FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS E INGENIERIA

UCA

ALGEBRA Y GEOMETRIA

Primer Cuatrimestre 2011

Trabajo Práctico 2

Contenido

POLINOMIOS

Monomio

Llamamos ***monomio*** a una *expresión algebraica* del tipo

$$a\,\mathrm{X}^n$$

donde a es un número fijo [1], $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ también fijo y a X se la llama ***indeterminada***. Al número a se lo llama ***coeficiente*** del monomio. Cuando $n = 0$, convenimos que

$$a\,\mathrm{X}^n = a$$

Observación

La indeterminada X **no es un número**, es solo un símbolo al que luego nos va a interesar reemplazar por números [2].
Podemos pensar que $a\,\mathrm{X}^n$ es un *molde* que nos permitirá *fabricar* la expresión numérica ac^n en cuanto *rellenemos* a X con el número c.

Igualdad de monomios

Dados dos monomios

$$a\,\mathrm{X}^n \qquad , \qquad b\,\mathrm{X}^m$$

decimos que

$$a\,\mathrm{X}^n = b\,\mathrm{X}^m$$

cuando

$$a = b \qquad \text{y} \qquad n = m$$

Grado de un monomio

Dado el monomio $a\,\mathrm{X}^n$,

(i) Si $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, decimos que el ***grado*** de $a\,\mathrm{X}^n$ es n y escribimos

$$\mathrm{gr}\,(a\,\mathrm{X}^n) = n$$

[1] racional, real o complejo

[2] En la resolución de ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales resulta útil trabajar con la *exponencial de una matriz* que se define como límite de expresiones polinómicas donde la indeterminada es una matriz.

(ii) Si $a \neq 0$ y $n = 0$, decimos que tiene ***grado*** cero y escribimos

$$\mathrm{gr}(a) = 0$$

(iii) Si $a = 0$, no hablamos de ***grado***

Polinomio

Llamamos ***polinomio*** a una expresión algebraica del tipo

$$a_n \mathrm{X}^n + a_{n-1} \mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_2 \mathrm{X}^2 + a_1 \mathrm{X} + a_0$$

es decir, una suma de una cantidad finita de monomios. Los números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se denominan ***coeficientes*** del polinomio. Si no es cero, a_n recibe el nombre de ***coeficiente principal*** del polinomio y a a_0 se lo llama ***término independiente***.

Igualdad de polinomios

Dados dos polinomios

$$a_n \mathrm{X}^n + a_{n-1} \mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_2 \mathrm{X}^2 + a_1 \mathrm{X} + a_0 \quad , \quad b_m \mathrm{X}^m + b_{m-1} \mathrm{X}^{m-1} + \cdots + b_2 \mathrm{X}^2 + b_1 \mathrm{X} + b_0$$

decimos que son iguales cuando

$$n = m \quad \text{y} \quad a_i = b_i \quad \text{para todo } i = 0, \ldots, n$$

Ejercicio 1

Halle todos los $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que $P = Q$, siendo

a) $P = 2\mathrm{X}^3 - a\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} + 3$ y $Q = b\mathrm{X}^3 - 2a\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} + 3$

b) $P = 3\mathrm{X}^5 + \mathrm{X}^4 - 5$ y $Q = a\mathrm{X}^4 + b\mathrm{X}^3 - 5$

c) $P = b\mathrm{X}^5 + \mathrm{X}^4 - 5$ y $Q = a\mathrm{X}^4 + b\mathrm{X}^4 - 5$

Grado de un polinomio

Dado el polinomio

$$a_n \mathrm{X}^n + a_{n-1} \mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_2 \mathrm{X}^2 + a_1 \mathrm{X} + a_0$$

(i) Si $a_n \neq 0$ decimos que el ***grado*** es n

(ii) Si todos los coeficientes son cero no hablamos de ***grado***

Es decir, el grado de un polinomio no nulo es el grado del monomio de mayor grado que lo compone.

Operaciones con polinomios

I — SUMA

➢ *de monomios del mismo grado*

Dados los monomios $a\,\mathrm{X}^n$ y $b\,\mathrm{X}^n$ $(a, b \neq 0)$ [3] se define la suma como otro monomio del mismo grado o nulo

$$a\,\mathrm{X}^n + b\,\mathrm{X}^n = (a+b)\,\mathrm{X}^n$$

➢ *de polinomios*

Dados dos polinomios P y Q

$$P = a_n\,\mathrm{X}^n + a_{n-1}\,\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_2\,\mathrm{X}^2 + a_1\,\mathrm{X} + a_0$$

$$Q = b_m\,\mathrm{X}^m + b_{m-1}\,\mathrm{X}^{m-1} + \cdots + b_2\,\mathrm{X}^2 + b_1\,\mathrm{X} + b_0$$

la suma de ambos es otro polinomio –denotado $P+Q$– definido por

$$P+Q = \begin{cases} (a_n+b_n)\,\mathrm{X}^n + (a_{n-1}+b_{n-1})\,\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + (a_1+b_1)\,\mathrm{X} + (a_0+b_0) & \text{si } n = m \\ \\ a_n\,\mathrm{X}^n + \cdots + a_{m+1}\,\mathrm{X}^{m+1} + (a_m+b_m)\,\mathrm{X}^m + \cdots + (a_1+b_1)\,\mathrm{X} + (a_0+b_0) & \text{si } n > m \end{cases}$$ [4]

➢ *Grado de la suma*

Sean P y Q polinomios de grado n y m respectivamente. Entonces,

$$\mathrm{gr}(P+Q) \leqslant \mathrm{máx}\{\mathrm{gr}\,P, \mathrm{gr}\,Q\}$$

NOTA: la desigualdad estricta solo se puede dar si tienen el mismo grado y la suma de los coeficientes principales es cero.

Ejercicio 2

Calcule $P+Q$ y $\mathrm{gr}(P+Q)$ en cada uno de los casos siguientes

a) $P = 5\,\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 1$, $Q = 7\,\mathrm{X}^3 + 2\,\mathrm{X} - 3$

b) $P = 5\,\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 1$, $Q = -5\,\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - 3\,\mathrm{X} + 3$

c) $P = 5\,\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 1$, $Q = -5\,\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - 1$

Ejercicio 3

En cada caso dé un ejemplo de un par de polinomios P y Q tales que

a) $\mathrm{gr}(P+Q) = \mathrm{gr}\,P$

b) $\mathrm{gr}(P+Q) < \mathrm{gr}\,P + \mathrm{gr}\,Q$

[3] si alguno de ellos es el monomio nulo se lo puede escribir como $0\,\mathrm{X}^n$

[4] ¿qué pasa si $n < m$?

II — PRODUCTO

➢ *de monomios*

Dados los monomios $a\,\mathrm{X}^n$ y $b\,\mathrm{X}^m$ se define el producto como otro monomio cuyo grado es la suma de los grados de los monomios dados

$$(a\,\mathrm{X}^n)\,(b\,\mathrm{X}^m) = ab\,\mathrm{X}^{n+m}$$

➢ *de un monomio por un polinomio*

Dados el monomio $a\,\mathrm{X}^n$ y el polinomio $P = b_m\,\mathrm{X}^m + b_{m-1}\,\mathrm{X}^{m-1} + \cdots + ab_2\,\mathrm{X}^2 + b_1\,\mathrm{X} + b_0$ se define el producto por

$$(a\,\mathrm{X}^n)\,P = ab_m\,\mathrm{X}^{m+n} + ab_{n-1}\,\mathrm{X}^{m-1+n} + \cdots + ab_2\,\mathrm{X}^{2+n} + ab_1\,\mathrm{X}^{1+n} + ab_0\,\mathrm{X}^n$$

➢ *de polinomios*

Dados dos polinomios P y Q

$$P = a_n\,\mathrm{X}^n + a_{n-1}\,\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_2\,\mathrm{X}^2 + a_1\,\mathrm{X} + a_0$$

$$Q = b_m\,\mathrm{X}^m + b_{m-1}\,\mathrm{X}^{m-1} + \cdots + b_2\,\mathrm{X}^2 + b_1\,\mathrm{X} + b_0$$

el producto de ambos es otro polinomio –denotado PQ– definido por

$$\begin{aligned}
PQ &= (a_n\,\mathrm{X}^n)\,Q + \left(a_{n-1}\,\mathrm{X}^{n-1}\right)Q + \cdots + \left(a_2\,\mathrm{X}^2\right)Q + (a_1\,\mathrm{X})\,Q + a_0Q \\
&= a_nb_m\,\mathrm{X}^{m+n} + a_nb_{m-1}\,\mathrm{X}^{m-1+n} + \cdots + a_nb_2\,\mathrm{X}^{2+n} + a_nb_1\,\mathrm{X}^{1+n} + a_nb_0\,\mathrm{X}^n \\
&\quad + a_{n-1}b_m\,\mathrm{X}^{m+n-1} + a_{n-1}b_{m-1}\,\mathrm{X}^{m-1+n-1} + \cdots + a_{n-1}b_2\,\mathrm{X}^{2+n-1} \\
&\qquad + a_{n-1}b_1\,\mathrm{X}^{1+n-1} + a_{n-1}b_0\,\mathrm{X}^{n-1} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_2b_m\,\mathrm{X}^{m+2} + a_2b_{m-1}\,\mathrm{X}^{m-1+2} + \cdots + a_2b_2\,\mathrm{X}^{2+2} + a_2b_1\,\mathrm{X}^{1+2} + a_2b_0\,\mathrm{X}^2 \\
&\quad + a_1b_m\,\mathrm{X}^{m+1} + a_1b_{m-1}\,\mathrm{X}^{m-1+1} + \cdots + a_1b_2\,\mathrm{X}^{2+1} + a_1b_1\,\mathrm{X}^{1+1} + a_1b_0\,\mathrm{X} \\
&\quad + a_0b_m\,\mathrm{X}^m + a_0b_{m-1}\,\mathrm{X}^{m-1} + \cdots + a_0b_2\,\mathrm{X}^2 + a_0b_1\,\mathrm{X} + a_0b_0
\end{aligned} \tag{1}$$

