



ALGEBRA Y GEOMETRIA

PRIMER CUATRIMESTRE 2011

TRABAJO PRÁCTICO 1

CONTENIDO

EL PLANO REAL: \mathbb{R}^2	1
Norma de un vector	1
Ejercicios 1 a 5	2
Operaciones con vectores	3
Propiedades	7
Ejercicios 6 y 7	4
Ejercicios 8 y 9	6
Ejercicio 10	7
Ejercicio 11	9
EL PLANO COMPLEJO: \mathbb{C}	10
Ejercicio 12	10
Propiedades del producto de complejos	11
Ejercicio 13	11
Una cuestión de notación	11
Partes real e imaginaria – Conjugado – Módulo – Argumento	12
Propiedades	17
Ejercicios 14 a 16	12
Ejercicios 17 a 19	13
Ejercicios 20 a 24	16
Ejercicio 25	19
Forma binómica — Forma trigonométrica	20

Ejercicios 26 a 31	21
Lema (<i>argumento del producto</i>)	23
Propiedades del argumento	23
Teorema de De Moivre	25
Ejercicio 32	25
Algoritmo de División en \mathbb{Z}	27
Conjunto totalmente ordenado	27
Ejercicio 33	26
Ejercicio 34	28
Raíces de números complejos	28
Ejercicio 35	31
Ejercicio 36	33
La exponencial compleja	35
Ejercicio 37	35
Ejercicio 38	36
APÉNDICE (<i>Compleción de cuadrados</i>)	38
Problemas	41

Página de Álgebra y Geometría

<http://www.lirweb.com.ar>

Una vez registrado podrá acceder a sus cursos

Consultas Online

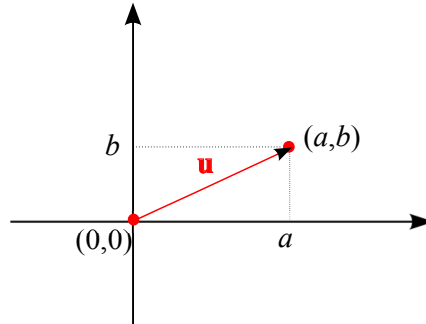
<http://mateingeuca.wordpress.com>

\mathbb{R}^2 : EL PLANO REAL

Recordemos que en la práctica anterior definimos a \mathbb{R}^2 como el producto cartesiano de \mathbb{R} consigo mismo; es decir,

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

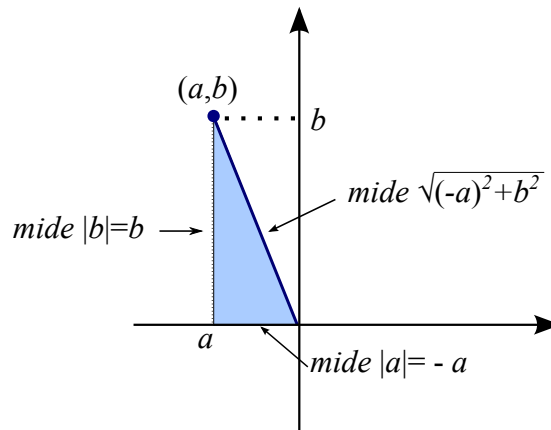
y vimos una forma de representarlo gráficamente,



El punto (a, b) se puede pensar como un vector \mathbf{u} con origen en $(0, 0)$ y extremo en (a, b) .

Norma

Dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, llamamos **norma** de (a, b) a la longitud de (a, b) mirado como vector desde el $(0, 0)$



Este gráfico ilustra el caso: $a < 0$ y $b > 0$

El triángulo sombreado es rectángulo y sus catetos miden

$$|a| \quad \text{y} \quad |b|$$

En el caso de la figura anterior, como tenemos una situación particular donde $a < 0$ y $b > 0$, resulta que

$$|a| = -a \quad \text{y} \quad |b| = b$$

Por lo tanto, usando el Teorema de Pitágoras podemos hallar la longitud del vector (a, b) que es la hipotenusa del triángulo

$$\sqrt{|a|^2 + |b|^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A este valor lo llamamos **norma** de (a, b) y lo denotamos

$$\| (a, b) \|$$

Es decir,

$$\| (a, b) \| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejercicio 1

Calcule la norma de los siguientes vectores de \mathbb{R}^2

- a) $(1, 3)$, b) $(0, 1)$, c) $(-1, 2)$, d) $(0, 0)$, e) $(\cos t, \sin t)$

Para responder e), ¿necesita tener más información sobre t ?

Ejercicio 2

Calcule la distancia al origen de los siguientes vectores de \mathbb{R}^2

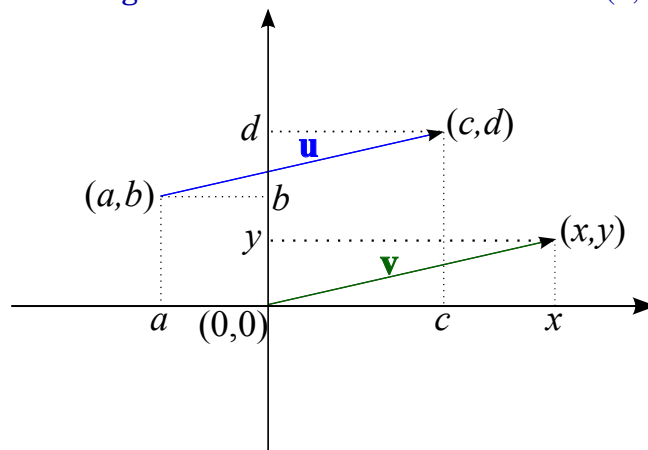
- a) $(1, 3)$, b) $(-2, -1)$, c) $(1, -4)$, d) $(3, 4)$, e) $(\sin t, \cos t)$

Ejercicio 3

Al definir la norma de un vector calculamos la distancia de su extremo al origen del sistema para una situación particular: un punto del segundo cuadrante. Haga eso mismo pero para un punto del tercer cuadrante.

Ejercicio 4

El vector \mathbf{v} se obtuvo trasladando paralelamente al vector \mathbf{u} hasta hacer coincidir su origen $-(a, b)$ con el origen del sistema de coordenadas: $(0, 0)$.



- Utilizando argumentos geométricos calcule el valor de x e y en función de a, b, c, d
- Vuelva a analizar esta situación cambiando la ubicación de (a, b) y (c, d) en el plano
- ¿Llegó a los mismos resultados?

- d) Utilice las conclusiones obtenidas para hallar una fórmula que permita hallar la distancia entre dos puntos del plano a partir de conocer sus coordenadas.

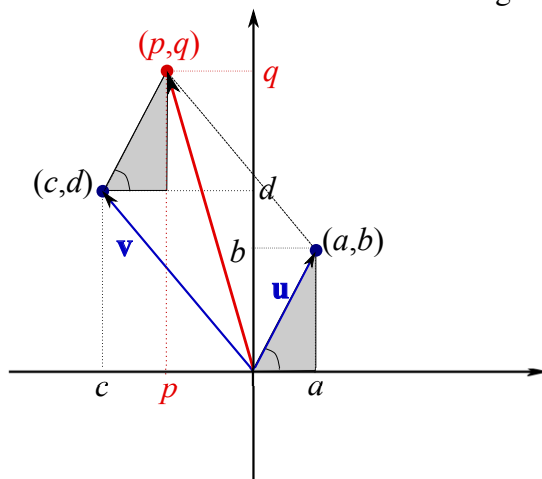
Ejercicio 5

En cada caso calcule la distancia entre el par de puntos dados

- a) $(1, 1)$, $(-3, 5)$ b) $(-2, -3)$, $(7, -1)$ c) $(-2, 3)$, $(2, -3)$

Operaciones

Sabemos sumar vectores usando la ley del paralelogramo. Como ya dijimos que los puntos de \mathbb{R}^2 se pueden mirar también como vectores con origen $(0, 0)$, vamos a ver cómo calcular las coordenadas del extremo del vector suma. Miremos la figura



Los dos triángulos sombreados son iguales por tener la hipotenusa y un ángulo agudo¹ respectivamente iguales. Luego, los catetos también son iguales; es decir,

$$a = a - 0 = p - c \quad \text{y} \quad b = b - 0 = q - d$$

con lo cual

$$p = a + c \quad \text{y} \quad q = b + d$$

y resulta entonces que al sumar dos vectores con origen $(0, 0)$ y extremos (a, b) y (c, d) , respectivamente, se obtiene otro vector con origen $(0, 0)$ y extremo $(a + c, b + d)$.

Teniendo en cuenta esto y recordando que los puntos (x, y) del plano \mathbb{R}^2 se pueden pensar como vectores con origen $(0, 0)$ es que definimos en \mathbb{R}^2 la operación

I — SUMA

Dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ se define la **suma** de (a, b) con (c, d) como el punto del plano de coordenadas $(a + c, b + d)$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

¹¿por qué?

Ejercicio 6

Dibuje en un esquema gráfico los ejes cartesianos y los vectores $(1, 7)$ y $(-1, 1)$. Súmelos

a) gráficamente, aplicando la ley del paralelogramo

b) utilizando la definición de suma de vectores

Compare los resultados obtenidos.

Ejercicio 7

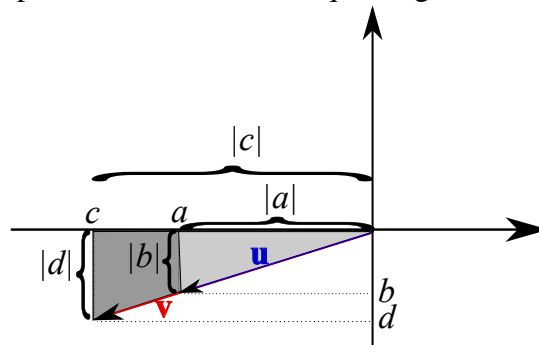
Adapte la demostración hecha en la página 3 para el caso en que (a, b) está en el tercer cuadrante y (c, d) en el cuarto.

En \mathbb{R}^2 también es posible definir otra operación que permite *multiplicar* un vector por un número real. El resultado que esperamos obtener con esta operación es otro vector que resulte paralelo al dado.

Antes de dar su definición formal, planteemos gráficamente la situación. Dado un vector \mathbf{u} de coordenadas (a, b) , el resultado de multiplicarlo por un número debe ser un vector \mathbf{v} , digamos que sus coordenadas son (c, d) , paralelo a \mathbf{u} . Para que esto pase el ángulo α , entre ellos, debe ser

$$\alpha = 0 \quad \text{o} \quad \alpha = \pi$$

En el primer caso, ambos tendrán el mismo sentido y en el segundo, sentido opuesto. Analicemos la primer situación y para ello hacemos un esquema gráfico



En este gráfico se ilustra el caso: $a, b, c, d < 0$

Mirando los triángulos sombreados vemos que podemos aplicar el Teorema de Tales² y en consecuencia concluir que

$$\frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{|d|}{|b|} = \frac{|c|}{|a|}$$

Si llamamos λ a estas cantidades iguales, es decir,

$$\lambda = \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{|d|}{|b|} = \frac{|c|}{|a|}$$

²¿por qué?

resulta que

$$\|\mathbf{v}\| = \lambda \|\mathbf{u}\| \quad , \quad |d| = \lambda |b| \quad , \quad |c| = \lambda |a|$$

en nuestro planteo gráfico:³ $a, b, c, d < 0$, con lo cual las dos últimas igualdades se escriben

$$d = \lambda b \quad , \quad c = \lambda a$$

llegamos así a que

$$(c, d) = (\lambda a, \lambda b)$$

Resumiendo, probamos que si \mathbf{v} es paralelo a \mathbf{u} , entonces las coordenadas de \mathbf{v} se obtienen multiplicando a las de \mathbf{u} por el *mismo* múltiplo.

