



ALGEBRA Y GEOMETRIA

PRIMER CUATRIMESTRE 2011

TRABAJO PRÁCTICO 3

CONTENIDO

Rectas en \mathbb{R}^2	1
Ejercicio 1	2
Ejercicio 2	4
Ecuaciones Paramétricas	4
Ejercicios 3 y 4	5
Angulo entre vectores	5
Ejercicios 5 a 7	6
Angulo entre rectas	6
Ejercicio 8	7
Producto Escalar	7
Desigualdad de Schwarz	9
Ejercicios 9 y 10	9
Ecuación Implícita	10
Ejercicios 11 y 12	12
Proyección Ortogonal	13

Ejercicio 13	14
Coordenadas Polares	14
Ejercicio 14 y 15	15
Proyección sobre los ejes coordenados	15
Cónicas	16
Problemas	18

Página de Álgebra y Geometría

<http://www.lirweb.com.ar>

Una vez registrado podrá acceder a sus cursos

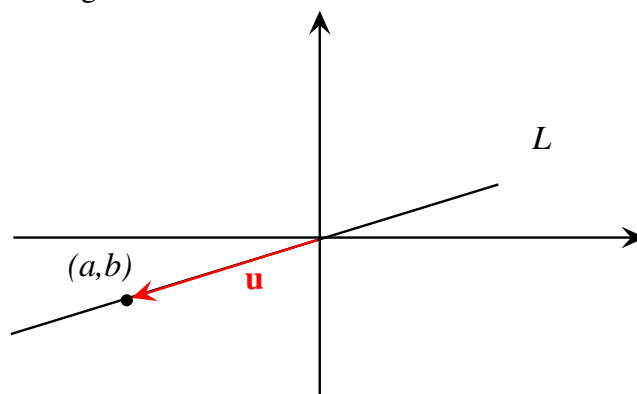
Consultas Online

<http://mateingeuca.wordpress.com>

RECTAS EN \mathbb{R}^2

Nos vamos a ocupar de buscar formas de describir a algunos subconjuntos especiales del plano.

Al definir el producto de un número real por un vector de \mathbb{R}^2 ¹ en realidad vimos cómo describir una recta que pasa por el origen



Dado un punto $(a, b) \neq (0, 0)$ sobre L , llamamos \mathbf{u} al vector con origen $(0, 0)$ y extremo (a, b) . A los puntos de L los podemos pensar como los extremos de los vectores \mathbf{v} que son múltiplos de \mathbf{u} . Con lo cual logramos describir a L diciendo

$$L = \{t(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

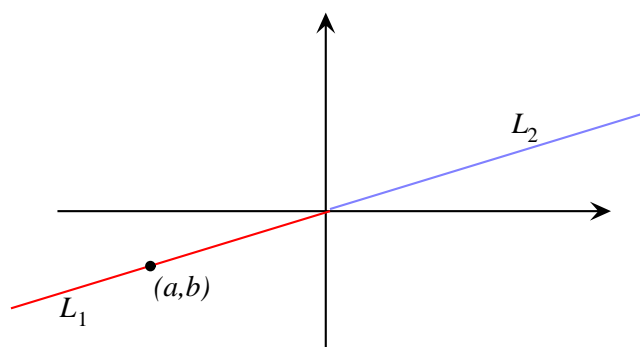
Esto significa que un punto (x, y) está en L si y sólo si hay un número real t tal que

$$(x, y) = t(a, b)$$

Si recordamos cómo influye el signo de t en el producto por escalar $t(a, b)$, será claro que los conjuntos

$$L_1 = \{t(a, b) \mid t \geq 0\} \quad \text{y} \quad L_2 = \{t(a, b) \mid t \leq 0\}$$

representan a las dos semirrectas



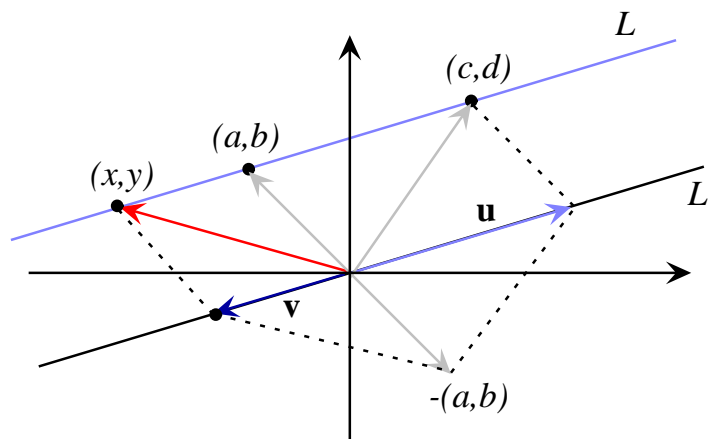
A partir de aquí va a ser fácil describir una recta cualquiera del plano.

Sea L una recta en \mathbb{R}^2 , que no pasa por el origen². Como consecuencia de los postulados de Euclides, dada L y $(0, 0)$ que no está en L , existe una *única* recta L' paralela a L que sí pasa por $(0, 0)$.

¹cf. Trabajo Práctico 1

²si lo hiciera estaríamos en la situación anterior

Tomemos dos puntos distintos (a, b) y (c, d) en L ; la diferencia $(c, d) - (a, b) = (c, d) + [-(a, b)]$ es el vector \mathbf{u} que se muestra en la siguiente figura



$$\mathbf{v} = (x, y) - (a, b) \quad , \quad \mathbf{u} = (c, d) - (a, b)$$

que resulta paralelo a L ³ y como tiene origen $(0, 0) \in L'$ resulta que su extremo está sobre L' . Hecho esto, ahora tomamos un punto arbitrario (x, y) sobre L y vamos a ver que sus coordenadas se pueden expresar en términos de (a, b) , (c, d) y de un parámetro t . Razonando como lo hicimos recién, se ve que vector

$$\mathbf{v} = (x, y) - (a, b)$$

también tiene su extremo sobre L' y, desde luego, su origen en $(0, 0)$; por lo tanto, debe haber un $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{v} = t\mathbf{u}$$

pero esto es decir

$$(x, y) - (a, b) = t[(c, d) - (a, b)]$$

o sea,

$$(x, y) = (a, b) + t(c - a, d - b)$$

Concluimos entonces que

$$L = \{(a, b) + t(c - a, d - b) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Ejercicio 1

La recta L pasa por los puntos $(3, 1)$ y $(-2, 5)$

- haga un gráfico de L
- construya un vector \mathbf{v} paralelo a L a partir de los puntos $(3, 1)$ y $(-2, 5)$
- ¿es cierto que $L = \{(3, 1) + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$?
- ¿es cierto que $L = \{(-2, 5) + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$?

