas también)

Resta

$$a - b = a + (-b) \qquad (a \text{ y } b \text{ en } \mathbb{R})$$

División o Cociente

$$\frac{a}{b} = ab^{-1} \qquad (a \text{ en } \mathbb{R} \text{ y } b \neq 0)$$

Observaciones

1. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

En efecto,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = (ab^{-1})^{-1} = a^{-1}(b^{-1})^{-1} = a^{-1}b = ba^{-1} = \frac{b}{a} \qquad (\star)$$

2. Suma de fracciones
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd} \qquad \text{(si } b,d \neq 0\text{)}$$

   En efecto,
$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{c}{d} &= ab^{-1}+cd^{-1}\\ &= ab^{-1}dd^{-1}+cd^{-1}bb^{-1}\\ &= adb^{-1}d^{-1}+cbd^{-1}b^{-1}\\ &= ad(bd)^{-1}+cb(bd)^{-1}\\ &= (ad+bc)(bd)^{-1}\\ &= \frac{ad+bd}{bd}\end{aligned}$$

■ *Orden*

O1 Dados a y b en $\mathbb{R}$ pasa una y solo una de estas tres posibilidades

$$a=b \qquad a<b \qquad b<a \qquad (\textit{tricotomía})$$

O2 Si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$ (*transitividad*)

O3 Si $a<b$ y c es real, entonces $a+c<b+c$ (*la suma es compatible con el orden*)

O4 Si $\begin{cases} a<b \\ y \\ 0<c \end{cases}$, entonces $ac<bc$ (*el producto por un real* positivo *es compatible con el orden*)

Observaciones

1. Si $a<0$, entonces $-a>0$

   Aplicando la propiedad **O3** a la desigualdad $0<a$, tomando $c=-a$, obtenemos
$$0+(-a)>a+(-a)$$
   y ahora usando las propiedades básicas de la suma,
$$-a>0$$
   Análogamente se prueba que si $-a>0$ entonces $a<0$. De modo que podemos decir que ambas desigualdades son *equivalentes*; esto se expresa simbólicamente en la forma
$$a<0 \quad\Longleftrightarrow\quad -a>0$$

2. IMPORTANTE: si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$

   Como $c < 0$ resulta que $-c > 0$, entonces la propiedad **O4** nos permite decir que

   $$a(-c) < b(-c)$$

   en uno de los ejercicios anteriores se debe haber probado que $a(-b) = -\,ab$, por lo tanto,

   $$-ac < -bc$$

   La propiedad **O3** nos habilita a *sumar miembro cualquier número*; en particular nos conviene usar: $ac + bc$ pues

   $$-ac + ac + bc < -bc + ac + bc$$

   que es decir

   $$bc < ac$$

   en virtud de las propiedades básicas de la suma.

Ejercicio 8

a) Una persona afirmó: *Mi vecino es alto y pelirrojo*. ¿Es verdad lo que dijo esa persona si el vecino es

   a) alto y pelirrojo?

   b) alto y castaño?

   c) bajo y pelirrojo?

   d) bajo y rubio?

b) Una persona afirmó: *Mi vecino es médico o psicólogo*. ¿Es verdad lo que dijo esa persona si el vecino es

   a) médico y psicólogo?

   b) médico?

   c) psicólogo?

   ¿Qué tendría que suceder para que lo dijo fuera falso?

c) Si sobre un número real x se afirma: '$x \geqslant 0$ *o* $x < 0$', ¿se está diciendo algo falso o algo verdadero?

d) Supongamos que a es número real mayor que 1. Indique si es verdadera o falsa la afirmación

   $$a > 0 \quad \text{o} \quad a < -1$$

Ejercicio 9

Compruebe que

a) $1 > 0$

b) $a^2 \geqslant 0$ [4] (cualquiera sea a en $\mathbb{R}$)

c) $a > 0 \iff a^{-1} > 0$

d) si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.
Sugerencia: Analice dos casos: $a = 0$ y $a \neq 0$. Recuerde que todo número no nulo tiene inverso multiplicativo

Naturales — Enteros — Racionales

A partir del neutro del producto y de la operación suma se construyen infinitos números reales de la siguiente forma

$$1 \quad , \quad 2 = 1 + 1 \quad , \quad 3 = 2 + 1 \quad , \quad 4 = 3 + 1 \quad , \quad 5 = 4 + 1 \quad \ldots$$

La reunión de todos estos números reales así construidos constituye una parte de $\mathbb{R}$ que se denota por la letra

$$\mathbb{N}$$

A cada uno de sus miembros se lo denomina ***número natural***.

Si al conjunto de todos los números naturales le agregamos sus respectivos inversos aditivos y el neutro de la suma obtenemos otra parte de $\mathbb{R}$ que se denota por

$$\mathbb{Z}$$

A sus elementos se los denomina ***números enteros***. Es claro que todo número natural es también un número entero.

Si al conjunto de todos los números enteros le agregamos todos los cocientes de la forma

$$\frac{m}{n}$$

donde m es entero y n natural obtenemos otra parte de $\mathbb{R}$ que denotamos por

$$\mathbb{Q}$$

A cada uno de sus elementos lo llamamos ***número racional***. También es claro que todo entero —y por lo tanto también todo natural— es en particular, racional.
En el lenguaje de teoría de conjuntos, tema que veremos a continuación, se tiene

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

En ningún caso vale la igualdad.

[4] $a^2 = aa$
$x \geqslant y$ se lee: x es mayor o igual que y.

CONJUNTOS

Un ***conjunto*** es una colección de objetos pensada como unidad. Se los suele denotar con letras mayúsculas y para describirlos se utilizan generalmente dos formas:

❒ *nombrando expresamente a cada uno de sus elementos*

Esto se denota encerrando entre llaves — { } [5] — a los elementos del conjunto. Por ejemplo, si el conjunto X consta únicamente de los números: $1, 2, 3$ escribimos

$$X = \{1, 2, 3\}$$

Esto se lee: X es el conjunto formado por los números 1 , 2 y 3.

Ejemplos:

$$A = \{1, 3, 20, 50\}$$
$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

NOTA: esta forma solo es posible cuando la cantidad de elementos es finita y no muy grande.

❒ *mencionando una serie de propiedades que son comunes a todos los elementos y que los caracterizan*
Ejemplos:

$$C = \{\text{ríos de la Argentina}\}$$

$$D = \{\text{letras del alfabeto griego}\}$$

$$E = \{\text{números pares}\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \ \text{ y } \ \ln x < 0\}$$ [6]

A los elementos de un conjunto se los denota generalmente con letras minúsculas y cuando queremos decir que un elemento x forma parte de un un conjunto X escribimos

$$x \in X$$

que se lee: x *pertenece a* X. Si, por el contrario queremos indicar que un objeto y *no está* en ese conjunto escribimos

$$y \notin X$$

que se lee: y *no pertenece a* X.

[5] Es importante recordar que tienen que ser *llaves*; los corchetes y los paréntesis tienen interpretaciones diferentes a las llaves en el lenguaje matemático.

[6] Se lee: el conjunto de los x en $\mathbb{R}$ tales que x es positivo y su logaritmo negativo

Ejemplos

a) $A = \{1, 3, 20, 50\}$
$1 \in A \quad , \quad 3 \in A \quad , \quad 25 \notin A \quad , \quad \frac{1}{2} \notin A$

b) $B = \{a, e, i, o, u\}$
$\alpha \notin B \quad , \quad e \in B \quad , \quad u \in B \quad , \quad c \notin B$

c) $C =$ {ríos de la Argentina}
Limay $\in C \quad , \quad$ Ebro $\notin C$

d) $E =$ {letras del alfabeto griego}
$\pi \in E \quad , \quad b \notin E \quad , \quad \aleph \notin E$ [7]

e) $F = \{1\}$
$1 \in F \quad , \quad 7 \notin F$
Este conjunto tiene un único elemento: el número 1.

f) $G = \{\{1\}\}$
$\{1\} \in G \quad , \quad 1 \notin G$
Este conjunto también tiene un único elemento: $\{1\}$. El único elemento de G es a su vez un *conjunto*, no un *número*,

$$1 \neq \{1\}$$

pues los números y los conjuntos son entidades distintas. Por lo tanto,

$$F \neq G$$

es decir,

$$\{1\} \neq \{\{1\}\}$$

Ejercicio 10

Exhiba tres elementos que estén en el conjunto A y tres que no estén. Escríbalo usando los símbolos correspondientes.

$$A = \{\text{provincias de la Argentina de la región de Cuyo}\}$$

Ejercicio 11

El conjunto B está formado por todos los números cuyo cuadrado es 16. Escriba a B utilizando el lenguaje simbólico.

Ejercicio 12

Dados los conjuntos

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sen} x = 0\} \qquad , \qquad D = \{\pi, 4\pi, 3, \{\pi\}\}$$

[7] $\aleph$ es la primera letra del alfabeto hebreo; su nombre es *alef*

determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas

$$\frac{\pi}{2} \in C \quad , \quad \pi \in D \quad , \quad \pi \in C \quad , \quad 3 \in C \quad , \quad \{\pi\} \in D \quad , \quad \{\pi\} \in C$$

Relaciones entre conjuntos

Decimos que dos conjuntos A y B son ***iguales*** cuando tienen *exactamente* los mismos elementos. En tal caso escribimos

$$A = B$$

Si esto no ocurre, es decir, si hay *al menos* un elemento en A que no está en B o *al menos* un elemento de B que no está en A decimos que son ***distintos*** y lo denotamos

$$A \neq B$$

Ejemplos

1. $X = \{\text{números pares mayores que 3 y menores que 11}\} \quad , \quad Y = \{4, 6, 8, 10\}$
   Es claro que ambos tienen exactamente los mismos elementos; es decir, $X = Y$

2. $X = \{\text{números pares menores que 13}\} \quad , \quad Y = \{4, 6, 8, 10\}$
   En este caso tenemos que, por ejemplo, $2 \in X$ pero $2 \notin Y$. Luego, $X \neq Y$.

Decimos que un conjunto A está ***incluido*** en un conjunto B —o bien que A es un ***subconjunto*** de B— si todos los elementos de A son también elementos de B. En tal caso denotamos

$$A \subset B$$

Cuando hay *por lo menos* un elemento de A que no está en B escribimos

$$A \not\subset B$$

y decimos que A no es subconjunto de B o bien que A no está incluido en B.

Observaciones

1. En el ejemplo 1. de la página 11 podemos decir que

$$Y \subset X \qquad \text{y también que} \qquad X \subset Y$$

   En cambio en el ejemplo 2. de la página 11 tenemos

$$Y \subset X \qquad \text{pero} \qquad X \not\subset Y$$

2. ¿Qué se puede decir de la relación entre los conjuntos A y B si se sabe que $A \subset B$ y que $B \subset A$?

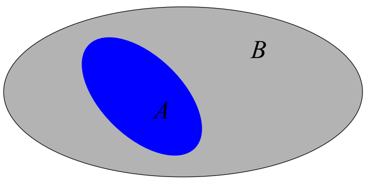
   $A \subset B$: nos dice que todos los elementos de A son elementos de B
   $B \subset A$: nos dice que todos los elementos de B son elementos de A

   En tal caso no puede haber ningún elemento de uno de ellos que no sea elemento del otro; en consecuencia deben ser iguales.