➢ *Grado del producto*

Dados dos polinomios P y Q, el grado del polinomio PQ es

$$\mathrm{gr}(PQ) = \mathrm{gr}\,P + \mathrm{gr}\,Q$$

Ejemplo:

Sean

$$P = 3\,\mathrm{X}^5 - 2\,\mathrm{X}^4 + \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 4 \qquad , \qquad Q = -2\,\mathrm{X}^3 + 5\,\mathrm{X}^2 - 6\,\mathrm{X} + 2$$

respecto de la notación anterior tenemos

$$n = 5 \qquad , \qquad m = 3$$

$$a_5 = 3 \;,\; a_4 = -2 \;,\; a_3 = 1 \;,\; a_2 = 1 \;,\; a_1 = -1 \;,\; a_0 = 4$$

$$b_3 = -2 \;,\; b_2 = 5 \;,\; b_1 = -6 \;,\; b_0 = 2$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
PQ &= \left(3\,X^5\right) Q + \left(-2\,X^4\right) Q + X^3\,Q + X^2\,Q + (-\,X)\,Q + 4Q \\
&= 3(-2)\,X^{3+5} + 3.5\,X^{2+5} + 3(-6)\,X^{1+5} + 3.2\,X^5 \\
&\qquad + (-2)(-2)\,X^{3+4} + (-2)5\,X^{2+4} + (-2)(-6)\,X^{1+4} + (-2)2\,X^4 \\
&\qquad + (-2)\,X^{3+3} + 5\,X^{2+3} + (-6)\,X^{1+3} + 2\,X^3 \\
&\qquad + (-2)\,X^{3+2} + 5\,X^{2+2} + (-6)\,X^{1+2} + 2\,X^2 \\
&\qquad + (-1)(-2)\,X^{3+1} + (-1)5\,X^{2+1} + (-1)(-6)\,X^{1+1} + (-1)2\,X^1 \\
&\qquad + 4(-2)\,X^3 + 4.5\,X^2 + 4(-6)\,X^1 + 4.2 \\
&= -6\,X^8 + 15\,X^7 - 18\,X^6 + 6\,X^5 \\
&\qquad + 4\,X^7 - 10\,X^6 + 12\,X^5 - 4\,X^4 \\
&\qquad - 2\,X^6 + 5\,X^5 - 6\,X^4 + 2\,X^3 \\
&\qquad - 2\,X^5 + 5\,X^4 - 6\,X^3 + 2\,X^2 \\
&\qquad + 2\,X^4 - 5\,X^3 + 6\,X^2 - 2\,X \\
&\qquad - 8\,X^3 + 20\,X^2 - 24\,X + 8
\end{aligned}$$

es decir,

$$PQ = -6\,X^8 + 19\,X^7 - 30\,X^6 + 21\,X^5 - 3\,X^4 - 17\,X^3 + 28\,X^2 - 26\,X + 8$$

Veamos una manera un poco más breve de calcular los coeficientes del producto de dos polinomios. Si llamamos c_k a estos coeficientes podemos escribir, observando cuidadosamente (1),

$$PQ = c_{n+m}\,X^{n+m} + \cdots + c_2\,X^2 + c_1\,X + c_0$$

donde,

- $c_{n+m} = a_n b_m$
- $c_0 = a_0 b_0$
- $c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$
- $c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$
- c_k = suma de todos los productos $a_i b_j$ con $i + j = k$

es decir, (1) se puede escribir en forma más compacta usando el símbolo Σ [5] , de la siguiente forma,

$$PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k\,X^k$$

[5] es la letra griega 'sigma' mayúscula que –en este contexto– se lee *suma*

siendo $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ y $k = 0, \ldots, n+m$.

Entonces, volviendo al ejemplo anterior, tenemos que

$$\mathrm{gr}(PQ) = 5 + 3 = 8$$

con lo cual,

$$PQ = c_8 \mathrm{X}^8 + c_7 \mathrm{X}^7 + \cdots + c_1 \mathrm{X} + c_0$$

con

- $c_8 = a_5 b_3 = 3(-2) = -6$
- $c_7 = a_5 b_2 + a_4 b_3 = 3.5 + (-2)(-2) = 19$
- $c_6 = a_5 b_1 + a_4 b_2 + a_3 b_3 = 3(-6) + (-2)5 + 1(-2) = -30$
- $c_5 = a_5 b_0 + a_4 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 = 3.2 + (-2)(-6) + 1.5 + 1(-2) = 21$
- $c_4 = a_4 b_0 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 = (-2)2 + 1(-6) + 1.5 + (-1)(-2) = -3$
- $c_3 = a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3 = 1.2 + 1(-6) + (-1)5 + 4(-2) = -17$
- $c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 1.2 + (-1)(-6) + 4.5 = 28$
- $c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 = (-1)2 + 4(-6) = -26$
- $c_0 = a_0 b_0 = 4.2 = 8$

Ejercicio 4

Dados los polinomios

$$P = -\mathrm{X}^4 + 2\mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X}^2 + 3 \qquad \text{y} \qquad Q = 4\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} - 5$$

sea $R = PQ = c_n \mathrm{X}^n + \cdots + c_1 \mathrm{X} + c_0$.

a) halle el grado de R

b) calcule los coeficientes c_i $(i = 0, \ldots, n)$ y exhiba la expresión de R.

Especialización

Dado el polinomio

$$P = a_n \mathrm{X}^n + a_{n-1} \mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_2 \mathrm{X}^2 + a_1 \mathrm{X} + a_0$$

y el número c, llamamos ***especialización de** P **en** c* al número

$$P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0$$

Observación

La especialización de P en 0 produce que se anulen todos los monomios de grado mayor o igual que 1, con lo cual

$$P(0) = a_0$$

es decir, $P(0)$ = término independiente.

Ejemplos

Sea $P = 2\mathrm{X}^5 + 3\mathrm{X}^2 - 1$

1. $P(1) = 2.1^5 + 3.1^2 - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$
2. $P(-2) = 2.(-2)^5 + 3.(-2)^2 - 1 = -64 + 12 - 1 = -53$
3. $P(\frac{1}{3}) = 2.(\frac{1}{3})^5 + 3.(\frac{1}{3})^2 - 1 = \frac{2}{3^5} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{160}{243}$
4. $P(\pi) = 2.\pi^5 + 3.\pi^2 - 1$
5. $P(-b^2) = 2.(-b^2)^5 + 3.(-b^2)^2 - 1 = -2.b^{10} + 3b^4 - 1$ (para cualquier $b \in \mathbb{R}$)

Función polinómica

Dado un polinomio P, este procedimiento nos proporciona una manera de asignarle —a cada número real x— otro número real : $P(x)$ = especialización de P en x.

De esta forma, cada *polinomio P* determina una *función*

$$f_P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \underbrace{P(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{especialización} \\ \text{de } P \text{ en } x}}$$

Es decir, para cada $x \in \mathbb{R}$

$$f_P(x) = P(x)$$

Esta función se llama ***función polinómica asociada a** P*.

Comentario

Si bien en el lenguaje habitual se suele llamar *polinomio* a la *función polinómica*, como aquí estamos estudiando el tema haremos siempre la distinción entre ambos términos para enfatizar la considerable diferencia que tienen los conceptos. Resumiendo, es muy importante recordar que

$$P \neq f_P$$

puesto que son objetos matemáticos completamente diferentes.

Lo mismo ocurre con la *indeterminada* X y el *número* x: no se deben confundir ni usar uno en lugar del otro porque representan objetos distintos.

Ejemplos

En cada uno de los casos siguientes vamos a hallar la función polinómica f_P asociada a P

1. $P = 3\,\mathrm{X}^4 - 2\,\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + \frac{1}{3}\,\mathrm{X} - 7$

   $f_P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f_P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - 7$

2. $P = 20\,\mathrm{X}^{15} - 3\,\mathrm{X}^2 + 3$

   $f_P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f_P(x) = 20x^{15} - 3x^2 + 3$

3. $P = 5$

   $f_P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f_P(x) = 5$ (*función constante*)

   En general,

   $$P = 0 \quad \text{o} \quad \mathrm{gr}(P) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f_P: \text{ función constante}$$

4. $P = 2\,\mathrm{X} + 7$

   $f_P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f_P(x) = 2x + 7$ (*función lineal*)

   En general,

   $$\mathrm{gr}(P) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad f_P: \text{ función lineal}$$

5. $P = a\,\mathrm{X}^2 + b\,\mathrm{X} + c \quad (a \neq 0)$

   $f_P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f_P(x) = ax^2 + bx + c$ (*función cuadrática*)

   En general,

   $$\mathrm{gr}(P) = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad f_P: \text{ función cuadrática}$$

Propiedades de la Especialización

Sean P y Q polinomios,

➤ $(P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$

$P = a_n\,\mathrm{X}^n + \cdots + a_0$, $Q = b_n\,\mathrm{X}^n + \cdots + b_0$, entonces : $P+Q = (a_n+b_n)\,\mathrm{X}^n + \cdots + (a_0+b_0)$.
Luego,

$$\begin{aligned}(P+Q)(a) &= (a_n+b_n)a^n + \cdots + (a_1+b_1)a + (a_0+b_0)\\ &= (a_n a^n + \cdots + a_1.a + a_0) + (b_n a^n + \cdots + b_1.a + b_0)\\ &= P(a) + Q(a)\end{aligned}$$

➤ $(P.Q)(a) = P(a).Q(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$

se verifica de manera similar teniendo en cuenta la forma en que definimos el producto de polinomios.