³¿cómo lo justificaría?

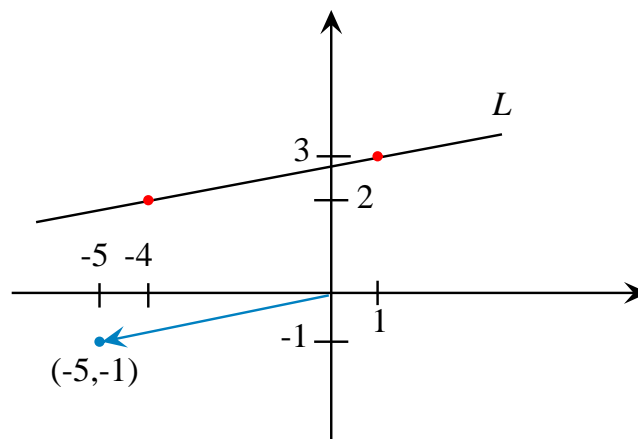
e) ¿qué condición debe cumplir el punto (a, b) para que sea cierto que

$$L = \{(a, b) + tv \mid t \in \mathbb{R}\} ?$$

Ejemplo

Sea L la recta que pasa por los puntos $(1, 3)$ y $(-4, 2)$. Lo hecho recién nos asegura que los puntos de L tienen la forma

$$(x, y) = (1, 3) + t[(-4, 2) - (1, 3)] = (1, 3) + t(-5, -1) \quad (\text{para algún } t \in \mathbb{R})$$



$$(-5, -1) = (-4, 2) - (1, 3)$$

Esta forma de escribir los puntos de L nos permite comprobar fácilmente si es cierto que un punto dado está o no en esta recta.

Consideremos en primer término el punto $(11, 5)$. De estar este punto en L tendríamos que poder encontrar un valor de t que haga que

$$(11, 5) = (1, 3) + t(-5, -1)$$

es decir,

$$\begin{cases} 11 = 1 - 5t \\ 5 = 3 - t \end{cases}$$

esto equivale a

$$5t = -10 \quad \text{y} \quad t = -2$$

que obviamente se cumplen para $t = -2$; con lo cual,

$$(11, 5) = (1, 3) + (-2)(-5, -1)$$

i.e.,

$$(11, 5) \in L$$

Tomemos ahora el punto $(1, 1)$ y veamos si está en la recta L . De ser cierto, debería haber un t que satisficiera

$$(1, 1) = (1, 3) + t(-5, -1)$$

es decir,

$$\begin{cases} 1 = 1 - 5t \\ 1 = 3 - t \end{cases}$$

esto equivale a

$$5t = 0 \quad \text{y} \quad t = 2$$

que claramente es imposible que suceda; en consecuencia,

$$(1, 1) \notin L$$

Ejercicio 2

Considere la recta L definida en el Ejercicio 1 y averigüe si

a) $P = (13, -7) \in L$

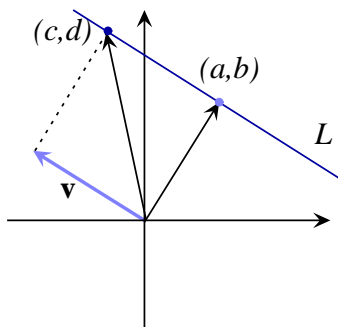
b) $Q = (1, 5) \in L$

Ecuaciones Paramétricas

Tanto en la situación general como en el ejemplo, para describir la recta partimos de dos de sus puntos.

Lo mismo podríamos haber hecho de haber conocido

- un punto $(a, b) \in L$
- un vector $\mathbf{v} \neq (0, 0)$ paralelo a L



$$(c, d) = (a, b) + \mathbf{v} \text{ está en } L$$

$$(c, d) - (a, b) = \mathbf{v}$$

Basta notar que la suma de \mathbf{v} con (a, b) produce un vector (c, d) cuyo extremo está sobre la recta L . Al tener dos puntos de la recta ya sabemos cómo escribir sus puntos

$$L = \{(a, b) + t((c, d) - (a, b)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

pero como $\mathbf{v} = (c, d) - (a, b)$,

$$L = \{(a, b) + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Hasta aquí hemos logrado ver qué forma tienen los puntos de una recta expresándolos en función de *una* variable independiente t que llamamos *parámetro*. Es por eso que se suele decir que es una descripción *paramétrica* de la recta. Más precisamente, decimos que

$$\begin{cases} x = a + t(c - a) \\ y = b + t(d - b) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

son las *ecuaciones paramétricas* de la recta L que pasa por los puntos ⁴ (a, b) y (c, d) y escribimos

$$L: \begin{cases} x = a + t(c - a) \\ y = b + t(d - b) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 3

Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta del Ejercicio 1.

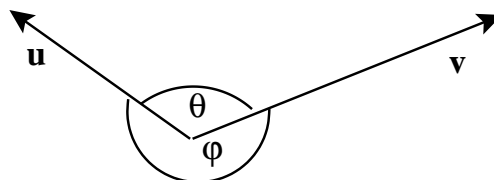
Ejercicio 4

Halle las ecuaciones paramétricas de la recta paralela al vector $\mathbf{v} = (2, 3)$ que pasa por el punto $P = (4, -2)$.