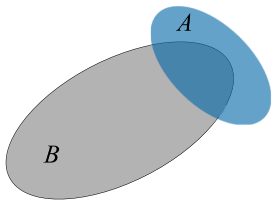
   Se puede afirmar que

$$A = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subset B \quad \text{y} \quad B \subset A$$

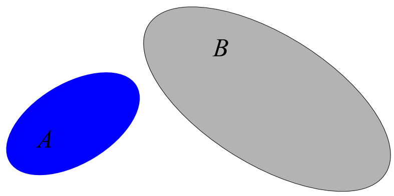
Los conjuntos pueden representarse esquemáticamente mediante los llamados ***diagramas de Venn***. Cada conjunto se representa mediante un óvalo o un círculo.
Veamos cómo se ilustran las distintas relaciones entre dos conjuntos A y B usando diagramas de Venn



A está incluido en B



A y B tienen elementos en común



A y B no tienen elementos en común

Ejercicio 13

Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$. Explique por qué es UN ERROR MUY GRAVE de ortografía matemática escribir

$$a \subset A \quad , \quad A \in B \quad , \quad \{a, c\} \in A \quad , \quad \{a, e\} \notin A \quad , \quad B \notin A \quad , \quad \{A\} = A \quad , \quad A \subset \{A, B\}$$

e indique cuál es la forma correcta de escribirlas.

Ejercicio 14

Dados los conjuntos

$$A = \left\{ x \in [-\pi, \pi] \;\middle|\; \cos x = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \right\} \quad , \quad B = [-\pi, \pi] \quad , \quad C = \left\{ -2, 6, \tfrac{1}{2}, -\sqrt{2} \right\}$$

y los símbolos

$$\in \quad , \quad \notin \quad , \quad \subset \quad , \quad \not\subset \quad , \quad = \quad , \quad \neq$$

Determine en cada caso cuál es el símbolo que corresponde poner

$$A \quad B \qquad , \qquad 0 \quad A \qquad , \qquad 0 \quad C \qquad , \qquad \{0, 1, 2\} \quad B \qquad , \qquad \{-2, 6\} \quad C$$

$$\{-2\} \quad C \qquad , \qquad -2 \quad C \qquad , \qquad C \quad B \qquad , \qquad \left\{-\tfrac{\pi}{4}\right\} \quad A \qquad , \qquad \left\{-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right\} \quad A$$

$$-\pi \quad A \qquad , \qquad \left\{\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right\} \quad A$$

Ejercicio 15

Escriba los siguientes conjuntos nombrando expresamente cada uno de sus elementos

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-3)^2 = 1\}$

c) $C = \{x \in [-\pi, 5\pi] \mid \operatorname{sen} x = 1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ es natural y no mayor que $12\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x + 4 = 0$ y $x > 0\}$

Ejercicio 16

Escriba los siguientes conjuntos mencionando las propiedades que caracterizan a sus elementos

a) $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

b) $B = \{-1, 1\}$

c) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$

Ejercicio 17

Sean A, B, C conjuntos. Explique por qué son ciertas las siguientes afirmaciones

a) $A \subset A$

b) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$

Hágalo primero en sus propias palabras e intente luego *traducirlo* al lenguaje matemático.

Ejercicio 18

Dados los conjuntos

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \quad , \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ es entero positivo par menor que } 10\} \quad , \quad D = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$$

Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas

$$A \subset B \quad , \quad B \subset C \quad , \quad C \subset B \quad , \quad A = C \quad , \quad C \subset A \quad , \quad A = B$$

Dé las razones que le hicieron decidir su respuesta.

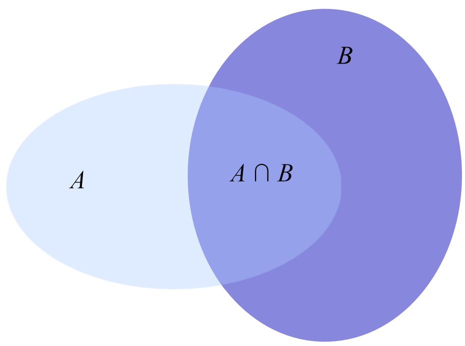
Operaciones entre conjuntos

I — INTERSECCIÓN

A partir de dos conjuntos A y B vamos a definir un tercero considerando *únicamente* a los elementos que son comunes a ambos. Lo denotamos $A \cap B$ y lo expresamos simbólicamente

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}$$

Esto se lee: A intersección B es el conjunto de los x tales que x está en A y x está en B.
Utilizando diagramas de Venn hacemos un esquema gráfico de la situación

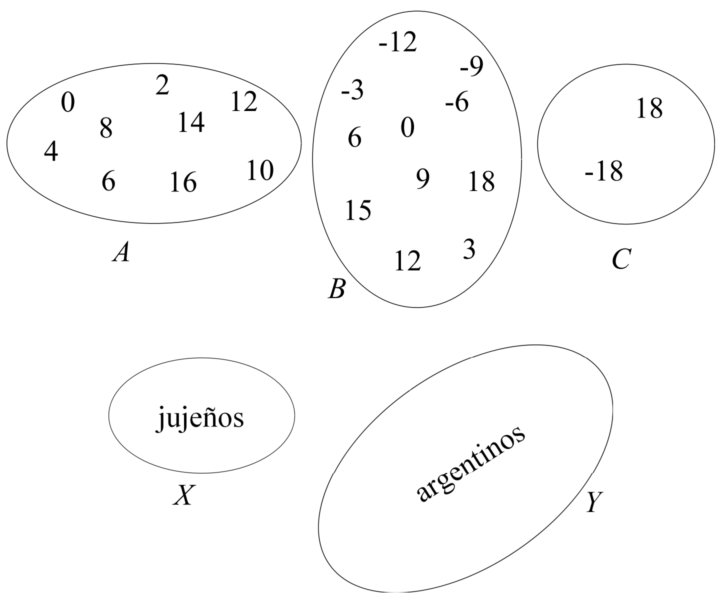


Ejemplos

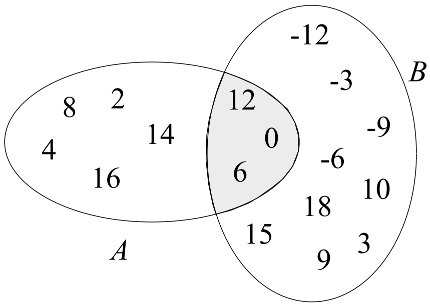
Sean los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es par y menor que } 17\} \quad , \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in [-12, 18] \text{ y es múltiplo de } 3\}$$

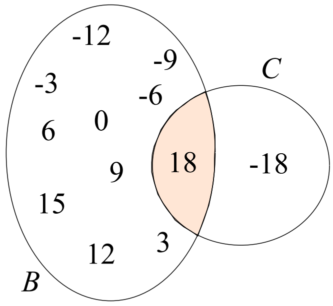
$$C = \{-18, 18\} \quad , \quad X = \{x \mid x \text{ es jujeño}\} \quad , \quad Y = \{x \mid x \text{ es argentino}\}$$



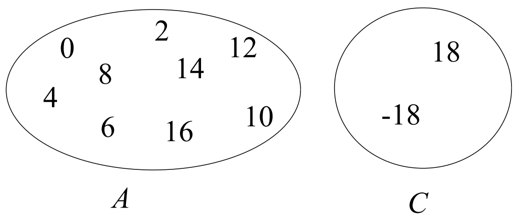
a) $A \cap B = \{0, 6, 12\}$



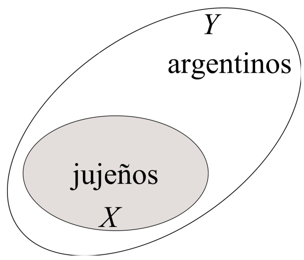
b) $B \cap C = \{18\}$



c) $A \cap C$ no tiene elementos



d) $X \cap Y = X$



Observaciones

1. El caso planteado en el ejemplo d) se puede generalizar:
   si $E \subset F$ entonces, $E \cap F = E$

2. Un conjunto muy especial: el ***conjunto vacío***
   En muchas ocasiones sucede, como en el ejemplo c), que al intersecar dos conjuntos nos encontramos con que no hay nada en común. Resulta entonces útil definir un conjunto con

la particularidad de *no tener elementos*. A ese conjunto lo llamamos ***vacío*** y lo denotamos por

$$\varnothing$$

De esta forma podemos reescribir c) poniendo

$$A \cap C = \varnothing$$

Cuando un conjunto G tiene –al menos– un elemento decimos que es ***no vacío*** y escribimos

$$G \neq \varnothing$$

Hay infinidad de maneras de describir al conjunto $\varnothing$, basta pedir que sus elementos satisfagan condiciones contradictorias. Por ejemplo,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq x\} = \varnothing \qquad , \qquad \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \quad \text{y} \quad x + 1 < 0\} = \varnothing$$

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es par e impar}\} = \varnothing$$

Propiedades

a) Cualquiera sea el conjunto H vale: $\varnothing \subset H$
Si esto no fuera cierto sería posible encontrar un elemento en $\varnothing$ que *no está* en H. Pero como $\varnothing$ NO TIENE ELEMENTOS nunca podremos encontrarlo.

b) $\{\varnothing\} \neq \varnothing$
Pues el primero tiene *un* elemento: el propio conjunto vacío que si bien no tiene ningún elemento, *¡existe!* y por lo tanto puede ser considerado *elemento* de otro conjunto; tenemos entonces

$$\varnothing \in \{\varnothing\}$$

Ejercicio 19

Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2(x+4)(x^2-9) = 0\} \quad , \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant 10\} \quad , \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 1\}$$

calcule

$$A \cap B \quad , \quad A \cap C \quad , \quad B \cap C \quad , \quad A \cap B \cap C$$

NOTA: $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$; es decir, todos los elementos comunes a los tres conjuntos.

Ejercicio 20

Dé tres descripciones distintas del conjunto vacío.

Ejercicio 21

Sean A , B conjuntos. ¿Es cierto que

a) $A \cap B \subset A$?

b) $A \cap B \subset B$?

c) $A \cap \varnothing = A$?

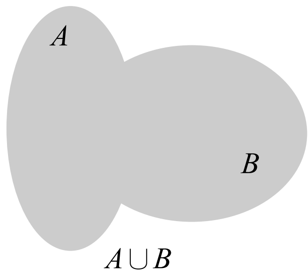
d) $A \cap \varnothing = \varnothing$?

NOTA: cuando sea cierto debe explicar qué razones lo llevaron a pensar eso; cuando no lo sea debe mostrar un ejemplo que compruebe que la afirmación no se cumple siempre.

