



# ALGEBRA Y GEOMETRIA

PRIMER CUATRIMESTRE 2011

## TRABAJO PRÁCTICO 4

### CONTENIDO

El Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$ .....	1
Ejercicios 1 y 2 .....	2
Operaciones en $\mathbb{R}^3$ .....	2
Norma de un vector .....	2
Ejercicio 3 .....	3
Distancia entre dos puntos .....	3
Ejercicio 4 .....	4
Producto escalar .....	4
Propiedades .....	4
Ejercicios 5 a 9 .....	6
Rectas en el espacio .....	7
Ejercicios 10 y 11 .....	8
Planos en el espacio .....	8
Ecuaciones paramétricas del plano .....	11
Ejercicios 12 y 13 .....	11
Ecuación implícita del plano .....	11
Ejercicios 14 a 19 .....	13
Ecuaciones implícitas de una recta .....	14
Ejercicios 20 a 22 .....	18
Distancia de un punto a una recta .....	18
Distancia de un punto a un plano .....	21

Ejercicio 23 .....	22
Producto Vectorial .....	22
Propiedades .....	23
Ejercicio 24 .....	25
Ejercicio 25 .....	26
Orientación de ternas de vectores .....	27
Ejercicio 26 .....	28
Ejercicio 27 .....	30
Coordenadas cilíndricas .....	33
Coordenadas esféricas .....	33
Ejercicios 28 y 29 .....	35
Problemas .....	36

**Página de Álgebra y Geometría**

<http://www.lirweb.com.ar>

Una vez registrado podrá acceder a sus cursos

**Consultas Online**

<http://mateingeuca.wordpress.com>

## EL ESPACIO EUCLÍDEO: $\mathbb{R}^3$

Nos vamos a ocupar, entre otras cosas, de buscar formas de describir a algunos subconjuntos especiales del espacio. Pero antes tendremos que dar algunas definiciones.

Definimos

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

extendiendo de manera natural la noción de producto cartesiano entre dos conjuntos; es decir,

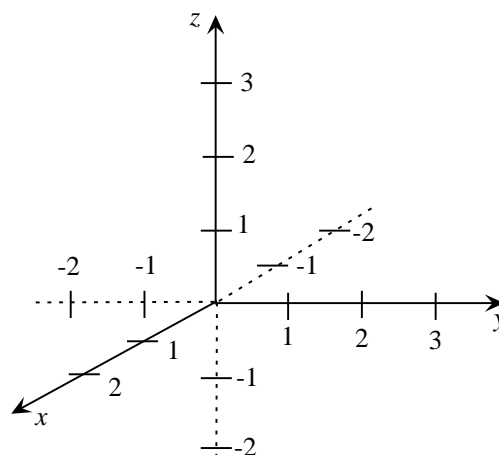
$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

y entendiendo que

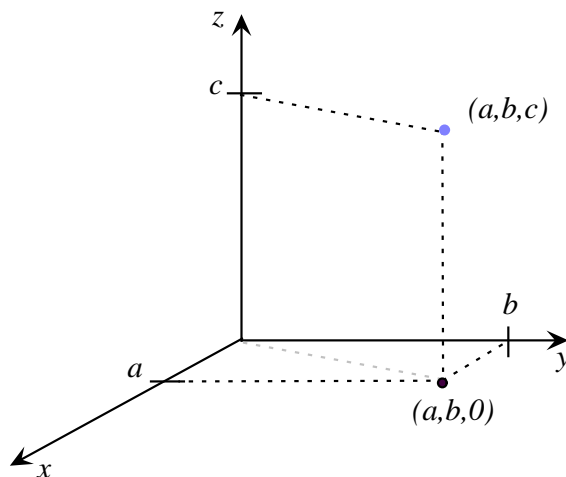
$$(a, b, c) = (a', b', c') \quad \text{si y sólo si} \quad a = a', \quad b = b', \quad c = c'$$

Lo representamos geoméricamente ubicando a los dos primeros factores en un plano horizontal (que representará al plano  $\mathbb{R}^2$ ) –llamado plano  $xy$ – y agregando una recta vertical –el eje  $z$ – donde ubicaremos a la tercera componente de cada punto de  $\mathbb{R}^3$ .

Quedan así determinadas tres rectas perpendiculares entre sí que llamaremos *ejes coordenados*: dos en el plano  $xy$  y la tercera el eje  $z$ , cada una de las cuales representa a  $\mathbb{R}$  y por lo tanto sobre ellas están ubicados los números reales de la manera habitual. Los tres orígenes deben coincidir y determinan el origen del nuevo sistema, el  $(0, 0, 0)$ . La dirección positiva de cada eje se indica en la siguiente figura



Un punto de coordenadas  $(a, b, c)$ <sup>1</sup> se ubica en este sistema de la siguiente manera



*El punto  $(a, b, c)$  se proyecta perpendicularmente sobre el plano  $xy$  en el punto  $(a, b, 0)$*

### Ejercicio 1

En un esquema gráfico de  $\mathbb{R}^3$  ubique los siguientes puntos

$$(-2, 1, 0) \quad , \quad (2, -1, 0) \quad , \quad (1, 2, 3) \quad , \quad (1, 2, -3) \quad , \quad (-1, -3, 2)$$

### Ejercicio 2

Haga un esquema gráfico a los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$

a)  $A = \{(x, 2, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

b)  $B = \{(3, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$

c)  $C = \{(2, 3, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

## Operaciones

La suma y el producto por escalares se define de manera enteramente análoga al caso del plano,

$$(a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c')$$

y

$$t(a, b, c) = (ta, tb, tc) \quad (t \in \mathbb{R})$$

y también, como en  $\mathbb{R}^2$ , a  $(a, b, c)$  lo podemos pensar indistintamente como *punto* del espacio o como *vector* con origen  $(0, 0, 0)$  y extremo  $(a, b, c)$ .

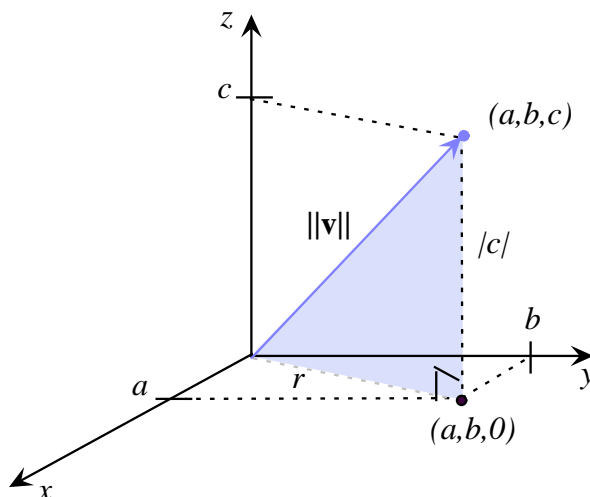
<sup>1</sup>en el gráfico estamos suponiendo que todas sus componentes son positivas

## Norma de un vector

Definimos la *norma* de un vector  $\mathbf{v}$  de extremo  $(a, b, c)$  por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

La siguiente figura muestra que, como en el caso del plano,  $\|\mathbf{v}\|$  mide lo que dista  $(a, b, c)$  del origen,



*En este gráfico  $|c|=c$  porque  $c>0$ ; pero en general, ese segmento medirá  $|c|$*

Como el punto  $(a, b, 0)$  está en el plano  $xy$  ya sabemos que

$$r = \|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

y como, por otro lado,  $r$  es uno de los catetos del triángulo rectángulo de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(a, b, 0)$  y  $(a, b, c)$ ,

$$\|\mathbf{v}\|^2 = r^2 + |c|^2$$

es decir,

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{r^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

### Ejercicio 3

Calcule la norma de los siguientes puntos de  $\mathbb{R}^3$

$$(-1, 0, 1) \quad , \quad (0, 0, z) \quad , \quad (a, b, 0) \quad , \quad (3, 0, 2) \quad , \quad (1, 2, 3) \quad , \quad (-1, -2, -3)$$

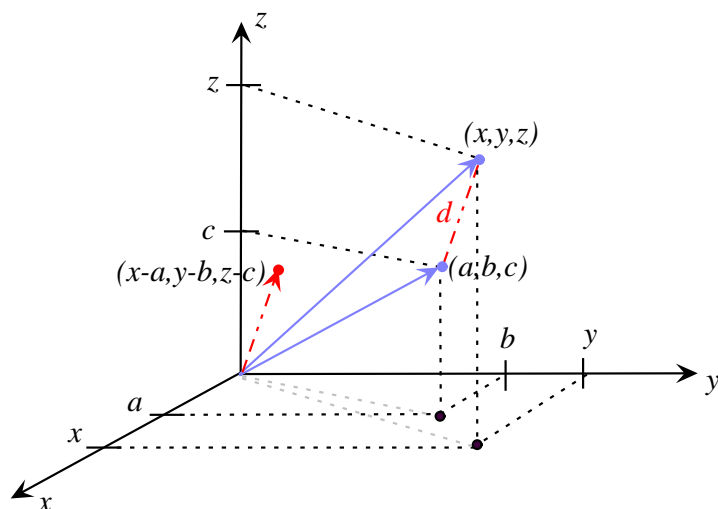
## Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos  $(x, y, z)$  y  $(a, b, c)$  en  $\mathbb{R}^3$ , la distancia entre ambos será la longitud del segmento de recta que los une. Pero teniendo en cuenta las operaciones resulta, otra vez como en el caso del plano, que

$$\text{la distancia entre } (x, y, z) \text{ y } (a, b, c) = \|(x, y, z) - (a, b, c)\|$$

es decir,

$$d((x, y, z), (a, b, c)) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$



### Ejercicio 4

Ubique en un esquema gráfico a los siguientes pares de puntos  $P$  y  $Q$ , a su diferencia  $P - Q$  y calcule  $d(P, Q)$

a)  $P = (2, 4, 3)$  ,  $Q = (2, 1, 1)$

b)  $P = (1, 1, 5)$  ,  $Q = (3, -1, 4)$

### Producto Escalar

Dados dos vectores  $\mathbf{u} = (a_1, a_2, a_3)$  y  $\mathbf{v} = (b_1, b_2, b_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  se define el **producto escalar** de  $\mathbf{u}$  con  $\mathbf{v}$  como el número