Ángulos

Ángulo entre vectores

Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} determinan dos ángulos, θ y φ



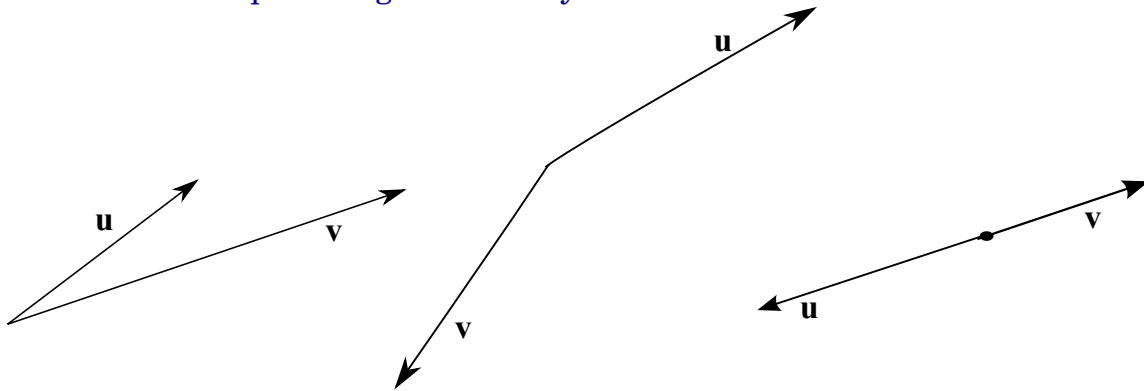
Llamamos *ángulo* entre \mathbf{u} y \mathbf{v} al menor de los dos; es decir, al que es menor o igual que π . En el caso del gráfico,

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \theta$$

⁴distintos

Ejercicio 5

En cada caso marque el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v}



Ejercicio 6

Ubique en un esquema gráfico al vector $\mathbf{u} = (-2, 3)$

- si \mathbf{v} satisface $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\pi}{3}$, ¿en qué parte del plano está \mathbf{v} ?
- si se sabe que $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \frac{\pi}{6}$, ¿en qué parte del plano se encuentra \mathbf{v} ?

Ejercicio 7

Se sabe que los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son

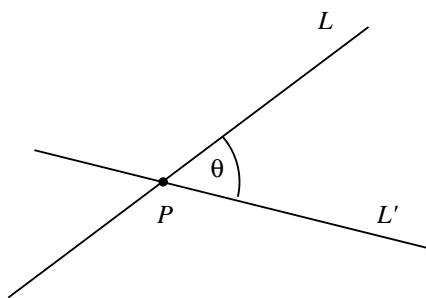
- paralelos. ¿Le alcanza la información para calcular $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$?
- paralelos y tienen el mismo sentido. ¿Le alcanza la información para calcular $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$?
- paralelos y tienen sentido opuesto. ¿Le alcanza la información para calcular $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$?
- son ortogonales. ¿Le alcanza la información para calcular $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$?

Angulo entre rectas

Sean L y L' dos rectas del plano que se intersecan en un punto $P = (a, b)$. Como vimos antes, podemos describir sus puntos en la forma

$$L : (x, y) = (a, b) + t\mathbf{u} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad , \quad L' : (x, y) = (a, b) + s\mathbf{v} \quad (s \in \mathbb{R})$$

donde \mathbf{u} es un vector paralelo a L y \mathbf{v} es un vector paralelo a L' . Quedan definidos cuatro ángulos, dos pares de ángulos opuestos por el vértice. Un par de ellos mide a lo sumo $\frac{\pi}{2}$ y el otro par mide más de $\frac{\pi}{2}$. Llamaremos **ángulo** entre L y L' al menor,



En el caso de la figura

$$\angle(L, L') = \theta$$

Rectas paralelas — Rectas ortogonales

Sean L y L' dos rectas del plano dadas por

$$L : (x, y) = (a, b) + t\mathbf{u} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad , \quad L' : (x, y) = (c, d) + s\mathbf{v} \quad (s \in \mathbb{R})$$

- ❖ Decimos que L y L' son **paralelas** si $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \pi$; es decir, si \mathbf{u} y \mathbf{v} son paralelos
- ❖ Decimos que L y L' son **ortogonales** si $\angle(L, L') = \frac{\pi}{2}$; i.e., si $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Ejercicio 8

Dibuje una recta L en el plano y marque un punto P sobre ella. Encuentre *gráficamente* todas las rectas L' que satisfacen

$$P \in L' \quad \text{y} \quad \angle(L, L') = \frac{\pi}{3}$$

Producto Escalar

Dados (a, b) y (c, d) en \mathbb{R}^2 se define el **producto escalar** entre (a, b) y (c, d) como el número real

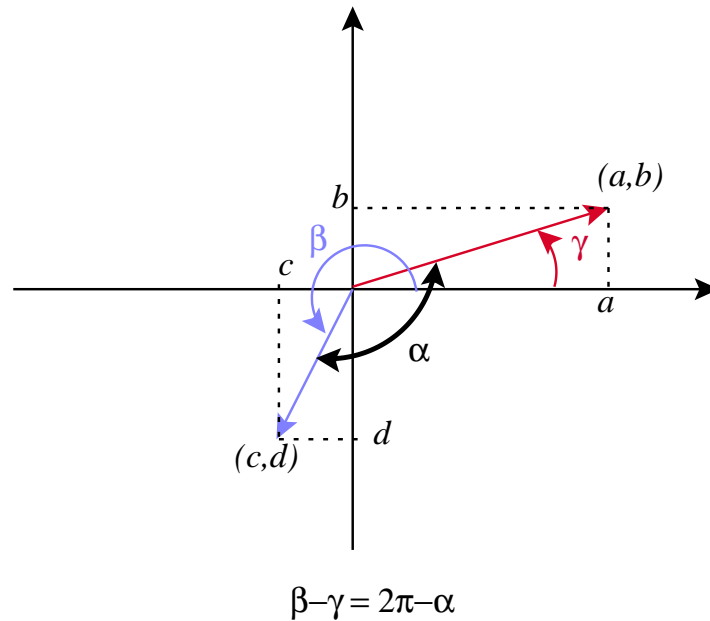
$$(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd$$

Este producto tiene una serie de propiedades algebraicas interesantes que veremos más adelante al ocuparnos de los espacios vectoriales.

De momento sólo nos interesará ver su interpretación geométrica y algunas consecuencias también de índole geométrica.

Hacemos un esquema gráfico y ubicamos los vectores (a, b) y (c, d) ⁵

⁵en una situación particular, claro está, pero las conclusiones que vamos a obtener valen para cualquier par de vectores del plano sin importar su ubicación.