II — UNIÓN

A partir de dos conjuntos A y B definimos un tercero reuniendo a todos los elementos de los dos conjuntos. Lo denotamos $A \cup B$ y lo expresamos simbólicamente

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\}$$



$A \cup B$

Ejemplos

Sean los conjuntos

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqslant 0\}\ ,\ B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m < 0\}\ ,\ C = \{x \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par}\}\ ,\ D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es impar}\}$$

a) $A \cup B = \mathbb{Z}$

b) $C \cup D = \mathbb{N}$

c) $A \cup \mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{0\} = A$

d) $A \cup C = A$

e) $A \cup \varnothing = A$

f) $A \cup \{\varnothing\} \neq A$
$A \cup \{\varnothing\}$, además de contener a todos los elementos de A, incluye también al conjunto vacío; es decir,

$$n \in A \cup \{\varnothing\} \quad \text{para todo } n \text{ entero no negativo} \quad \text{y} \quad \varnothing \in A \cup \{\varnothing\}$$

A solamente contiene a los enteros no negativos; $\varnothing \notin A$.

Observaciones

1. El caso planteado en el ejemplo d) se puede generalizar
$$\text{si } E \subset F \text{ entonces, } E \cup F = F$$

2. El caso planteado en el ejemplo e) se puede generalizar
$$E \cup \varnothing = E$$

Ejercicio 22

Considere los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} \quad , \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x + 3 = 0\} \quad , \quad C = \left\{-\tfrac{3}{2}, -1, 1\right\}$$

a) Calcule $A \cup B$

b) ¿Cmo se relacionan los conjuntos A , B , $A \cup B$ con el conjunto C?

c) Calcule $A \cap B$

d) Escriba el símbolo que falta entre los conjuntos $A \cap B$ y C: $\quad A \cap B \qquad C$.

Ejercicio 23

Considere los conjuntos

$$A = \left\{x \in [0, 4\pi] \mid \cos x = \tfrac{1}{2}\right\} \quad , \quad B = \left\{x \in [-\pi, 3\pi] \mid \operatorname{sen} x = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$C = \{x \in [0, 2\pi] \mid \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1\} \quad , \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(3x) = -2\}$$

Calcule

a) $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup D$, $B \cup C$

b) $A \cup B \cup C$

NOTA: $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$

c) $C \cap D$

d) $A \cap (B \cup C)$

e) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Compare este resultado con el del inciso anterior.

Ejercicio 24

Sean A , B conjuntos. Compare los siguientes pares de conjuntos

a) $A \cap B$, $B \cap A$

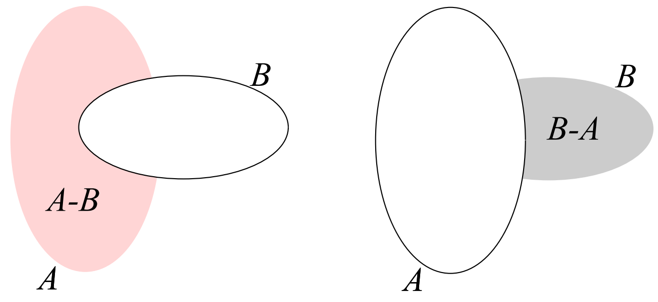
b) $A \cup B$, $B \cup A$

III — DIFERENCIA

La ***diferencia*** entre dos conjuntos A y B se denota $A - B$ y se define por

$$A - B = \{x \mid x \in A \quad \text{y} \quad x \notin B\}$$

El siguiente gráfico representa, mediante diagramas de Venn, la diferencia entre A y B y la diferencia entre B y A



Ejemplos

a) $\mathbb{N} - \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es impar}\}$

b) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par}\} - \mathbb{N} = \varnothing$

c) Consideremos los conjuntos

$A = \{x \mid x$ es una letra de la palabra *castellano*$\}$, $B = \{x \mid x$ es una letra de la palabra *matemática*$\}$

Entonces,

$$A = \{a, c, e, l, n, o, s, t\} \qquad , \qquad B = \{a, c, e, i, m, t\}$$

Por lo tanto,

$$A - B = \{l, n, o, s, t\} \qquad , \qquad B - A = \{i, m\}$$

IV — COMPLEMENTO

Pensemos ahora que solo vamos a trabajar con subconjuntos de un conjunto dado al que llamaremos U. A este conjunto U lo vamos a denominar ***universal*** dado que no nos interesa otra cosa que todos o parte de sus elementos.

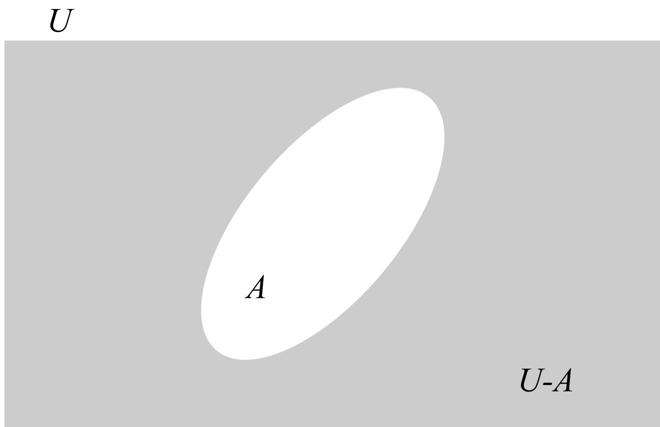
Conviene observar que no hay un *único* conjunto universal. Todo conjunto puede ser considerado universal si por alguna razón nos interesa trabajar únicamente con *sus elementos*. Por ejemplo, si decidimos formar palabras en griego podríamos considerar al alfabeto griego como conjunto universal. Si en cambio quisiéramos formar palabras en castellano o inglés el conjunto universal debería ser el alfabeto latino.

Le vamos a poner un nombre a todos los elementos de un conjunto universal que *no* están en uno de sus subconjuntos. Lo llamaremos *complemento*.

El comentario anterior nos lleva a concluir que un mismo conjunto puede tener diversos complementos según sea el conjunto universal que tomemos como referencia.

Dado un conjunto universal U y $A \subset U$ uno de sus subconjuntos definimos el ***complemento*** de A como

$$A^c = U - A$$



Ejemplos

a) Sea $U = \mathbb{N}$ el conjunto universal y consideremos $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es impar}\}$. Entonces,

$$A^c = \mathbb{N} - A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par}\}$$

b) Sea $U = \{x \mid x \text{ es una letra del alfabeto latino}\}$ y llamemos $A = \{x \mid x \text{ es una consonante}\}$. Entonces,

$$A^c = U - A = \{a, e, i, o, u\}$$

c) $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ es irracional}\} = \mathbb{Q}$

d) $\varnothing^c = U - \varnothing = U \qquad , \qquad U^c = U - U = \varnothing$

Ejercicio 25

Sea $A = \{\text{Corrientes , Misiones}\}$, calcule el complemento de A considerando que el conjunto universal es

a) $U = \{\text{provincias de la Mesopotamia}\}$

b) $U = \{\text{provincias argentinas}\}$

Ejercicio 26

Calcular el complemento de los siguientes conjuntos respecto del universal indicado

a) $U = \mathbb{R}$, $A = [-2, 5]$

b) $U = \mathbb{R}$, $A = (-\infty, 3]$

c) $U = \mathbb{R}$, $A = (-\infty, 3)$

d) $U = [-3, 3]$, $A = (-1, 1)$

e) $U = [-1, 1]$, $A = (-1, 1)$

Ejercicio 27

Supongamos que A , B y U satisfacen

$$A \subset B \subset U$$

Averigüe cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta

a) $U - A \subset U - B$

b) $U - B \subset U - A$

c) falta información para poder decidir.

Leyes de De Morgan

Dados los subconjuntos A y B del conjunto universal U, se tiene que

❒ $U - (A \cup B) = (U - A) \cap (U - B)$

❒ $U - (A \cap B) = (U - A) \cup (U - B)$

Vamos a demostrar la primera. Para ello será útil recordar que decir que *dos conjuntos son iguales* equivale a decir que *cada uno de ellos está contenido en el otro*; se trata entonces de ver que

(i) $U - (A \cup B) \subset (U - A) \cap (U - B)$

y que

(ii) $(U - A) \cap (U - B) \subset U - (A \cup B)$

Para (i): tomemos un $x \in U - (A \cup B)$ y veamos que está en $(U - A) \cap (U - B)$. Ahora bien,

$$x \in U - (A \cup B) \Longrightarrow x \notin A \cup B$$

y como $A \cup B$ contiene tanto a A como a B, si x no está en la unión tampoco puede estar en A ni en B; luego,

$$x \notin A \qquad \text{y} \qquad x \notin B$$

que es lo mismo que decir

$$x \in U - A \qquad \text{y} \qquad x \in U - B$$

y por lo tanto,

$$x \in (U - A) \cap (U - B)$$

como queríamos.

Para (ii): tomemos un $x \in (U - A) \cap (U - B)$ y veamos que está en $U - (A \cup B)$. Tenemos entonces,

$$x \in U - A \qquad \text{y} \qquad x \in U - B$$

que es decir,

$$x \notin A \qquad \text{y} \qquad x \notin B$$

y como $A \cup B$ está formado por los elementos de A más los elementos de B, lo que no está en ninguno de los dos no puede estar en la unión; luego,

$$x \notin A \cup B$$

que es lo mismo que decir

$$x \in U - (A \cup B)$$

como queríamos.

V — Producto Cartesiano

Para que dos conjuntos sean iguales solamente importa que tengan exactamente los mismos elementos, no interesa el orden en que se los exhiba; por ejemplo,

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$$

Vamos a introducir ahora un nuevo concepto de conjunto donde el orden en que se presenten los elementos va a intervenir.

Llamamos ***par ordenado*** a un conjunto de dos elementos —*a* y *b*— dados en un determinado orden que denotaremos

2da. componente

$$\overset{}{(\,\underset{\uparrow}{a}\,,\,\overset{\downarrow}{b}\,)}$$

1ra. componente

NOTA: para distinguirlo de $\{a, b\}$ lo denotamos usando *paréntesis* en lugar de *llaves*. Separamos sus elementos por una *coma*; **no** por *punto y coma*. Cabe mencionar que el contexto siempre impide confundirlo con el intervalo abierto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ por lo cual es absolutamente innecesario, además de incorrecto, utilizar " ; " .

Diremos que dos pares ordenados son iguales cuando tienen las primeras componentes iguales y las segundas componentes también iguales; es decir,

$$(a, b) = (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d$$

Observación

Los conjuntos $\{1, -3\}$ y $\{-3, 1\}$ son iguales pues tienen exactamente los mismos elementos; pero los pares ordenados $(1, -3)$ y $(-3, 1)$ son distintos porque el orden no es el mismo

$$\{1, -3\} = \{-3, 1\} \qquad \text{pero} \qquad (1, -3) \neq (-3, 1)$$

Dados dos conjuntos A y B llamamos ***producto cartesiano*** de A por B al conjunto

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \quad \text{y} \quad b \in B\}$$

Ejemplos

1. Sean $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{1, 2\}$,

   $$A \times B = \{a, e, i, o, u\} \times \{1, 2\} = \{(x, y) \mid x \in \{a, e, i, o, u\} \ \text{ e } \ y \in \{1, 2\}\}$$

   es decir, son todos los pares ordenados donde la primera componente es una vocal y la segunda es o bien el número 1 o bien el número 2.