Ejercicio 5

Sean P y Q polinomios, ¿es cierto que

a) $f_{P+Q} = f_P + f_Q$?

b) $f_{PQ} = f_P f_Q$?

Ejercicio 6

Escriba la función polinómica asociada a los siguientes polinomios

a) $P = 4\,\mathrm{X}^5 - 3\,\mathrm{X}^4 + 17\,\mathrm{X}$ b) $P = (\mathrm{X}+3)(\mathrm{X}^2+4)$

Ejercicio 7

Determine cuál de las siguientes expresiones corresponde a un polinomio y cuál a una función polinómica y luego escriba la expresión asociada

a) $\mathrm{X}^7 + 4\,\mathrm{X}^3 - \mathrm{X} + 2$ b) $4x^5 - 6x^4 + 3x - 10$

Algoritmo de División

En $\mathbb{R}$ para cada número $y \neq 0$ hay otro (único) llamado *inverso multiplicativo* –denotado y^{-1}– que satisface

$$yy^{-1} = 1$$

Esto nos permitió definir el *cociente* de números reales x e $y \neq 0$ como

$$\frac{x}{y} = x.y^{-1}$$

En $\mathbb{Z}$ esto ya no se cumple. Salvo los enteros 1 y -1 ningún otro entero no nulo tiene inverso multiplicativo. Si $\mathbb{Z}$ fuese el conjunto universal y tomáramos $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0, 1, -1$, la expresión

$$\frac{1}{n}$$

no tendría sentido. Fue necesario crear el conjunto $\mathbb{Q}$ para que lo tuviera.

El caso de los polinomios es, en este aspecto, muy similar a $\mathbb{Z}$. Claramente el elemento neutro es el polinomio $N = 1$,

- si $\operatorname{gr} P = 0$, $P = a$ con $a \neq 0$ tiene *su inverso multiplicativo*: $Q = a^{-1}$ pues

  $$PQ = aa^{-1} = 1 = N$$

  Podemos decir entonces que los polinomios de grado cero [6] tienen inverso multiplicativo. Pero

- si $\operatorname{gr} P \neq 0$ esto **no** ocurre. Llamemos $n = \operatorname{gr} P$; como no es cero, $n \geqslant 1$. Entonces

  $$P = a_n \mathrm{X}^n + \cdots + a_1 \mathrm{X} + a_0$$

  Si existiera un polinomio Q tal que $PQ = N = 1$, recordando las propiedades del grado de los polinomios resultaría que

  $$\operatorname{gr} P + \operatorname{gr} Q = \operatorname{gr} N = 0$$

  lo que llevaría al absurdo

  $$0 \leqslant \operatorname{gr} Q = -n < 0$$

Conclusión

Dejando de lado los muy especiales polinomios de grado cero, si Q es un polinomio, la expresión

$$Q^{-1} \qquad \text{NO TIENE SENTIDO}$$

en el universo de los polinomios y en consecuencia la expresión

$$\frac{P}{Q} \qquad \text{TAMPOCO TIENE SENTIDO}$$

[6] recordemos que ninguno de ellos puede ser cero

Comentario

A esta altura se pueden preguntar qué hacemos entonces con una expresión como, por ejemplo,

$$\frac{1}{x^2+1}$$

y la respuesta es que esta expresión **sí** tiene sentido pues x^2+1 no es un polinomio; es la imagen del número x por una función g que es cociente de funciones polinómicas.

Más precisamente, a partir de los polinomios $P = 1$ y $Q = \mathrm{X}^2 + 1$ construimos sus funciones polinómicas asociadas

$$f_P, f_Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad , \qquad f_P(x) = 1 \quad , \quad f_Q(x) = x^2 + 1$$

y a partir de ellas la función

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad , \qquad g(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Recién decíamos que con los polinomios sucede algo muy parecido a lo que pasa con los números enteros. Ambos tienen el problema de no poder definir *cocientes* de sus elementos porque la interpretación que se le puede dar a esa nueva expresión deja de ser uno de ellos.

Recordando que en $\mathbb{Z}$ contamos con el algoritmo de división que dice que dados $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, existen *únicos* $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que

$$a = b.q + r \qquad \text{y} \qquad 0 \leqslant r < |b|$$

nos podríamos preguntar si los polinomios también tendrán esa propiedad. La respuesta es que sí.

Teorema *(Algoritmo de División)*

Dados los polinomios P , Q ($Q \neq 0$), existen únicos polinomios C y R tales que

- ◇ $P = Q.C + R$
- ◇ $R = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{gr} R < \operatorname{gr} Q$

El polinomio C recibe el nombre de ***cociente*** y el polinomio R el de ***resto*** de la división de P por Q.

Vamos a ver con un ejemplo la *idea* de la demostración en el caso general. Sean

$$P = 6\,\mathrm{X}^4 - 2\,\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 - 1 \qquad \text{y} \qquad Q = 2\,\mathrm{X}^2 - 3\,\mathrm{X} + 2$$

Buscamos C y R tales que

$$\begin{array}{r|l} P & \underline{\quad Q \quad} \\ R\,/ & \quad C \end{array}$$

Notemos que una vez encontrado C , R será simplemente la diferencia: $R = P - Q.C$ y como pretendemos que o bien $R = 0$ o bien R tenga grado menor que Q, necesitamos encontrar C que haga bajar el grado de la diferencia. Para que eso ocurra es imprescindible que

$$\text{gr}(Q.C) = \text{gr}P \qquad \text{y} \qquad \text{coeficiente principal de } Q.C = \text{coeficiente principal de } P$$

En nuestro caso,

$$\text{gr}(P) = 4 \quad \text{y} \quad \text{gr}(Q) = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{gr}(C) = 4 - 2 = 2$$

$$\text{coef. ppal. de } P = 6 \quad \text{y} \quad \text{coef. ppal. de } Q = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{coef. ppal. de } C = \frac{6}{2} = 3$$

Esto nos dice que el monomio principal de C debe ser: $C_1 = 3\,X^2$

$$\begin{array}{r|l} 6X^4 - 2X^3 + X^2 - 1 & \underline{\ 2X^2 - 3X + 2\ } \\ -6X^4 + 9X^3 - 2X^2 & \ 3X^2 \\ 7X^3 - 5X^2 - 1\ / & \end{array}$$

Hasta ahora tenemos

$$P = Q.C_1 + R_1$$

pero el 'resto' obtenido —$R_1 = 7X^3 - 5X^2 - 1$— no verifica ninguna de las condiciones que debe cumplir.
Entonces, repetimos el procedimiento; esta vez con R_1 en lugar de P. En este caso, razonando como antes, el monomio principal del cociente debe ser: $C_2 = \frac{7}{2}X$

$$\begin{array}{r|l} 7X^3 - 5X^2 - 1 & \underline{\ 2X^2 - 3X + 2\ } \\ -7X^3 + \frac{21}{2}X^2 - 7X & \ \frac{7}{2}X \\ \frac{11}{2}X^2 - 7X - 1\ / & \end{array}$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} P &= Q.C_1 + R_1 \\ &= Q.C_1 + Q.C_2 + R_2 \\ &= Q.(C_1 + C_2) + R_2 \end{aligned}$$

pero de nuevo el 'resto' no satisface las condiciones; luego, volvemos a repetir el proceso ahora con R_2 y Q

$$\begin{array}{r|l} \frac{11}{2}X^2 - 7X - 1 & \underline{\ 2X^2 - 3X + 2\ } \\ -\frac{11}{2}X^2 + \frac{33}{4}X - \frac{11}{2} & \ \frac{11}{4} \\ \frac{5}{4}X - \frac{13}{2}\ / & \end{array}$$

Finalmente ahora sí obtuvimos un resto que cumple lo que debe y resulta

$$\begin{aligned} P &= Q.(C_1 + C_2) + R_2 \\ &= Q.(C_1 + C_2) + Q.C_3 + R_3 \\ &= Q.(C_1 + C_2 + C_3) + R_3 \end{aligned}$$

De donde,

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \qquad \text{y} \qquad R = R_3$$

Es decir,

$$6\,X^4 - 2\,X^3 + X^2 - 1 = \left(2\,X^2 - 3\,X + 2\right).\underbrace{\left(3\,X^2 + \tfrac{7}{2}\,X + \tfrac{11}{4}\right)}_{C} + \underbrace{\left(\tfrac{5}{4}\,X - \tfrac{13}{2}\right)}_{R}$$