Recíprocamente, si ahora suponemos que las coordenadas de \mathbf{v} , (c, d) , satisfacen

$$(c, d) = (\lambda a, \lambda b)$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, resulta que

$$\frac{d}{c} = \frac{\lambda b}{\lambda a} = \frac{b}{a} \quad 4$$

o sea, si llamamos β al ángulo que forma \mathbf{u} con el semieje x positivo y γ al que forma \mathbf{v} ,

$$\tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \tan \gamma$$

pero como la tangente tiene período π y en cualquier intervalo de longitud π es inyectiva, esto dice que

$$\gamma = \beta + k\pi$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$, con lo cual \mathbf{u} y \mathbf{v} resultan paralelos.

Hemos probado entonces que

$$(a, b) \text{ y } (c, d) \text{ son paralelos} \quad \text{si y solo si} \quad \text{existe un } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que} \quad (c, d) = (\lambda a, \lambda b)$$

Esto nos sugiere la definición de la nueva operación

II — PRODUCTO POR ESCALAR

Dados un vector $\mathbf{u} = (a, b)$ y un número $\lambda \in \mathbb{R}$, se define el producto de \mathbf{u} por λ como el vector denotado $\lambda\mathbf{u}$ cuyas coordenadas son

$$(\lambda a, \lambda b)$$

o sea,

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

³es un buen ejercicio hacer lo mismo que aquí pero cambiando el cuadrante donde se encuentra (a, b) y también la relación entre las longitudes y el sentido de los vectores para comprobar que en todos los casos se llega a la misma conclusión

⁴habría que analizar por separado los casos en que $a = 0$ o $c = 0$

Ejercicio 8

En cada uno de los siguientes casos calcule $\lambda \mathbf{u}$ y represente a \mathbf{u} y a $\lambda \mathbf{u}$ en un esquema gráfico

a) $\mathbf{u} = (2, 3)$, $\lambda = 3$

b) $\mathbf{u} = (2, 3)$, $\lambda = -3$

c) $\mathbf{u} = (3, -2)$, $\lambda = -\frac{1}{2}$

d) $\mathbf{u} = (3, -2)$, $\lambda = \frac{1}{2}$

Ejercicio 9

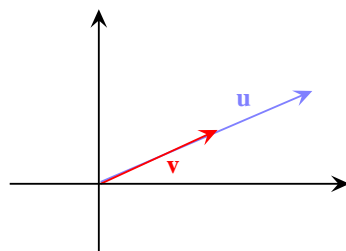
En el esquema gráfico de la página 4 se consideró el caso $\alpha = 0$. Adapte lo hecho ahí para el caso $\alpha = \pi$.

Observaciones

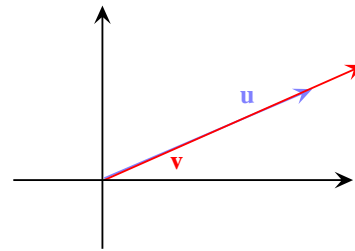
1. El caso $\lambda = 0$ produce $\mathbf{v} = (0, 0)$ que, forzando la interpretación geométrica, podríamos decir que es paralelo a \mathbf{u} .
2. El caso $\lambda > 0$ dice que (a, b) y $(\lambda a, \lambda b)$ son paralelos y están en el mismo cuadrante; con lo cual, tienen el mismo sentido.
3. El caso $\lambda < 0$ dice que (a, b) y $(\lambda a, \lambda b)$ son paralelos pero están en cuadrantes opuestos; con lo cual, tienen sentido opuesto.
4. Teniendo en cuenta la relación entre las normas de (a, b) y $(\lambda a, \lambda b)$

$$\|(\lambda a, \lambda b)\| = \sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2} = \sqrt{\lambda^2(a^2 + b^2)} = |\lambda| \sqrt{a^2 + b^2} = |\lambda| \|(a, b)\|$$

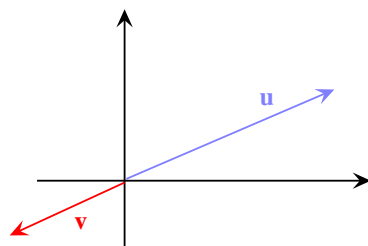
también podemos interpretar geométricamente qué significa que $|\lambda| \leq 1$ y $|\lambda| > 1$



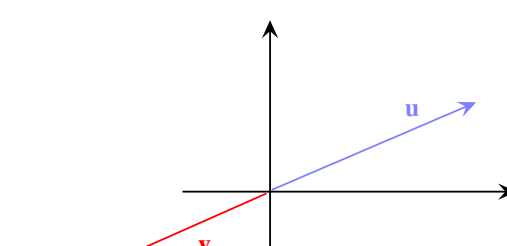
$$0 < \lambda < 1$$



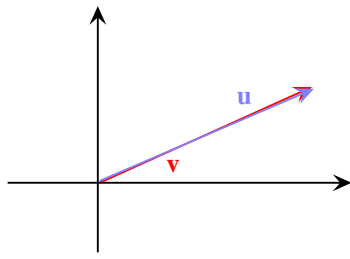
$$\lambda > 1$$



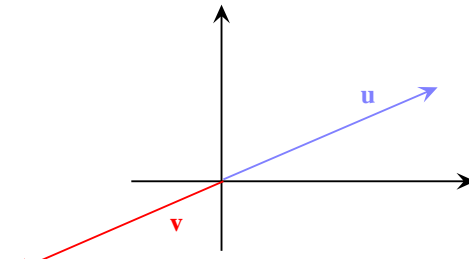
$$-1 < \lambda < 0$$



$$\lambda < -1$$



$$\lambda=1$$

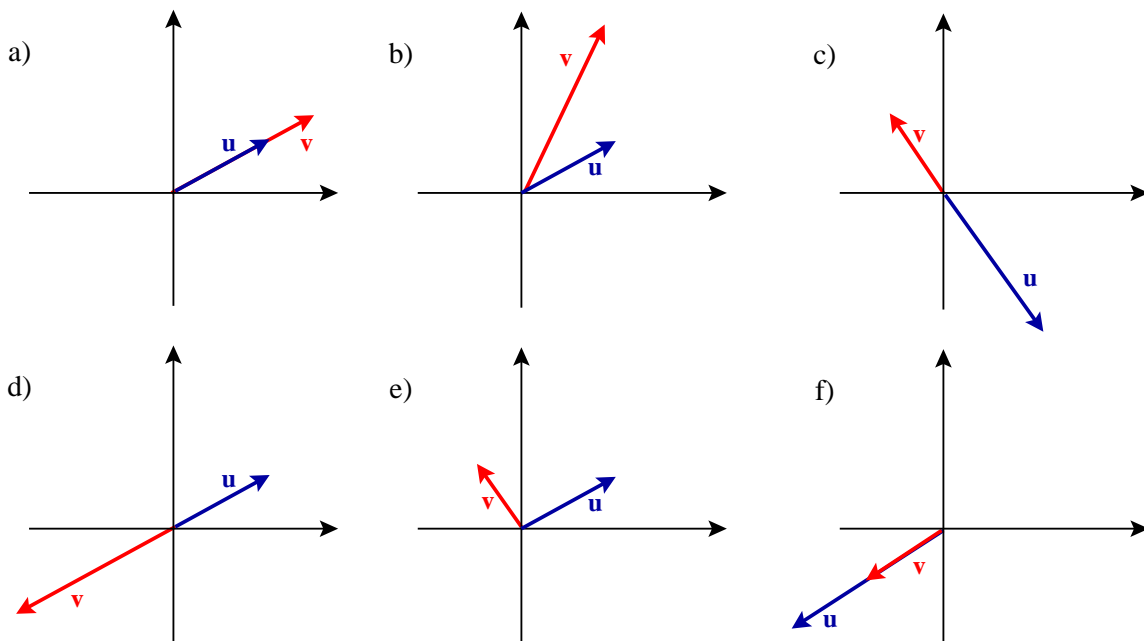


$$\lambda=-1$$

Ejercicio 10

En cada uno de los siguientes gráficos se muestra un par de vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} . En cada caso determine si son o no paralelos. En caso de serlo, podemos escribir $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$. Indique en cuáles de estos intervalos está λ

$$(-\infty, -1) \quad , \quad [-1, 0) \quad , \quad (0, 1) \quad , \quad [1, +\infty)$$



Propiedades

1. De las operaciones

- (i) Estas operaciones definidas en \mathbb{R}^2 comparten con sus homónimas en \mathbb{R} : la asociatividad, conmutatividad, distributividad del producto respecto de la suma.
- (ii) Elemento neutro de la suma: $(0, 0)$
pues $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$ para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- (iii) Elemento neutro del producto: 1
pues $1(a, b) = (a, b)$ para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- (iv) Inverso (para la suma): dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, su inverso respecto de la suma, es

$$-(a, b) = (-1)(a, b) = (-a, -b)$$

2. De la norma y las operaciones

(i) $\|(a, b)\|^2 = a^2 + b^2$

(ii) $\|t(a, b)\| = |t| \|(a, b)\|$, para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y todo $t \in \mathbb{R}$.

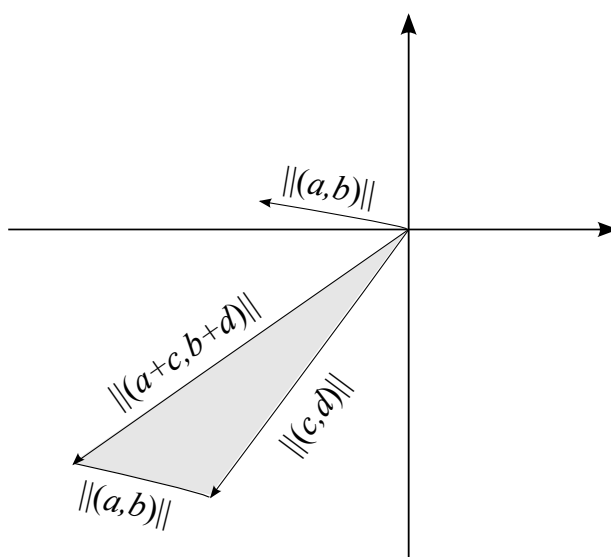
Lo vimos en la Observación 4.