   Como hay una cantidad finita de posibilidades podemos escribir todos los elementos de $A \times B$

   $$A \times B = \{a, e, i, o, u\} \times \{1, 2\} = \{(a, 1), (a, 2), (e, 1), (e, 2), (i, 1), (i, 2), (o, 1), (o, 2), (u, 1), (u, 2)\}$$

2. Sean de nuevo $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{1, 2\}$. Ahora vamos calcular $B \times A$

$$B \times A = \{1, 2\} \times \{a, e, i, o, u\} = \{(x, y) \mid x \in \{1, 2\} \text{ e } y \in \{a, e, i, o, u\}\}$$

   Los elementos de $B \times A$ son ahora pares ordenados donde la primera componente es un número —1 ó 2— y la segunda es una letra: una vocal.

   Resulta

$$B \times A = \{1, 2\} \times \{a, e, i, o, u\} = \{(1, a), (1, e), (1, i), (1, o), (1, u), (2, a), (2, e), (2, i), (2, o), (2, u)\}$$

3. Conclusión importante
   Los dos ejemplos anteriores muestran que

$$A \times B \neq B \times A$$

   O sea que —para este producto— el orden de los factores *altera* el producto.

Esquema gráfico de un producto cartesiano

Consideremos los conjuntos

$$A = \{a, e, i, o, u\} \qquad , \qquad B = \{1, 2\}$$

Vamos a representar a los elementos de $A \times B$ en forma de una tabla

B						
2	$(a, 2)$	$(e, 2)$	$(i, 2)$	$(o, 2)$	$(u, 2)$	
1	$(a, 1)$	$(e, 1)$	$(i, 1)$	$(o, 1)$	$(u, 1)$	
	a	e	i	o	u	A

Ubicamos a los elementos de A –el primer factor del producto– en una fila y a los elementos de B –el segundo factor del producto– en una columna. De esta forma, cada elemento x de A da origen a una columna de la tabla y cada elemento y de B a una fila. El par ordenado correspondiente –(x, y)– se ubica en la intersección de la fila con la columna.

Ejercicio 28

Haga un esquema gráfico del producto cartesiano $B \times A$, siendo A y B los conjuntos del ejemplo anterior.

Ejercicio 29

¿Cuál es la forma que tiene un elemento genérico del conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

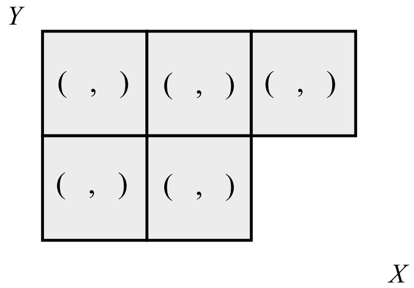
Ejercicio 30

Complete la siguiente afirmación

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{(\quad , \quad) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \qquad \text{y} \qquad \}$$

Ejercicio 31

¿Es posible encontrar un conjunto X y un conjunto Y tal que el siguiente esquema represente al conjunto $X \times Y$?



Ejercicio 32

Si el conjunto A tiene 20 elementos y el conjunto B tiene 7, ¿se puede averiguar cuántos elementos tiene $A \times B$?

Ejercicio 33

Sea $S = \{(0, 1), (3, 2)\}$.

a) Averigüe si S es el producto cartesiano de otros dos conjuntos.

b) Encuentre dos conjuntos A y B tales que $S \subset A \times B$.

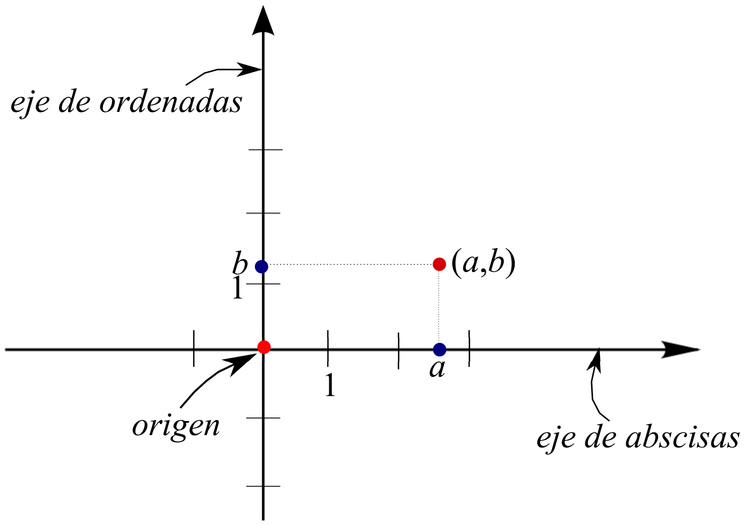
Ejemplo importante: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Denotamos con $\mathbb{R}^2$ al producto cartesiano del conjunto de los números reales consigo mismo; es decir,

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ y \in \mathbb{R}\}$$

Para representar a sus elementos se trazan dos ejes (rectas) perpendiculares, una *horizontal* llamada ***eje de abscisas*** y otra *vertical* llamada ***eje de ordenadas***. Ambos ejes representan a la recta real con orden creciente de izquierda a derecha en las abscisas y de abajo hacia arriba en las ordenadas y teniendo el origen en la intersección de ambos ejes.
Sobre cada eje se ubica el número 1 a la derecha del 0 (en las abscisas) y arriba del 0 (en las ordenadas) lo que dará la *unidad* de medida. A partir de esto se puede ubicar –sobre cada

eje– cada número real. En el siguiente esquema gráfico se ilustra la ubicación de un elemento $(a, b) \in \mathbb{R}^2$



A partir de su ubicación en este gráfico podemos decir que

$$2 < a < 3 \qquad \text{y que} \qquad 1 < b < 2$$

De esta forma cada elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ corresponde a un único punto P del plano y a su vez, para cada punto Q del plano hay un único elemento de $\mathbb{R}^2$ –el par ordenado (a, b)– que lo representa.

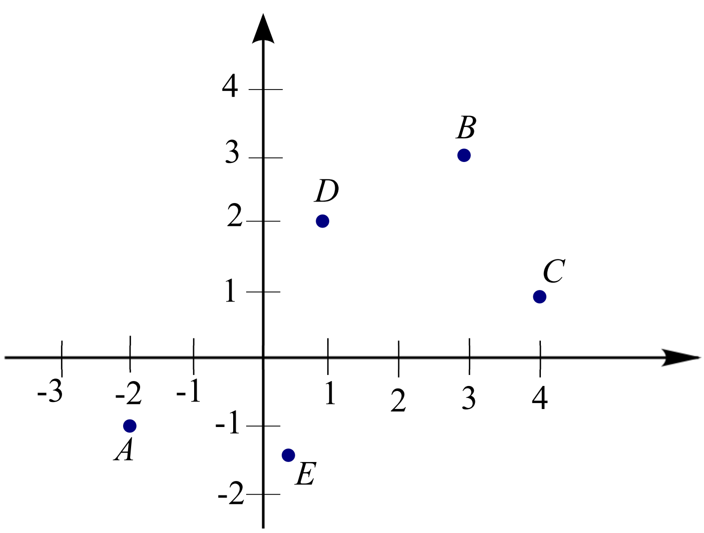
Ejercicio 34

Ubique en un sistema cartesiano a los siguientes elementos de $\mathbb{R}^2$

$$(1,0) \quad , \quad (0,1) \quad , \quad (3,4) \quad , \quad (4,3) \quad , \quad (-5,2) \quad , \quad \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{7}{4}\right)$$

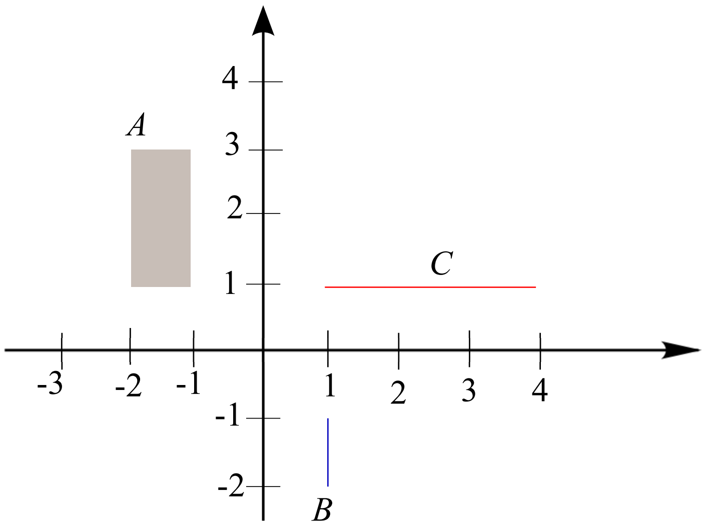
Ejercicio 35

Halle las coordenadas cartesianas de los puntos del plano que se indican en el siguiente gráfico



Ejercicio 36

Para cada uno de los conjuntos que se muestran en el siguiente gráfico halle un par de conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$ de modo que se lo pueda escribir como $X \times Y$



Ejercicio 37

Representé gráficamente en un sistema cartesiano a los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

$$A = \{2, 3\} \times [-1, 3] \quad , \quad B = (2, +\infty) \times \{4\} \quad , \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\} \times \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

$$D = [2, 3] \times [-1, 3] \quad , \quad E = (2, 3) \times (-1, 3] \quad , \quad F = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \times \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$$

NOTA: para que quede más clara la respuesta es conveniente hacer un gráfico distinto para cada conjunto.

RELACIONES

Una ***relación*** entre dos conjuntos A y B es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$ [8] .

Ejemplos

1. $A = \{-1, 2\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$. Llamemos

   $$R_1 = \{(-1,4),(-1,6),(2,4)\} \quad , \quad R_2 = \{(-1,4),(-1,5),(-1,6)\} \quad , \quad R_3 = \{(4,-1),(5,-1)\}$$

   - El conjunto $R_2 = \{1\} \times B \subset A \times B$ es un subconjunto de $A \times B$ y por lo tanto es una relación entre A y B
   - El conjunto R_1 no es un producto cartesiano pero sus elementos son también elementos de $A \times B$; luego, $R_1 \subset A \times B$ y por lo tanto es una relación entre A y B
   - El conjunto $R_3 = \{4, 5\} \times \{-1\}$ pero sus elementos no están en $A \times B$; R_3 *no* es una relación entre A y B.
     Sin embargo, es fácil comprobar que $R_3 \subset B \times A$; luego, R_3 *es* una relación entre B y A.

2. $A = \{personas\}$, $B = \{países\}$
   Es claro que el conjunto

   $$R = \{(x, y) \in A \times B \mid x \text{ nació en } y\}$$

   está contenido en $A \times B$; por lo tanto R es una relación entre A y B.

3. $A = \{personas\}$
   Consideremos el conjunto $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ es hermano de } y\}$. Claramente es una relación en A.