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

### Propiedades

1.  $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$

2.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

3.  $(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

Si  $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$  ,  $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$

$$(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (tx_1, tx_2, tx_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = tx_1y_1 + tx_2y_2 + tx_3y_3 = t(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

$$4. \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

Escribamos las coordenadas de estos vectores

$$\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3) \quad , \quad \mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3) \quad , \quad \mathbf{w} = (z_1, z_2, z_3)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3) \\ &= x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) + x_3(y_3 + z_3) \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

$$5. \text{ Si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ para todo } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \text{ entonces } \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Como  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  cualquiera sea  $\mathbf{v}$ , podemos asegurar que –en particular– vale para  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ ; entonces,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$$

pero eso dice que  $\|\mathbf{u}\|^2 = 0$ . Y esto sólo ocurre cuando  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

$$6. \text{ En realidad, para que sea válida la propiedad anterior no hace falta pedir que } \mathbf{u} \text{ sea ortogonal a } \textit{todo} \text{ vector } \mathbf{v}; \text{ basta con que se cumpla}$$

$$\mathbf{u} \cdot (1, 0, 0) = 0 \quad , \quad \mathbf{u} \cdot (0, 1, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{u} \cdot (0, 0, 1) = 0 \quad (1)$$

para concluir que necesariamente es  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

Basta notar que si  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$$0 = \mathbf{u} \cdot (1, 0, 0) = u_1$$

$$0 = \mathbf{u} \cdot (0, 1, 0) = u_2$$

$$0 = \mathbf{u} \cdot (0, 0, 1) = u_3$$

i.e.,

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$7. (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

$$8. \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

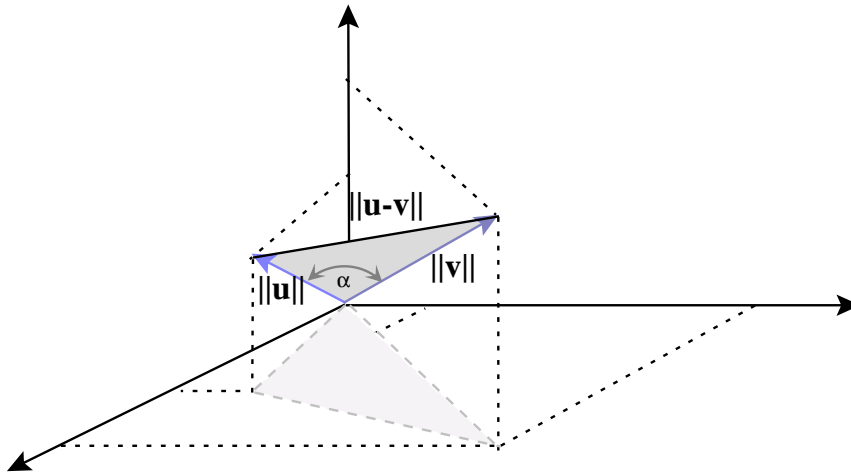
Basta notar que

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$$

y usar el resultado anterior

$$9. \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Estas observaciones y el teorema del coseno <sup>2</sup> nos van a permitir llegar a una interpretación geométrica del producto escalar, análoga a la del caso del plano.



Si aplicamos el teorema del coseno al triángulo de lados  $\| \mathbf{u} \|$ ,  $\| \mathbf{v} \|$  y  $\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|$ ,

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|^2 = \| \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{v} \|^2 - 2 \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \| \cos \alpha$$

Pero la propiedad 9. nos dice que

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|^2 - \| \mathbf{u} \|^2 - \| \mathbf{v} \|^2 = -2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

en consecuencia

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \| \cos \alpha$$

tal como obtuvimos en  $\mathbb{R}^2$ . Hemos probado entonces,

### Proposición

Para todo par de vectores no nulos  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \| \cos \alpha$$

siendo  $0 \leq \alpha \leq \pi$  el ángulo entre ellos.

### Ejercicio 5

Calcule el ángulo entre los siguientes pares de vectores

a)  $\mathbf{u} = (0, 1, \sqrt{3})$  ,  $\mathbf{v} = (0, 0, -2)$

b)  $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$  ,  $\mathbf{v} = (-2, 1, 3)$

### Ejercicio 6

Calcule el ángulo entre las rectas  $L_1 : (x, y, z) = t\mathbf{u}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) ,  $L_2 : (x, y, z) = t\mathbf{v}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) y represente gráficamente en cada uno de los siguientes casos

a)  $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$  ,  $\mathbf{v} = (-2, 1, 3)$

b)  $\mathbf{u} = (0, 1, \sqrt{3})$  ,  $\mathbf{v} = (0, 0, -2)$

<sup>2</sup>si  $a, b, c$  son los lados de un triángulo y  $\alpha$  es el ángulo opuesto al lado  $a$ , entonces  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

**Ejercicio 7**

Halle un vector  $\mathbf{w}$  que sea ortogonal a los vectores  $\mathbf{u} = (1, -2, 0)$  y  $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$ . ¿Es único?

**Ejercicio 8**

Se sabe que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$  y que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = -2$ . Calcule

$$\mathbf{u} \cdot (3\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$$

**Ejercicio 9**

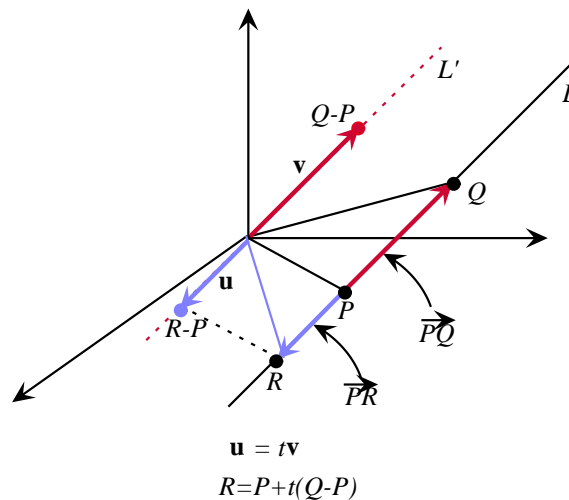
Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  dos vectores unitarios que forman un ángulo  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ . Calcule  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ .

**Rectas en el Espacio**

Sean  $P = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  puntos de  $\mathbb{R}^3$ . La recta  $L$  que pasa por  $P$  y  $Q$  se puede expresar en la forma

$$L : (x, y, z) = P + t(Q - P) \quad (t \in \mathbb{R})$$

El vector  $\mathbf{v}$  —de origen  $\mathbf{0}$  y extremo  $Q - P = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ — es la traslación al origen del vector  $\overrightarrow{PQ}$  y da la dirección de la recta.

**Ecuaciones paramétricas de una recta**

A partir de la ecuación anterior obtenemos inmediatamente las **ecuaciones paramétricas** de una recta en el espacio que pasa por los puntos  $P = (x_0, y_0, z_0)$  y  $Q = (x_1, y_1, z_1)$

$$L : \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

**Ejercicio 10**

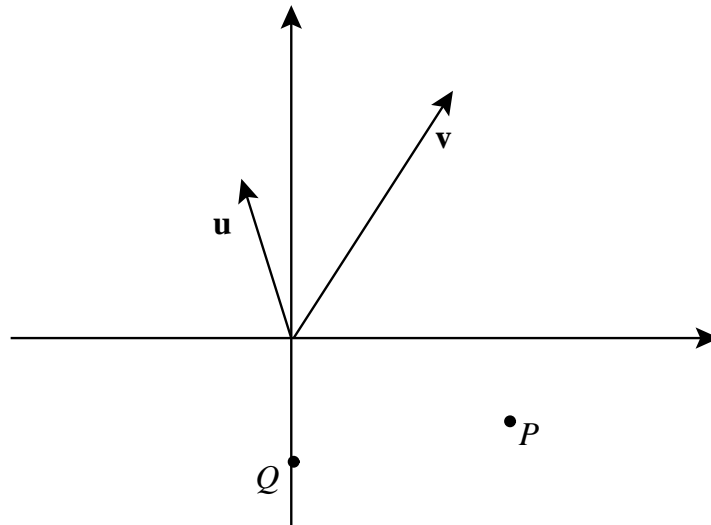
Halle la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta  $L$  sabiendo que

- a) pasa por  $(2, -3, 0)$  y  $(1, -2, 1)$
- b) pasa por  $(-1, 0, 1)$  y es paralela a  $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$

Haga un esquema gráfico en cada caso.

**Ejercicio 11**

Dados los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  y los puntos  $P$  y  $Q$



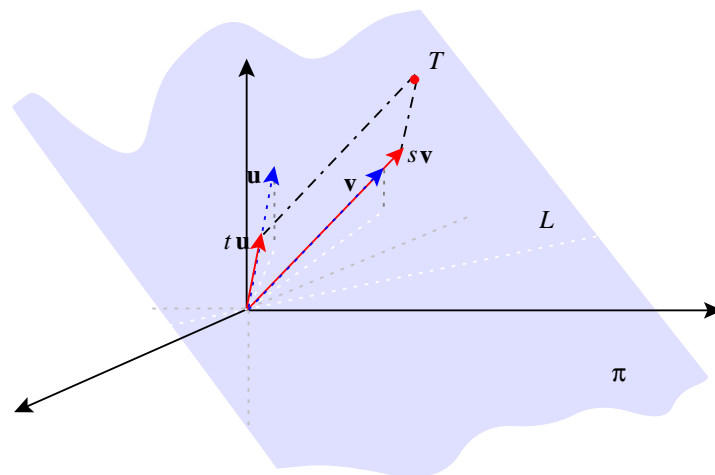
- a) proyecte  $P$  paralelamente a  $\mathbf{v}$  sobre la recta generada por  $\mathbf{u}$
- b) proyecte  $P$  paralelamente a  $\mathbf{u}$  sobre la recta generada por  $\mathbf{v}$
- c) sume los vectores con origen  $(0, 0)$  y extremo en las proyecciones halladas en el ítem anterior.
- d) Repita los incisos anteriores reemplazando a  $P$  por  $Q$ .

**Planos en el Espacio**

Consideremos primero un plano  $\pi$  que pasa por el origen.

Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  no nulos y no alineados. Llamemos  $\pi$  al (único) plano que pasa por  $(0, 0, 0)$  y los extremos de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son paralelos al plano  $\pi$  pues tanto su origen como su extremo están en  $\pi$ .

Ahora tomamos un punto  $T$  cualquiera en  $\pi$  y vamos a escribirlo en términos de  $\mathbf{u}$  y de  $\mathbf{v}$ . Para ello, proyectamos a  $T$  sobre las rectas generadas por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  paralelamente a  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{u}$ , respectivamente.



$$T = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$$

$L$ : intersección de  $\pi$  con el plano  $xy$

Se generan así dos vectores, dibujados en rojo en la figura anterior, uno paralelo a  $\mathbf{u}$  y otro paralelo a  $\mathbf{v}$ . Pero entonces, existen escalares  $t, s \in \mathbb{R}$  tales que estos vectores se escriben, respectivamente, como

$$t\mathbf{u} \quad \text{y} \quad s\mathbf{v}$$

y claramente su suma es  $T$ ; i.e.,

$$T = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$$

Hemos comprobado hasta aquí que  $\pi \subset \{t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \mid t, s \in \mathbb{R}\}$ ; es decir, todos los puntos de  $\pi$  se escriben como suma de un múltiplo de  $\mathbf{u}$  más un múltiplo de  $\mathbf{v}$ .

Es intuitivamente claro que cuando  $s$  y  $t$  recorren todos los números reales, el extremo de  $t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$  va a ir dando cada uno de los puntos de  $\pi$ . Resulta así que

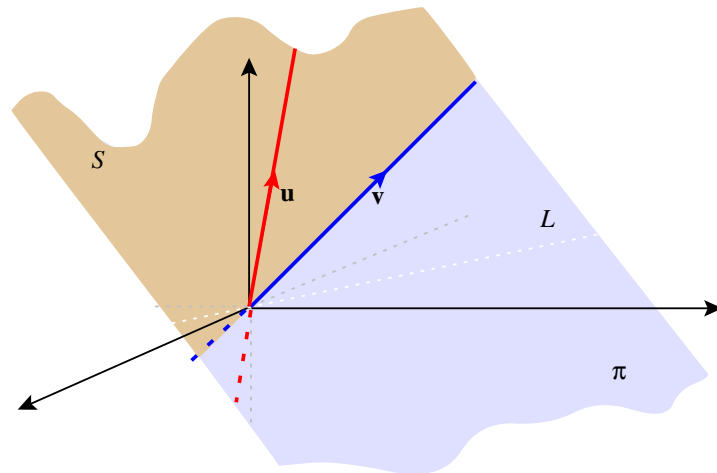
$$\pi = \{t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

### Observaciones

1. A esta altura es oportuno analizar —como lo hicimos con las rectas— qué representa el signo de los parámetros. Consideremos, por ejemplo, la parte de  $\pi$  dada por

$$S = \{t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \mid t \geq 0, s \in \mathbb{R}\}$$

La recta generada por  $\mathbf{v}$  está incluida en  $S$  dado que  $s$  toma todos los valores reales, pero respecto de  $\mathbf{u}$  sólo hay múltiplos positivos; luego,



2. Notemos que para describir a  $\pi$  necesitamos *dos variables independientes*:  $s$  y  $t$ .

Consideremos ahora un plano que no pasa por el origen.

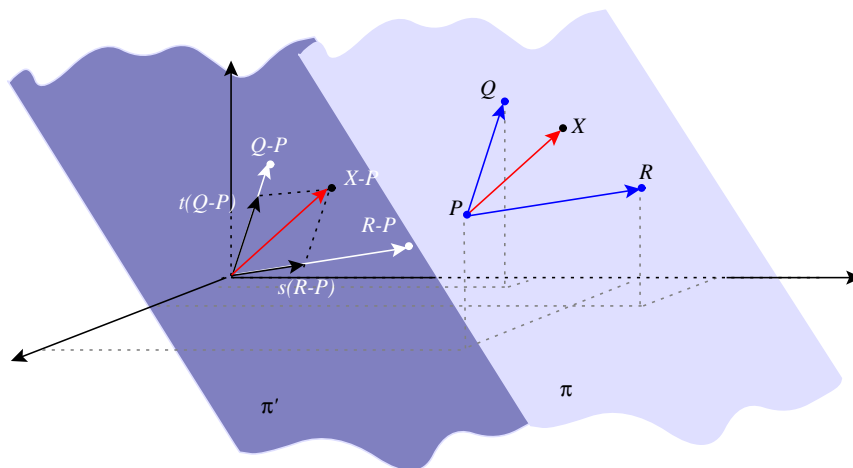
Sean  $P = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  y  $R = (x_2, y_2, z_2)$  tres puntos de  $\mathbb{R}^3$  no colineales. Sea  $\pi$  el único plano que los contiene. Tal como hicimos con las rectas, vamos a utilizar lo que ya sabemos para planos que pasan por el origen.

Sea  $\pi'$  el plano paralelo a  $\pi$  que pasa por el origen. Entonces, dado un punto  $X$  en  $\pi$ , el extremo de  $X - P$  está en  $\pi'$  y por lo tanto se puede escribir en términos de los vectores

$$Q - P \quad , \quad R - P$$

i.e., existen escalares  $s, t \in \mathbb{R}$  tales que

$$X - P = t(Q - P) + s(R - P)$$



$$\begin{aligned} X &= P + X - P \\ &= P + t(Q - P) + s(R - P) \end{aligned}$$

pero entonces,

$$X = P + t(Q - P) + s(R - P)$$

Concluimos de aquí que

$$\pi = \{P + t(Q - P) + s(R - P) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

lo que también puede expresarse en la forma

$$\pi : (x, y, z) = P + s(Q - P) + t(R - P) \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

### *Ecuaciones paramétricas de un plano*

Si en la ecuación anterior reemplazamos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  por su expresión en coordenadas

$$P = (x_0, y_0, z_0) \quad , \quad Q = (x_1, y_1, z_1) \quad , \quad R = (x_2, y_2, z_2)$$

obtenemos las *ecuaciones paramétricas* del plano  $\pi$  que pasa por los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + s(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + s(y_1 - y_0) + t(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + s(z_1 - z_0) + t(z_2 - z_0) \end{cases} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}$$

### **Ejercicio 12**

Calcule la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas del plano  $\pi$  definido por

a) pasa por  $(2, 1, 3)$ ,  $(0, 2, 0)$  y  $(1, 0, 3)$

b) pasa por  $(1, 1, 1)$  y es paralelo a los vectores  $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$  y  $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$

### **Ejercicio 13**

En cada situación planteada en el ejercicio anterior, halle un vector  $\mathbf{u}$  que sea ortogonal a  $\pi$ .

### *Ecuación implícita de un plano*

Notemos que los vectores  $\mathbf{u} = Q - P$  y  $\mathbf{v} = R - P$  son paralelos a  $\pi$ . Tomemos una recta perpendicular al plano  $\pi$ ; si  $\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$  es un vector que da la dirección de  $L$ ,

$$\mathbf{N} \perp \pi$$

y por consiguiente,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad , \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} = 0$$

de donde

$$\mathbf{N} \cdot (X - P) = 0$$

para todo  $X \in \pi$ .

Llegamos así a otra forma de describir a  $\pi$ , mediante su *ecuación implícita*

$$\mathbf{N} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

siendo  $(x_0, y_0, z_0)$  las coordenadas de  $P$ .

### Observación

Si  $\mathbf{N} = (A, B, C)$  la ecuación anterior se escribe en la forma

$$0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = Ax + By + Cz + [-Ax_0 - By_0 - Cz_0]$$

si llamamos  $D$  al número

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

resulta que la ecuación implícita de  $\pi$  toma la forma

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

y sabemos que el vector  $(A, B, C)$  es ortogonal a  $\pi$ .

### Ejemplo

Sean

$$\begin{aligned} \pi : (x, y, z) &= t(2, 0, 1) + s(3, -2, 1) \quad (s, t \in \mathbb{R}) \quad \text{y} \\ \pi' : (x, y, z) &= (1, 1, 0) + p(2, 0, 1) + q(3, -2, 1) \quad (p, q \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Vamos a encontrar sus respectivas ecuaciones implícitas.

Recordando lo hecho arriba necesitamos hallar un vector ortogonal a cada uno de ellos. Aquí conviene observar que ambos planos son paralelos<sup>3</sup> con lo cual podemos tomar el mismo vector ortogonal  $\mathbf{N}$  para los dos que deberá satisfacer

$$\mathbf{N} \cdot (2, 0, 1) = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{N} \cdot (3, -2, 1) = 0$$

Si denotamos  $\mathbf{N} = (x, y, z)$

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -2x \\ x - 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -4y \\ x = 2y \end{cases}$$

Luego, el vector

$$\mathbf{N} = (2, 1, -4)$$

es ortogonal a ambos planos. De modo que ya podemos decir que

$$\pi : 2x + y - 4z + D = 0 \quad , \quad \pi' : 2x + y - 4z + D' = 0$$

---

<sup>3</sup>¿por qué?

Respecto de  $\pi$  es claro que  $(0, 0, 0) \in \pi$  pues  $(0, 0, 0) = 0(2, 0, 1) + 0(3, -2, 1)$ ; de modo que  $(0, 0, 0)$  debe cumplir la ecuación de  $\pi$

$$2 \cdot 0 + 0 - 4 \cdot 0 + D = 0$$

es decir,  $D = 0$  y entonces

$$\pi : 2x + y - 4z = 0$$

También es muy claro que  $(1, 1, 0) \in \pi'$ ; luego, debe cumplir su ecuación

$$2 \cdot 1 + 1 - 4 \cdot 0 + D' = 0$$

es decir,  $D' = -3$  y entonces

$$\pi' : 2x + y - 4z - 3 = 0$$

### Ejercicio 14

Halle las ecuaciones implícitas de los planos del ejercicio ??.

### Ejercicio 15

Halle la ecuación implícita del plano  $\pi$  ortogonal al vector  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  que pasa por el origen.

¿Qué particularidad tienen las ecuaciones implícitas de los planos que pasan por el origen?

### Ejercicio 16

Dado el vector  $(5, -1, 3)$  halle dos vectores no paralelos entre sí  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  tales que

$$\mathbf{u} \perp (5, -1, 3) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} \perp (5, -1, 3)$$

¿Son únicos?