(iii) DESIGUALDAD TRIANGULAR

$$\|(a, b) + (c, d)\| \leq \|(a, b)\| + \|(c, d)\|$$

para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$

La demostración de esta afirmación la haremos un poco más adelante utilizando números complejos. De momento, la siguiente figura ilustra sobre la razón de su nombre y por supuesto también da idea de su validez ⁵



(iv) DESIGUALDADES ÚTILES

$$|a|, |b| \leq \|(a, b)\| \leq |a| + |b|$$

para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

En efecto,

$$\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a|$$

\uparrow
 $a^2 + b^2 \geq a^2$
 \sqrt{x} es creciente

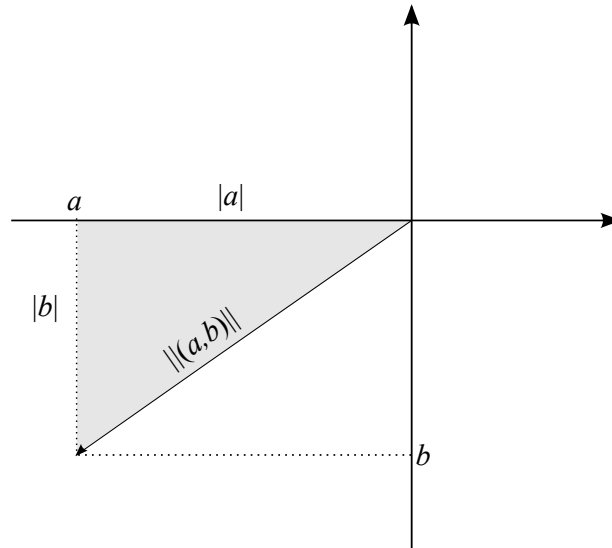
y, por otro lado,

$$\begin{aligned} \|(a, b)\| &= \|(a, 0) + (0, b)\| \leq \|(a, 0)\| + \|(0, b)\| \\ &= \sqrt{a^2 + 0^2} + \sqrt{0^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} \\ &= |a| + |b| \end{aligned}$$

\uparrow
 desigualdad triangular

⁵¿qué conocida propiedad de los triángulos dice lo mismo que la desigualdad triangular?

Aquí también la geometría ayuda a entender por qué son válidas estas desigualdades.



(v) Para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ es,

$$|\|(a, b)\| - \|(c, d)\|| \leq \|(a, b) - (c, d)\| \leq \|(a, b)\| + \|(c, d)\|$$

La demostración usa exactamente los mismos argumentos que su equivalente en el caso de números reales.

Ejercicio 11

Sea $\mathbf{v} = (2, 3) + t(1, 1)$ ($0 \leq t \leq 1$).

- dibuje \mathbf{v} para $t = 0, \frac{1}{2}, 1$
- ¿qué se puede decir de los vectores $\mathbf{v} - (2, 3)$ y $(1, 1)$? Dibújelos para $t = 0, \frac{1}{3}, 1$
- dibuje el conjunto $\{t(1, 1) \mid 0 \leq t \leq 1\}$
- dibuje el conjunto $\{t(-1, -1) \mid -1 \leq t \leq 0\}$
- dibuje el conjunto $\{t(1, 1) \mid -1 \leq t \leq 0\}$
- compruebe que $3 \leq \|\mathbf{v}\| \leq \sqrt{13} + \sqrt{2}$ (cualquiera sea t entre 0 y 1)

\mathbb{C} : EL PLANO COMPLEJO

En realidad la diferencia entre el plano real y el complejo no está en sus elementos si no en las cosas que estamos habilitados para hacer con ellos. Es por eso que, aunque no suene razonable, vamos a llamar

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

Es decir, el conjunto \mathbb{C} tiene exactamente los mismos elementos que el conjunto \mathbb{R}^2 . ¿Por qué le ponemos otro nombre entonces?

Cuando uno habla de \mathbb{R}^2 se refiere al conjunto de todos los pares ordenados donde las dos componentes son números reales. En él hay definidas dos operaciones:

- (i) suma
- (ii) producto por escalar

que tienen las propiedades que acabamos de ver. Pero no sabemos, por ejemplo, *multiplicar* sus elementos entre sí, solo podemos multiplicarlos por un número real.

Pero resulta que se puede definir una nueva operación entre estos elementos —que llamaremos simplemente **producto**— que hará que las operaciones entre números complejos obedezcan las mismas leyes (conmutativas, asociativas y distributiva) que rigen las operaciones entre números reales.

Así, al mismo conjunto pero dotado ahora de las operaciones

- (i) *suma*: la misma de \mathbb{R}^2 y
- (ii) *producto*: definido así,

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

lo llamamos **plano complejo** y lo denotamos por \mathbb{C} . A sus elementos dejamos de llamarlos *puntos* o *vectores* como hacíamos en \mathbb{R}^2 y nos referimos a ellos como *números*.

Ejercicio 12

Calcule

- a) $(0, 1) * (0, -1)$ b) $(a, 0) * (0, b)$ c) $(1, 3) * (-2, 4)$ d) $(x, y) * (x, y)$
- e) $(x, y) * (x, -y)$ f) $(1, 1) * \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

En cada caso ubique cada factor y el producto en el plano complejo.

NOTA: tome como valor aproximado de $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ el número: 0,7.

Propiedades del producto

1. $(a, b) * (c, d) = (c, d) * (a, b)$
2. $(a, b) * [(c, d) * (h, k)] = [(a, b) * (c, d)] * (h, k)$
3. $(a, b) * [(c, d) + (h, k)] = (a, b) * (c, d) + (a, b) * (h, k)$

4. *Elemento neutro:* $(1, 0)$

$$(a, b) * (1, 0) = (a1 - b0, a0 + b1) = (a, b)$$

cualquiera sea $(a, b) \in \mathbb{C}$

5. *Inverso del producto:* para cada $(a, b) \neq (0, 0)$ existe un $(c, d) \in \mathbb{C}$ tal que

$$(a, b) * (c, d) = (1, 0)$$

6. Si multiplicamos números complejos de la forma: $(a, 0)$ entre sí,

$$(a, 0) * (c, 0) = (ac - 0 \cdot 0, a0 + 0c) = (ac, 0)$$

nos da un número de la misma forma. Lo mismo si los sumamos entre sí,

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0 + 0) = (a + c, 0)$$

7. Lo mismo ocurre con los números de la forma: $(0, b)$ pero solo respecto de la suma.

8. UN NÚMERO COMPLEJO MUY ESPECIAL: $(0, 1)$

$$(0, 1) * (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

O sea, al multiplicar al $(0, 1)$ por él mismo no obtuvimos algo con la primera coordenada cero, si no justo al revés.

Ejercicio 13

- a) ¿Es cierto que si sumamos complejos de la forma $(a, 0)$ obtenemos un complejo de la misma forma? ¿Pasa lo mismo si consideramos complejos de la forma $(0, b)$?
- b) ¿Cuáles son las respuestas si reemplazamos *suma* por *producto*?

Una cuestión de notación

Para resaltar aún más las diferencias con \mathbb{R}^2 (aunque los elementos sigan siendo los mismos) es tradición escribir a los números complejos de manera más parecida a los reales.

Concretamente, al neutro de la suma $(0, 0)$ se lo denota simplemente con 0, al neutro del producto $(1, 0)$ con 1 y al número especial $(0, 1)$ lo denotamos con i y lo llamamos **unidad imaginaria**; es decir,

$$(0, 0) = 0 \quad , \quad (1, 0) = 1 \quad , \quad (0, 1) = i$$

Y esta forma de expresarlos hace que un complejo (a, b) cualquiera se pueda escribir en la forma

$$a + bi$$

En efecto,

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i = a + bi$$

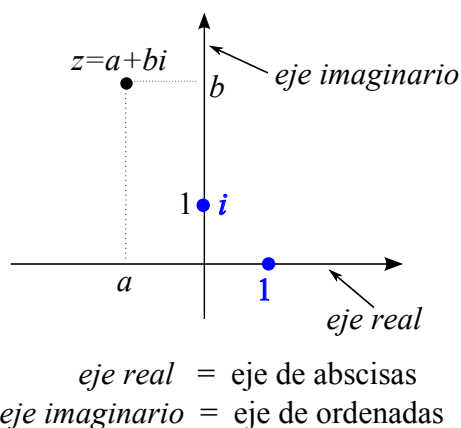
De esta forma,

★ $(a, 0) = a$ (se identifican con los números reales). En este sentido decimos que

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

★ $(0, b) = bi$: se los llama *imaginarios puros*

Parte real e imaginaria – Conjugado – Módulo – Argumento



Dado el complejo $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), llamamos

* PARTE REAL de z al número *real*: a y lo escribimos

$$\operatorname{Re}(z) = a$$

* PARTE IMAGINARIA de z al número *real*: b y lo escribimos

$$\operatorname{Im}(z) = b \quad ^6$$

Ejercicio 14

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Considere los números $z = a + bi$ y $w = c + di$.

- si $z = w$, ¿qué se puede decir sobre los números reales a, b, c, d ?
- dé una condición sobre los números reales a, b, c, d que garantice que $z = w$
- complete de modo que la afirmación sea verdadera

$$z = w \iff$$

Sugerencia: piense en la definición de número complejo.

⁶Note que $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ son números *reales*

$$e) z^2 = |z|^2 \iff \dots\dots\dots$$

$$f) z - \bar{z} = 0 \iff \dots\dots\dots$$

$$g) z + \bar{z} = 0 \iff \dots\dots\dots$$

Ejercicio 18

Halle todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

$$a) z = \operatorname{Re} z$$

$$b) z = i \operatorname{Im} z$$

$$c) z = i \operatorname{Re} z$$

$$d) z = \operatorname{Im} z$$

$$e) \operatorname{Im} z = i \operatorname{Im} z$$

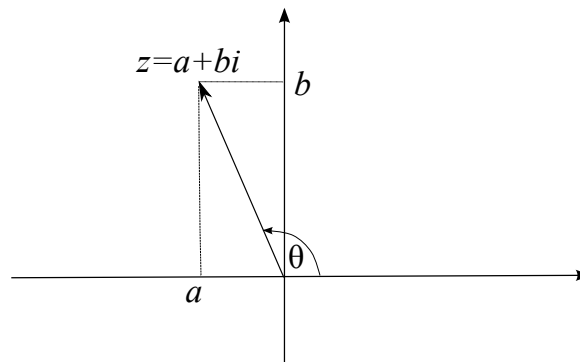
$$f) \operatorname{Re} z = i \operatorname{Im} z$$

Ejercicio 19

Calcule el módulo de los siguientes números complejos

$$1 + i, \quad 4 - 3i, \quad -4 + 3i, \quad -9, \quad 27, \quad \cos t + i \operatorname{sen} t \ (t \in \mathbb{R}), \quad i, \quad -7i$$

* ARGUMENTO de $z = a + bi$ al ángulo que forma z —mirado como vector desde el origen— con el semieje x positivo



$$\theta = \text{argumento de } z$$

Conviene hacer notar en este punto que el valor de θ , para cada z , no es único. En efecto, si un θ representa el ángulo entre z y el semieje x positivo, el ángulo

$$\theta + 2\pi$$

también, puesto que al dar un giro completo volvemos a estar exactamente en el mismo lugar. Pero lo mismo sucede si damos varios giros completos e incluso si los damos en sentido horario. Por lo cual, si θ es argumento de z ,

$$\theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

también lo son. Vemos así que el argumento de un complejo no está *unívocamente* determinado⁸. Podemos decir entonces que

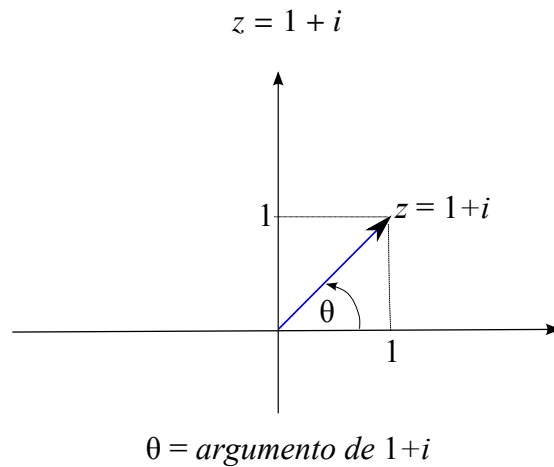
$$\arg(z) = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

i.e., $\arg(z)$ toma infinitos valores que difieren entre sí en giros completos.