Mirando este gráfico podemos decir que

$$a = \|(a, b)\| \cos \gamma \quad , \quad b = \|(a, b)\| \sin \gamma \quad , \quad c = \|(c, d)\| \cos \beta \quad , \quad d = \|(c, d)\| \sin \beta$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (c, d) &= \|(a, b)\| \cos \gamma \|(c, d)\| \cos \beta + \|(a, b)\| \sin \gamma \|(c, d)\| \sin \beta \\ &= \|(a, b)\| \|(c, d)\| \cos \gamma \cos \beta + \|(a, b)\| \|(c, d)\| \sin \gamma \sin \beta \\ &= \|(a, b)\| \|(c, d)\| [\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma] \\ &= \|(a, b)\| \|(c, d)\| \cos(\beta - \gamma) = \|(a, b)\| \|(c, d)\| \cos(2\pi - \alpha) \\ &= \|(a, b)\| \|(c, d)\| \cos \alpha \end{aligned}$$

Resulta así, la siguiente

Proposición

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, si $0 \leq \alpha \leq \pi$ es el ángulo que forman estos vectores, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$$

Consecuencia

Supongamos que \mathbf{u} y \mathbf{v} no son nulos. La condición

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

equivale en tal caso a

$$\cos \alpha = 0$$

que a su vez es equivalente a decir

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

dado que α está entre 0 y π . Pero esto dice que \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales.

Concluimos así que si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq 0$,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

La proposición anterior nos permite probar muy fácilmente una desigualdad importante,

Desigualdad de Schwarz

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$,

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

DEMOSTRACIÓN:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| |\cos \alpha| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| |\cos \alpha| \underset{\substack{\leq \\ \uparrow \\ |\cos t| \leq 1}}{\leq}}{\leq} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

Observaciones

1. Otra aplicación importante del producto escalar es que nos da una manera simple de calcular el ángulo que forman dos vectores.

En efecto, si llamamos θ al ángulo entre los vectores (no nulos) \mathbf{u} y \mathbf{v} ,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

y como $0 \leq \theta \leq \pi$ resulta que

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

2. Antes vimos que dos vectores no nulos \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ porque en tal caso el ángulo θ entre ellos vale $\frac{\pi}{2}$.

Para que sean paralelos la condición será $\theta = 0$ o $\theta = \pi$. En el primer caso, tendrán además el mismo sentido y en el segundo, sentido opuesto.

Ejercicio 9

Calcule el ángulo entre los vectores

- a) $(-1, 3)$ y $(4, 5)$
- b) $(1, 2)$ y $(2, -1)$
- c) $(2, -1)$ y $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$
- d) (a, b) y $(-b, a)$

e) (a, b) y $(b, -a)$

En caso de ser paralelos u ortogonales, indíquelo.

Ejercicio 10

Calcule el ángulo entre las rectas que pasan por el origen y tienen direcciones dadas, respectivamente, por los vectores

a) $(-1, 3)$ y $(4, 5)$

b) $(5, 2)$ y $(-2, 1)$

c) $(1, 2)$ y $(2, -1)$

d) $(2, -1)$ y $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

e) (a, b) y $(-b, a)$

f) (a, b) y $(b, -a)$

Ecuación Implícita de una recta en \mathbb{R}^2

Hay otra manera de describir a una recta que consiste en dar una condición que vincule entre sí a las coordenadas de sus puntos. Veamos cómo obtenerla.

Consideremos la recta L que pasa por los puntos (distintos) (a, b) y (c, d) . Llamemos

$$\mathbf{v} = (c, d) - (a, b) = (c - a, d - b)$$

Este vector \mathbf{v} es paralelo a L y esto nos permite escribir a L en la forma

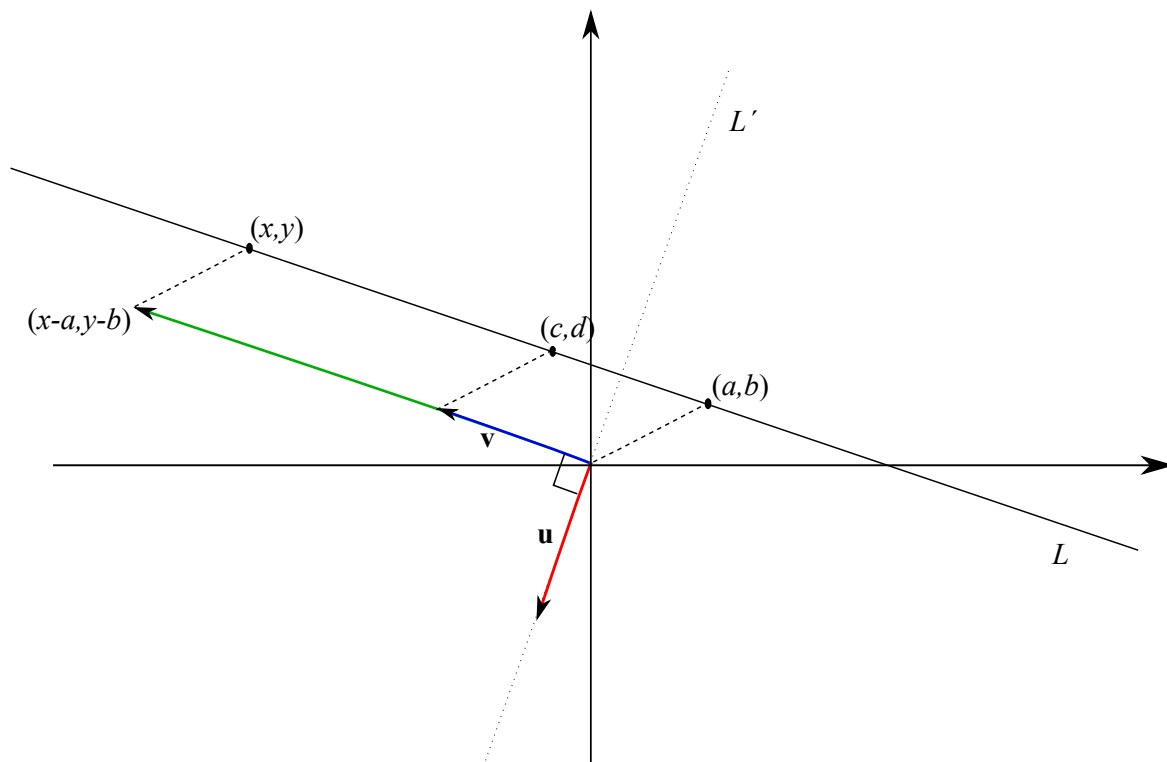
$$L = \{(a, b) + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

o bien mediante sus ecuaciones paramétricas

$$L : \begin{cases} x = a + t(c - a) \\ y = b + t(d - b) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

dado que $\mathbf{v} = (c - a, d - b)$.