   Si x es hijo único: no está relacionado con nadie

   $$(x, x) \notin R$$

   Si x tiene 3 hermanos: y_1, y_2, y_3 entonces x está relacionado con los tres y podemos escribir

   $$(x, y_1), (x, y_2), (x, y_3) \in R$$

   Notemos algunas particularidades de esta relación

   (i) $(x, x) \notin R$

   (ii) $(x, y) \in R$ si y solo si $(y, x) \in R$

   (iii) $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R$

4. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = |y|\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y en consecuencia es una relación en $\mathbb{R}$.

[8] cuando $A = B$ decimos simplemente que $R \subset A \times A$ es una relación en A

Estos ejemplos, particularmente los tres últimos, explican el por qué del nombre de *relación* para los subconjuntos de un producto cartesiano.
Por caso, en el ejemplo 2., la condición para que un par (x, y) esté en R es que x haya nacido en y; eso *relaciona* a las *personas* (elementos del conjunto A) con los *países* (elementos del conjunto B).
Algo similar ocurre en el ejemplo 4:

$$(1, 1), (1, -1), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \in R$$

lo que se interpreta como: el número 1 está relacionado con 1 y con -1 [9] ; el número $\sqrt{2}$ lo está con $\sqrt{2}$ y con $-\sqrt{2}$.

Relación de equivalencia

Una relación R en un conjunto A se dice

- ❒ ***reflexiva*** si $(x, x) \in R$ para cada $x \in A$; es decir, si todo elemento de A está relacionado consigo mismo.

- ❒ ***simétrica*** si cada vez que $(x, y) \in R$ ocurre que $(y, x) \in R$; es decir, si x está relacionado con y entonces también y está relacionado con x.

- ❒ ***transitiva*** si cada vez que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ ocurre que $(x, z) \in R$; es decir, si x está relacionado con y e y lo está con z resulta que x está relacionado con z.

Una relación R en un conjunto A se denomina ***relación de equivalencia*** si es *simultáneamente*: reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejercicio 38

Elija dos conjuntos A y B y defina cuatro conjuntos R_1 , R_2 , R_3 y R_4 tales que: R_1 y R_2 sean relaciones entre A y B y R_3 y R_4 sean relaciones entre B y A pero no entre A y B.

Ejercicio 39

Para cada una de las relaciones presentadas en los ejemplos anteriores investigue si son reflexivas, simétricas y transitivas. Indique luego si alguna de ellas es relación de equivalencia.

[9]la relación es que tanto 1 como -1 tienen a 1 por su módulo

Ejercicio 40

Considere el conjunto

a) $A = \{rectas\ del\ plano\}$ y defina $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x$ es paralela a $y\}$. ¿Es R una relación de equivalencia en A?

b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$. ¿Es una relación de equivalencia?

c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$. ¿Es una relación de equivalencia?

d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y\}$. ¿Es una relación de equivalencia?

e) $R = \{(X, Y) \mid X, Y \subset \mathbb{R}$ y $X \subset Y\}$. ¿Es relación de equivalencia?

NOTA: Cuando no sea relación de equivalencia, indique cuáles de las propiedades (reflexividad, simetría, transitividad) sí verifica.

El siguiente ejercicio muestra otra forma de escribir una relación

Ejercicio 41

Considere el conjunto $A = \{rectas\ del\ plano\}$. Se define la relación R por

$$x\ R\ y \iff x \text{ es perpendicular a } y$$

a) analice si es reflexiva, simétrica o transitiva

b) ¿es una relación de equivalencia?

NOTA: $x\ R\ y$, que se lee: x está relacionado con y, es otra forma de expresar: $(x, y) \in R$

FUNCIONES

Recordemos dos de los ejemplos anteriores

I. $A = \{personas\}$, $B = \{países\}$, $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x \text{ nació en } y\}$

En este caso cada persona está relacionada *exactamente* con *un* país. Esto hace que si a cada persona le asignáramos su país de nacimiento no habría nunca confusión: habría un único 'candidato'.

II. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = |y|\}$

En cambio en este caso, cada $x > 0$ está relacionado con *dos* números reales *y distintos*: $y_1 = x$ e $y_2 = -x$:

$$(x, x), (x, -x) \in R \quad \text{pues} \quad |x| = |-x| = x$$

ya que $x > 0$. Si tratáramos de asignarle a un $x > 0$ un y relacionado con él se nos presentaría un problema:

¿le asignamos x? o ¿le asignamos $-x$?

cualquiera de los dos tiene el mismo derecho a ser asignado a x. No queda entonces claro qué hacer.

Nos ocuparemos en esta sección de estudiar las relaciones del tipo I., donde es posible asignar —sin ambigüedades— a cada elemento de un conjunto *un* elemento de otro. A este tipo de relaciones las llamaremos *funciones*.
Pero teniendo en cuenta que vamos a usar las relaciones para realizar asignaciones entre elementos de dos conjuntos emplearemos un lenguaje un tanto diferente del usado para hablar de las relaciones en general.

Dados dos conjuntos A y B llamamos ***función*** a una ley o regla que indica qué elemento de B se le debe asignar a cada elemento de A. Esto lo expresamos simbólicamente en la forma

$$f : A \longrightarrow B$$

donde f denota a la función. Dado un elemento $x \in A$ llamamos ***imagen*** de x por f y lo denotamos

$$f(x)$$

al (único) elemento de B que f asigna a x [10].

Es fundamental tener claro que en esta asignación no puede presentar ambigüedades.

[10] $f(x)$ se lee *f de x*

Ejemplos

1. Consideremos la siguiente ley

$$f : \{madres\} \longrightarrow \{personas\}$$

f: a cada madre debe acompañarla su hijo

Si la madre en cuestión tiene un único hijo queda claro qué persona la va a acompañar. Pero si la madre tiene dos hijos o más, ¿cuál de ellos debe acompañarla? Como esta *orden* es ambigua, decimos que f *no* es función. Se trata simplemente de una relación

$$R = \{(x, y) \in \{madres\} \times \{personas\} \mid x \text{ es la madre de } y\}$$

2. Sea

$$g : \{personas\} \longrightarrow \{palabras\}$$

la regla que le dice a cada persona que escriba el nombre del país donde nació.

Como una persona no puede haber nacido en dos países distintos, esta ley no tiene ambigüedad. Por lo tanto g es función.

3. Sea

$$h : \left\{ \boxed{\text{a}} , \boxed{\text{b}} , \boxed{\text{c}} , \boxed{\text{d}} \right\} \longrightarrow \{ \text{árbol} , \text{banco} , \text{borrador} , \text{casco} , \text{cepillo} , \text{diario} \}$$

h: ponga la tarjeta $\boxed{\text{x}}$ sobre el objeto cuyo nombre comienza con x.

No hay duda de que tenemos que poner la tarjeta $\boxed{\text{a}}$ sobre el árbol, pero ¿dónde ponemos la tarjeta $\boxed{\text{b}}$? ¿y la tarjeta $\boxed{\text{c}}$?

Esta regla es ambigüa; luego, h no es función.

Asociados al concepto de función hay algunos conjuntos que mencionamos en la próxima sección.

■ *Dominio — Codominio — Imagen — Gráfico*

Consideremos la función $f : A \longrightarrow B$

❍ ***Dominio*** de f

Es el conjunto formado por los elementos a los que hay que aplicarles la ley f; es decir, A. Lo escribimos

$$\text{Dom}\, f = A$$

❍ ***Codominio*** de f

Es el conjunto a donde se envían los elementos del dominio; es decir, B. Lo escribimos

$$\mathrm{Codom}\, f = B$$

❍ ***Imagen*** de f

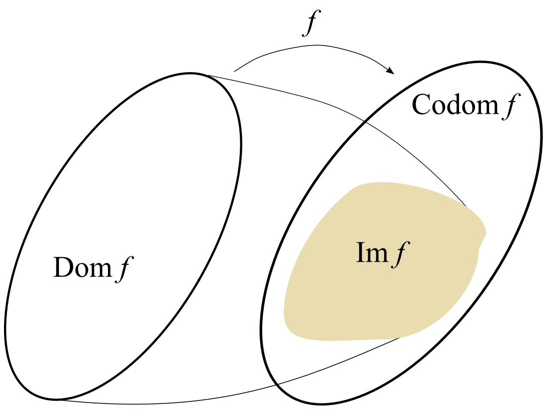
Es el conjunto formado por todas las imágenes de los elementos del dominio; es decir, son los elementos del codominio que *reciben* a los elementos del dominio. Lo denotamos

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, f &= \{f(x) \mid x \in \mathrm{Dom}\, f\} \\ &= \{y \in \mathrm{Codom}\, f \mid \text{ existe } x \in \mathrm{Dom}\, f \ : \ y = f(x)\}\end{aligned}$$

La imagen de f resulta ser un subconjunto del codominio; en símbolos

$$\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Codom}\, f$$

El siguiente gráfico esquematiza estas definiciones



❍ ***Gráfico*** de f

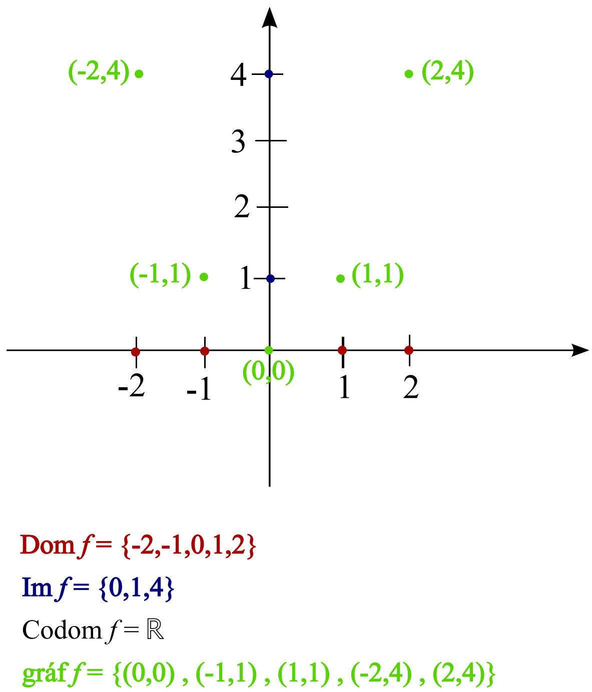
Está formado por pares ordenados donde la primera componente está en el dominio y la segunda es la imagen de la primera. Se trata por lo tanto de un subconjunto del producto cartesiano $\mathrm{Dom}\, f \times \mathrm{Im}\, f$. En símbolos

$$\text{gráf}\, f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{Dom}\, f\}$$

Por ejemplo, si $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función que envía a cada número entero x entre -2 y 2 a su cuadrado, el gráfico de f será

$$\text{gráf}\, f = \{(x, x^2) \mid x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}\}$$

Un esquema de este conjunto se muestra en la siguiente figura



Ejemplos

1. $f : \{personas\} \longrightarrow \{palabras\}$, $f(persona) =$ *nombre del país donde nació*

   ▷ $\text{Dom}\, f = \{personas\}$
   pues todas las personas nacieron en algún país

   ▷ $\text{Codom}\, f = \{palabras\}$
   el nombre de cada país es claramente una palabra

   ▷ $\text{Im}\, f = \{$*nombres de países*$\}$
   Notemos que $\text{Im}\, f \neq \text{Codom}\, f$ pues, por ejemplo, *casa* es una palabra pero no es el nombre de ningún país.