⁸¿podríamos considerar que \arg es una función?

Ahora bien, si fijamos un intervalo de longitud 2π sobre la recta, entonces sí habrá un único valor de θ en ese intervalo que sea el argumento de un z dado.

Para entenderlo mejor, veamos un ejemplo



El punto $z = 1 + i$ está ubicado sobre la bisectriz del primer cuadrante, por lo tanto

$$\frac{\pi}{4}$$

es un valor del argumento de $1 + i$, pero para representar a uno cualquiera de todos los posibles debemos escribir

$$\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Y si después nos piden encontrar el valor del argumento de $z = 1 + i$ que está entre 0 y 2π (i.e., nos dan un intervalo de longitud 2π) sí vamos a encontrar un único valor pues en esta situación tenemos dos condiciones: si llamamos α a ese valor que buscamos, debe ser

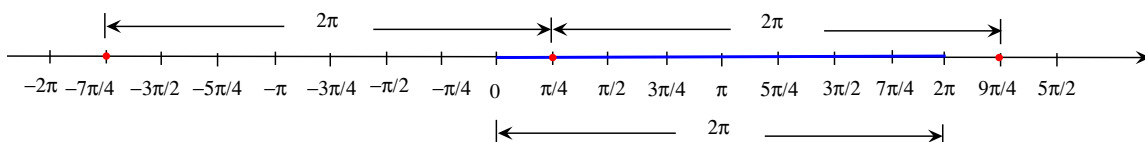
$$\alpha \text{ un argumento de } 1 + i \text{ y } 0 \leq \alpha < 2\pi$$

pero entonces, por ser α argumento de $1 + i$ tiene que diferir del muy especial que encontramos $\frac{\pi}{4}$ en giros completos; i.e.,

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

y como además debe estar entre 0 y 2π el valor de k no puede ser cualquiera, ya que

$$0 \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi \quad (*)$$



En la figura anterior marcamos con un punto rojo la ubicación de los distintos valores de $\arg(1 + i)$ y vemos que el único que se encuentra entre 0 y 2π es $\frac{\pi}{4}$

Para llegar a la misma conclusión analíticamente, sumamos $-\frac{\pi}{4}$ miembro a miembro en $(*)$

$$-\frac{\pi}{4} \leq 2k\pi < 7\frac{\pi}{4}$$

multiplicamos miembro a miembro por el número *positivo* $\frac{1}{2\pi}$

$$-\frac{1}{8} \leq k < \frac{7}{8}$$

y resulta que el único *entero* k que está entre $-\frac{1}{8}$ y $\frac{7}{8}$ es $k = 0$ Por lo tanto el único valor del argumento de $1 + i$ que se encuentra entre 0 y 2π es

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

Y ¿qué obtendríamos si nos pidieran encontrar un valor del argumento de $1 + i$ en el intervalo $[\pi, 3\pi)$?

Mirando el gráfico anterior, si llamamos β a ese valor, es claro que deberíamos obtener $\beta = \frac{9\pi}{4}$. Comprobemos esto analíticamente siguiendo los pasos hechos antes: este valor β debe cumplir

$$\beta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ para un cierto } k \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad \pi \leq \beta < 3\pi$$

entonces,

$$\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 3\pi$$

sumando $-\frac{\pi}{4}$ miembro a miembro

$$\frac{3\pi}{4} \leq 2k\pi < \frac{11\pi}{4}$$

multiplicando miembro a miembro por el número *positivo* $\frac{1}{2\pi}$

$$\frac{3}{8} \leq k < \frac{11}{8} = 1 + \frac{3}{8}$$

El único entero entre $\frac{3}{8}$ y $1 + \frac{3}{8}$ es $k = 1$. Por lo tanto comprobamos que realmente hay un único valor de β que cumple las condiciones establecidas y es

$$\beta = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 1 \cdot \pi = \frac{9\pi}{4}$$

Ejercicio 20

Calcule todos los valores del argumento de los siguientes números complejos

- a) $\sqrt{3} + i$ b) -10 c) $-1 + \sqrt{3}i$ d) 5 e) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

Ejercicio 21

En cada caso halle el valor del argumento de z que se encuentra en el intervalo indicado

- a) $z = \sqrt{3} + i$, $[-\pi, \pi)$ b) $z = -10$, $[-\pi, \pi)$

c) $z = -1 + \sqrt{3}i$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

d) $z = -2$, $(-\pi, \pi]$

e) $z = 5$, $[\pi, 3\pi)$

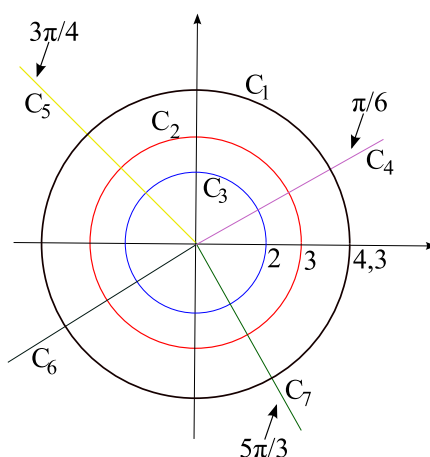
f) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

Ejercicio 22

De los números complejos z , w , u se sabe que

$$|z| = 3 \quad , \quad \arg w = \frac{3\pi}{4} \quad , \quad |u| = 2 \quad , \quad \arg u = -\frac{\pi}{3}$$

Indique en cuáles de las siguientes curvas ⁹ está cada uno de ellos



¿A cuáles de estos tres números pudo ubicar con exactitud? ¿Qué datos necesita mínimamente tener sobre un complejo para saber exactamente dónde está?

Ejercicio 23

Considere los números complejos $z = -2 + 3i$ y w tal que $|w| = 1$ y $\arg w = \frac{5\pi}{3}$. Ubique a cada uno de ellos en un sistema cartesiano mostrándolo como intersección de curvas.

NOTA: Si necesita hacer cuentas es que hay algo que no comprendió del todo bien. Haga un gráfico para cada número.

Ejercicio 24

Consideres los números complejos: $z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ y $w = |w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$. ¿Qué relación hay entre α y β si se sabe que, pensados como vectores desde el origen,

- z y w son paralelos y tienen el mismo sentido?
- z y w son paralelos pero tienen sentidos opuestos?
- z y w son perpendiculares?

⁹Las rectas se consideran casos especiales de curvas.

Propiedades

Para los números complejos $z = a + bi$ y $w = x + yi$ vale

$$1. i^2 = -1$$

$$2. |\bar{z}| = |z| \quad \text{y} \quad \overline{\bar{z}} = z$$

$$3. \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$4. \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$5. z\bar{z} = |z|^2$$

$$\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 - b(-b)) + (a(-b) + ab) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$6. \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$$

Usando la definición de producto de complejos resulta que $zw = (ax - by) + (ay + bx)i$ y entonces

$$\overline{zw} = (ax - by) - (ay + bx)i$$

Por otro lado,

$$\overline{zw} = (a - bi)(x - yi) = (ax - by) + (-ay - bx)i = (ax - by) - (ay + bx)i = \overline{zw}$$

$$7. |zw| = |z| |w|$$

Siendo dos números positivos, que sean o no iguales equivale a que le pase lo mismo a sus cuadrados. Por lo tanto, basta probar que

$$|zw|^2 = |z|^2 |w|^2$$

Usando propiedades anteriores podemos decir que

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2 |w|^2$$

como queríamos.

$$8. \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (z \neq 0)$$

9. *Desigualdad triangular* ¹⁰

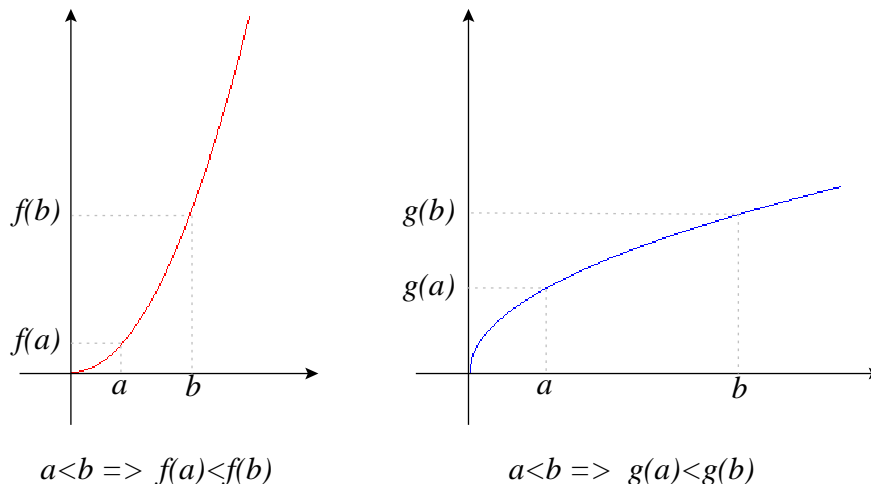
$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Tal como prometimos, vamos a demostrar esta propiedad. Pero antes de comenzar a hacerlo conviene recordar unas propiedades importantes de dos funciones conocidas

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad , \quad f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x}$$

¹⁰Teniendo en cuenta que $\|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi|$, esta propiedad es exactamente la misma que se mencionó al estudiar el plano real \mathbb{R}^2

Son inversas, una de otra, y además, estrictamente crecientes. Recordemos sus gráficos,



Este hecho nos dice que, siendo $|z + w| \geq 0$ y $|z| + |w| \geq 0$,

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad \text{equivale a} \quad |z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$$

Vamos entonces a demostrar la segunda. Tenemos

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w) \overline{z + w} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w \\ &= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w = |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2 |\operatorname{Re}(z\bar{w})| \leq |z|^2 + |w|^2 + 2 |z\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2 |z| |w| \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2 |z| |w| \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

como queríamos.