La siguiente figura ilustra esta situación



El vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ mostrado en este esquema gráfico es ortogonal a \mathbf{v} y por consiguiente a L . Este vector \mathbf{u} tiene la propiedad de ser también ortogonal al vector

$$(x - a, y - b)$$

cualquiera que haya sido el punto (x, y) de L pues a partir de las ecuaciones paramétricas se ve que

$$x - a = t(c - a) \quad y \quad y - b = t(d - b)$$

para algún $t \in \mathbb{R}$, lo que muestra que

$$(x - a, y - b) = t\mathbf{v}$$

es decir, $(x - a, y - b)$ es paralelo a \mathbf{v} y en consecuencia ortogonal a \mathbf{u} .

Entonces, si llamamos (A, B) a las coordenadas de \mathbf{u} tenemos que

$$(x - a, y - b) \cdot \mathbf{u} = 0$$

o, lo que es lo mismo,

$$A(x - a) + B(y - b) = 0 \quad (*)$$

Esta es la relación que vincula a las coordenadas de un punto genérico (x, y) de la recta L de la que hablamos al comienzo.

Notemos que la ecuación $(*)$ se puede escribir en la forma

$$Ax + By + (-Aa - Bb) = 0$$

y si llamamos $C = -Aa - Bb$ resulta que los puntos de L son los (x, y) de \mathbb{R}^2 que satisfacen la ecuación

$$Ax + By + C = 0$$

A esta ecuación se la llama **ecuación implícita** de L y solemos escribir

$$L : Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

Conviene tener presente que para que una ecuación de este tipo *realmente* represente a una recta es necesario que A y B no sean simultáneamente nulos.

En el análisis que hicimos $(A, B) = \mathbf{u} \neq (0, 0)$.

Observaciones

1. Si $B = 0$, debe ser $A \neq 0$ y entonces la ecuación (1) se escribe

$$x = -\frac{C}{A}$$

y representa una recta vertical.

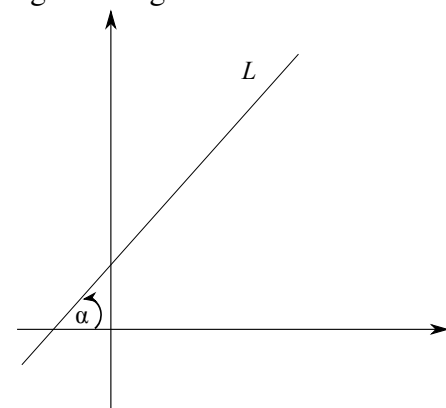
2. Si $B \neq 0$, podemos despejar y de la ecuación (1) y toma la forma

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Representa una recta horizontal u oblicua. Al coeficiente $-\frac{A}{B}$ se lo llama **pendiente** de L y resulta ser

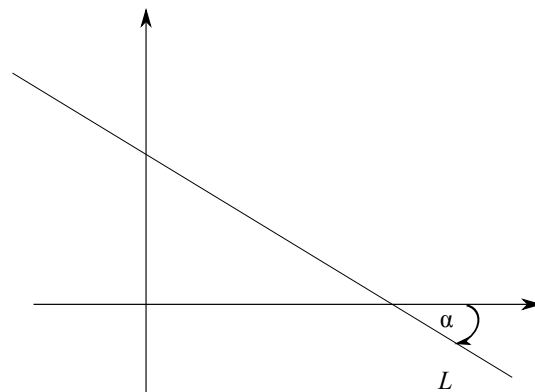
$$-\frac{A}{B} = \tan \alpha$$

donde α es el ángulo que forman L y el semieje x positivo tal como se ilustra en la siguiente figura



$$\tan \alpha = -A/B > 0$$

$$0 < \alpha < \pi/2$$



$$\tan \alpha = -A/B < 0$$

$$-\pi/2 < \alpha < 0$$

Ejercicio 11

Sea L la recta paralela al vector $\mathbf{u} = (3, 1)$ que pasa por el punto $P = (0, 3)$. Halle la ecuación implícita de L y calcule el ángulo que forma L con el semieje x positivo.

Ejercicio 12

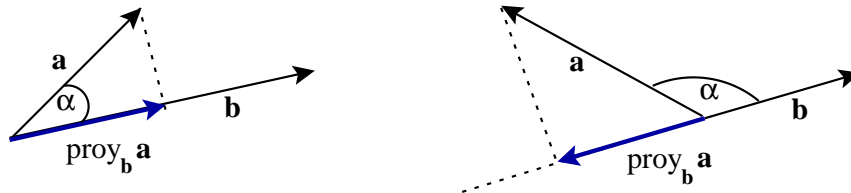
Sea L que pasa por los puntos $P = (-1, 4)$ y $Q = (4, 1)$. Halle la ecuación implícita de L y calcule el ángulo que forma L con el semieje x positivo.

Proyección Ortogonal

Sea \mathbf{b} un vector no nulo. La *proyección ortogonal* del vector \mathbf{a} sobre el vector \mathbf{b} es un vector paralelo a \mathbf{b} , que denotaremos

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$$

y que es tal que la recta que pasa su extremo y el extremo de \mathbf{a} es perpendicular a \mathbf{b} , tal como se muestra en la siguiente figura



Por ser paralelo a \mathbf{b} se escribe en la forma

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ ⁶. Tenemos entonces que

$$\|\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}\| = |\lambda| \|\mathbf{b}\|$$

pero, por otro lado,

$$|\cos \alpha| = \frac{\|\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}$$

de donde,

$$\|\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\| |\cos \alpha|$$

multiplicando por $\|\mathbf{b}\|$

$$\|\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| |\cos \alpha| = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|$$

y reemplazando $\|\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}\|$ por $|\lambda| \|\mathbf{b}\|$

$$|\lambda| \|\mathbf{b}\|^2 = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|$$

o sea,

$$|\lambda| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\|\mathbf{b}\|^2}$$

y como el signo de λ coincide con el del coseno de α , podemos afirmar que

$$\lambda = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}$$

con lo cual concluimos que

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b}$$

⁶si $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $\lambda \geq 0$; si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\lambda < 0$ tal como se aprecia en la figura.

El número $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}$ se llama *componente* de \mathbf{a} en la *dirección* de \mathbf{b} .

Ejercicio 13

Halle las proyecciones ortogonales de los vectores $(1, 3)$ y $(0, -2)$ sobre el vector $(-2, 4)$ y represente estas dos situaciones en un esquema gráfico.