Desde luego hay una manera más simple de disponer las cosas para hallar C y R

$$\begin{array}{r|l} 6\,X^4 - 2\,X^3 + X^2 - 1 \qquad & \; 2\,X^2 - 3\,X + 2 \\ \cline{2-2} -6\,X^4 + 9\,X^3 - 2\,X^2 \qquad & \; 3\,X^2 + \tfrac{7}{2}\,X + \tfrac{11}{4} \\ 7\,X^3 - 5\,X^2 - 1 \qquad & \\ -7\,X^3 + \tfrac{21}{2}\,X^2 - 7\,X \qquad & \\ \tfrac{11}{2}\,X^2 - 7\,X - 1 \qquad & \\ -\tfrac{11}{2}\,X^2 + \tfrac{33}{4}\,X - \tfrac{11}{2} \qquad & \\ \tfrac{5}{4}\,X - \tfrac{13}{2} \,/ \qquad & \end{array}$$

Lo hecho en este ejemplo se puede repetir en cualquier situación en la que $\mathrm{gr}(P) \geqslant \mathrm{gr}(Q)$. Solo nos queda entonces por analizar el caso: $\mathrm{gr}(P) < \mathrm{gr}(Q)$. En tal situación,

$$P = Q.0 + P$$

y ciertamente $C = 0$ y $R = P$ pues cumplen las condiciones pedidas.
Por ejemplo,

$$\begin{array}{l|l} 3\,X^2 + 5\,X - 2 \quad & \; X^5 - 2\,X^4 + 7 \\ \cline{2-2} 3\,X^2 + 5\,X - 2 \,/ \quad & \qquad 0 \end{array}$$

Ejercicio 8

Halle el cociente C y el resto R de la división de P por Q y escriba

$$P = C.Q + R$$

indicando la condición que hace que C y R sean únicos.

a) $P = -24\,X^2 + 15\,X - 7 \quad , \quad Q = 3\,X^2 - X - 1$

b) $P = 12\,X^5 + 11\,X^4 + 23\,X^3 - 24\,X^2 + 15\,X - 7 \quad , \quad Q = 3\,X^2 - X - 1$

c) $P = 3\,X^2 - X - 1 \quad , \quad Q = 12\,X^5 + 11\,X^4 + 23\,X^3 - 24\,X^2 + 15\,X - 7$

Ejercicio 9

Siendo

$$P = 4\,X^4 + 10\,X^3 - 4\,X^2 + 7\,X - 4 \quad , \quad Q = 2\,X^2 + 5\,X - 3 \quad , \quad R = 2\,X - 1$$

a) calcule $Q(\frac{1}{2})$ y $R(\frac{1}{2})$

b) calcule el cociente y el resto de la división de Q por R

c) calcule el cociente y el resto de la división de P por Q

d) para hallar el cociente y el resto de la división de P por R, ¿tiene *necesariamente* que hacer la división o puede responder a partir de los datos obtenidos en los incisos anteriores?

Ejercicio 10

Sea $P = (X^3 + 2\,X - 3)(X^2 + X + 5) + X^2 + X + 7$. Encuentre cociente y resto de la división de P por $Q = X^3 + 2\,X - 3$ y por $S = X^2 + X + 5$ *sin efectuar la división directamente*.

Ejercicio 11

¿Es cierto que $2\,X^2$ es el resto de dividir al polinomio $P = (2\,X^2 + 5\,X - 3)(X^5 + 1) + 2\,X^2$ por el polinomio

a) $Q = 2\,X^2 + 5\,X - 3$?

b) $S = X^5 + 1$?

Si la respuesta es afirmativa, exhiba el cociente; si es negativa halle cociente y resto sin hacer la división directamente.

Divisibilidad

Una consecuencia inmediata del algoritmo de división es la siguiente

Proposición

El resto de dividir P por Q es cero si y solo si existe un polinomio S tal que $P = Q.S$

Divisibilidad de polinomios

Dados dos polinomios P y Q, se dice que Q ***divide a*** P —y se nota $Q \mid P$— si el resto de la división de P por Q es cero.

Observación

De la proposición anterior y de esta definición se deduce que

$$Q \mid P \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{existe } S \text{ tal que } P = Q.S$$

Ejemplos

1. Si $P = \left(2\,X^2+3\right)(3\,X-4)$, entonces

$$\left(2\,X^2+3\right) \mid P \qquad \text{y} \qquad (3\,X-4) \mid P$$

2. Para $P = 6\,X^4-2\,X^3+X^2-1$ y $Q = 2\,X^2-3\,X+2$ obtuvimos que

$$P = Q.\left(3\,X^2+\tfrac{7}{2}\,X+\tfrac{11}{4}\right) + \left(\tfrac{5}{4}\,X-\tfrac{13}{2}\right)$$

Luego,

$$Q \nmid P$$

Aplicando simplemente la definición se pueden comprobar las siguientes

Propiedades

- $S \mid P$ y $T \mid S \implies T \mid P$
- $Q \mid P$ y $Q \mid T \implies Q \mid (T+P)$ y $Q \mid (P-T)$
- $Q \mid P \implies QT \mid P$ cualquiera sea T
- $Q \mid P \implies \mathrm{gr}(Q) \leqslant \mathrm{gr}P$
- $Q \mid P$ y $\mathrm{gr}(Q) = \mathrm{gr}(P) \implies P = a.Q$ para algún $a \in \mathbb{R}$

Ejercicio 12

En cada caso, determine si $Q \mid P$

a) $Q = 2\,X^2-3\,X+2 \quad , \quad P = 6\,X^4-2\,X^3+X^2-1$

b) $Q = -2\,X^2+3\,X-4 \quad , \quad P = -6\,X^5+9\,X^4-8\,X^3-6\,X^2+8\,X$

c) $Q = X^3+2\,X^2 \quad , \quad P = 5\,X^4-2\,X^2+X$

d) $Q = 5\,X^4-2\,X^2+X \quad , \quad P = X^3+2\,X^2$

Ejercicio 13

Compruebe la validez de las propiedades enunciadas en la página 15.

Teorema del Resto

Sea P un polinomio cualquiera y sea $Q = \mathrm{X} - a$. Si dividimos a P por Q

$$\begin{array}{l|l} P & \;\; Q \\ \cline{2-2} R\,/ & \;\; C \end{array}$$

como el grado de Q es 1, necesariamente debe ser

$$R = 0 \qquad \text{o} \qquad \mathrm{gr}(R) = 0$$

En cualquiera de las situaciones podemos afirmar que

$$R = r \qquad (r \in \mathbb{R})$$

El siguiente resultado nos dice cuál es la relación que hay entre la constante r , P y Q.

Teorema *(del Resto)*

El resto de dividir a un polinomio P por otro de la forma $\mathrm{X} - a$ es el polinomio constante

$$R = P(a)$$

DEMOSTRACIÓN:
Por el algoritmo de división –y la observación anterior– sabemos que existen (únicos) polinomios C y R tales que

$$P = C.(\mathrm{X} - a) + R \qquad \text{con} \quad R = r \quad (r \in \mathbb{R})$$

Especializando cada miembro en a,

$$P(a) = C(a).(a - a) + R(a) = C(a).0 + r = r$$

Luego,

$$R = P(a)$$

Ejemplos

1. Hallar el resto de dividir a $P = 2\,\mathrm{X}^2 - 3\,\mathrm{X} + 5$ por $\mathrm{X} - 4$

   Aplicando el teorema del resto,

   $$R = P(4) = 2.4^2 - 3.4 + 5 = 25$$

2. Hallar el resto de dividir a $P = -2\,\mathrm{X}^3 + \mathrm{X} + 1$ por $\mathrm{X} + 3$

   Observemos que $\mathrm{X} + 3 = \mathrm{X} - (-3)$. Luego, aplicando el teorema del resto —con $a = -3$— resulta

   $$R = P(-3) = -2(-3)^3 + (-3) + 1 = 52$$

3. ¿Es $P = \mathrm{X}^3 + 1$ divisible por $\mathrm{X} - 1$? ¿Y por $\mathrm{X} + 1$?

   Para que fuera divisible, debería ser nulo el resto de la división de P por $\mathrm{X} - 1$. Por el teorema del resto,

   $$R = P(1) = 1^3 + 1 = 2 \neq 0$$

   Luego, $\mathrm{X}^3 + 1$ *no* es divisible por $\mathrm{X} - 1$.

   Para el caso de $\mathrm{X} + 1$,

   $$R = P(-1) = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$$

   Luego, $\mathrm{X}^3 + 1$ *sí* es divisible por $\mathrm{X} + 1$.

Raíz

El número a se llama ***raíz*** del polinomio P si $P(a) = 0$.

Observaciones

1. Sea $P = a_n \mathrm{X}^n + \cdots + a_1 \mathrm{X} + a_0$, entonces

   $$0 \text{ es raíz de } P \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_0 = 0$$

2. Sea $P = 0$, entonces

   Todo número es una raíz de P

3. Sea $P \neq 0$ entonces, si

   (i) $\mathrm{gr}(P) = 0$: P no tiene raíces

   (ii) $\mathrm{gr}(P) = 1$: P tiene una única raíz

   (iii) $\mathrm{gr}(P) = 2$: P tiene 1, 2 o ninguna raíz [7]

Ejercicio 14

En cada uno de los casos siguientes determine si a es raíz de P

a) $a = 1$, $P = -\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} - 4$

b) $a = 1$, $P = -\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} - 2$

c) $a = 100$, $P = 53\mathrm{X}^7 + 3\mathrm{X}^6 + 5\mathrm{X}^3 + \mathrm{X} + 2$

   Sugerencia: piense en algún argumento que le evite hacer cuentas.