Ejercicio 25

Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $h(x) = x^2$,

- a) ¿es $h = f$? (f es la mencionada en la propiedad 9.)
- b) haga un gráfico de h y compruebe que ahora saber que

$$a < b$$

NO nos habilita a afirmar que

$$h(a) < h(b)$$

- c) ¿Era necesario entonces aclarar que $|z + w| \geq 0$ y $|z| + |w| \geq 0$ para poder asegurar que

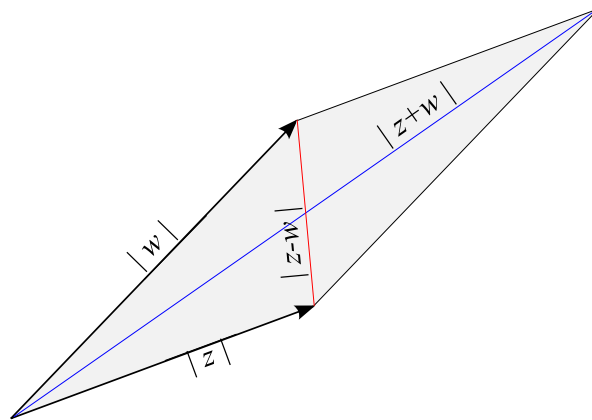
$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad \text{equivale a} \quad |z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2 \quad ?$$

10. $||z| - |w|| \leq |z - w| \leq |z| + |w|$

$$11. |\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \quad |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

12. *Ley del Paralelogramo*

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$



Forma binómica — Forma trigonométrica

La forma en la que hasta ahora hemos estado representando a los números complejos se la llama *forma binómica*

$$z = a + bi$$

Escrito de esta manera, es inmediato saber cuánto valen sus partes real e imaginaria

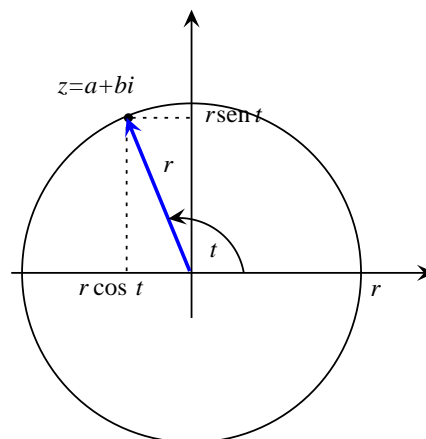
$$\operatorname{Re}(z) = a, \quad \operatorname{Im}(z) = b \quad ^{11}$$

Vamos a ver ahora otra forma de representarlos utilizando, en lugar de sus partes real e imaginaria, su módulo y argumento. A esta otra manera de escribir a un complejo se la denomina *forma trigonométrica* o también *forma polar*

Antes recordemos que dado un $z \in \mathbb{C}$, hay un único $r > 0$ ¹² tal que z está sobre la circunferencia de centro 0 y radio r . ¹³

Y, siempre que los valores de t estén dentro de un intervalo de longitud 2π , habrá también un único t tal que

$$a = r \cos t \quad \text{y} \quad b = r \operatorname{sen} t$$



¹¹Recuerde que la parte imaginaria de un complejo es un número *real*. La unidad imaginaria i **no** forma parte de la parte imaginaria del complejo.

¹²a menos que $z = 0$, en cuyo caso $r = 0$

¹³¿quién es este r ?

Entonces,

$$z = r(\cos t + \operatorname{sen} t i)$$

pero $r = |z|$ y $\arg z = t + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); luego,

$$z = |z|(\cos t + i \operatorname{sen} t)$$

y dada la periodicidad del seno y del coseno podemos escribir

$$z = |z|(\cos \arg z + i \operatorname{sen} \arg z)$$

A esta forma de escribir a z , a partir de su módulo y argumento se la llama la *forma trigonométrica o polar*.

Ejercicio 26

Escriba al complejo z en su forma binómica sabiendo que

$$\text{a) } |z| = 3 \quad , \quad \arg z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{b) } |z| = 3 \quad , \quad \arg z = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{c) } |z| = 2 \quad , \quad \arg z = \frac{\pi}{8} + 2k\pi^{14} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{d) } |z| = 2 \quad , \quad \arg z = \arcsen(0,99) + 2k\pi^{15} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ubique a cada uno de estos números en un esquema gráfico de dos formas distintas: a partir de los datos dados y luego usando su forma binómica. Una vez hecho esto indique en cada caso cuál de las dos le resultó más conveniente.

Ejercicio 27

Considere el número complejo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ y en cada uno de los siguientes casos determine en qué parte del plano se encuentra z . La respuesta debe ser un esquema gráfico de la región correspondiente

$$\text{a) } 0 \leq r \leq 2$$

$$\text{b) } 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\text{c) } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d) } \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{e) } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$$

$$\text{f) } 0 \leq r \leq 2 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\text{g) } r \geq 1 \quad , \quad \frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{h) } 0 \leq r \leq 2 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

¹⁴Cuidado: $\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} \neq 0,3826$

¹⁵Recuerde que $|\cos t| = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$

Ejercicio 28

En cada uno de los siguientes casos determine en qué parte del plano se encuentra z . La respuesta debe ser un esquema gráfico de la región correspondiente

- a) $\arg z = \arccos \theta + 2k\pi$ y $-1 \leq \theta \leq 1$ b) $\arg z = \arccos \theta + 2k\pi$ y $0 \leq \theta \leq 1$ c) $\arg z = \arccos \theta + 2k\pi$ y $-1 \leq \theta \leq 0$
- d) $\arg z = \arcsen \theta + 2k\pi$ y $-1 \leq \theta \leq 1$ e) $\arg z = \arcsen \theta + 2k\pi$ y $0 \leq \theta \leq 1$ f) $\arg z = \arcsen \theta + 2k\pi$ y $-1 \leq \theta \leq 0$

Ejercicio 29

Averigüe si es posible hallar θ tal que

- a) $\arg z = \arcsen \theta$, sabiendo que z está en el segundo cuadrante
- b) $\arg z = \arcsen \theta$, sabiendo que z está en el tercer cuadrante
- c) $\arg z = \arccos \theta$, sabiendo que z está en el tercer cuadrante
- d) $\arg z = \arccos \theta$, sabiendo que z está en el cuarto cuadrante.

Ejercicio 30

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$ con $a^2 + b^2 = 1$

- a) ¿en qué lugar del plano complejo está ubicado z ?
- b) escriba a z en su forma trigonométrica
NOTA: desde luego que no se pretende que sepa de z más de lo que se dice en el enunciado
- c) supongamos que z está en el
- (i) primer cuadrante; ¿cuáles de los siguientes valores representa a $\arg z$
 $\arctan\left(\frac{a}{b}\right)$, $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$, $\arccos a$, $\arcsen b$?
- (ii) segundo cuadrante; ¿cuál de los siguientes valores representa a $\arg z$
 $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$, $\arcsen b$, $\arcsen\left(\frac{b}{a}\right)$, $\arccos a$?
- (iii) cuarto cuadrante; ¿cuáles de los siguientes valores representa a $\arg z$
 $\arccos a$, $\arcsen b$, $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$?
- (iv) tercer cuadrante; ¿alguno de estos valores representa a $\arg z$
 $\arccos a$, $\arcsen b$, $\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$?

Explique claramente el por qué de cada respuesta. En caso que la respuesta sea que *ninguno lo representa* piense en una idea geométrica que le permita calcular $\arg z$.

Ejercicio 31

Escriba al complejo z en su forma trigonométrica

a) $z = -2$ b) $z = -2i$ c) $z = 4i$ d) $z = -2 - 2i$ e) $z = 2 - 3i$

Ubíquelos en un esquema gráfico señalando la circunferencia y la semirrecta que lo determinan.

Lema (argumento del producto)

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

DEMOSTRACIÓN:

Es importante recordar las siguientes identidades trigonométricas

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x$$

Efectuamos entonces el producto de los números complejos

$$z = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha \quad , \quad w = \cos \beta + i \operatorname{sen} \beta$$

Usando la definición de este producto,

$$\begin{aligned} zw &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + i (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha) \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Observación

Este resultado muestra que $\alpha + \beta$ es un valor del argumento de zw . Y esto sigue valiendo aún cuando z y w no tengan módulo 1.

Hemos probado unas de las propiedades del argumento que mencionaremos a continuación:

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w$$

con la única restricción $z, w \neq 0$ para que los argumentos estén definidos.

Propiedades del argumento

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ no nulos, entonces

(i) $\arg(zw) = \arg z + \arg w$

(ii) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$

$$(iii) \arg\left(\frac{w}{z}\right) = \arg w - \arg z$$

$$(iv) \arg \bar{z} = -\arg z$$

$$(v) \arg(-z) = \arg z + \pi$$

DEMOSTRACIÓN:

(i)

Lo hicimos en la observación previa.

(ii)

Tenemos

$$z \frac{1}{z} = 1$$

entonces, usando (i) resulta que

$$\arg z + \arg \frac{1}{z} = \arg 1$$

o sea

$$\arg \frac{1}{z} = -\arg z + \arg 1 = -\alpha + 2k\pi + 2m\pi = -\alpha + 2(k+m)\pi = -\arg z \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$

(iii)

Basta notar que

$$\frac{w}{z} = w \frac{1}{z}$$

y aplicar (i).

(iv)

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \underbrace{\frac{1}{|z|^2}}_{>0} \bar{z}$$

por lo tanto, $\frac{1}{z}$ y \bar{z} están sobre la misma semirrecta; esto asegura que tienen el mismo argumento

$$\arg \bar{z} = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$$

(v)

Basta notar que $-z$ está sobre la misma recta (por el origen) que z pero en la semirrecta opuesta respecto del origen. De modo que sus argumentos difieren en π

$$\arg(-z) = \arg z + \pi$$

La forma trigonométrica tiene una ventaja notable sobre la otra cuando se trata de calcular potencias de z esencialmente gracias al resultado siguiente

Teorema (De Moivre)

$$[\cos t + i \operatorname{sen} t]^n = \cos(nt) + i \operatorname{sen}(nt)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN:

Lo vamos a hacer con detalle para $n = 2$ y $n = 3$ y luego daremos una idea del caso general para $n \in \mathbb{N}$. El caso $n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ será dejado como ejercicio.

$$\star \quad n = 2$$

$$\begin{aligned} [\cos t + i \operatorname{sen} t]^2 &= [\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t] + i[\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t] = \cos(2t) + i2 \operatorname{sen} t \cos t \\ &= \cos(2t) + i \operatorname{sen}(2t) \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de algunas importantes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x \quad , \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

de las que se deducen (tomando $x = y$ en el caso de la suma)

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x \quad , \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\star \quad n = 3$$

$$\begin{aligned} [\cos t + i \operatorname{sen} t]^3 &= [\cos t + i \operatorname{sen} t]^2 [\cos t + i \operatorname{sen} t] \\ &= [\cos(2t) + i \operatorname{sen}(2t)][\cos t + i \operatorname{sen} t] \\ &= [\cos(2t) \cos t - \operatorname{sen}(2t) \operatorname{sen} t] + i[\cos(2t) \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(2t) \cos t] \\ &= \cos(2t + t) + i \operatorname{sen}(2t + t) \\ &= \cos(3t) + i \operatorname{sen}(3t) \end{aligned}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ mayor que 3, podríamos suponer que ya llegamos probando estas identidades hasta $n - 1$; i.e., suponemos que ya sabemos que

$$[\cos t + i \operatorname{sen} t]^{n-1} = \cos((n-1)t) + i \operatorname{sen}((n-1)t)$$

y trabajando como en el caso $n = 3$ llegamos a que también es cierto para n . Como no estamos condicionando n , podemos convencernos de que vale para cualquier natural.

Ejercicio 32

Pruebe el Teorema de De Moivre para el caso $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq 0$.

Sugerencia: si n es entero no positivo se puede escribir en la forma $n = -m$ con $m \in \mathbb{N}$ o $m = 0$.

Aplicación

Supongamos que nos dieron el complejo $z = 1 - i$ y nos piden hallar z^{10} . No parece que resulte ser un cálculo breve hacer todos los productos.

Utilicemos lo visto recién.