### Ejercicio 17

Encuentre dos vectores no nulos  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  ortogonales a  $(5, -1, 3)$  y también ortogonales entre sí.

¿Son únicos?

**Ejercicio 18**

¿Necesita hacer cuentas para saber si los siguientes planos son paralelos?

a)  $\pi : x - 2y + 3z = 2$  ,  $\pi' : x - 2y + 3z = -1$

b)  $\pi : x - 2y + 3z = 2$  ,  $\pi' : x - 5y + 3z = -1$

c)  $\pi : x - 2y + 3z = 2$  ,  $\pi' : 2x - 4y + 6z = -1$

**Ejercicio 19**

Sea  $\pi$  el plano que pasa por

$$P = (1, 2, 0) \quad , \quad Q = (0, 1, 0) \quad , \quad R = (0, -1, 2)$$

a) halle una dirección normal a  $\pi$

b) halle las ecuaciones paramétricas de  $\pi$

c) exhiba una ecuación implícita de  $\pi$

*Ecuaciones implícitas de una recta en el espacio*

Hemos visto recién que —en  $\mathbb{R}^3$ — una ecuación del tipo

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

donde  $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ , representa un plano que resulta ser ortogonal al vector

$$(A, B, C)$$

Esto nos va a proporcionar otra forma de describir una recta en el espacio mediante ecuaciones implícitas. Desde luego no podrá ser solo *una* ecuación implícita porque eso representa un plano.

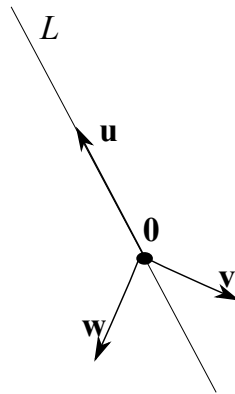
La idea será pensar a cada recta como intersección de dos planos lo que ya nos adelanta que para representar a una recta mediante ecuaciones implícitas vamos a necesitar exactamente dos.

★ *Caso 1:* la recta  $L$  pasa por el origen.

El siguiente esquema nos ayudará a descubrir cómo tomar esos planos para que al intersecarlos produzcan la recta en cuestión.

Tomemos  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  que dirija a  $L$ . Sabemos entonces que los puntos de  $L$  son los múltiplos de  $\mathbf{u}$ .

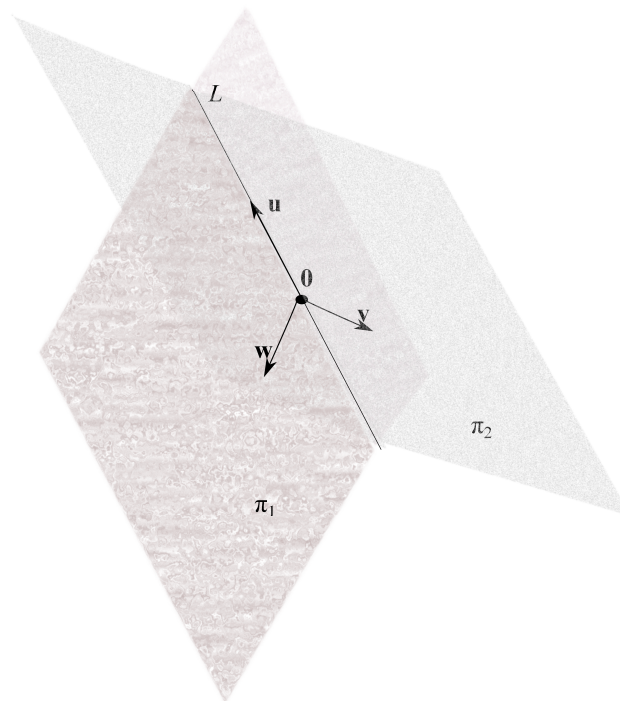
En un ejercicio anterior aprendimos cómo encontrar dos vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  —ortogonales entre sí— y también ortogonales a  $\mathbf{u}$ .



Los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{w}$  generan un plano y lo propio ocurre con los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Además, los puntos de  $L$  van a estar en ambos pues

$$t\mathbf{u} = t\mathbf{u} + 0\mathbf{w} \quad \text{y} \quad t\mathbf{u} = t\mathbf{u} + 0\mathbf{v}$$

Esto es decir que  $L$  está incluida en la intersección de estos planos; pero al ser distintos no pueden tener otra cosa en común más que esa recta. La siguiente figura ilustra este hecho



Llamemos

$$\pi_1 = \{t\mathbf{u} + s\mathbf{w} \mid t, s \in \mathbb{R}\} \quad , \quad \pi_2 = \{p\mathbf{u} + q\mathbf{v} \mid p, q \in \mathbb{R}\}$$

los argumentos anteriores aseguran que

$$L = \pi_1 \cap \pi_2$$

Tendremos entonces el problema resuelto si logramos encontrar las ecuaciones implícitas de estos planos. La forma en que elegimos los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  nos facilitan la tarea pues:

$$\mathbf{v} \perp \pi_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{w} \perp \pi_2$$

por lo tanto los coeficientes de la ecuación de  $\pi_1$  van a ser las coordenadas de  $\mathbf{v}$  y los de la ecuación de  $\pi_2$  serán las coordenadas de  $\mathbf{w}$ . Digamos que

$$\mathbf{v} = (A, B, C) \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = (A', B', C')$$

tenemos entonces que

$$\pi_1 : Ax + By + Cz = 0 \quad , \quad \pi_2 : A'x + B'y + C'z = 0 \quad ^4$$

Siendo  $L$  la intersección de  $\pi_1$  con  $\pi_2$  resulta que sus puntos son exactamente los que satisfacen ambas ecuaciones y por eso escribimos

$$L : \begin{cases} Ax + By + Cz = 0 \\ A'x + B'y + C'z = 0 \end{cases}$$

y las llamamos *ecuaciones implícitas* de  $L$ .

### Ejemplo

Consideremos la recta  $L : (x, y, z) = t(1, -1, 2) (t \in \mathbb{R})$ . Vamos a utilizar las ideas anteriores para hallar sus ecuaciones implícitas.

- ◆ Encontramos los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$

Digamos que  $\mathbf{v} = (x, y, z)$ . Debe cumplir, para ser ortogonal a  $(1, -1, 2)$ , que

$$0 = (x, y, z) \cdot (1, -1, 2) = x - y + 2z$$

Si tomamos  $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$  se cumple  $\mathbf{v} \perp (1, -1, 2)$ . Ahora digamos que  $\mathbf{w} = (x, y, z)$  y deberá cumplir:  $\mathbf{w} \perp (1, -1, 2)$  y  $\mathbf{w} \perp (1, 1, 0)$ ; luego,

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ y = -x \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = -x \end{cases}$$

es decir,  $\mathbf{w} = (x, -x, -x)$ . Tomamos uno en particular,

$$\mathbf{w} = (1, -1, -1)$$

y resulta que los tres vectores

$$\mathbf{u} = (1, -1, 2) \quad , \quad \mathbf{v} = (1, 1, 0) \quad , \quad \mathbf{w} = (1, -1, -1)$$

son ortogonales entre sí.

- ◆ Ecuaciones implícitas de  $L$

$$L : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

<sup>4</sup>Las ecuaciones son homogéneas porque estos planos pasan por el origen

★ *Caso 2:* situación general, la recta  $L$  no necesariamente pasa por el origen.

Llamemos  $L'$  a la recta paralela a  $L$  que pasa por el origen. El caso anterior nos dice que  $L'$  se puede expresar como intersección de dos planos  $\pi'_1$  y  $\pi'_2$ . A cada uno de ellos se lo expresa por su ecuación implícita y estas dos ecuaciones juntas dan lugar a las ecuaciones implícitas de  $L'$

$$L' : \begin{cases} Ax + By + Cz = 0 \\ A'x + B'y + C'z = 0 \end{cases}$$

Notemos que si trasladamos cada uno de estos planos hasta un punto  $P = (a, b, c)$  de  $L$  quedan definidos otros dos planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  cuya intersección es ahora  $L$ . Pero como

$$\pi_1 \parallel \pi'_1 \quad \text{y} \quad \pi_2 \parallel \pi'_2$$

ya sabemos cuáles serán sus ecuaciones implícitas

$$\pi_1 : Ax + By + Cz + [-Aa - Bb - Cc] = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : A'x + B'y + C'z + [-A'a - B'b - C'c] = 0$$

para simplificar la escritura denotamos

$$D = -Aa - Bb - Cc \quad , \quad D' = -A'a - B'b - C'c$$

y llegamos finalmente a las ecuaciones implícitas de  $L$

$$L : \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

### Ejemplo

Consideremos la recta  $L : (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, -1, 2)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). Aplicando las ideas desarrolladas arriba vamos a encontrar sus ecuaciones implícitas.

- ◆ Sea  $L' : (x, y, z) = t(1, -1, 2)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ).  $L'$  pasa por el origen y es paralela a  $L$ . Pero además es la recta que analizamos en el ejemplo anterior. Esto nos evita hacer algunas cuentas y nos permite afirmar

$$L' : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

- ◆ Ecuaciones implícitas de  $L$

Como  $(1, 2, 3) \in L$  y sabemos que las ecuaciones implícitas de  $L$  deben ser de la forma

$$L : \begin{cases} x - y - z = d \\ x + y = d' \end{cases}$$

para hallar el valor de  $d$  y de  $d'$  basta *obligar* a  $(1, 2, 3)$  a satisfacer estas ecuaciones; por lo cual

$$1 - 2 - 3 = d \quad \text{y} \quad 1 + 2 = d'$$

Llegamos así a que las ecuaciones implícitas de  $L$  son

$$L : \begin{cases} x - y - z = -4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

### Ejercicio 20

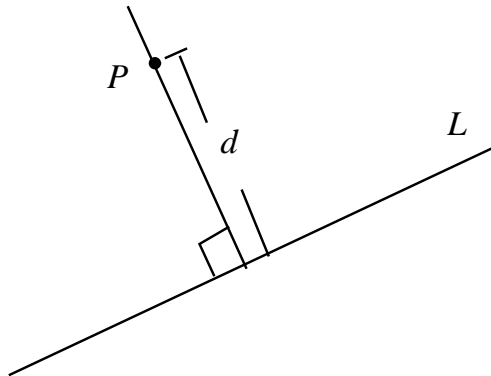
Halle las ecuaciones implícitas de la recta  $L$  que pasa por  $(-2, 3, 5)$  y  $(0, 3, -1)$ .