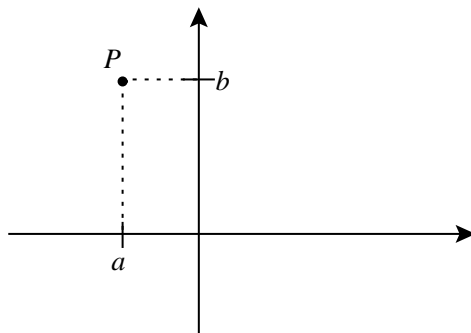
Coordenadas Polares

Recordando que \mathbb{R}^2 y \mathbb{C} tienen los mismos elementos, sólo que los denotamos de manera distinta,

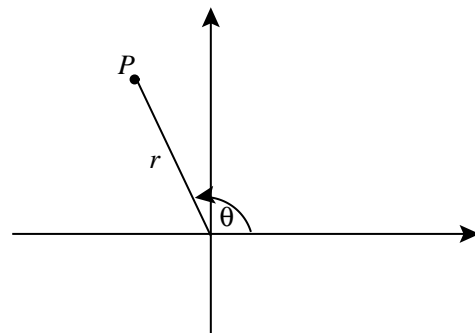
$$(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad a + bi \in \mathbb{C}$$

hablar de *coordenadas polares* de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ es lo mismo que hablar de la *forma trigonométrica* de $a + bi \in \mathbb{C}$. La única salvedad que debemos hacer es que en el caso de las coordenadas polares limitamos los valores del argumento al intervalo $[0, 2\pi)$.

De esta forma un mismo punto P del plano \mathbb{R}^2 puede ser representado tanto por sus coordenadas *cartesianas* como por sus coordenadas *polares*



*coordenadas
cartesianas
(a, b)*



*coordenadas
polares
(r, theta)*

La relación entre ambas es la misma, salvo notación, que entre la forma binómica y la trigonométrica en el caso de números complejos; i.e.,

$$a = r \cos \theta \quad , \quad b = r \operatorname{sen} \theta$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi) \text{ queda determinado por las condiciones } \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \operatorname{sen} \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

NOTA: es conveniente recordar que siempre que hablemos de argumento —ya sean números complejos o puntos de \mathbb{R}^2 — debemos excluir al origen.

Ejercicio 14

Grafique los siguientes puntos (r, θ) dados en coordenadas polares y halle sus coordenadas cartesianas.

$$(2, 0) \quad , \quad (2, \pi) \quad , \quad \left(4, \frac{\pi}{4}\right) \quad , \quad \left(3, \frac{3\pi}{2}\right) \quad , \quad \left(3, \frac{5\pi}{6}\right) \quad , \quad \left(5, \frac{3\pi}{2}\right)$$

NOTA: debe respetar el orden de las acciones; primero graficar, luego hallar las coordenadas cartesianas. En este caso: *importa el orden*.

Ejercicio 15

Halle las coordenadas polares de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas

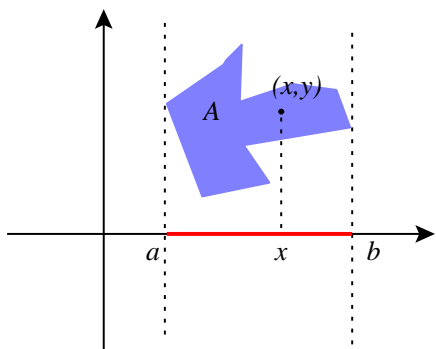
$$(2, -2) \quad , \quad (-1, 1) \quad , \quad (0, 3) \quad , \quad (0, -4) \quad , \quad (\sqrt{3}, -1) \quad , \quad (3, 4)$$

Haga un esquema gráfico para cada punto indicando el significado de cada coordenada (polar y cartesiana).

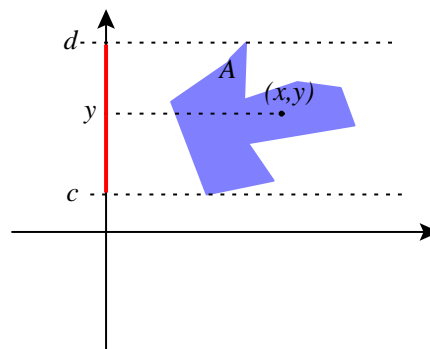
Proyección sobre los ejes coordenados

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ entendemos por **proyección** de A sobre el eje x al subconjunto de este eje que contiene a las *abscisas* de los puntos de A .

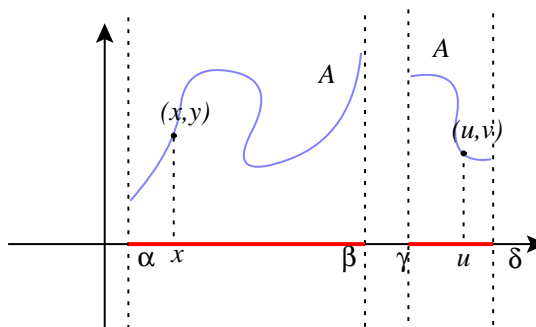
De igual forma, la **proyección** de A sobre el eje y estará formada por el conjunto de *ordenadas* de los puntos de A . La siguiente figura intenta aclarar estas definiciones



La proyección de A sobre el eje x es el intervalo $[a, b]$



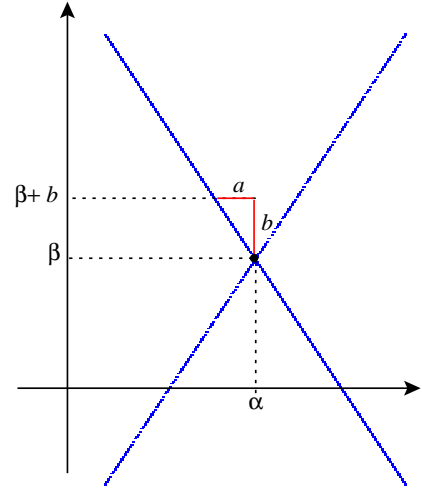
La proyección de A sobre el eje y es el intervalo $[c, d]$