1. Encontramos primero la forma trigonométrica de z

Necesitamos hallar el módulo y el argumento.

$$|z| = |1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Respecto del argumento, se debe cumplir

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos \arg z = 1 \\ \sqrt{2} \operatorname{sen} \arg z = -1 \end{cases}$$

o sea,

$$\begin{cases} \cos \arg z = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} \arg z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Por ser $\cos \arg z > 0$ y $\operatorname{sen} \arg z < 0$ sabemos que z está en el cuarto cuadrante y más precisamente sobre su bisectriz pues $|\cos \arg z| = |\operatorname{sen} \arg z|$ con lo cual

$$\arg z = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Si, entre los infinitos valores del argumento de z , nos quedamos con el que está entre 0 y 2π resulta

$$z = \sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i \operatorname{sen}(\frac{7\pi}{4}))$$

2. Calculemos ahora z^{10} usando De Moivre

$$\begin{aligned} z^{10} &= [\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i \operatorname{sen}(\frac{7\pi}{4}))]^{10} = (\sqrt{2})^{10}[(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i \operatorname{sen}(\frac{7\pi}{4}))]^{10} \\ &= 2^5[\cos(\frac{70\pi}{4}) + i \operatorname{sen}(\frac{70\pi}{4})] = 32[\cos(\frac{35\pi}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{35\pi}{2})] \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ 35=4 \cdot 8+3}}{32}[\cos(\frac{3\pi}{2} + 16\pi) + i \operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} + 16\pi)] \\ &= \underset{\substack{\uparrow \\ 16\pi=8 \text{ giros} \\ \text{completos}}}{32}[\cos(3\frac{\pi}{2}) + i \operatorname{sen}(3\frac{\pi}{2})] \\ &= -32i \end{aligned}$$

En uno de los pasos de esta cuenta usamos el *algoritmo de división de números enteros*. Lo recordamos para evitar posibles futuros errores.

Ejercicio 33

Escriba en forma binómica al número $(\sqrt{2}-i)^{100}$ y exhiba un valor de su argumento.

Teorema (*Algoritmo de División de Enteros*)

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Existen entonces únicos enteros q y r tales que

$$b = aq + r \quad \text{con } 0 \leq r < |a|$$

El entero q se llama *cociente* y el entero r *resto*

Caso particular

Si tomamos $a, b \in \mathbb{N}$, el teorema anterior dice que hay únicos enteros q y r tales que

$$b = aq + r \quad \text{con } 0 \leq r < a$$

En la cuenta anterior aplicamos este resultado con: $a = 4$ y $b = 35$ y resultó que

$$q = 8 \quad \text{y} \quad r = 3$$

Conjunto totalmente ordenado

Decimos que un conjunto es *totalmente ordenado* cuando dados dos cualesquiera de sus elementos podemos decir, en caso de no ser iguales, cuál de los dos es mayor.

Sabemos que \mathbb{R} tiene esa propiedad. Pero además el orden de \mathbb{R} es *compatible* con sus operaciones. En el siguiente sentido:

- ★ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a < b$ entonces $a + c < b + c$ (decimos que el orden respeta la suma)
- ★ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $c > 0$, si $a < b$ entonces $ac < bc$ (decimos que el orden respeta el producto por números *positivos*)

No es posible construir un orden así en \mathbb{C} .

Supongamos que pudiéramos encontrar una manera de ordenar a todos los complejos de forma que ese orden respetara a la suma y al producto. Siendo que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, es razonable pedir además que no *desordene* a los reales.

Consideremos dos de sus elementos:

$$0 \quad \text{e} \quad i$$

Como no son iguales, uno de los dos debería ser el más grande

1. Supongamos primero que es i ; es decir, vamos a suponer que $i > 0$. Como pretendemos que este orden respete a las operaciones, debería ser $i \cdot i > i \cdot 0$. Pero $i^2 = -1$, llegaríamos a que los números reales -1 y 0 satisfacen: $-1 > 0$. Esto es absurdo.

Conclusión: NO PUEDE SER $i > 0$

2. Supongamos por último que $i < 0$; en tal caso, debería ser $-i > 0$. Y entonces, como antes, resulta $(-i)^2 > 0$. Pero $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$. Llegamos otra vez al mismo absurdo.

Conclusión: NO PUEDE SER $i < 0$

Conclusión final: no hay forma de ordenar a \mathbb{C} de manera análoga a \mathbb{R} .

Consejo:

Antes de usar los símbolos “<” o “>”, si está tratando con complejos, asegúrese de que esos *complejos* sean en verdad *reales*; no tiene sentido que aparezca uno de esos símbolos si los números son complejos no reales.

Usar orden entre números complejos que no son reales o que no se sabe si lo son es un ERROR MUY GRAVE.

Ejercicio 34

Considere las funciones

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

¿tiene sentido preguntarse si

- a) f es monótona?
- b) g es monótona?
- c) h es monótona?

Raíces de números complejos

En los números reales cualquier número –positivo o negativo– admite raíz de índice *impar*. Si el índice es *par*, solo podemos calcularla para números no negativos.

En tal caso, si $x \geq 0$, \sqrt{x} representa **el único número positivo** que elevado al cuadrado da x . Esto nos permite decir que la asignación $x \rightarrow \sqrt{x}$ es una función porque hay solo un número positivo que cumple eso y por lo tanto no hay ambigüedad.

En el caso de los números complejos — dado que \mathbb{C} no admite ese tipo de orden — no vamos a poder distinguir entre todos los valores que cumplen esa condición. Por lo tanto no podremos hablar de función. Pero sí podemos calcular los valores, por ejemplo, cuyo cuadrado es un complejo dado.

En este tema también resultará muy útil la forma trigonométrica de los complejos y el algoritmo de división de enteros.

Lo haremos con una serie de ejemplos que van a ir incrementando su complejidad.

En todos los casos se tratará de *hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen la condición dada*

1. $z^2 = 1$

Escribimos z en su forma polar

$$z = |z| (\cos \arg z + i \sen \arg z)$$

Sabemos que $z^2 = 1$, debe ser entonces

$$1 = |z^2| = |z|^2$$

Por lo cual, $|z| = 1$. Entonces,

$$z = \cos \arg z + i \operatorname{sen} \arg z$$

de lo que obtenemos

$$1 = z^2 = \cos(2 \arg z) + i \operatorname{sen}(2 \arg z)$$

y de aquí se deduce que

$$\begin{cases} \cos(2 \arg z) = 1 \\ \operatorname{sen}(2 \arg z) = 0 \end{cases}$$

o sea,

$$2 \arg z = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

que es decir

$$\arg z = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

de forma que

$$z = \cos k\pi + i \operatorname{sen} k\pi = \begin{cases} 1 & k \text{ par} \\ -1 & k \text{ impar} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Conclusión

$$\boxed{z^2 = 1 \iff z = \pm 1} \quad (\diamond)$$

2. $z^2 = -1$

Trabajando como en el caso anterior

$$z = |z| (\cos \arg z + i \operatorname{sen} \arg z)$$

nos lleva de nuevo a que debe ser $|z| = 1$, por lo que

$$z = \cos \arg z + i \operatorname{sen} \arg z$$

Pero ahora $z^2 = -1$, entonces

$$\begin{cases} \cos(2 \arg z) = -1 \\ \operatorname{sen}(2 \arg z) = 0 \end{cases}$$

o sea,

$$2 \arg z = (2k + 1)\pi = 2k\pi + \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

que es decir

$$\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

de forma que

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} i & k \text{ par} \\ -i & k \text{ impar} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Conclusión

$$\boxed{z^2 = -1 \iff z = \pm i} \quad (\diamond\diamond)$$

3. $z^2 = 5$

Notemos que esta ecuación es equivalente a

$$\frac{z^2}{5} = 1$$

y también a

$$\left(\frac{z}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

pero esto, recordando (\diamond), es lo mismo que decir que

$$\frac{z}{\sqrt{5}} = \pm 1$$

y en consecuencia,

$$z^2 = 5 \iff z = \pm \sqrt{5}$$

4. $z^2 = -5$

Esta ecuación equivale a

$$\frac{z^2}{5} = -1$$

y también a

$$\left(\frac{z}{\sqrt{5}}\right)^2 = -1$$

pero esto es decir, en virtud de ($\diamond\diamond$),

$$\frac{z}{\sqrt{5}} = \pm i$$

Conclusión,

$$z^2 = -5 \iff z = \pm \sqrt{5} i$$

$$5. (z - a - ib)^2 = -7$$

Notando que esta ecuación equivale a

$$\left(\frac{z - a - ib}{\sqrt{7}}\right)^2 = -1$$

obtenemos que

$$(z - a - ib)^2 = -7 \iff \frac{z - a - ib}{\sqrt{7}} = \pm i \quad (\text{por } (\diamond\diamond))$$

y por lo tanto, los valores de z que satisfacen la ecuación son los que verifican

$$\frac{z - a - ib}{\sqrt{7}} = i, \quad \frac{z - a - ib}{\sqrt{7}} = -i$$

Conclusión

$$(z - a - ib)^2 = -7 \iff z = a + ib \pm \sqrt{7}i \iff z = a + i(b \pm \sqrt{7})$$

Ejercicio 35

Halle todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^3 = 8$.

$$6. w^4 = 16i$$

Escribimos a w en su forma trigonométrica

$$w = |w| (\cos \arg w + i \operatorname{sen} \arg w)$$

calculamos su módulo

$$|w|^4 = |16i| = 16$$

de modo que $|w| = 2$ y entonces,

$$w = 2(\cos \arg w + i \operatorname{sen} \arg w)$$

Ahora, con la forma polar de w , volvemos a reconstruir la ecuación dada

$$16i = w^4 = 2^4(\cos(4 \arg w) + i \operatorname{sen}(4 \arg w)) = 16 \cos(4 \arg w) + i16 \operatorname{sen}(4 \arg w)$$

de forma que los w que buscamos son los que satisfacen

$$\begin{cases} \cos(4 \arg w) = 0 \\ \operatorname{sen}(4 \arg w) = 1 \end{cases}$$

esto es decir

$$4 \arg w = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

equivalentemente

$$\arg w = \frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Teniendo en cuenta que tanto el coseno como el seno son 2π -periódicas, estos *infinitos* valores de $\arg w$ producen en realidad una cantidad *finita* de números complejos w que satisfacen la ecuación que estamos resolviendo. Para comprobarlo vamos a utilizar el algoritmo de división

$$k = 4q + r \quad (q \in \mathbb{Z} \text{ y } r \in \mathbb{Z}: 0 \leq r \leq 3)$$

de esta forma

$$2k\pi = 4.2q\pi + 2r\pi$$

con lo cual

$$\arg w = \frac{\pi}{8} + \frac{2r\pi}{4} + 2q\pi$$

siendo $2q\pi$ un múltiplo de un giro completo,

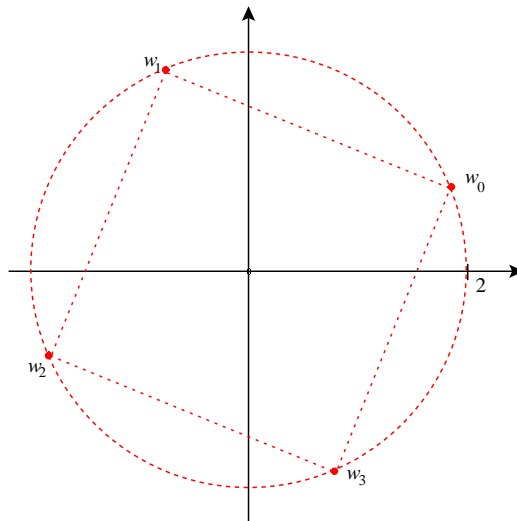
$$\cos \arg w = \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2r\pi}{4}\right) \quad , \quad \operatorname{sen} \arg w = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2r\pi}{4}\right)$$