### Ejercicio 21

Halle las ecuaciones implícitas de la recta  $L$  ortogonal al plano  $\pi : x + y + z = 2$  que pasa por  $(-3, 0, 1)$ .

### Ejercicio 22

Dé un argumento geométrico que justifique que



$d$  es la menor de las distancias entre los puntos de  $L$  y  $P$ .

## *Distancia de un punto a una recta*

Definimos la distancia entre un punto  $P$  y una recta  $L$  y la denotamos

$$d(P, L)$$

como la menor de todas las distancias de  $P$  a cada uno de los puntos de  $L$ .

En principio podría no existir esa mínima distancia, pero probaremos que sí existe y además tendremos una manera de encontrarla.

Dados  $P$  y  $L$ , se pueden presentar dos situaciones:

*Caso 1:  $P \in L$*

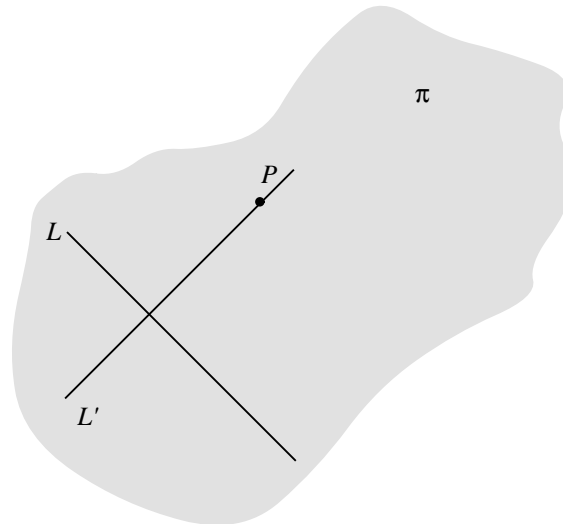
Claramente en este caso, como  $P \in L$ , la menor distancia se alcanza tomando la distancia entre  $P$  y  $P$ ; i.e.,

$$d(P, L) = d(P, P) = 0$$

*Caso 2:  $P \notin L$* 

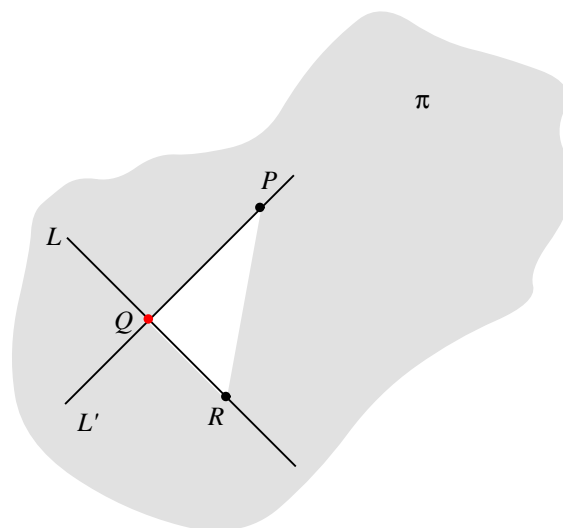
En este caso,  $P$  y  $L$  determinan un plano  $\pi$  que contiene a ambos. En este plano sabemos que existe una única recta  $L'$  tal que

$$P \in L' \quad \text{y} \quad L' \perp L$$



Y como están en un plano —y no son paralelas— se cortan en un punto  $Q$ . Veremos que este punto  $Q$  es el que está *más cerca* de  $P$  entre todos los puntos de  $L$ .

Observemos la figura



Cualquiera sea el punto  $R$  que tomemos en  $L$ , distinto de  $Q$ , junto con  $P$  y  $Q$  genera un triángulo rectángulo en  $Q$ . Por lo tanto,

$$d(P, R) = \text{longitud de la hipotenusa} > \text{longitud del cateto } PQ = d(P, Q)$$

En consecuencia,

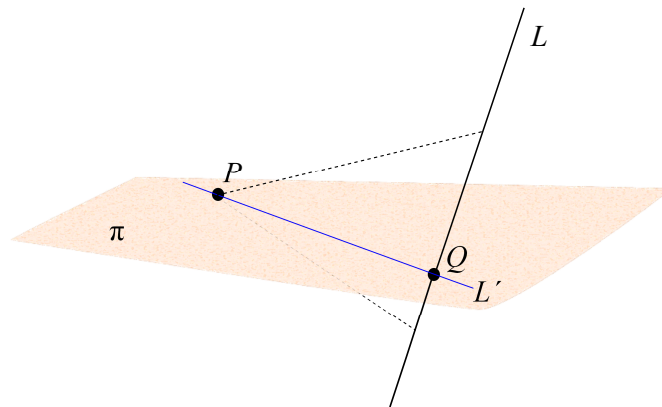
$$d(P, Q)$$

es la menor de las distancias de  $P$  a puntos de  $L$ . Luego, hemos probado que existe esa mínima distancia y que vale

$$d(P, L) = d(P, Q)$$

Este procedimiento, si bien permite comprobar fácilmente que hay un punto en  $L$  que es el que está *más cerca* de  $P$ , no es muy eficiente al momento de calcular esa distancia.

Miremos esta misma situación desde otro punto de vista que va a permitir calcular la distancia más fácilmente,



A partir del punto  $P$  y la recta  $L$  construimos el plano  $\pi$  que es ortogonal a  $L$  y pasa por  $P$ . Este plano y  $L$  se intersecan en un punto:  $Q$ . Como  $P, Q \in \pi$ , la recta  $L'$  que los une está incluida en  $\pi$  y por lo tanto es perpendicular a  $L$ .

Si tomamos cualquier otro punto en  $L$  queda formado un triángulo rectángulo que tiene por cateto a al segmento  $PQ$  y por hipotenusa al segmento que une ese punto con  $P$ . Por lo tanto la menor distancia de  $P$  a puntos de  $L$  se consigue cuando se toma  $Q$  en  $L$ . Luego,

$$d(P, L) = d(P, Q)$$

### Ejemplo

Sea  $L$  la recta que pasa por  $A = (-1, 0, 3)$  y es paralela al vector  $\mathbf{u} = (5, 1, 2)$ . El punto  $P = (2, 1, 1) \notin L$  pues  $(2, 1, 1) - A = (3, 1, -2)$  no es paralelo a  $\mathbf{u}$ . Estamos entonces en la situación anterior.

★ Construimos  $\pi$

Como tiene que ser perpendicular a  $L$  podemos tomar como ecuación de  $\pi$

$$5x + y + 2z = d$$

para hallar  $d$  recordemos que  $P \in \pi$ ; luego,

$$5 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 1 = d$$

o sea,  $d = 13$ . De modo que

$$\pi : 5x + y + 2z = 13$$

★ Calculamos  $Q$ , la intersección de  $L$  con  $\pi$

Los puntos de  $L$  son de la forma

$$(x, y, z) = (-1, 0, 3) + t(5, 1, 2) = (5t - 1, t, 2t + 3)$$

El punto  $Q$  debe tener esta forma y además satisfacer la ecuación de  $\pi$ ; es decir,

$$5(5t - 1) + t + 2(2t + 3) = 13$$

para algún  $t \in \mathbb{R}$ . Resulta que

$$t = \frac{4}{15}$$

esto es decir que

$$Q = (-1, 0, 3) + \frac{4}{15}(5, 1, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{15}, \frac{53}{15}\right)$$

y finalmente

$$d(P, L) = d(P, Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(2 - 1/3)^2 + (1 - 4/15)^2 + (1 - 53/15)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{438}{5}}$$

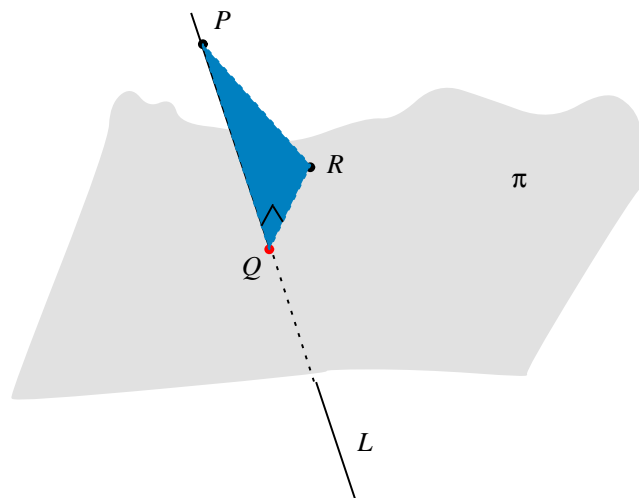
## *Distancia de un punto a un plano*

Como en el caso anterior, se trata de encontrar la menor de las distancias de  $P$  a puntos del plano  $\pi$ .

También como en el caso de la recta, si el punto  $P$  está en el plano  $\pi$ ,

$$d(P, \pi) = 0$$

Consideremos entonces un  $P \notin \pi$  y observemos la siguiente figura



Por  $P$  tomamos la recta  $L$  perpendicular a  $\pi$  que corta al plano en el punto  $Q$ . De manera análoga a como razonamos antes, vemos que en el triángulo de vértices  $P$ ,  $Q$  y  $R$  —que es rectángulo en  $Q$ — la distancia de  $P$  a  $R$  es la longitud de la hipotenusa y la distancia de  $P$  a  $Q$  es la longitud de un cateto. Por lo tanto, para cualquier  $R \neq Q$  en  $\pi$

$$d(P, R) > d(P, Q)$$

De modo que hemos probado que siempre existe la menor distancia de  $P$  a puntos de  $\pi$  y vale

$$d(P, \pi) = d(P, Q)$$

## Ejercicio 23

a) Sean  $L$  la recta paralela a  $(2, 2, 1)$  que pasa por  $(0, 1, 0)$ ,  $\pi : 3x + 2y - z = 2$  y  $P = (1, 0, 0)$ . Calcule:  $d(P, L)$  y  $d(P, \pi)$ .

b) Calcule la distancia entre  $P$  y  $L$  y entre  $P$  y  $\pi$  para

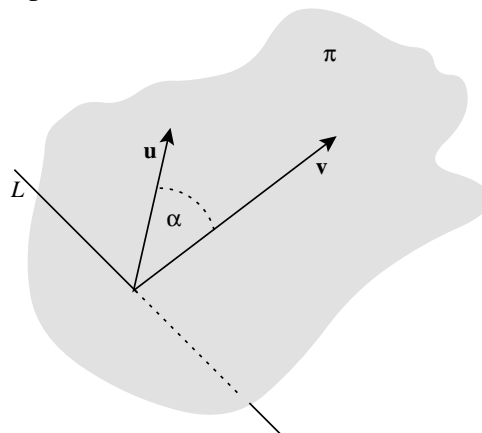
$$P = (2, 0, 1), L : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{cases}, \pi : (x, y, z) = (1, 0, -1) + t(0, 2, 0) + s(0, 3, 4) \quad t, s \in \mathbb{R}$$

## Producto Vectorial

Hemos definido un producto entre vectores que da como resultado un número, el *producto escalar*. Ahora vamos a definir otro producto entre vectores cuyo resultado es un vector.