2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

   ▷ $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$
   pues se puede calcular el módulo de cualquier número real

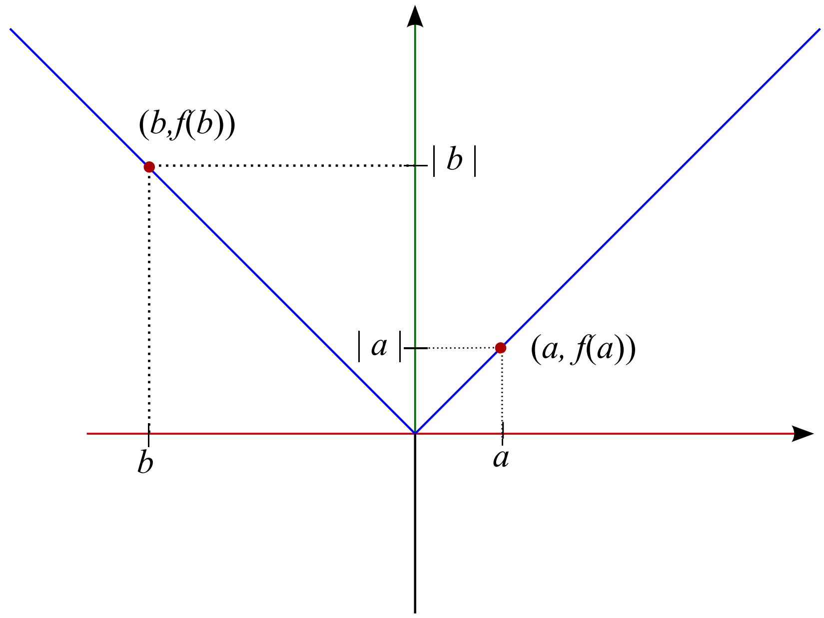
   ▷ $\text{Codom}\, f = \mathbb{R}$
   pues $|x|$ es siempre un número real

   ▷ $\text{Im}\, f = \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ [11]
   en efecto, si $y \in \text{Im}\, f$ debe haber un $x \in \text{Dom}\, f$ tal que $y = f(x) = |x| \geqslant 0$; luego, $y \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.
   Esto comprueba que $\text{Im}\, f \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.
   Si ahora tomamos un $z \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ resulta que $z = |z| = f(z) \in \text{Im}\, f$; luego, $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \subset \text{Im}\, f$ Esto nos permite asegurar que

$$\text{Im}\, f = \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

[11] $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ denota al conjunto de todos los números reales no negativos

▷ $\text{gráf } f = \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}\} \cup \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}_{<0}\}$



$a \in \text{Dom } f$ $\quad |a|{=}f(a) \in \text{Im } f$ $\quad (a,|a|){=}(a,f(a)) \in \text{gráf } f$

$b \in \text{Dom } f$ $\quad |b|{=}f(b) \in \text{Im } f$ $\quad (b,|b|){=}(b,f(b)) \in \text{gráf } f$

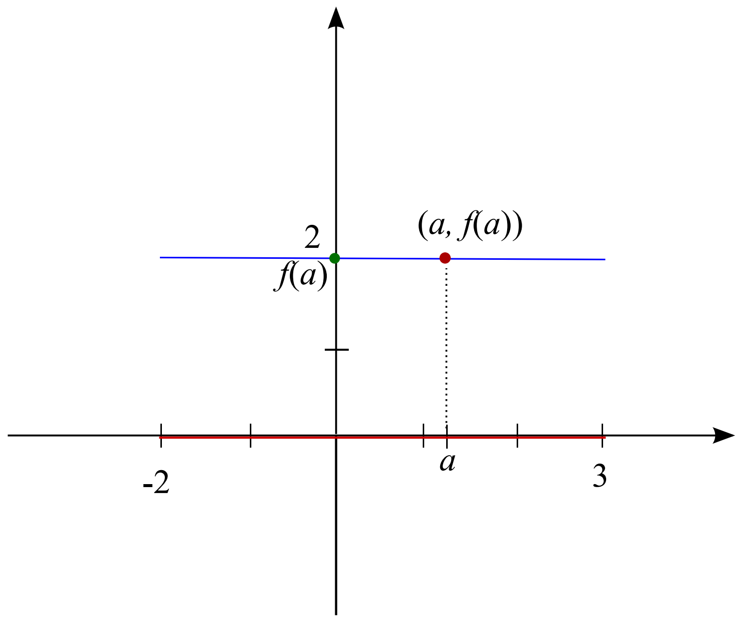
3. $f : [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2$

▷ $\text{Dom } f = [-2, 3]$

▷ $\text{Codom } f = \mathbb{R}$

▷ $\text{Im } f = \{2\}$
dado que f manda a todos los números reales que están entre -2 y 3 al *mismo lugar*: el número 2

▷ $\text{gráf } f = \{(x, f(x)) \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\} = \{(x, 2) \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\} = [-2, 3] \times \{2\}$



$a \in \text{Dom } f$ $\quad 2{=}f(a) \in \text{Im } f$ $\quad (a,2){=}(a,f(a)) \in \text{gráf } f$

Ejercicio 42

Se definen las siguientes leyes que muestran tres formas distintas de relacionar números reales

$$f(x) = |x| \quad , \quad g(x) = \sqrt{x} \quad , \quad h(x) = \text{ número cuyo cuadrado es } x$$

a) determine cuáles de ellas son funciones

b) para las que lo sean, halle su dominio e imagen

Ejercicio 43

Supongamos que $f : (1, 6) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función. Si por cada punto del dominio de f —en este caso el intervalo $(1, 6)$— trazamos una recta vertical, cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

(i) todas estas rectas cortan al gráfico de f

(ii) algunas de estas rectas cortan al gráfico de f por lo menos dos veces

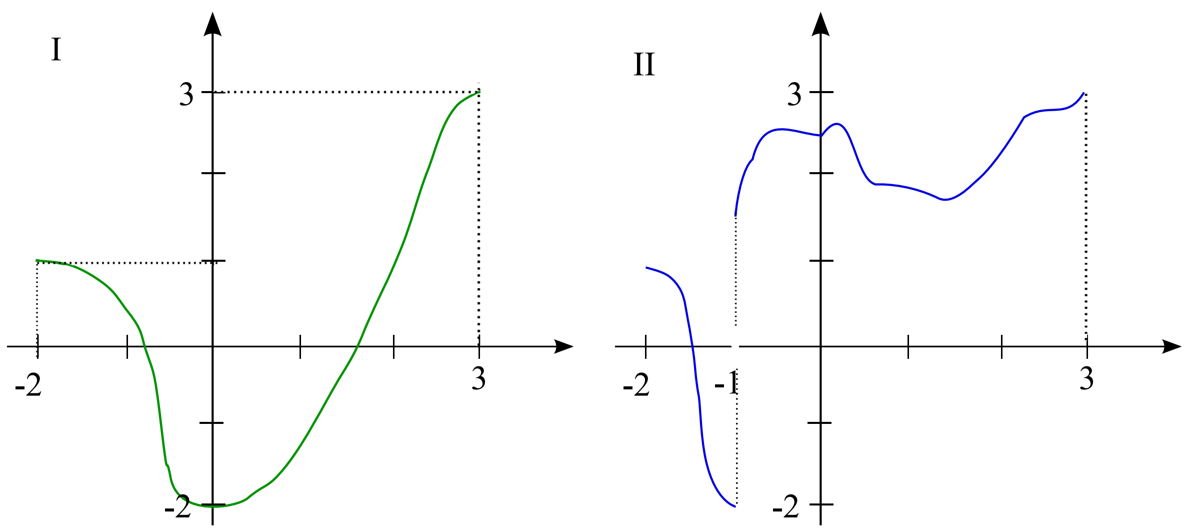
(iii) alguna de estas rectas no corta al gráfico de f

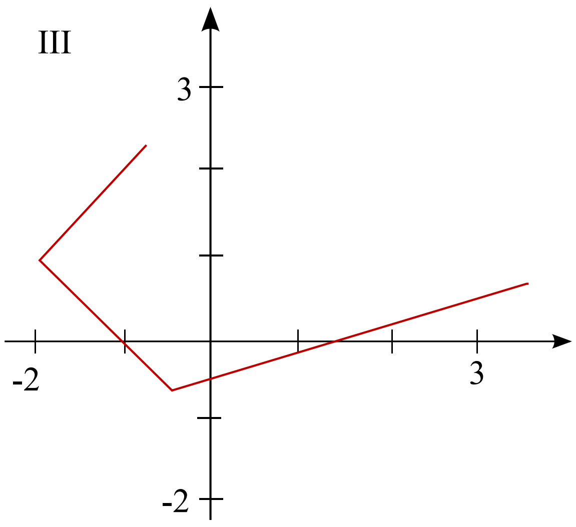
(iv) cada una de estas rectas corta al gráfico de f exactamente en un punto.

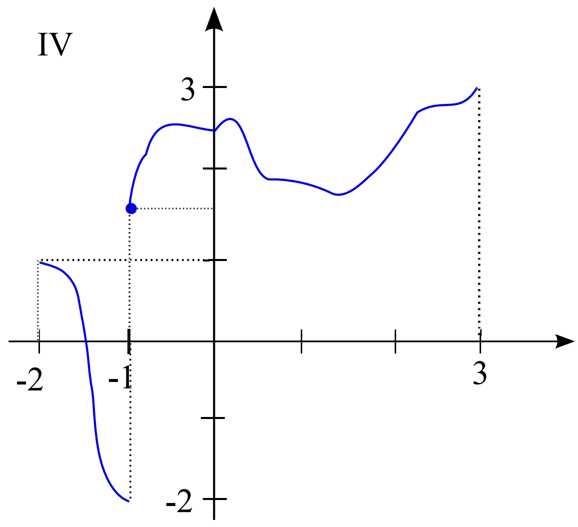
En caso de haber más de una que sea correcta indique cuál es la que da la información más precisa.

Ejercicio 44

Mire con cuidado cada uno de estos gráficos y determine cuáles de ellos corresponden al gráfico de una función. En los casos en que lo sea, halle: dominio, codominio e imagen.







Ejercicio 45

Grafique los siguientes productos cartesianos y averigüe cuál de ellos corresponde al gráfico de una función

$$(-5,7)\times\{3,4\} \quad , \quad \big([0,1]\cup[3,5]\big)\times\{-1\} \quad , \quad \big([0,1]\cup[3,5]\big)\times\{-1,1\}$$

En caso de serlo indique cuál es su dominio y su imagen.