Podemos entonces afirmar que los w que satisfacen $w^4 = 16i$ son los que tienen la forma

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2r\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2r\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{r\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{r\pi}{2}\right)\right) \quad (r = 0, 1, 2, 3)$$

y comprobamos entonces que hay exactamente cuatro:

$$\begin{aligned} w_0 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ w_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ w_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)\right) \\ w_3 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$



Comentario

Utilizando identidades trigonométricas y el hecho de ser $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ se puede ver que

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{y} \quad \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Con esto podríamos escribir

$$w_0 = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$w_1 = -\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

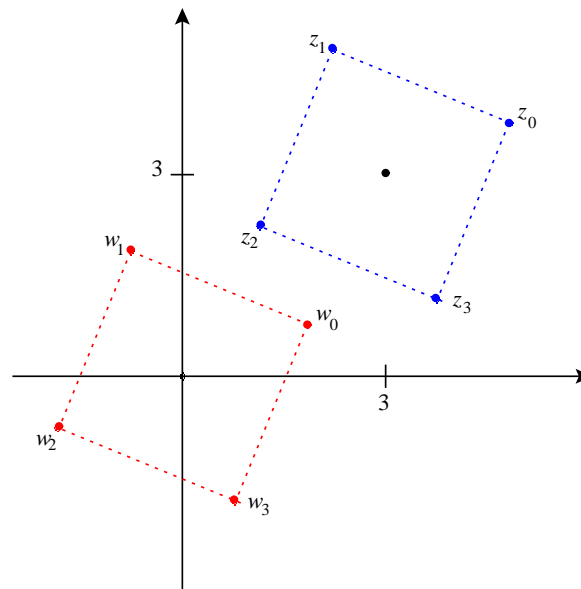
$$w_2 = -\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$w_3 = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

7. $(z - 3 - 3i)^4 = 16i$

Observemos que los z que satisfacen esta ecuación son los que hacen que $z - 3 - 3i$ satisfaga la ecuación del ejemplo anterior. Luego, las soluciones son

$$z_0 = w_0 + 3 + 3i \quad , \quad z_1 = w_1 + 3 + 3i \quad , \quad z_2 = w_2 + 3 + 3i \quad , \quad z_3 = w_3 + 3 + 3i$$



Ejercicio 36

Halle todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

a) $z^5 = -32i$

b) $(z + 4)^5 = -32i$

Ubique en un esquema gráfico a las raíces de cada ecuación.

$$8. z^2 - 2iz = 2 - \sqrt{3}i$$

Lo primero que haremos es *completar cuadrados*¹⁶ en el primer miembro de esta ecuación para llevarla a una forma similar a otras que ya analizamos

$$z^2 - 2iz = z^2 - 2iz + (-i)^2 - (-i)^2 = (z - i)^2 - (-i)^2 = (z - i)^2 + 1$$

Por lo tanto, la ecuación que debemos resolver es equivalente a

$$(z - i)^2 + 1 = 2 - \sqrt{3}i$$

o, lo que es lo mismo,

$$(z - i)^2 = 1 - i\sqrt{3}$$

Con el objeto de simplificar la escritura, llamamos

$$w = z - i$$

y resolvemos primero

$$w^2 = 1 - i\sqrt{3}$$

Obtenemos en principio que

$$|w|^2 = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2$$

i.e.,

$$|w| = \sqrt{2}$$

de forma que

$$w = \sqrt{2}(\cos \arg w + i \sen \arg w)$$

reescribimos la ecuación usando la forma polar de w

$$1 - i\sqrt{3} = w^2 = 2(\cos(2 \arg w) + i \sen(2 \arg w))$$

luego, w va a satisfacer la ecuación si y solo si

$$\begin{cases} 2 \cos(2 \arg w) = 1 \\ 2 \sen(2 \arg w) = -\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(2 \arg w) = \frac{1}{2} \\ \sen(2 \arg w) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

deducimos de aquí que w^2 está en cuarto cuadrante dado que el coseno es positivo y el seno negativo. Un valor del argumento es $\frac{5\pi}{3}$, entonces

$$2 \arg w = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

o sea,

$$\arg w = \frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

dividimos a k por 2,

$$k = 2q + r \quad (q \in \mathbb{Z}, r = 0, 1)$$

¹⁶Ver Apéndice

de modo que $2k\pi = 2r\pi + 2.2q\pi$, con lo cual

$$\arg w = \frac{5\pi}{6} + r\pi + 2q\pi \quad (r = 0, 1)$$

y entonces comprobamos que hay exactamente dos soluciones de la ecuación que son

$$w_0 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) \quad , \quad w_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right)$$

o sea,

$$w_0 = -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad w_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Volviendo a la variable z podemos decir que las soluciones de la ecuación dada son $z_0 = w_0 + i$ y $z_1 = w_1 + i$; es decir,

$$z_0 = -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \quad , \quad z_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

La exponencial compleja

Dado el número complejo $z = x + iy$ se define

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Consideremos dos casos muy especiales

- ◆ z es real; i.e., $y = 0$

En tal caso, como $\cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$,

$$e^z = e^x$$

O sea, la exponencial compleja *extiende* a la exponencial real

- ◆ z es imaginario puro; i.e., $x = 0$

En tal caso, como $e^0 = 1$,

$$e^z = e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Ejercicio 37

Calcule parte real e imaginaria, módulo y argumento de los siguientes números complejos

$$e^{i\pi} \quad , \quad e^{i\pi/2} \quad , \quad e^{2+i\pi/2} \quad , \quad e^{2+3i} \quad , \quad e^{2+(3+6\pi)i}$$

Observaciones

1. MUY IMPORTANTE

Aunque la gráfica de las exponenciales real y compleja es la misma, son funciones muy distintas y es un error creer que las propiedades que tiene la exponencial real son compartidas por la exponencial compleja.

2. Una propiedad que sí es común

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

para todo $z = x + iy$, $w = u + iv$ en \mathbb{C} .

Siendo

$$z + w = (x + u) + i(y + v)$$

resulta, a partir de la definición,

$$e^{z+w} = e^{x+u}(\cos(y+v) + i \operatorname{sen}(y+v))$$

y, teniendo en cuenta que e^{x+u} representa la exponencial real, sí podemos decir que $e^{x+u} = e^x e^u$; además, utilizando la definición de producto de números complejos e identidades trigonométricas,

$$\cos(y+v) + i \operatorname{sen}(y+v) = (\cos y + i \operatorname{sen} y)(\cos v + i \operatorname{sen} v)$$

por consiguiente,

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^{x+u}(\cos(y+v) + i \operatorname{sen}(y+v)) \\ &= e^x e^u (\cos y + i \operatorname{sen} y)(\cos v + i \operatorname{sen} v) \\ &= e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) e^u (\cos v + i \operatorname{sen} v) \\ &= e^z e^w \end{aligned}$$

3. Un caso particular de la propiedad anterior dice que

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha+i\beta} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$$

Comentario: si bien esto es cierto para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, **no** se puede usar para demostrar que

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$

pues esta igualdad es la que nos permitió demostrar que $e^{z+w} = e^z e^w$.

Ejercicio 38

Considere el complejo e^{x+iy} ($x, y \in \mathbb{R}$)

- calcule $|e^{x+iy}|$
- ¿cómo deben ser x e y para que $|e^{x+iy}| = 2$?
- suponiendo que $|e^{x+iy}| = 2$, escriba la forma trigonométrica de e^{x+iy} e indique cuál es su módulo y su argumento
- ¿cómo tienen que ser x e y para que $e^{x+iy} = 1 + \sqrt{3}i$?
- halle todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $e^z = 1 + \sqrt{3}i$.

NOTA: si para responder este ítem necesita hacer alguna cuenta es que algo no le quedó del todo claro.

4. Algunas importantes diferencias

- (i) La exponencial real es inyectiva. La exponencial compleja **no** lo es. Es más, e^z es $2\pi i$ -periódica,

$$e^{z+2k\pi i} = e^z$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$

- (ii) La exponencial real es estrictamente creciente. *No tiene sentido* plantearse esto para la exponencial compleja dado que no tenemos orden en \mathbb{C}
- (iii) Para la exponencial real vale que $(e^a)^b = e^{ab}$. Si planteamos esta situación para la exponencial compleja, ya en una de las situaciones más simples — $z = i\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) y $w = \sqrt{2}$ — tenemos problemas; por un lado,
- ★ $e^{zw} = e^{i\sqrt{2}\alpha} = \cos \sqrt{2}\alpha + i \operatorname{sen} \sqrt{2}\alpha$
- mientras que
- ★ $(e^z)^w$ requiere ser definido porque w no es entero y e^z es un número complejo. Esto se hace utilizando *ramas* del logaritmo complejo.

Conclusión: hay que tratar con mucho *respeto* a la exponencial compleja.

APÉNDICE

Completación de Cuadrados

Recibe este nombre el método que permite llevar la expresión $ax^2 + bx + c$ a la forma

$$a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Para entender mejor el procedimiento conviene recordar la expresión del cuadrado de un binomio:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Veámoslo primero con un ejemplo y luego haremos la cuenta en el caso general.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 13 &= 3(x^2 - 4x) + 13 \\ &= 3(x^2 - 2 \cdot 2x) + 13 \\ &= 3(x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4) + 13 \\ &= 3((x - 2)^2 - 4) + 13 \\ &= 3(x - 2)^2 - 12 + 13 \\ &= 3(x - 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

Hemos logrado lo que nos propusimos. Para este caso particular comprobamos que la función cuadrática

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 13$$

se puede escribir en la forma

$$f(x) = 3(x - 2)^2 + 1$$

y de esta manera asegurar que su gráfico es una parábola de eje vertical y vértice (2, 1).

Los pasos principales que nos permitieron lograr esto fueron:

- (1) sacar factor común el coeficiente de x^2
- (2) escribir el coeficiente de x como '2.algo' con el objeto de que esos dos primeros sumandos se puedan interpretar como parte de un trinomio cuadrado perfecto
- (3) sumar y restar el cuadrado del 'algo', justamente para que ahora los tres primeros sumandos sean precisamente un trinomio cuadrado perfecto.

Sigamos estos pasos en el caso general,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde siempre suponemos $a \neq 0$ para que realmente haya un término cuadrático.