[7] si solo hablamos de raíces reales

Ejercicio 15

Halle un polinomio de grado 5 que no tenga a 1000 por raíz.

Ejercicio 16

Sin efectuar la división, halle los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $P = 2\,X^4 - a\,X^2 - X^3 + 1$ sea divisible por $X + 1$

Factorización

En muchas ocasiones es conveniente poder expresar un polinomio como producto de polinomios de grado menor. Nos vamos a ocupar ahora de ver cómo hacer esto; es decir, cómo *factorizar* un polinomio.

Proposición

Sea P un polinomio de grado n y sea a una raíz de P. Entonces, existe un polinomio S de grado $n-1$ tal que

$$P = (X - a)\,.S$$

DEMOSTRACIÓN:
Por ser a raíz de P, $P(a) = 0$. Esto implica, en virtud del teorema del resto, que $(X - a) \mid P$ y por consiguiente existe S tal que

$$P = (X - a)\,.S$$

Solo nos resta ver que $\mathrm{gr}(S) = n-1$. Pero eso es consecuencia de la igualdad anterior ya que

$$\mathrm{gr}(P) = \mathrm{gr}\,(X - a) + \mathrm{gr}(S) = 1 + \mathrm{gr}(S)$$

Aplicación

Supongamos que un polinomio P, de grado $n \geqslant 2$, tiene dos raíces distintas : a y b.
Por ser a raíz de P,

$$P = (X - a)\,.S_1 \qquad\qquad \text{con } \mathrm{gr}(S_1) = n-1$$

Ahora bien, b también es raíz de P por lo que $P(b) = 0$; luego,

$$(b-a).S_1(b) = 0$$

y siendo $b \neq a$, debe ser $S_1(b) = 0$; es decir,

$$b \text{ es raíz de } S_1$$

En consecuencia, podemos asegurar que existe un polinomio S_2 de grado $n-2$ tal que

$$S_1 = (X - b)\,.S_2$$

De modo que,

$$P = (X - a)\,(X - b)\,S_2$$

con $\mathrm{gr}(S_2) = n-2$.

Siguiendo este proceso —si supiéramos que $c \neq a, b$ también es raíz de P— resultaría

$$P = (\mathrm{X} - a)\,(\mathrm{X} - b)\,(\mathrm{X} - c)\,.S_3$$

con $\mathrm{gr}(S_3) = n - 3$.
Más precisamente, se puede probar que vale lo siguiente

Proposición

Si $r_1, r_2, \ldots, r_k$ son raíces de un polinomio P —todas distintas— entonces existe un polinomio S de grado $n - k$ tal que

$$P = (\mathrm{X} - r_1)\,(\mathrm{X} - r_2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(\mathrm{X} - r_k)\,.S$$

Corolario

Si P es un polinomio de grado n, entonces tiene ***a lo sumo*** n raíces distintas.

DEMOSTRACIÓN:
Si tuviera más de n, tendría por lo menos $n + 1$ raíces distintas: $r_1, r_2, \ldots, r_n, r_{n+1}$. Luego,

$$P = (\mathrm{X} - r_1)\,(\mathrm{X} - r_2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(\mathrm{X} - r_{n+1})\,.S$$

para algún polinomio S.
Si fuera $S \neq 0$: $\mathrm{gr}(P) = n + 1 + \mathrm{gr}(S) > n$. Esto es absurdo. Debería ser entonces $S = 0$, con lo cual $P = 0$; esto también es absurdo pues supusimos que $\mathrm{gr}(P) = n$.
Se concluye entonces que P no puede tener más de n raíces distintas.

Aplicación

Hallar todas las raíces del polinomio $P = 2\,\mathrm{X}^4 - 14\,\mathrm{X}^2 + 12\,\mathrm{X}$, sabiendo que 1 es raíz de P.

Notemos que como $a_0 = 0$, 0 también es raíz de P. Entonces,

$$P = \mathrm{X}\left(2\,\mathrm{X}^3 - 14\,\mathrm{X} + 12\right)$$

Resulta que 1 debe ser raíz del segundo factor. Dividimos entonces $2\,\mathrm{X}^3 - 14\,\mathrm{X} + 12$ por $\mathrm{X} - 1$ y obtenemos

$$2\,\mathrm{X}^3 - 14\,\mathrm{X} + 12 = (\mathrm{X} - 1)\left(2\,\mathrm{X}^2 + 2\,\mathrm{X} - 12\right)$$

El resto de las raíces de P deben serlo del segundo factor y éstas las podemos hallar ya que tiene grado 2. Resultan ser: -3 y 2. Por lo tanto,

$$2\,\mathrm{X}^2 + 2\,\mathrm{X} - 12 = 2(\mathrm{X} + 3)(\mathrm{X} - 2)$$

Hemos encontrado entonces todas las raíces de P y lo podemos factorizar

$$P = 2\,\mathrm{X}\,(\mathrm{X} - 1)\,(\mathrm{X} + 3)\,(\mathrm{X} - 2)$$

Ejercicio 17

Se sabe que los polinomios $\mathrm{X}^2 + 4$ y $\mathrm{X} + 1$ dividen a $P = 2\,\mathrm{X}^5 - \mathrm{X}^4 + 3\,\mathrm{X}^3 - 6\,\mathrm{X}^2 - 20\,\mathrm{X} - 8$. Factorice a P y averigüe cuántas y cuáles son sus raíces reales.

Ejercicio 18

Sean $P = \mathrm{X}$, $Q = \mathrm{X}^2$ y $R = 2\,\mathrm{X}^2$.

a) ¿Es cierto que $P \mid R$ y que $Q \mid R$?

b) ¿Es cierto que $PQ \mid R$?

¿A qué conclusión conduce este ejemplo?

Ejercicio 19

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Escriba al polinomio $P = (\mathrm{X} - (a + bi))(\mathrm{X} - (a - bi))$ como suma de monomios.

a) ¿tienen coeficientes reales los polinomios $\mathrm{X} - (a + bi)$ y $\mathrm{X} - (a - bi)$?

b) ¿tiene coeficientes reales el polinomio P?

c) ¿le sugiere este ejercicio algún resultado interesante?

Ejercicio 20

a) Encuentre todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^4 + 16 = 0$.

b) ¿Tiene raíces reales el polinomio $\mathrm{X}^4 + 16$?

c) Halle todas las raíces de $\mathrm{X}^4 + 16$

NOTA: si está pensando hacer cuentas es que hay algo que no quedó muy claro

d) Encuentre dos polinomios de grado 2 $-S$ y $T-$ tales que $\mathrm{X}^4 + 16 = S\,T$.

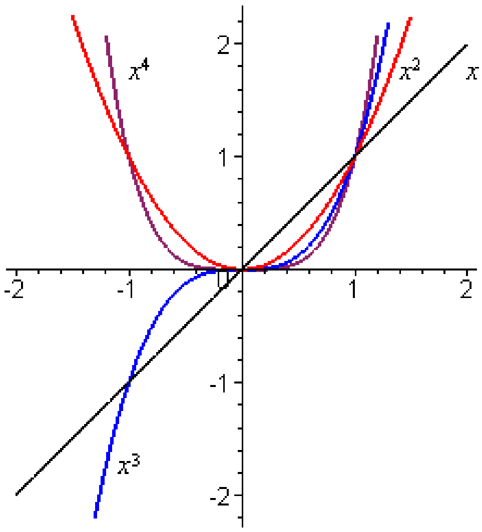
Multiplicidad

Consideremos los polinomios de la forma : X , X^2 , ... , X^k , ...
Si pensamos en las funciones polinómicas asociadas f_1 , f_2 , ..., f_k , ... dadas por :

$$f_1(x) = x\ ,\ f_2(x) = x^2\ ,\ \ldots\ ,\ f_k(x) = x^k\ ,\ \ldots$$

cuando $0 \leqslant x \leqslant 1$ se tiene $0 \leqslant x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$; para $x \in [0, 1]$ al aumentar el exponente disminuye el valor de la función. En $x \geqslant 1$, la situación es la inversa.

Cerca de 0, al aumentar el valor de k las curvas están cada vez más cerca del eje x. En cierta forma podemos decir que —en la función $f_k(x) = x^k$— el exponente k mide su cercanía al eje x alrededor del origen. Esto se ilustra en la siguiente figura



Pensemos ahora en : $X-1$, $(X-1)^2$, ... , $(X-1)^k$ y en sus respectivas funciones asociadas g_1 , g_2 , ..., g_k dadas por: $g_1(x) = x-1$, $g_2(x) = (x-1)^2$, ..., $g_k(x) = (x-1)^k$. A estas funciones les va a pasar lo mismo pero alrededor de 1. Y en general, dado el polinomio $(X-a)^k$ y su función asociada $h_k(x) = (x-a)^k$, el exponente k mide la proximidad del gráfico de h_k al eje x alrededor de a.

¿Qué pasará con $g(x) = x(x-4)^3$, por ejemplo? Alrededor de 0 se comportará de manera similar a como lo hace x y alrededor de 4 lo hará aproximadamente como lo hace $(x-4)^3$.