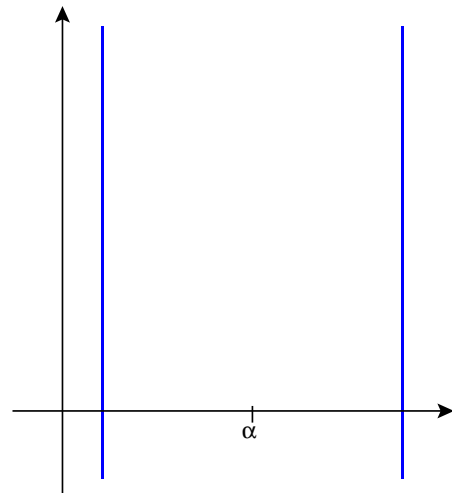
La proyección de A sobre el eje x es $[\alpha, \beta] \cup [\gamma, \delta]$

Cónicas

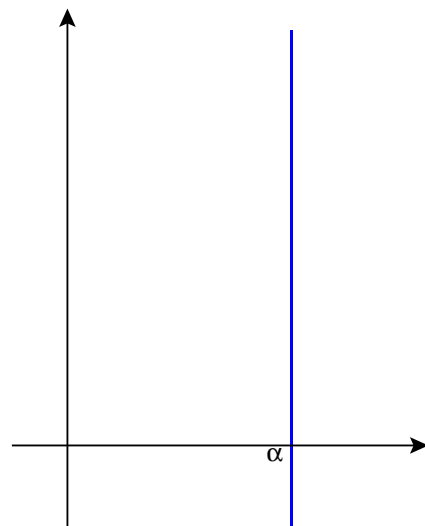
1. DOS RECTAS NO PARALELAS : $\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 0$



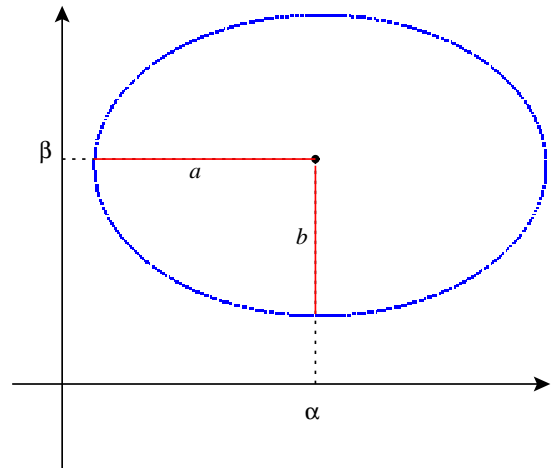
2. DOS RECTAS PARALELAS : $\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} = 1$



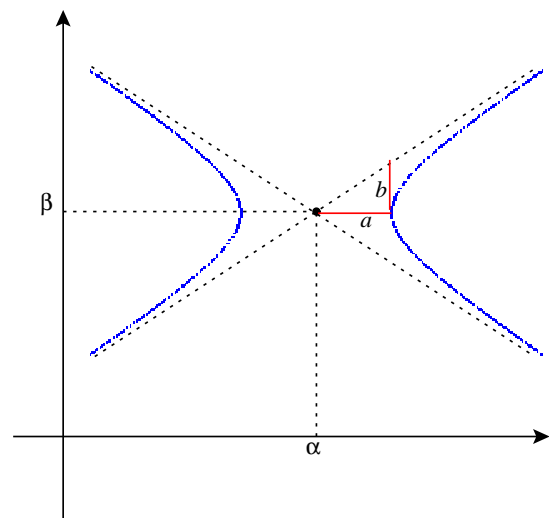
3. RECTA DOBLE : $(x - \alpha)^2 = 0$



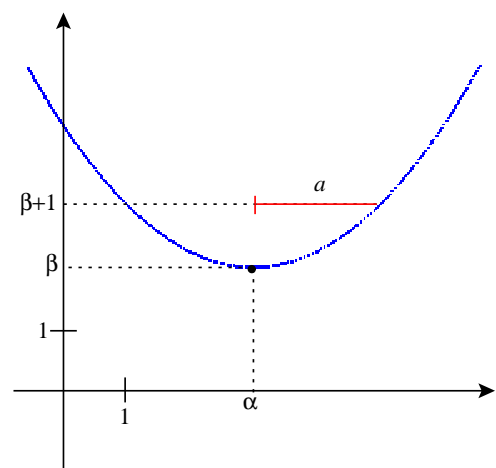
4. ÉLIPSE : $\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$



5. HIPÉRBOLA : $\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$



6. PARÁBOLA : $\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - (y - \beta) = 0$



PROBLEMAS

1. Calcule $d(P, Q)$ –la *distancia* entre P y Q – para los siguientes pares de puntos
 - a) $P = (-1, 3)$, $Q = (0, 4)$
 - b) $P = (5, 7)$, $Q = (-2, 4)$
 - c) $P = (-1, 3)$, $Q = (0, 0)$

2. Sea L la recta que pasa por los puntos $(3, -1)$ y $(1, 4)$.
 - a) Halle una ecuación de L de la forma $(x, y) = (a, b) + t(u, v)$ ($t \in \mathbb{R}$) tomando
 - (i) $(a, b) = (3, -1)$
 - (ii) $(a, b) = (1, 4)$
 - b) Haga un esquema gráfico y diga qué relación geométrica hay entre L y el vector (u, v) .
 - c) Encuentre una ecuación implícita de L .
 - d) Analice si los puntos $(0, \frac{13}{2})$ y $(2, 2)$ están en L .

3. Dados el punto $(-2, 1)$ y el vector $(3, 2)$, sea L la recta que pasa por $(-2, 1)$ y es paralela a $(3, 2)$. Halle
 - a) las ecuaciones paramétricas de L
 - b) una ecuación implícita de L
 - c) las ecuaciones paramétricas de la semirrecta S que tiene origen en $(-2, 1)$ y el mismo sentido del vector $(3, 2)$
 - d) las ecuaciones paramétricas del segmento que une los puntos $(-2, 1)$ y $(1, 3)$.

Represente gráficamente.

4. Sea $L : (x, y) = (-2, 1) + t(3, 2)$ ($t \in \mathbb{R}$). Describa paramétricamente los puntos de L que están
 - a) en el semiplano $x \geq 1$
 - b) en el semiplano $y \leq 1$
 - c) entre los puntos $(-2, 1)$ y $(1, 3)$

5. Halle todos los vectores \mathbf{v} tales que

$$\|\mathbf{v}\| = 3 \quad \text{y} \quad \angle(\mathbf{v}, (1, 2)) = \frac{\pi}{6}$$

6. Muestre que

- a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$

- b) $\|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \pm 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
 c) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$
 d) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

¿Bajo qué condiciones se verifica que $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$?