Partimos de dos vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  no nulos que además no son paralelos<sup>5</sup> y buscamos otro, al que llamaremos *producto vectorial* de  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  y que denotaremos  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , que sea ortogonal a ambos.

Hacemos un esquema gráfico para ir entendiendo la situación,



Los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  determinan el plano  $\pi$  que pasa por el origen; por lo tanto, si queremos que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  sea ortogonal a ambos, deberá ser paralelo a la recta  $L$ , perpendicular a  $\pi$  y que pasa por el origen.

Hasta ahora tenemos determinada la dirección de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  pero nos queda pendiente decir cuál será el sentido y cuál la longitud. Respecto de esta última, aunque en este momento parezca *caprichoso*, diremos que será

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \alpha$$

siendo  $\alpha$  el ángulo entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ <sup>6</sup>.

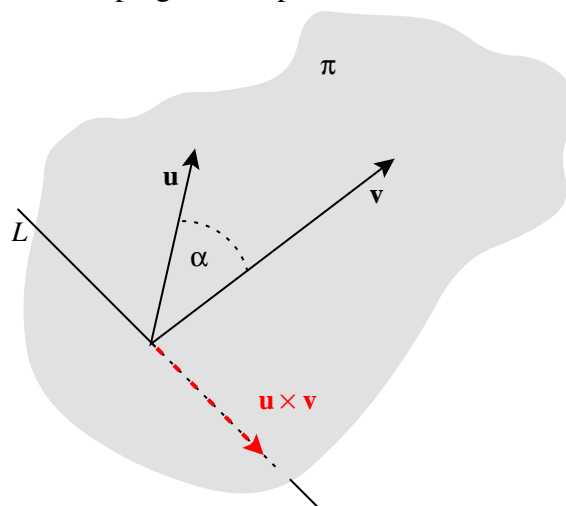
Para decidir hacia qué lado del plano va a apuntar  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ , aplicamos lo que se conoce como *regla de la mano derecha* y que consiste en

<sup>5</sup>estas condiciones sólo las vamos a imponer para motivar la definición; luego de definido veremos que se aplica a cualquier par de vectores.

<sup>6</sup>es importante notar que este número siempre será no negativo dado que  $0 \leq \alpha \leq \pi$

- ubicar el dedo índice de la mano derecha sobre el vector  $\mathbf{u}$  de modo que se curve de  $\mathbf{u}$  hacia  $\mathbf{v}$  recorriendo el ángulo  $\alpha$
- en la situación anterior, el pulgar tendrá dirección perpendicular al plano generado por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$
- daremos a  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  el sentido en el que apunta el pulgar

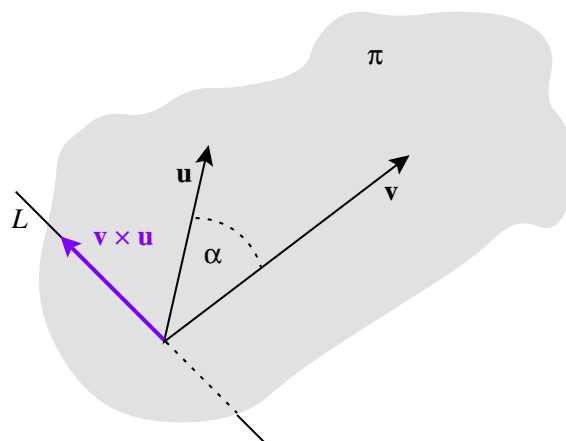
En el caso del gráfico anterior, el pulgar va a apuntar hacia el lado del plano que no vemos; i.e.,



Es claro a partir de aquí que el orden de los factores de este producto es importante. Si quisiéramos calcular, en la situación del gráfico,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

deberíamos apoyar el dedo índice de la mano derecha sobre  $\mathbf{v}$  de modo que se curve hacia  $\mathbf{u}$  recorriendo el ángulo  $\alpha$ . Ahora el pulgar va a apuntar hacia el lado del plano  $\pi$  que estamos viendo; i.e.,



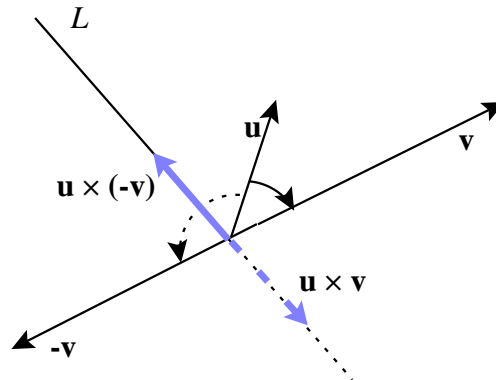
### Propiedades

1. Como tanto la norma como la dirección de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  y de  $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$  son iguales y su sentido es opuesto resulta

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

2. Mirando la siguiente figura es claro que

$$\mathbf{u} \times (-\mathbf{v}) = -\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$



*L: perpendicular al plano  
generado por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$*

Tenga en cuenta que  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  generan el mismo plano que  $\mathbf{u}$  y  $-\mathbf{v}$  y que

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} \times (-\mathbf{v})\|$$

3. Siendo que cuando uno multiplica a un vector por un número positivo se conserva la dirección y el sentido resulta que el ángulo que forma  $\mathbf{u}$  con  $\mathbf{v}$  es el mismo que el que forma  $\mathbf{u}$  con  $\lambda\mathbf{v}$ , si  $\lambda > 0$ . Por lo tanto tendremos que

$$\mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{v}) \quad \text{y} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

son paralelos y tienen el mismo sentido. Pero además,

$$\|\mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{v})\| = \|\mathbf{u}\| \|\lambda\mathbf{v}\| \sin \alpha^7 = \lambda \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \alpha = \lambda \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\lambda\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

En consecuencia, cuando  $\lambda > 0$

$$\mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

pero si  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = -\mu$  con  $\mu > 0$  y entonces

$$\mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (-\mu\mathbf{v}) = -\mathbf{u} \times (\mu\mathbf{v}) = -\mu\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \lambda\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

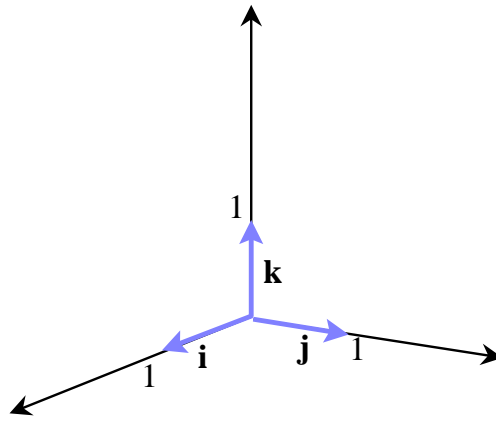
Conclusión: para cualquier  $t \in \mathbb{R}$  vale que

$$\mathbf{u} \times (t\mathbf{v}) = t\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

4. Se definen los vectores unitarios

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \quad , \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad , \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

<sup>7</sup> $\alpha$  es el ángulo que forman tanto  $\mathbf{u}$  con  $\mathbf{v}$  como  $\mathbf{u}$  con  $\lambda\mathbf{v}$



Teniendo en cuenta que son ortogonales entre sí y que son unitarios es fácil comprobar que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$$

Y como consecuencia de esto,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 1 \quad ^8$$

5. Si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  no son paralelos,

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \text{área del paralelogramo determinado por } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v}$$

### Ejercicio 24

Dados los vectores  $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$  y  $\mathbf{v} = (0, -1, 0)$

- calcule  $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$
- determine la dirección de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ; es decir, indique sobre qué recta está  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
- averigüe cuál es el sentido de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
- haga un esquema gráfico
- deduzca de los cálculos anteriores el valor de las coordenadas del vector  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ .

### Proposición

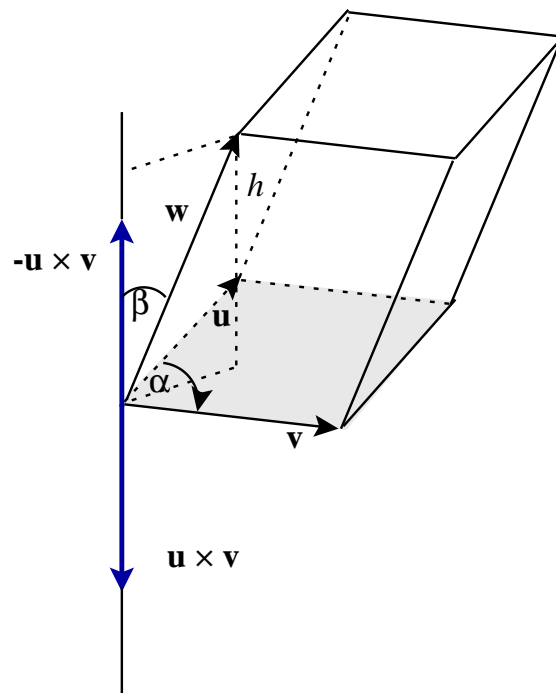
Sean  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  tres vectores de  $\mathbb{R}^3$  que no están en el mismo plano. Entonces el paralelepípedo  $\mathcal{P}$  que determinan tiene volumen

$$\text{vol}\mathcal{P} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}|$$

DEMOSTRACIÓN:

Hacemos un esquema de la situación

<sup>8</sup>no hace falta poner paréntesis porque no tendría sentido plantear:  $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k})$



En principio sabemos que

$$\text{vol}\mathcal{P} = \text{área de la base por altura}$$

La última observación nos dice que el área de la base es

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

En cuanto a la altura  $h$ , es el cateto adyacente al ángulo  $\beta$  con hipotenusa  $\|\mathbf{w}\|$ ; luego,

$$h = \|\mathbf{w}\| \cos \beta$$

De modo que

$$\begin{aligned} \text{vol}\mathcal{P} &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| h = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \beta = \|-\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \beta = (-\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = |(-\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| \\ &= |\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \end{aligned}$$

### Ejercicio 25

Calcule el volumen del paralelepípedo generado por los vectores

$$(1, 1, 0) \quad , \quad (0, 1, 0) \quad , \quad (-1, -2, 3)$$

### Observación

Como los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  generan siempre el mismo paralelepípedo, no importa el orden en que se los tome, se tiene

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{v} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{w} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}|$$

y también coincide este valor con el de cualquier otra permutación de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ .

Sin embargo, esto no es cierto si omitimos el módulo. Aunque en tal caso dos de estas permutaciones sólo pueden diferir en el signo.

## Orientación de ternas de vectores

Consideremos tres vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  de  $\mathbb{R}^3$  que no están en el mismo plano.

Llamemos  $\pi$  al plano generado por  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$ . Este plano determina dos semiespacios, de igual forma que una recta en  $\mathbb{R}^2$  determina dos semiplanos. Y podríamos pensar en dos lados de  $\pi$ : el que veríamos si nos ubicamos en uno de los semiespacios y el que veríamos si lo hacemos en el otro.

Como  $\mathbf{w}$  no puede estar en  $\pi$ , su extremo estará en *uno* de los dos semiespacios. Según se dé una u otra de estas situaciones diremos que la terna

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$$

está *orientada positivamente* o *negativamente*.

Si en lugar de  $\mathbf{w}$  tomamos  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  ya sabemos de qué lado del plano  $\pi$  se encuentra, dado que se debe cumplir la regla de la mano derecha. Volviendo a  $\mathbf{w}$ , hay sólo dos posibilidades: o está del mismo lado que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  o está del lado de  $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ .

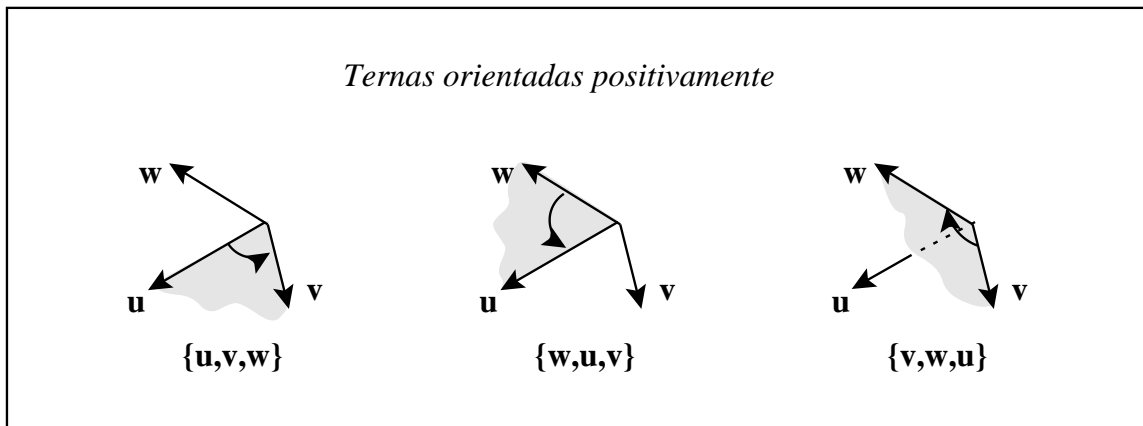
De esta forma, las ternas

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}\} \quad , \quad \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v} \times \mathbf{u}\}$$

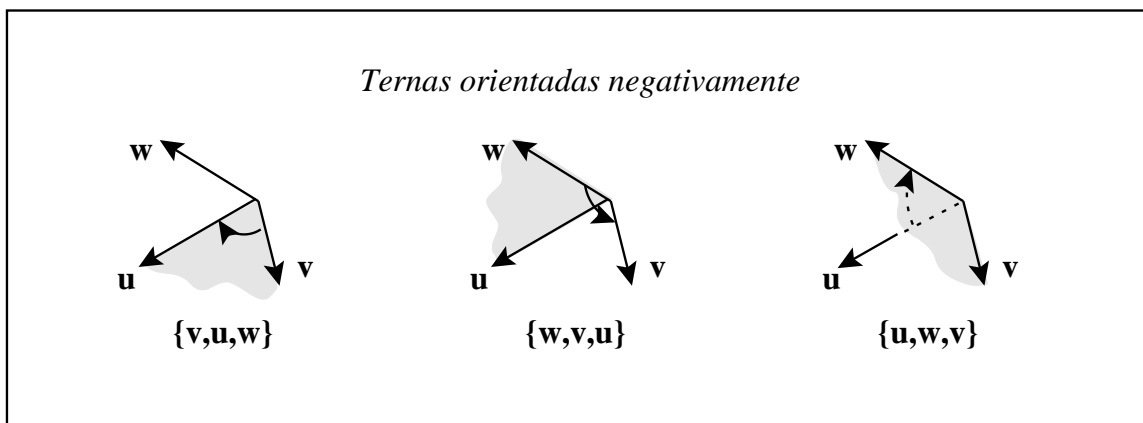
representan a cada una de estas dos posibilidades.

Diremos que  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  está *orientada positivamente* si  $\mathbf{w}$  está del mismo lado que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  y diremos que está *orientada negativamente* si está del mismo lado que  $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ .

Si partimos de una terna  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  orientada positivamente y consideramos todas las permutaciones posibles entre  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ , resulta que



mientras que



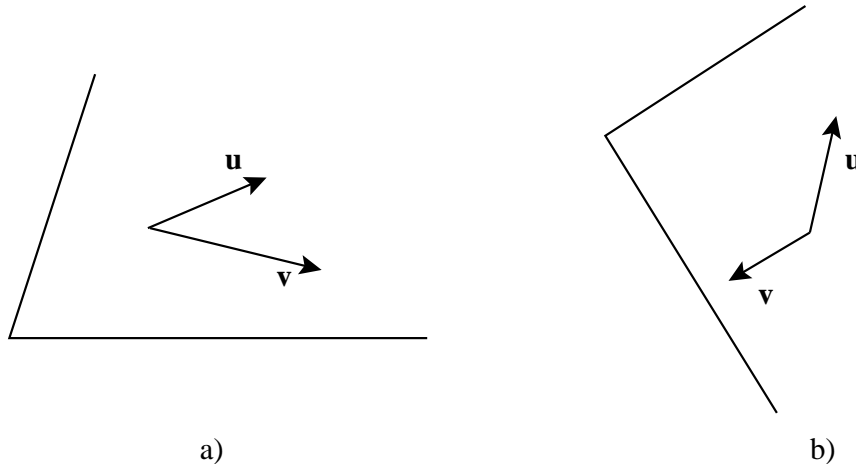
Es importante hacer notar que en cada grupo el orden de los vectores es cíclico.

### Ejercicio 26

Dados los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  que se muestran en el gráfico, ubique en él un tercer vector  $\mathbf{w}$  de modo que

- $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  tenga orientación positiva
- $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  tenga orientación negativa

En ambos casos, señale en el gráfico dirección y sentido de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ .



### Observación

Miremos las ternas que están en cada uno de los grupos anteriores,

- \* Las que están orientadas positivamente tienen la propiedad que el ángulo que forma el último vector con el producto vectorial de los dos primeros es menor o igual que un recto y por lo tanto, su coseno es positivo. Esto implica que los números

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad , \quad \mathbf{w} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$$

son todos positivos.

- \* Las que están orientadas negativamente tienen la propiedad que el ángulo que forma el último vector con el producto vectorial de los dos primeros está entre  $\frac{\pi}{2}$  y  $\pi$ , con lo cual su coseno es negativo y eso hace que los números

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \quad , \quad \mathbf{w} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{u} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$$

sean todos negativos.

- \* El módulo de todos ellos representa el volumen del mismo paralelepípedo, por lo tanto los números

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad , \quad \mathbf{w} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{v} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \quad , \quad \mathbf{w} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{u} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$$

tienen todos el mismo valor absoluto.

Conclusión:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$$

Este hecho nos va a permitir probar fácilmente una propiedad del producto vectorial que a su vez nos dará una forma de calcularlo a partir de las coordenadas de los vectores.

### Proposición

Sean  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  vectores de  $\mathbb{R}^3$  que no están en un mismo plano. Entonces,

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$$

DEMOSTRACIÓN:

Se trata de ver que

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) - \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

Pero en las propiedades del producto escalar (página 5) vimos que para probar que un vector es nulo alcanza con verificar que es ortogonal a cualquier vector del espacio. Hagamos eso, tomemos un  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$  cualquiera y calculemos

$$\begin{aligned} [\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) - \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{w}] \cdot \mathbf{z} &= \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{z} - \mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{u} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} \\ &= \mathbf{z} \times \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) - \mathbf{z} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{z} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{orden cíclico} \\ &= \mathbf{z} \times \mathbf{u} \cdot [\mathbf{v} + \mathbf{w} - \mathbf{v} - \mathbf{w}] \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

y como  $\mathbf{z}$  es cualquier vector del espacio, esto significa que

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) - \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

es decir,

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$$

### Observación

Si bien hemos definido el producto vectorial para vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  no paralelos, al pedir que

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \alpha$$

se ve que si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  fuesen paralelos,  $\alpha = 0, \pi$ ; con lo cual, se puede convenir que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

si  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son paralelos.