Consideremos ahora $h(x) = x^3(x-1)^4(x+2)^7$. Los distintos exponentes indican cómo se comporta la función cerca del punto $a = 0, 1, -2$ respectivamente.

Le vamos a dar un nombre a estos exponentes que brindan información sobre el comportamiento de la función cerca de la raíz correspondiente: *multiplicidad*. Por ejemplo, si

$$P = (X-1)^2\,(X+3)^5\,(X+7)$$

1 es raíz con multiplicidad : 2
-3 es raíz con multiplicidad : 5
-7 es raíz con multiplicidad : 1 (*raíz simple*)

En el caso de 1,

$$X-1\ ,\ (X-1)^2 \mid P \qquad \text{pero} \qquad (X-1)^3 \nmid P$$

Esto sugiere pensar a la multiplicidad como el mayor k tal que $(X-1)^k \mid P$. Entonces podemos dar la siguiente definición

Multiplicidad de una raíz

Se dice que a es raíz de P con ***multiplicidad*** k si

$$(X-1)^k \mid P \qquad \text{y} \qquad (X-1)^{k+1} \nmid P$$

Proposición

Dado el polinomio P tal que sus únicas raíces son $r_1, \ldots, r_k$ de multiplicidades $n_1, \ldots, n_k$, respectivamente, existe un polinomio S sin raíces tal que

$$P = (\mathrm{X} - r_1)^{n_1} . (\mathrm{X} - r_2)^{n_2} \ldots (\mathrm{X} - r_k)^{n_k} .S$$

Ejercicio 21

Calcule las raíces de P y sus respectivias multiplicidades

a) $P = 2\,\mathrm{X}^7 + 9\,\mathrm{X}^6 + \mathrm{X}^5 - 21\,\mathrm{X}^4 + 9\,\mathrm{X}^3$; se sabe que -3 es raíz múltiple.

b) $P = \mathrm{X}^2 - 10\,\mathrm{X} + 9$

c) $P = 3\,\mathrm{X}^4 - 30\,\mathrm{X}^2 + 27$

d) $P = 2\,\mathrm{X}^6 - 15\,\mathrm{X}^4 + 24\,\mathrm{X}^2 + 16$; se sabe que $(\mathrm{X}^2 - 4) \mid P$

e) $P = 4\,\mathrm{X}^6 + 8\,\mathrm{X}^5 + 13\,\mathrm{X}^4 + 13\,\mathrm{X}^3 + 10\,\mathrm{X}^2 + 5\,\mathrm{X} + 1$; se sabe que $\left(\mathrm{X}^2 + 1\right) \mid P$.

f) $P = 2\,\mathrm{X}^2 + 1$; ¿se puede escribir a P como producto de polinomios de grado 1 de coeficientes reales?

Polinomio derivado

Dado un polinomio $P = a_n\,\mathrm{X}^n + a_{n-1}\,\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_2\,\mathrm{X}^2 + a_1\,\mathrm{X} + a_0$ de grado $n \geqslant 1$, llamamos ***polinomio derivado*** al polinomio

$$P' = na_n\,\mathrm{X}^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\,\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + 2a_2\,\mathrm{X} + a_1$$

Observaciones

1. Si pensamos en la función polinómica asociada,

$$f_P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

   su derivada es

$$f_P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$

   i.e., $f_P'(x)$ es la función polinómica asociada a P'.

2. Se puede probar que el polinomio derivado de un producto de polinomios $P.Q$ responde a la regla de derivación del producto,

$$(P.Q)' = P'.Q + P.Q'$$

Proposición

Sea a una raíz del polinomio P de grado $n \in \mathbb{N}$.
Entonces es raíz de P' si y solo si es raíz múltiple de P.
DEMOSTRACIÓN:

- $\Longrightarrow$

Como a es raíz de P sabemos que existe un polinomio S tal que

$$P = (\mathrm{X} - a) .S$$

luego,

$$P' = S + (\mathrm{X} - a) S'$$

especializando en a

$$P'(a) = S(a)$$

pero estamos suponiendo que a es también raíz de P', por lo tanto,

$$S(a) = 0$$

y en consecuencia, existe un polinomio T tal que

$$S = (\mathrm{X} - a) .T$$

y entonces,

$$P = (\mathrm{X} - a)^2 .T$$

lo que nos dice que a es — por lo menos — una raíz doble de P, como queríamos.

- $\Longleftarrow$

Si a es raíz múltiple de P significa que su multiplicidad, llamémosla k, es mayor o igual que 2; i.e., $k \geqslant 2$; y además sabemos que

$$(\mathrm{X} - a)^k \mid P$$

por lo tanto, existe un polinomio S tal que

$$P = (\mathrm{X} - a)^k .S$$

Teniendo en cuenta la observación anterior,

$$P' = \left[(\mathrm{X} - a)^k\right]' .S + (\mathrm{X} - a)^k .S'$$

es decir,

$$P' = k (\mathrm{X} - a)^{k-1} .S + (\mathrm{X} - a)^k .S' \underset{\substack{\uparrow \\ k \geqslant 2}}{=} (\mathrm{X} - a) \left[k (\mathrm{X} - a)^{k-2} .S + (\mathrm{X} - a)^{k-1} .S'\right]$$

Se deduce que

$$(\mathrm{X} - a) \mid P'$$

con lo cual, a es raíz de P'.

Observación

En la proposición anterior, para probar la equivalencia teníamos como hipótesis general que a era raíz de P. Si sacamos esa hipótesis, la equivalencia ya no es tal.
Planteemos el siguiente ejemplo,

$$P = X^2 + X + 1$$

Su derivado es

$$P' = 2X + 1$$

que tiene a $-\frac{1}{2}$ por raíz. Sin embargo,

$$P(-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} \neq 0$$

i.e., $-\frac{1}{2}$ no es, ni siquiera, raíz *simple* de P.
Es decir, para asegurar que una raíz de P' es raíz *múltiple* de P tiene que haber sido raíz de P desde un comienzo.

Ejercicio 22

Se sabe que 4 es raíz del polinomio P. ¿Se puede asegurar que

a) $(X-4) \mid P$?

b) $(X-4)^2 \mid P$?

c) $(X-4)^2 \mid P$ si se además se sabe que también es raíz de P'?

Ejercicio 23

Se sabe que 4 es raíz del polinomio P'. ¿Se puede asegurar que

a) $(X-4) \mid P$?

b) $(X-4)^2 \mid P$?

c) $(X-4)^2 \mid P$ si se además se sabe que también es raíz de P?

Ejercicio 24

¿Son equivalentes las afirmaciones: "a es raíz múltiple de P" y "a es raíz de P'"? ¿Saber que vale alguna de ellas es *suficiente* para asegurar que vale la otra? En caso de ser así , indique cuál es la condición suficiente.

Ejercicio 25

El número -2 es raíz con multiplicidad 3 del polinomio P. Calcule $P''(a)$. ¿Qué puede decir del número $P'''(a)$? *Sugerencia*: recuerde cómo se escribe un polinomio si a es raíz con multiplicidad 3

Anillos de Polinomios: $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{C}[X]$

Hasta aquí hemos estado trabajando, aunque no siempre lo explicitamos, con polinomios con coeficientes reales. Llamamos

$$\mathbb{R}[X] = \text{conjunto de polinomios con coeficientes reales}$$

Pero podríamos haber hecho lo mismo con otros conjuntos de números, por ejemplo $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}$. Así, quedan definidos

$$\mathbb{Z}[X] = \text{conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros}$$
$$\mathbb{Q}[X] = \text{conjunto de todos los de polinomios con coeficientes racionales}$$
$$\mathbb{C}[X] = \text{conjunto de todos los de polinomios con coeficientes complejos}$$

Es claro que

$$\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$$

Comentario

Estos conjuntos, igual que $\mathbb{Z}$, se llaman ***anillos*** porque tienen dos operaciones, suma y producto, que son asociativas y conmutativas, satisfacen la ditributividad del producto respecto de la suma, tienen elementos neutros — $P = 0$ para la suma y $P = 1$ para el producto — y además, la suma tiene una propiedad adicional

todo polinomio P tiene un *inverso aditivo*, $-P$, que satisface $P + (-P) = 0$

cosa que no se repite para el producto [a].

Todo lo hecho hasta ahora, pensado esencialmente para $\mathbb{R}[X]$, vale también para $\mathbb{Q}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$, salvo lo relativo a las raíces de los polinomios de grado 2 que si trabajamos en $\mathbb{Q}[X]$, podrían no existir porque el número

$$\sqrt{p^2 - 4q} \qquad (p^2 - 4q \geqslant 0)$$

que seguro es *real*, y por lo tanto *complejo*, podría no ser *racional*.

[a] cuando el producto también tiene la propiedad del inverso para los elementos no nulos, el conjunto se llama ***cuerpo***. Ejemplos de cuerpos son: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. En cambio $\mathbb{Z}$ solo es un anillo.

Ejercicio 26

Dados los polinomios

$$P = (X+1)(2X+3)(X^2+1) \quad , \quad Q = X^2 + iX + 2 \quad , \quad R = (X^2+1)(X^2-2)$$

Analice si existe un polinomio

a) $S \in \mathbb{R}[X]$ que divida a los tres

b) $T \in \mathbb{C}[X]$ que divida a los tres.