Funciones iguales

Dadas dos funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \longrightarrow D$ decimos que son ***iguales*** si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\text{Dom} f = \text{Dom}\, g$ (i.e., $A = C$)
- $\text{Codom} f = \text{Codom}\, g$ (i.e., $B = D$)
- ambas producen el mismo efecto sobre cada elemento del dominio; es decir,

$$f(a) = g(a) \qquad \text{(para cada } a \in \text{Dom} f = \text{Dom}\, g)$$

Si cualquiera de estas condiciones no se cumple decimos que $f \neq g$.

Inyectividad — Suryectividad — Biyectividad

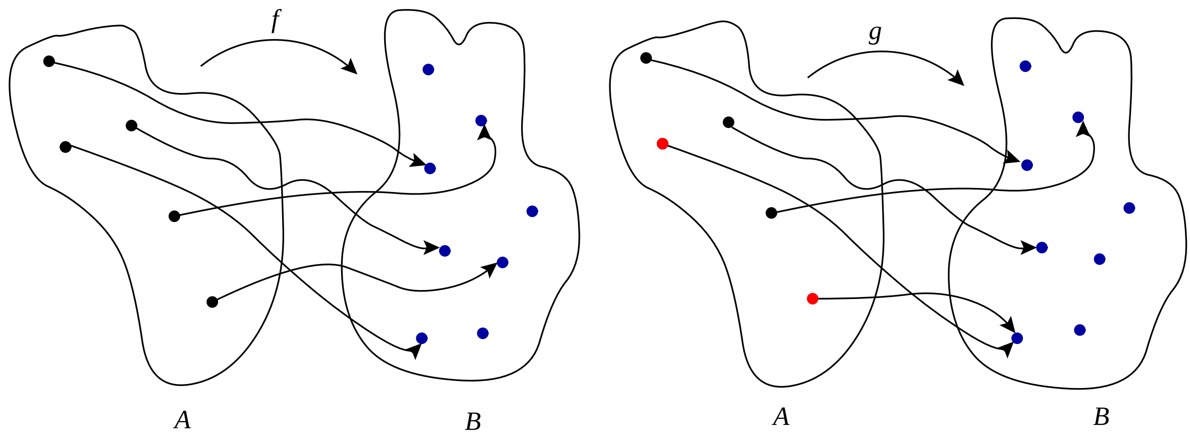
Sean A y B dos conjuntos.

❍ FUNCIÓN INYECTIVA

Una función $f : A \longrightarrow B$ se dice ***inyectiva*** si a *elementos distintos* de A le asigna *elementos distintos* de B. Dicho de otro modo, cuando es válida la siguiente implicación

$$f(a) = f(b) \qquad \Rightarrow \qquad a = b$$

La siguiente figura ilustra esta definición



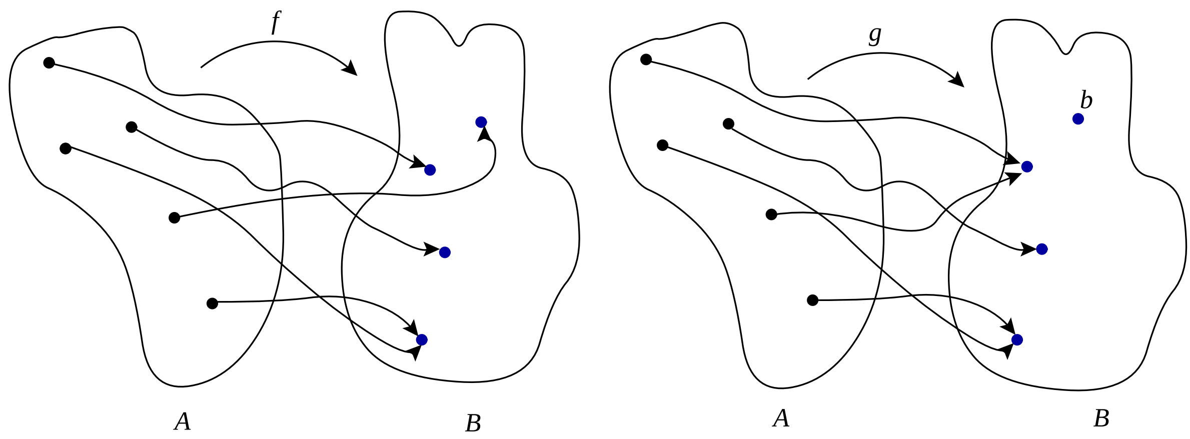
f es inyectiva *g no es inyectiva*

❍ FUNCIÓN SURYECTIVA

Una función $f : A \longrightarrow B$ se dice ***suryectiva*** si su imagen coincide con B. Dicho de otro modo, si

$$\text{para cada } \ b \in B \ \text{ existe } \ a \in A \ \text{ tal que } \ b = f(a)$$

La siguiente imagen ilustra esta definición



f es suryectiva

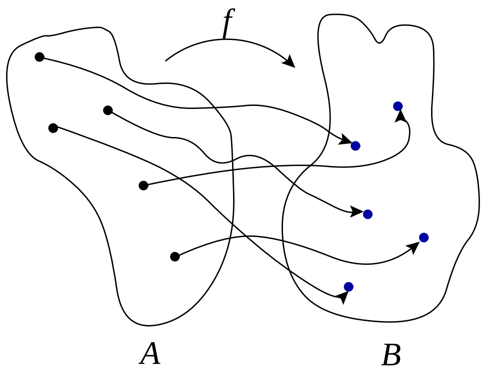
g no es suryectiva
b no proviene de ningún
elemento de A

❍ FUNCIÓN BIYECTIVA

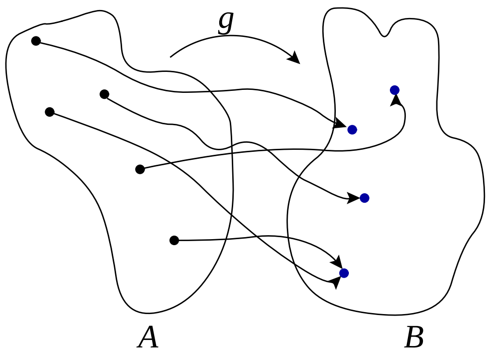
Una función $f : A \longrightarrow B$ se dice ***biyectiva*** si es simultáneamente inyectiva y suryectiva. Dicho de otro modo, si

$$\text{para cada } \ b \in B \ \text{ existe un } \textit{único} \ \ a \in A \ \text{ tal que } \ b = f(a)$$

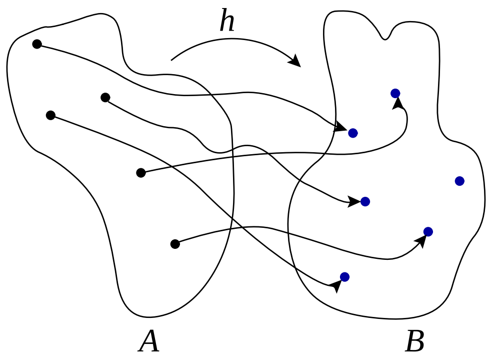
La siguiente imagen ilustra esta definición



f es biyectiva



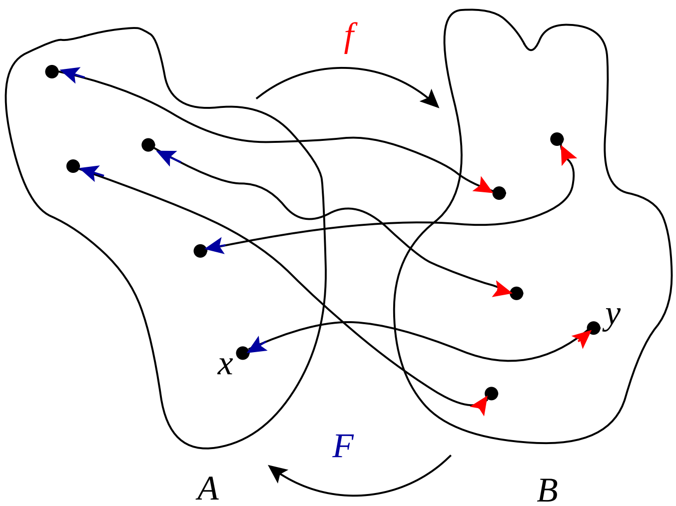
g no es biyectiva pues no es inyectiva



h no es biyectiva pues no es suryectiva

A esta altura conviene señalar que las funciones biyectivas tienen la particularidad de relacionar cada uno de los elementos del dominio con cada uno de los elementos del codominio de modo tal que se produce una correspondencia biunívoca entre ellos.

Esto hace que sea posible *devolver* cada elemento del codominio al elemento del dominio del cual provino *sin ambigüedades*. A esta *devolución* se la llama ***función inversa*** de f. Esto se ilustra en el siguiente gráfico,



f manda un elemento 'x' a un elemento 'y'

F devuelve el elemento 'y' al elemento 'x'

Ejemplo

Consideremos la función sen x y definamos

(i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$
Como el seno es una función periódica y su imagen es $[-1, 1]$, f no es ni inyectiva ni suryectiva y por lo tanto tampoco biyectiva.

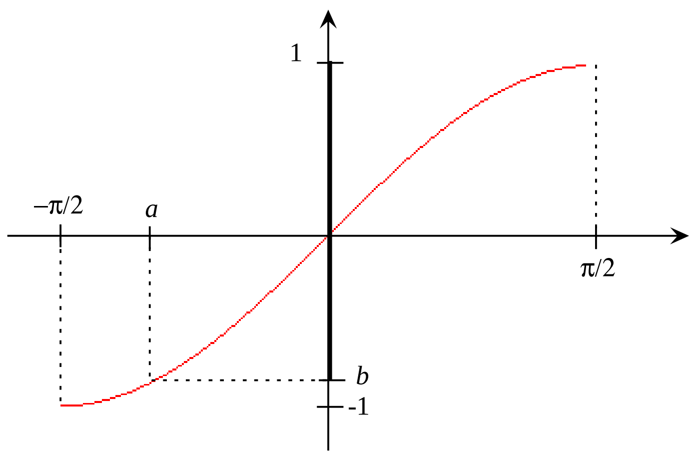
(ii) $g : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, $g(x) = \operatorname{sen} x$
La periodicidad del seno hace que g tampoco sea inyectiva. Pero como ahora el codominio es la imagen de g resulta que es suryectiva. Al no cumplir con una de las condiciones, no es biyectiva.

(iii) $h : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \operatorname{sen} x$
En el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ el seno toma una única vez cada valor, por lo tanto es inyectiva. Pero como la imagen de h es $[-1, 1]$, h no es suryectiva. En consecuencia tampoco es biyectiva.

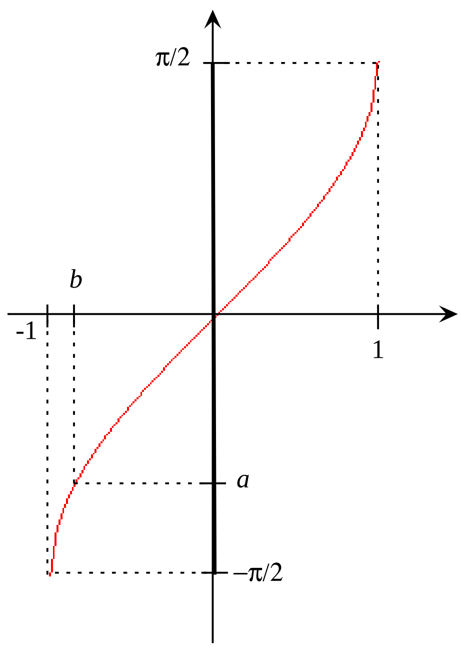
(iv) $k : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$, $k(x) = \operatorname{sen} x$
Ahora, como pasaba con h, k es inyectiva y también es suryectiva pues su codominio coincide con su imagen. Luego, k es biyectiva y por lo visto antes tiene inversa que se llama *arcoseno*.