7. Dados los vectores $\mathbf{u} = (3, 1)$ y $\mathbf{v} = (1, 2)$, considere el paralelogramo que los tiene por dos de sus lados. Halle el módulo de cada uno y la

- a) proyección de \mathbf{v} sobre \mathbf{u}
 b) proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v}
 c) componente de \mathbf{v} en la dirección de \mathbf{u}

¿Le alcanzan estos datos para calcular el área del paralelogramo?

Sugerencia: haga un esquema gráfico

8. Muestre que la ecuación de una recta no vertical que pasa por el punto (a, b) es

$$y = m(x - a) + b$$

Sugerencia: use la ecuación implícita y compruebe que, por ser no vertical, se puede suponer que es de la forma: $y = mx + k$.

9. Esboce la gráfica de la ecuación polar y halle la ecuación cartesiana correspondiente

- a) $r = r_0$ para $r_0 = 1, \frac{1}{2}, 4$
 b) $\theta = \theta_0$ para $\theta_0 = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$
 c) $r = \cos \theta$
 d) $r = 3 \operatorname{sen} \theta$
 e) $r = \cos \theta + \operatorname{sen} \theta$

NOTA: en los tres últimos incisos halle primero la ecuación cartesiana.

10. Verifique que para cada $t \in [0, 2\pi]$, los puntos

$$(\cos t, \operatorname{sen} t), \quad (-\operatorname{sen} t, \cos t), \quad (\operatorname{sen} t, -\cos t), \quad (\operatorname{sen} t, \cos t)$$

están sobre la circunferencia unitaria. Es más, cada valor de t va dando cada uno de los puntos de esta curva. Considere cada uno de ellos y analice

- a) de qué punto de la circunferencia salen en el instante $t = 0$
 b) en qué sentido recorren esta curva (horario o antihorario).

11. Las siguientes ecuaciones representan cónicas. Clasifíquelas y haga un esquema gráfico en cada caso.

a) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 2 = 0$

b) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y - 11 = 0$

c) $2y^2 - 3x^2 - 8y - 6x - 1 = 0$

d) $x^2 - y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$

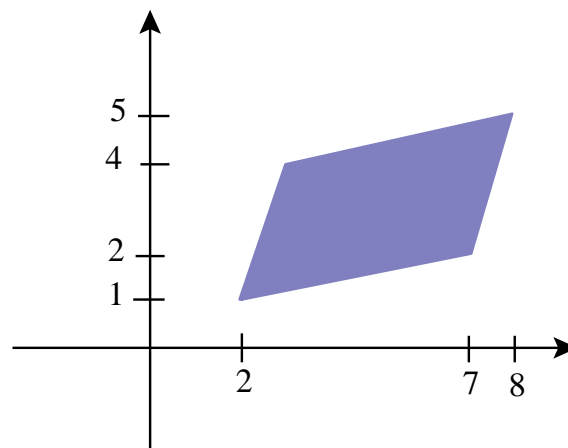
e) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

f) $2x^2 + 4x - y + 5 = 0$

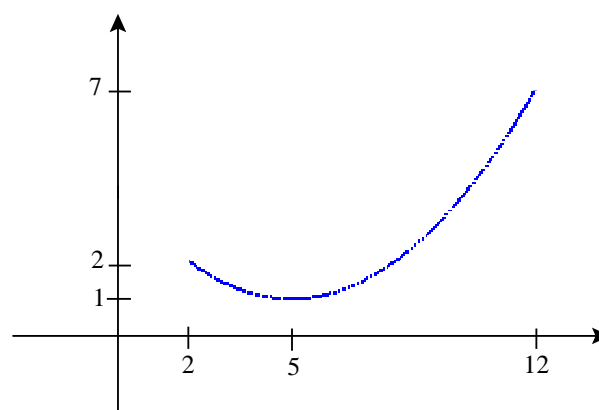
g) $2y^2 + 4y - x + 5 = 0$

12. Halle las proyecciones de cada una de las cónicas anteriores sobre el eje x y sobre el eje y .

13. Halle la proyección del paralelogramo que se muestra en el siguiente gráfico sobre los ejes coordenados



14. Muestre gráfica y analíticamente cuáles son las proyecciones de la siguiente curva sobre los ejes coordenados



15. Encuentre los puntos de la recta $L : 2x - y = 3$ que distan a lo sumo 3 de $(-1, 1)$.

Plantee el problema de formas distintas

(i) hallando la intersección de dos conjuntos

(ii) utilizando una descripción paramétrica de los puntos de L .

16. Calcule el ángulo entre

a) los vectores $(1, -2)$ y $(-3, 1)$

b) las rectas $L_1 : (x, y) = (7, 2) + t(1, -2) (t \in \mathbb{R})$ y $L_2 : (x, y) = (7, 2) + t(-3, 1) (t \in \mathbb{R})$

17. Se sabe que \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales y que $\|\mathbf{u}\| = 3$ y $\|\mathbf{v}\| = 2$. Calcule $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

18. Halle la ecuación de una recta

a) vertical que pasa por $(2, 1)$

b) no vertical que pasa por $(2, 1)$.

c) con pendiente -2 que pasa por $(2, 1)$.

NOTA: si para resolver el último inciso hizo cuentas hay algo que no entendió bien

19. Determine de qué cónica se trata

a) $4x^2 - 3y^2 + 2x - y + 4 = 0$

b) $4x^2 - 3y + 16x = 0$

20. Halle las proyecciones sobre los ejes de

a) $\|(x, y) - (4, 1)\| < 2$

b) $y = 3x^2 + 1, x \in \mathbb{R}_{\geq -2}$

c) $y = \sinh x, x \in \mathbb{R}$

21. A partir de la representación paramétrica del segmento que une los puntos (a, b) y (c, d) y de la noción de distancia en el plano halle el punto medio de dicho segmento.

22. Encuentre una ecuación que represente al haz de rectas que pasa por el punto $(-2, 3)$.
¿Realmente representa a todas o falta alguna?

23. Halle el área del paralelogramo de vértices $(-2, -1)$, $(1, 0)$, $(3, 4)$ y $(0, 3)$.

24. Halle las coordenadas polares del punto de coordenadas cartesianas $-1 + \sqrt{3}i$.

25. Esboce la gráfica de las curvas expresadas en coordenadas polares

a) $r = 2$

b) $\theta = \frac{5\pi}{6}$

26. Clasifique y grafique: $x^2 - y^2 + 2x + 4y = 12$.