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &\stackrel{\uparrow (1)}{=} a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
 &\stackrel{\uparrow (2)}{=} a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x\right) + c \\
 &\stackrel{\uparrow (3)}{=} a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\
 &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}
 \end{aligned}$$

Entonces, si llamamos

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

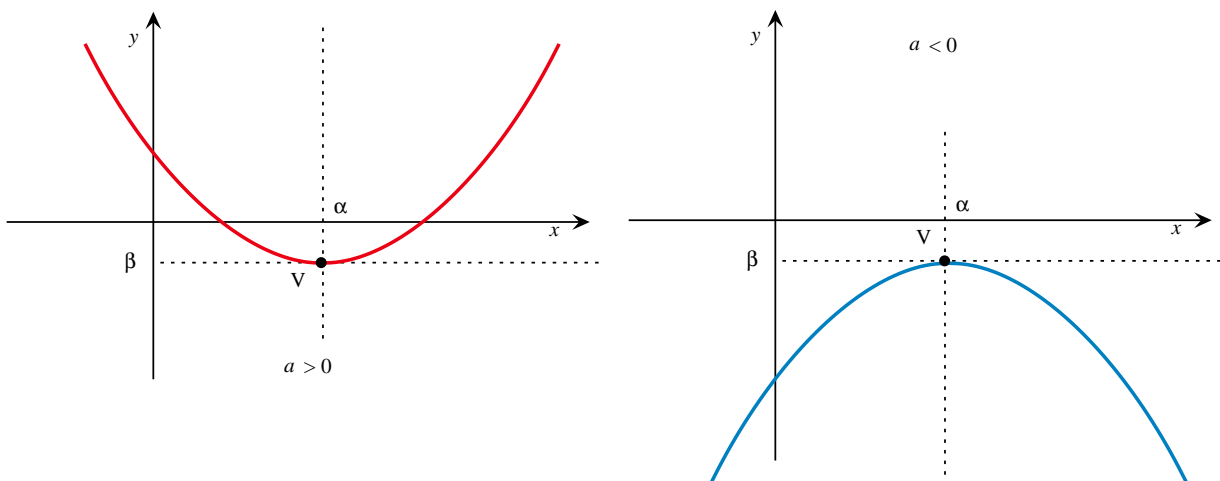
$f(x)$ toma la forma

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Notemos que el primer sumando tiene el signo de a , pues $(x - \alpha)^2 \geq 0$ siempre. Luego,

$$f(x) \geq \beta \quad \text{si } a > 0 \quad \text{y} \quad f(x) \leq \beta \quad \text{si } a < 0$$

Esto se ilustra en la siguiente figura



De aquí también se concluye que esta función no es inyectiva y podemos calcular su imagen

$$\text{Im}(f) = [\beta, +\infty) \quad \text{si } a > 0 \quad \text{e} \quad \text{Im}(f) = (-\infty, \beta] \quad \text{si } a < 0$$

Notemos finalmente que el coeficiente a también está relacionado la amplitud de la parábola: cuanto mayor sea $|a|$ más cerrada será la parábola. Estudiaremos esto con más detalle en la próxima práctica cuando nos ocupemos de las cónicas, uno de cuyos ejemplos es la parábola.

Aplicación al cálculo de raíces de una parábola

Consideremos la parábola que es el gráfico de la función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Como se trata de buscar sus raíces, i.e., los números que hacen que se anule, es claro que

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

tienen las mismas raíces. Hallemos entonces las raíces de g .

Aplicando la completación de cuadrados resulta

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4} \end{aligned}$$

De modo que x será una raíz de g si y solo si

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4} = 0 \quad (1)$$

Observemos que si $4q - p^2 > 0$ esta ecuación no tiene solución en \mathbb{R} . Analicemos entonces el caso $4q - p^2 \leq 0$. Ahora (1) es equivalente a

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{4}$$

que a su vez equivale a

$$\left|x - \frac{p}{2}\right| = \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

y de aquí concluimos que g tiene dos raíces¹⁷

$$x_1 = \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{p}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{p}{2}$$

¹⁷no necesariamente distintas; si $p^2 = 4q$ hay una raíz doble: $\frac{p}{2}$

- d) ¿sobre qué semirrecta debería ubicar al complejo $-z$?
- e) ¿le alcanza la información para calcular: $\arg(zw)$, $\arg\left(\frac{1}{z}\right)$, $\arg\left(\frac{z}{w}\right)$?
- f) halle el valor del argumento de $\frac{1}{z}$ que está en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

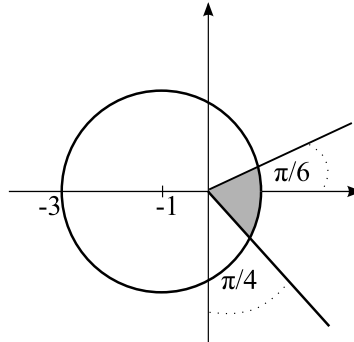
6. Siendo $z = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, ¿cuánto vale

- | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| a) $ z $? | b) $\arg z$? | c) $\arg \bar{z}$? | d) $\arg\left(\frac{1}{z}\right)$? |
| e) $\arg(z^4)$? | f) $\arg(3z)$? | g) $\arg(-3z)$? | h) $\arg(iz)$? |
| i) $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right)$? | j) $\arg\left(\frac{z}{ z }\right)$? | k) $\left \frac{z}{ z }\right $? | |

7. Grafique el subconjunto del plano complejo definido por las condiciones

$$\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{4} \quad ^{19}, \quad -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 3$$

8. Describa mediante ecuaciones o inecuaciones, según corresponda, el subconjunto del plano complejo que se muestra en la siguiente figura



9. Para cada número complejo dado, halle su forma trigonométrica

- | | | |
|---|---|------------|
| a) $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ | b) $-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$ | c) $4 - i$ |
| d) 5 | e) -3 | f) $-4i$ |
| g) $7i$ | h) $\frac{1+i}{3+3\sqrt{3}i}$ | |
| i) $\overline{-1-i}$ | | |

10. Para cada número complejo dado, halle su forma binómica

- | | |
|---|---|
| a) $ z = 3$, $\frac{7\pi}{6}$ es un argumento de z | b) $ z = \frac{1}{5}$, $-\frac{3\pi}{4}$ es un argumento de z |
| c) $ z = 5$, $\frac{20\pi}{3}$ es un argumento de z | d) $ z = 2$, $\frac{\pi}{2}$ es un argumento de z |
| e) $ z = 3$, 9π es un argumento de z | f) $ z = 1$, 16π es un argumento de z |
| g) $\frac{1+i}{3+3\sqrt{3}i}$ | h) $\frac{5}{i}$ |
| i) $\frac{1}{1-i}$ | |

¹⁹ACLARACIÓN: hemos insistido en que cuando escribimos “ $\arg z$ ” nos referimos a un valor genérico del argumento de z (uno de los infinitos que tiene). Hay que reconocer entonces que estas desigualdades no tienen mucho sentido. Se trata solamente de una convención para no complicar la escritura. Al buscar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen $\pi \leq \arg z \leq 2\pi$ simplemente queremos decir que debemos encontrar a todos los complejos para los cuales *alguno* de los valores de su argumento está en ese intervalo.

11. Para cada uno de los siguientes complejos z , halle la forma binómica de z^n para el valor de n indicado en cada caso

- a) $z = \cos(3\frac{\pi}{4}) + \text{sen}(3\frac{\pi}{4})i, n = 8$ b) $z = 1 + i, n = 2$
 c) $z = i, n = 1, 2, 3, 4$ d) $z = i, n \in \mathbb{N}$
 e) $z = -i, n \in \mathbb{N}$

12. Dado $z = 1 + i\sqrt{3}$ halle el valor del argumento de: z , \bar{z} , $\frac{1}{z}$, $-z$ que se encuentra en el intervalo $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$.

13. Grafique los conjuntos del plano complejo dados por las siguientes condiciones

- | | | |
|--|--|--|
| a) $ z = 1$ | b) $\text{Re}(z) = 2$ | c) $\text{Im}(z) = -3$ |
| d) $3z - 2\bar{z} + 1 = 0$ | e) $z\bar{z} - 4 = 0$ | f) $ z - 1 = 3$ |
| g) $ z - 1 + 3i \leq 2$ | h) $ 2z - 3 + i < 5$ | i) $1 \leq z - i \leq 3$ |
| j) $\text{Re}(z) \geq \frac{1}{2}$ | k) $ z - a - ib \leq 1$ | l) $\arg((1 - i)z) = \frac{\pi}{2}$ |
| m) $1 < z - i \leq 4, \text{Im}(z) \leq 2$ | n) $-\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{3\pi}{8}$ | o) $-\frac{\pi}{2} < \arg \bar{z} \leq \frac{3\pi}{8}$ |

14. En cada caso, primero analice si hay soluciones reales y luego halle todas las soluciones complejas ²⁰

- | | | |
|------------------------|-------------------------|------------------------|
| a) $z^2 + 1 = 0$ | b) $z^2 - 4 = 0$ | c) $z^2 + 4 = 0$ |
| d) $(z - 1)^2 - 4 = 0$ | e) $(z - 1)^2 + 4 = 0$ | f) $(z - i)^2 - 1 = 0$ |
| g) $(z - i)^2 + 1 = 0$ | h) $4(z + 2)^2 + 9 = 0$ | i) $2z^2 + z = 0$ |
| j) $2z^2 + 8z + 9 = 0$ | k) $z^2 - 2iz + 9 = 0$ | l) $z^2 - 2z = -i$ |

15. Encuentre todas las soluciones de

- | | | |
|------------------------|------------------------|---------------------------------|
| a) $z^3 = 1$ | b) $z^3 = 8$ | c) $z^3 + 1 = 0$ |
| d) $(z + 2)^5 - 1 = 0$ | e) $(z + 2)^5 + 1 = 0$ | f) $(z - 3i)^5 = 1 - \sqrt{3}i$ |

16. En cada caso indique, y represente gráficamente, qué subconjunto del plano complejo determinan las condiciones dadas

- | | | |
|-------------------------------|------------------------|----------------------------------|
| a) $\text{Re}(z) = 3$ | b) $\text{Im}(z) = -2$ | c) $ z = 5$ |
| d) $\arg(z) = 3\frac{\pi}{2}$ | e) $ z - 3 + i = 2$ | f) $\arg(z - 3) = \frac{\pi}{3}$ |

17. Grafique los subconjuntos del plano complejo dados por las siguientes condiciones

- | | |
|---|---|
| a) $\arg(z) \in (-\pi, \pi), z < 1$ | b) $\arg(z) \in (-\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{4})$ |
| c) $\arg(z) \in [3\frac{\pi}{4}, \pi)$ | d) $\arg(z - 1) = 3\pi$ |
| e) $\arg(z - 1) = 3\pi, z - 1 = 4$ | f) $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}, z < \frac{1}{2}$ |
| g) $0 < \arg(z - 1) < \frac{\pi}{2}, z - 1 > \frac{1}{2}$ | h) $\frac{\pi}{2} < \arg(z + i) < \pi, z + i < \frac{1}{4}$ |
| i) $ z = \arg(z), 0 < \arg(z) < 2\pi$ | j) $\frac{\pi}{4} < \arg(3z) < \pi$ |
| k) $\frac{\pi}{4} < \arg(2iz) < \frac{\pi}{2}$ | l) $0 < \arg((1 - i)z) \leq 3\frac{\pi}{4}$ |
| m) $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}, z = \frac{1}{2}$ | n) $\arg(z) = \frac{\pi}{2}, z < \frac{1}{2}$ |
| o) $\arg(z) = \frac{\pi}{2}, z = \frac{1}{2}$ | |

²⁰Recuerde que los reales son también complejos.

18. Calcule

a) $e^{i\pi/2+7\pi i}$

b) e^{1-i}

c) $e^{\ln|z|+i\arg z}$ ($z \in \mathbb{C}, z \neq 0$)

19. Halle todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

a) $e^z = 1$

b) $e^z = e^i$

c) $e^z = 0$

d) $e^z = i, -\pi < \text{Im } z < \pi$

e) $e^z = 1 - i, -\pi < \text{Im } z < \pi$

Lo hecho en este ejercicio, ¿le permite decidir si la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = e^z$, es inyectiva?

20. ¿Qué relación debe haber entre z y w para poder asegurar que $e^z = e^w$?

21. Se definen el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im}(z) < 2\pi\}$ y la función $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = e^z$. Averigüe si es inyectiva.

22. Describa mediante ecuaciones o inecuaciones, según corresponda, los siguientes subconjuntos del plano complejo