Ejercicio 27

El polinomio

$$P = 3(\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}-\sqrt{3})(\mathrm{X}+\sqrt{3})(\mathrm{X}-i)(\mathrm{X}+i)\left(\mathrm{X}-\tfrac{4}{3}\right)$$

tiene coeficientes enteros y está factorizado como producto de polinomios en $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$; no todos los factores están en los demás anillos.
Escriba a P como producto de polinomios en

a) $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ b) $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ c) $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$

Raíces racionales de un polinomio en $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$

Vamos a ver ahora un resultado que nos permite detectar si un polinomio —con coeficientes enteros— tiene raíces racionales.

Teorema *(Gauss)*

Sea $P \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ de grado n,

$$P = a_n \mathrm{X}^n + \cdots + a_1 \mathrm{X} + a_0 \qquad (\text{con } a_0 \neq 0)$$

Supongamos que P admite una raíz racional $\dfrac{p}{q}$ [8] . Entonces,

$$p \mid a_0 \quad \text{y} \quad q \mid a_n$$ [9]

DEMOSTRACIÓN:
Por ser $\dfrac{p}{q}$ raíz de P, $P(\frac{p}{q}) = 0$; luego,

$$a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} \cdots + a_2\frac{p^2}{q^2} + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$$

multiplicamos miembro a miembro por el número natural q^n,

$$a_n p^n + a_{n-1}qp^{n-1} + \cdots + a_2q^{n-2}p^2 + a_1q^{n-1}p + a_0q^n = 0$$

despejamos ahora a_0q^n y a_np^n,

$$\begin{aligned} a_0q^n &= -a_np^n - a_{n-1}qp^{n-1} - \cdots - a_2q^{n-2}p^2 - a_1q^{n-1}p \\ &= p\left[-a_np^{n-1} - a_{n-1}qp^{n-2} - \cdots - a_2q^{n-2}p - a_1q^{n-1}\right] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a_np^n &= -a_{n-1}qp^{n-1} - \cdots - a_2q^{n-2}p^2 - a_1q^{n-1}p - a_0q^n \\ &= q\left[-a_{n-1}p^{n-1} - \cdots - a_2q^{n-3}p^2 - a_1q^{n-2}p - a_0q^{n-1}\right] \end{aligned}$$

[8] a $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ los podemos suponer coprimos
[9] dicho de otro modo, a_0 es múltiplo de p y a_n lo es de q

Como en ambos casos los corchetes representan números enteros, esto nos dice que

$$p \mid a_0 q^n \qquad \text{y} \qquad q \mid a_n p^n$$

de aquí, en general, no podríamos concluir que *necesariamente* $q \mid a_0$ y $p \mid a_n$; pero siendo p y q coprimos, sí podemos hacerlo; con lo cual queda concluida la demostración del teorema.

Ejercicio 28

En cada caso compruebe que se cumplen las hipótesis y aplique el Teorema de Gauss para hallar todos los números racionales que pueden ser raíces del polinomio dado

a) $X^3 + 2X - 1$

b) $X^7 + 18X^3 + 4X + 4$

c) $5X^3 - aX^2 - 7X + 8$

d) $4X^6 + 3X^4 - 16X^5 + 6X^3 + 162X + 81$

Ejercicio 29

Halle todas las raíces del polinomio $P = 6X^3 - 8X^2 + 9X - 12$.

Ejercicio 30

Sin hallarlas, ¿qué se puede decir sobre las raíces de los polinomios

$$P = \frac{1}{5}X^{10} - 3X^3 + \frac{1}{3}X^2 + 2 \qquad \text{y} \qquad Q = 3X^{10} - 45X^3 + 5X^2 + 30 \quad ?$$

Ejercicio 31

Sea $P = \frac{3}{4}X^3 + \frac{7}{8}X^2 - \frac{7}{24}X - \frac{1}{6}$. Como $P \notin \mathbb{Z}[X]$ está claro que no podemos aplicar el Teorema de Gauss para tratar de encontrar sus raíces racionales, supuesto que las tenga.
Piense en un procedimiento –que incluya la aplicación del Teorema de Gauss– y que le permita calcular las raíces racionales de P.

Proposición

Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ tal que $z = a + bi$ es raíz. Entonces, $\bar{z} = a - bi$ también es raíz de P.

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos que

$$P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$$

con los $a_i \in \mathbb{R}$. Y como z es raíz de P,

$$P(z) = 0$$

i.e.,

$$a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

por lo tanto,

$$\overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} = 0$$

usando propiedades de la conjugación, y recordando que los coeficientes son reales,

$$a_n \bar{z}^n + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0$$

i.e.,

$$P(\bar{z}) = 0$$

Hemos probado entonces que $\bar{z}$ es raíz de P.

Ejercicio 32

El polinomio P, cuyos coeficientes son reales, tiene al número $1 - 2i$ como raíz. ¿Puede encontrar, solo con esta información, dos polinomios *distintos* que dividan a P?
¿Y un polinomio Q de grado 2 que divida a P?
Y si solo se supiera que $P \in \mathbb{C}[X]$, ¿daría las mismas respuestas?

Polinomios Reducibles e Irreducibles

Para no tener que repetir tres veces lo mismo para cada uno de los anillos de polinomios, vamos a indicar con $\mathbb{K}$ a cualquiera de los cuerpos: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.
Decimos entonces que un polinomio $P \in \mathbb{K}[X]$ es ***reducible en*** $\mathbb{K}[X]$ si existen dos polinomios Q , $R \in \mathbb{K}[X]$ —de grado mayor o igual que 1— tales que

$$P = Q.R$$

Si P no se puede escribir de esta manera decimos que es ***irreducible en*** $\mathbb{K}[X]$.

Observaciones

1. Todo polinomio de grado 1 es ***irreducible*** en cualquiera de los anillos.
2. Para que P sea reducible debe ser gr $P \geqslant 2$.
3. Los polinomios irreducibles son a los anillos de polinomios lo que los números primos son a los enteros.
4. Si un polinomio $P \in \mathbb{K}[X]$ tiene una raíz $a \in \mathbb{K}$, es reducible a menos que tenga grado 1. Pero hay polinomios reducibles en $\mathbb{K}[X]$ que no tienen raíces en $\mathbb{K}$. Por ejemplo,

$$P = \left(X^2 - 2\right)\left(X^2 - 3\right)$$

es reducible en $\mathbb{Q}[X]$; sin embargo, no tiene raíces racionales.

Ejemplos

1. $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ es reducible en los tres anillos
2. $X^2 - 2$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ [10] pero como
$$X^2 - 2 = \left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right)$$
es reducible en $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$
3. $X^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ y $\mathbb{R}[X]$ pero como
$$X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$$
es reducible en $\mathbb{C}$.

Ejercicio 33

Encuentre las raíces de los siguientes polinomios y factorícelos en $\mathbb{Q}[X]$, en $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$

a) $X^2 - a^2$
b) $X^2 + a^2$
c) $X^3 - a^3$
d) $X^3 + a^3$
e) $X^4 - 1$
f) $X^4 - a^4$
g) $X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 3$
h) $X^5 - 3X^4 + 4X^2$
i) $X^4 + X^2 - 12$

NOTA: a indica un número real positivo.

Ejercicio 34

Halle los factores irreducibles en cada uno de los anillos de polinomios de $P = 6X^3 - 8X^2 + 9X + 12$

Ejercicio 35

Se sabe que las raíces de la ecuación $w^2 = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ son: $3 - i$ y $2 + 5i$. ¿Le alcanza esta información para hallar las raíces de la ecuación
$$(z - 1 + 4i)^2 = a + bi\ ?$$
Utilice los resultados que sugiere la primera parte de este ejercicio para hallar las raíces del polinomio $P = X^2 - iX + 1 - i$.

Teorema *(Fundamental del Algebra)*

Todo polinomio de grado n en $\mathbb{C}[X]$ tiene exactamente n raíces complejas (contadas con multiplicidad) [11].

---

[10] ¿por qué?

[11] significa que, si por ejemplo es doble, cuenta como *dos* raíces

Fracciones Algebraicas — Fracciones Simples

Se llama así a los cocientes de funciones polinómicas. Es decir, g es una ***fracción algebraica*** si existen dos polinomios P y Q ($Q \neq 0$) tales que

$$g(x) = \frac{f_P(x)}{f_Q(x)}$$

Entre ellas, hay un grupo especial que resulta de mucha utilidad en el cálculo de primitivas [12], las ***fracciones simples***. Teniendo en cuenta este hecho, nos limitaremos al caso de polinomios de coeficientes reales.
En esta situación, las fracciones simples se pueden describir como las fracciones algebraicas construidas a partir de un par de polinomios P y Q que satisfacen

- ❑ P constante y $Q = (\mathrm{X} - a)^k$ $(k \in \mathbb{N})$ o bien,
- ❑ $\mathrm{gr}\, P \leqslant 1$ y $Q = \left(\mathrm{X}^2 + p\,\mathrm{X} + q\right)^k$ con $k \in \mathbb{N}$ y $\mathrm{X}^2 + p\,\mathrm{X} + q$ irreducible en $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$

Ejemplos

$$\frac{1}{x-2}\ ,\quad \frac{-3}{(x+4)^5}\ ,\quad \frac{1}{x^2+1}\ ,\quad \frac{-x+3}{(x^2+x+1)^4}$$

Se puede probar que es válida la siguiente

Ejercicio 36

Determine cuáles de las siguientes fracciones algebraicas son fracciones simples

a) $\dfrac{x^2-2x}{x^3+2}$ b) $\dfrac{x-3}{x^2-2x+1}$ c) $\dfrac{x-3}{x^2+x+1}$

d) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ e) $\dfrac{-2}{(x+3)^2}$ f) $\dfrac{x}{(x+3)^5}$

Proposición *(Descomposición en fracciones simples)*

Sean $P, Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, de grados n y m, respectivamente, con $n < m$. Supongamos que Q se factoriza en la forma

$$Q = (\mathrm{X} - a_1)^{m_1} (\mathrm{X} - a_2)^{m_2} \ldots (\mathrm{X} - a_k)^{m_k} Q_1^{r_1} \ldots Q_s^{r_\ell}$$

(i) $a_1, \ldots, a_k$ son todas las raíces reales de Q y cada m_i es su respectiva multiplicidad

(ii) cada Q_j es un polinomio de grado 2 sin raíces reales (y en consecuencia irreducible en $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$) y r_j su respectiva multiplicidad.