Ejemplos Importantes

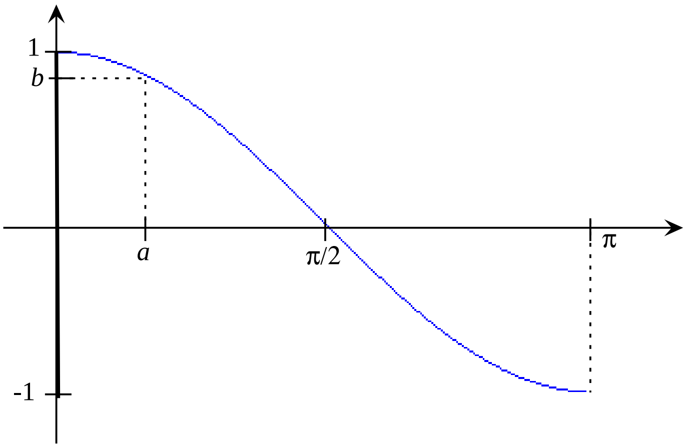
Al estudiar algunos de los temas de la materia va a ser esencial tener siempre presente la siguiente información sobre las funciones seno, coseno y tangente y sus respectivas inversas: arcoseno, arcocoseno y arcotangente



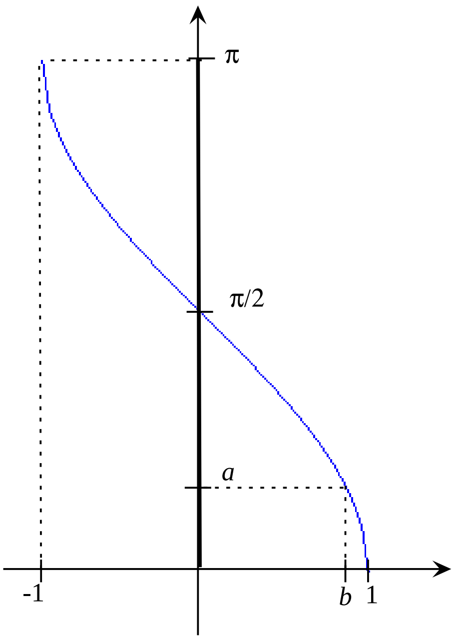
sen(a) = b



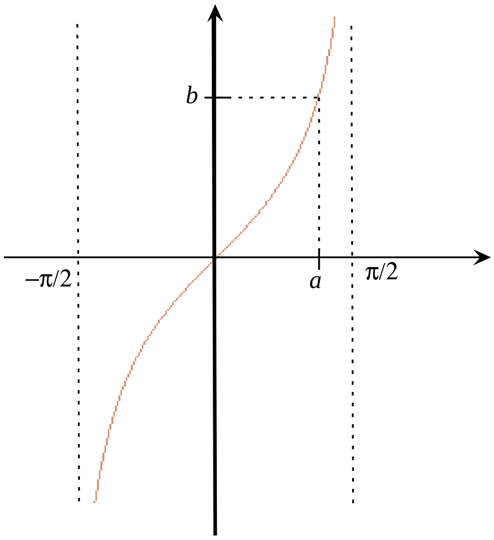
arcsen(b) = a



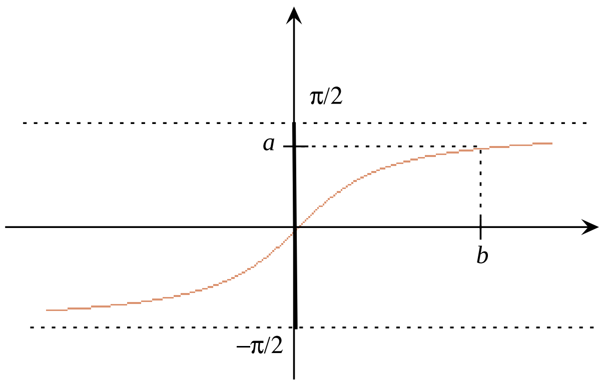
cos(a) = b



arccos(b) = a



tan(a) = b



arctan(b) = a

Ejercicio 46

En cada caso halle A o B de modo que la función $f : A \longrightarrow B$ sea biyectiva

a) $f : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow B \quad , \quad f(x) = \operatorname{sen} x$

b) $f : A \longrightarrow [-1, 1] \quad , \quad f(x) = \operatorname{sen} 2x$

c) $f : A \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0} \quad , \quad f(x) = |3x + 2|$

d) $f : A \longrightarrow B \quad , \quad f(x) = -2x + 4$

e) $f : [-3, 7] \longrightarrow B \quad , \quad f(x) = -2x + 4$

f) $f : A \longrightarrow [-8, -1] \quad , \quad f(x) = -2x + 4$

g) $f : [-1, 1] \longrightarrow B \quad , \quad f(x) = \arctan x$

h) $f : A \longrightarrow [-\frac{\pi}{4}, 0] \quad , \quad f(x) = \arctan x$

Sugerencia: hacer un gráfico o utilizar alguno de los anteriores puede serle de utilidad.

APÉNDICE

ALFABETO GRIEGO

Mayúscula	Minúscula	Nombre
A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gama
Δ	δ	delta
E	ε	epsilon
Z	ζ	dseta
H	η	eta
Θ	θ	zeta o tita
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	xi
O	o	omicron
Π	π	pi
P	ρ	ro
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	φ	fi
X	χ	ji
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	omega

PROBLEMAS

1. Sean A, B, C subconjuntos del conjunto U. Compruebe la validez de las siguientes afirmaciones

   a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   c) si $A \subset B$, entonces $U - B \subset U - A$

   d) si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B \quad \text{y} \quad A \cap B = A$

2. Pruebe que para cada $a, b \in \mathbb{R}$ vale

   a) $(-a)(-b) = ab$

   b) si $a = 0$ o $b = 0$, entonces $ab = 0$

   c) $ab = 0$ si y solo si $a = 0$ o $b = 0$

   Sugerencia: recuerde el Ejercicio 8

   d) si $b \neq 0$: $\quad \dfrac{a}{b} = 0 \iff a = 0$

3. En cada caso, indique el codominio y halle la imagen

   a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \qquad , \quad f(x) = (x, x)$

   b) $g : [-1, 2] \longrightarrow \qquad , \quad g(x) = (x, x)$

   c) $h : \mathbb{R}_{\geqslant 3} \longrightarrow \qquad , \quad h(x) = (x, x)$

   ¿Tienen que tener *necesariamente* distinto codominio? ¿Son iguales estas tres funciones?

4. Sea f una función cuyo efecto es *dejar todo como estaba*; es decir, $f(x) = x$ para cada $x \in \operatorname{Dom} f$. Encuentre la imagen de f en cada una de las siguientes situaciones y haga un esquema de su gráfico

   a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

   b) $f : [-2, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

   c) $f : \mathbb{R}_{\geqslant 3} \longrightarrow \mathbb{R}$

   ¿Encuentra algún tipo de vinculación entre los resultados de este problema con los del problema 3?

   NOTA: Por supuesto en cada inciso la letra f representa a una función distinta. ¿Por qué?

5. Sean A, B, C, D conjuntos. Muestre que

   a) $A \times (B \cup C) = A \times B \ \cup \ A \times C$

   b) $A \times (B \cap C) = A \times B \ \cap \ A \times C$

   c) si $B \subset D$, entonces $A \times B \subset A \times D$

   d) si $A \subset C$ y $B \subset D$, entonces $A \times B \subset C \times D$

6. Complete indicando dominio y codominio y halle sus respectivas imágenes

   a) $S: \quad \longrightarrow \quad , \qquad S(a,b) = a + b$

   b) $P: \quad \longrightarrow \quad , \qquad P(a,b) = ab$

7. Defina *gráficamente* una función f tal que

   a) $\operatorname{Dom} f = (-1,4]$, $\operatorname{Codom} f = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} f = (2,3] \cup [4,7]$

   b) $\operatorname{Dom} f = (-1,4]$, $\operatorname{Codom} f = [-1,10]$, $\operatorname{Im} f = (2,3] \cup [4,7]$

   c) $\operatorname{Dom} f = (-1,4]$, $\operatorname{Codom} f = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} f = \{3,7\}$

   d) $\operatorname{Dom} f = (-1,1) \cup (1,4]$, $\operatorname{Codom} f = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} f = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

   e) $\operatorname{Dom} f = [0,2\pi]$, $\operatorname{Codom} f = [-1,1]$, $\operatorname{Im} f = [-1,1]$

   NOTA: se pide que la defina *gráficamente*; eso significa que alcanza con dibujar su gráfico, no se le pide que dé una fórmula.

8. Muestre que para cada par de números reales a , b tales que $a < b$ vale

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

   indique en cada paso qué propiedad o resultado usa para podér afirmarlo.

9. Dé ejemplos que muestren que, en general, los siguientes pares de números reales son **distintos**

   a) $\dfrac{1}{a+b}$ y $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

   b) $\dfrac{a+bc}{c}$ y $a + b$

10. Agregue la hipótesis que falta para poder asegurar que $a = b$ a partir de saber que $ac = bc$.
    NOTA: Realmente *falta* una hipótesis.

11. ¿Cómo tiene que ser el número real c para que sea cierto que $ac > bc$ sabiendo que $a < b$?

12. Una empresa familiar elabora dulces y envasa veinte frascos de cada sabor por día. En un día determinado, uno de los procesos consiste en:

    (i) tomar un frasco esterilizado y llenarlo con dulce de frutilla

    (ii) taparlo

    (iii) ponerle la etiqueta con la marca y el código de barras

    Defina una función que describa este proceso y otra que lo haga para el dulce de naranja. ¿Son iguales estas funciones? Analice si resultan ser inyectivas, suryectivas o biyectivas.

13. Utilizando las propiedades básicas y los resultados que obtuvimos a partir de ellas pruebe que

    a) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
    b) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
    c) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
    d) si $a, b \geqslant 0$ y $a + b = 0$, entonces $a = b = 0$
    e) $a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0$

    NOTA: Indique en cada paso qué propiedad o resultado le asegura su validez.

14. Las rectas verticales nos sirvieron como referencia para saber, a partir de un gráfico en $\mathbb{R}^2$, si correspondía o no al gráfico de una función.
    Imagine un procedimiento similar para saber, a partir del gráfico de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, si ella es inyectiva, suryectiva o biyectiva.

15. Compruebe la *regla de los signos* a partir de las propiedades básicas de los números reales.