[12] y también en el cálculo de la transformada inversa de Laplace

Entonces la función racional

$$g(x) = \frac{f_P(x)}{f_Q(x)}$$

se puede expresar de manera única en la forma

$$g(x) = T_1(x) + \cdots + T_u(x) + S_1(x) + \cdots + S_v(x)$$

donde, los T_i y S_j representan fracciones simples del tipo

$$T_i(x) = \frac{A_i}{(x-a)^r} \qquad , \qquad S_j = \frac{B_j x + C_j}{f_R(x)^t}$$

representando a a una de las raíces reales de Q y f_R la función polinómica asociada a uno de los polinomios irreducibles de grado 2 que dividen a Q.

Veamos un ejemplo para entender esto que, en abstracto, parece muy complicado. En la práctica, se verá que es simple de plantear pero es cierto que puede ser largo y tedioso para resolver.

Ejemplos

1. Un ejemplo simple de resolver. Vamos a tomar Q con todas sus raíces reales. Consideremos la fracción

$$\frac{x^2 - x + 3}{(x-1)(x+2)^2}$$

para poder hallar las fracciones simples en que se descompone planteamos lo siguiente

$$\frac{x^2 - x + 3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

i.e., cada raíz real de Q da origen a tantas fracciones simples como su multiplicidad.

Para hallar los valores de A, B, C sumamos las fracciones y nos queda

$$\frac{x^2 - x + 3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}$$

Siendo iguales los denominadores, los numeradores también deben serlo; por lo tanto nos queda

$$x^2 - x + 3 = A(x^2+4x+4) + B(x^2+x-2) + Cx - C = (A+B)x^2 + (4A+B+C)x + (4A-2B-C)$$

y para que estos polinomios sean iguales, deben serlo sus coeficientes; es decir,

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 4A + B + C = -1 \\ 4A - 2B - C = 3 \end{cases}$$

De la primera ecuación se deduce que

$$B = 1 - A$$

Reemplazando en la segunda,

$$4A + 1 - A + C = -1$$

es decir,

$$C = -3A - 2$$

Reemplazando en la última,

$$4A - 2(1 - A) + 3A + 2 = 3$$

o sea,

$$A = \frac{1}{3}$$

con lo cual,

$$B = \frac{2}{3} \qquad , \qquad C = -3$$

y encontramos así la descomposición de $\frac{x^2 - x + 3}{(x-1)(x+2)^2}$ en fracciones simples

$$\frac{x^2 - x + 3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1/3}{x-1} + \frac{2/3}{x+2} + \frac{-3}{(x+2)^2}$$

2. Dejamos planteado el caso en que el polinomio Q tiene raíces complejas no reales. Pongamos como ejemplo

$$\frac{3x^4 - 2x^3 + x - 2}{x^3(x+1)(x^2+1)^2}$$

Aquí tendremos

(i) 3 fracciones asociadas a x^3 (porque $x = 0$ es raíz con multiplicidad 3)

(ii) 1 fracción asociada a $x + 1$ (porque $x = -1$ es raíz simple)

(iii) 2 fracciones asociadas a $x^2 + 1$ (pues su exponente, en la factorización de Q, es 2)

Esta fracción se descompondrá en 6 fracciones simples [13]. Para encontrar la descomposición deberíamos buscar el valor de los coeficientes que hacen que

$$\frac{3x^4 - 2x^3 + x - 2}{x^3(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}$$

lo que si bien puede ser largo y tedioso, no es para nada complicado.

[13] podrían ser menos si algún coeficiente nos diera 0

Comentario

Si $\operatorname{gr} P \geqslant \operatorname{gr} Q$ usamos primero el algoritmo de división

$$P = CQ + R$$

con $R = 0$ o bien $\operatorname{gr} R < \operatorname{gr} Q$.
Luego,

$$f_P(x) = f_C(x) f_Q(x) + f_R(x)$$

y entonces $g(x) = \dfrac{f_P(x)}{f_Q(x)}$ se escribe en la forma

$$g(x) = \frac{f_C(x) f_Q(x) + f_R(x)}{f_Q(x)} = f_C(x) + \frac{f_R(x)}{f_Q(x)}$$

es decir, g es suma de una función polinómica más una fracción algebraica (salvo que $R = 0$) donde el denominador tiene mayor grado que el numerador.

PROBLEMAS

1. ¿Qué hipótesis hay que agregar para poder asegurar que si a es raíz de P'' entonces es raíz con multiplicidad mayor o igual que 3 de P?

2. Halle la descomposición en factores irreducibles del polinomio
$$P = 6\,\mathrm{X}^7 - 3\,\mathrm{X}^6 - 30\,\mathrm{X}^5 + 15\,\mathrm{X}^4 + 2\,\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 - 10\,\mathrm{X} + 5$$
en $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ y $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, sabiendo que $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$ son raíces de P.

3. Descomponga en fracciones simples a la fracción algebraica
$$f(x) = \frac{5x^2 + x + 1}{4x^3 + x}$$

4. Se sabe que -4 es raíz con multiplicidad 2 del polinomio P y que 4 no es una de sus raíces. En cada caso determine si la afirmación es verdadera o falsa
   a) el resto de la división de P por $\mathrm{X} - 4$ es cero
   b) el resto de la división de P por $\mathrm{X} + 4$ es cero
   c) el resto de la división de P por $(\mathrm{X} + 4)^2$ es cero
   d) si C es el cociente de esta última división, $C(-4) \neq 0$.

5. Factorice al polinomio $P = \mathrm{X}^5 - \frac{1}{2}\,\mathrm{X}^4 + \mathrm{X}^3 - \frac{1}{2}\,\mathrm{X}^2$ en todos los anillos de polinomios.

6. Construya polinomios $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ y $Q \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ –del menor grado posible– que tengan a los números -1 , $1 - i$, $3i$ por raíces.

7. Se sabe que $-3i$ es raíz de $P = \mathrm{X}^4 - 2\,\mathrm{X}^3 + 11\,\mathrm{X}^2 - 18\,\mathrm{X} + 18$. Factorícelo en $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ y en $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.

8. Sea $P = \mathrm{X}^5 + \mathrm{X}^4 - \mathrm{X} + 2$. Analice si la siguiente afirmación
$$P = (\mathrm{X}^2 - \mathrm{X})(\mathrm{X}^3 + 2\,\mathrm{X}^2 + 2\,\mathrm{X}) + 2\,\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 2$$
es verdadera.
De serlo, averigüe si es cierto que $2\,\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 2$ es el resto de la división de P por $Q = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X}$. En caso de no ser ése el resto, ¿puede calcularlo sin hacer muchas cuentas?

9. Encuentre un polinomio P que cumpla las siguientes condiciones simultáneamente
   (i) 0 es raíz de P
   (ii) 0 **no** es raíz de P'
   (iii) 0 es raíz de P''.

10. Encuentre dos polinomios S y T de grado 2 tales que

$$\mathrm{X}^4 - \mathrm{X}^2 + 1 = S\,T$$

y descomponga en fracciones simples a la fracción algebraica

$$\frac{1}{x^4 - x^2 + 1}$$

11. a) ¿Puede ser $\sqrt{3}$ raíz del polinomio $P = 5\,\mathrm{X}^{12} - 3\,\mathrm{X}^{10} + 6\,\mathrm{X}^8 - 3\,\mathrm{X}^6 - 30\,\mathrm{X}^5 + 15\,\mathrm{X}^4 + \mathrm{X}^2 + 5$?

b) Halle el valor de a que haga que el polinomio $Q = a\,\mathrm{X}^7 - 3\,\mathrm{X}^6 + \mathrm{X}^4 - 18a\,\mathrm{X} + 9$ tenga a $\sqrt{3}$ por raíz.

c) Considere un polinomio genérico de grado 5 en $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$

$$R = a\,\mathrm{X}^5 + b\,\mathrm{X}^4 + c\,\mathrm{X}^3 + d\,\mathrm{X}^2 + e\,\mathrm{X} + f$$

y suponga que $\sqrt{2}$ es raíz, ¿es posible que $-\sqrt{2}$ no lo sea?

d) ¿Es posible construir un polinomio $S \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ que tenga a $\sqrt{2}$ como una de sus raíces pero que $-\sqrt{2}$ no lo sea?

Sugerencia: piense en argumentos que le eviten hacer muchas cuentas.