## Proposición

Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Entonces,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

DEMOSTRACIÓN:

Vamos a escribir a  $\mathbf{u}$  y a  $\mathbf{v}$  en términos de los vectores  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ,

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (u_1, 0, 0) + (0, u_2, 0) + (0, 0, u_3) = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

Análogamente,

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= [u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}] \times [v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}] \\ &= u_1v_1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + u_1v_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + u_1v_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ &\quad + u_2v_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} + u_2v_2\mathbf{j} \times \mathbf{j} + u_2v_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ &\quad + u_3v_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + u_3v_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + u_3v_3\mathbf{k} \times \mathbf{k} \\ &= u_1v_2\mathbf{k} + u_1v_3(-\mathbf{j}) + u_2v_1(-\mathbf{k}) + u_2v_3\mathbf{i} + u_3v_1\mathbf{j} + u_3v_2(-\mathbf{i}) \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \end{aligned}$$

## Ejercicio 27

Dados los vectores  $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$  y  $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$

- calcule la dirección y módulo de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  y  $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
- halle el sentido de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  y de  $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$  y muéstrelo en un esquema gráfico
- escriba a  $\mathbf{u}$  y a  $\mathbf{v}$  en términos de los vectores canónicos:  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$
- calcule las componentes de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  y de  $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$  a partir de los resultados del inciso anterior y usando propiedades del producto vectorial
- calcule las componentes de  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  y de  $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$  usando la fórmula probada en la proposición anterior y compare con los resultados obtenidos en el inciso anterior.

NOTA: debe responder respetando estrictamente el orden de los incisos.

## Otros sistemas de coordenadas

Así como en el plano utilizamos dos maneras de ubicar un punto:

- ❑ las coordenadas cartesianas, donde el punto se piensa como intersección de rectas paralelas a los ejes y se le asocian dos números –sus coordenadas cartesianas– que corresponden al lugar en que cada una de estas rectas corta al eje perpendicular a ella. A estas coordenadas también se las suele llamar *rectangulares* pues el punto termina siendo uno de los vértices de un rectángulo.
  
- ❑ las coordenadas polares, donde un punto se piensa como intersección de una circunferencia centrada en el origen y una semirrecta cuyo origen también es el origen del sistema de coordenadas. En este caso al punto también se le asocian dos números –sus coordenadas polares– que corresponden a su distancia al origen (el radio de la circunferencia) y al ángulo que forma esta semirrecta con el semieje positivo de las abscisas. Así como para las coordenadas cartesianas el punto forma parte de un rectángulo, podríamos pensar que la curva asociada a las coordenadas polares es una circunferencia.

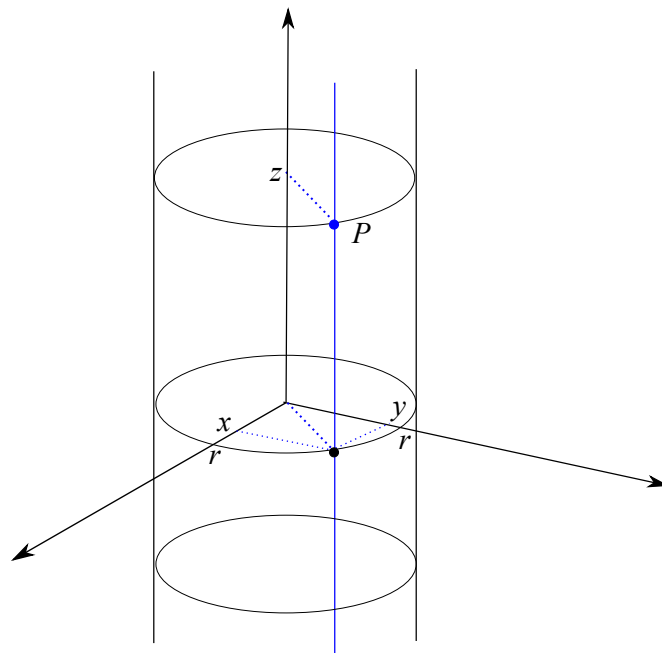
en el caso del espacio también se utilizan varias maneras de ubicar a sus puntos

- ❑ las coordenadas cartesianas, donde el punto se piensa como uno de los vértices de un paralelepípedo de caras paralelas a los planos coordenados y se le asocian tres números –sus coordenadas cartesianas– que corresponden al lugar donde cada cara corta al eje perpendicular a ella. En este caso podríamos decir que hay una superficie asociada a este sistema de coordenadas: el paralelepípedo.
  
- ❑ las coordenadas cilíndricas, donde un punto se piensa formando parte de un cilindro y
  
- ❑ las coordenadas esféricas, donde un punto se piensa ubicado sobre una esfera.

De estos dos últimos sistemas nos ocuparemos a continuación. Pero antes necesitaremos mencionar aspectos relacionados con las superficies que les dan nombre: el cilindro y la esfera.

### Cilindro

Pensemos en un cilindro circular vertical cuyo eje sea el eje  $z$  y sus cortes con planos horizontales produzcan circunferencias de radio  $r$



$$x^2 + y^2 = r^2$$

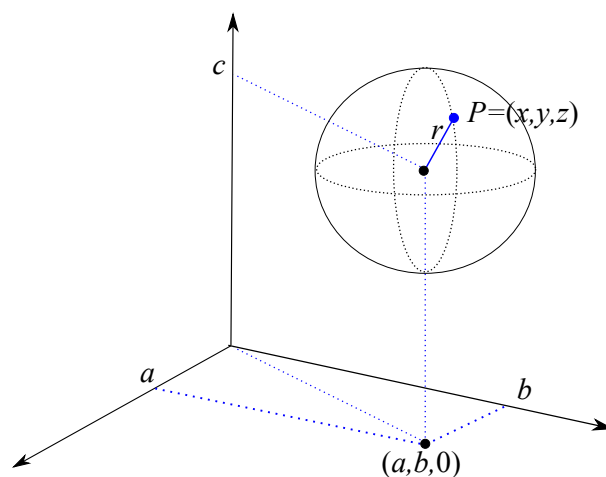
$z$ : puede tomar cualquier valor

Para que un punto  $P$  de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  esté en este cilindro lo único que deben cumplir los números  $x, y, z$  es que  $(x, y)$  esté en la circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio  $r$ ; es decir,  $x^2 + y^2 = r^2$  dado que  $z$  no está condicionado y por lo tanto podría tomar cualquier valor. Por lo tanto un punto  $(x, y, z)$  va a estar en este cilindro si y solo si

$$x^2 + y^2 = r^2$$

y por lo tanto describimos al cilindro por esta ecuación.

### Esfera



Una esfera de centro  $(a, b, c)$  y radio  $r$  está formada por todos los puntos que están a distancia  $r$  de su centro. Siendo que la distancia entre  $(x, y, z)$  y  $(a, b, c)$  está dada por  $\| (x - a, y - b, z - c) \|$  resulta que un punto de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  está en la esfera si y solo si

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

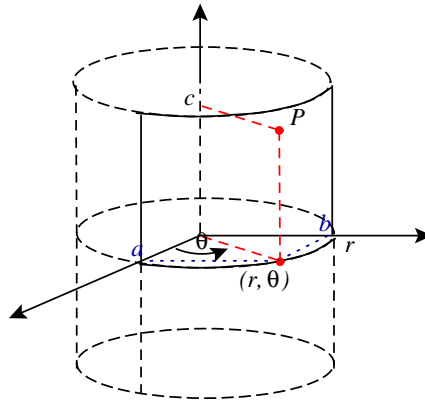
y por eso decimos que esta ecuación describe a la esfera.

## Coordenadas cilíndricas

Dado el punto  $P$  de coordenadas cartesianas  $(a, b, c)$  podemos pensar que está sobre un cilindro circular cuyo eje es el eje  $z$  y que tendrá entonces ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

para  $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ ,



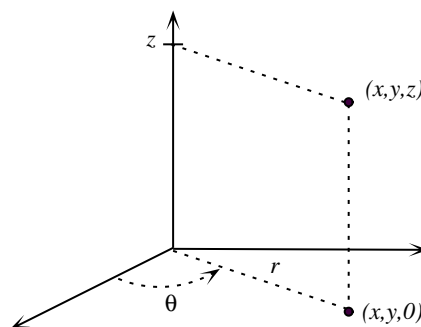
Al proyectar a  $P$  sobre el plano  $xy$  se genera un punto de este plano que, en lugar de expresarlo en coordenadas cartesianas, lo hacemos en coordenadas polares. Esto motiva la siguiente definición,

Las *coordenadas cilíndricas*  $(r, \theta, z)$  de un punto  $P$ , cuyas coordenadas cartesianas son  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , están definidas por

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \operatorname{sen} \theta \quad , \quad z = z$$

donde

$$r > 0 \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad , \quad z \in \mathbb{R}$$

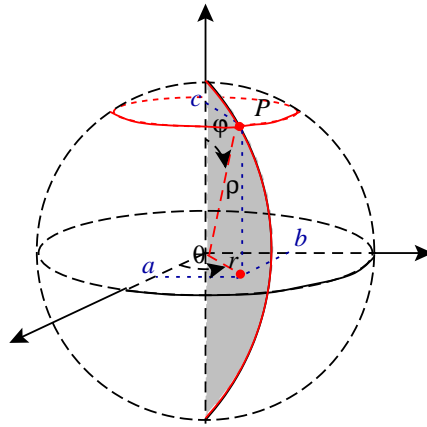


## Coordenadas esféricas

Dado el punto  $P$  de coordenadas cartesianas  $(a, b, c)$  podemos pensar que está sobre una esfera centrada en el origen que tendrá entonces ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

para  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} > 0$ ,



La idea en este caso será pensar a  $P$  como la intersección entre un paralelo y un meridiano de esta esfera. El paralelo queda determinado si damos el ángulo  $\varphi$  que se muestra en la figura y el meridiano se obtiene a partir del ángulo polar de la proyección de  $P$  sobre el plano  $xy$ .

Si llamamos  $\theta$  a este ángulo y  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  resulta que

$$a = r \cos \theta \quad , \quad b = r \operatorname{sen} \theta$$

Pero, por otro lado,  $r$  es cateto del triángulo rectángulo de vértices

$$(0, 0, 0) \quad , \quad (a, b, 0) \quad , \quad P$$

y su ángulo opuesto mide lo mismo que  $\varphi$  por ser ambos alternos internos entre paralelas; luego, siendo que la hipotenusa es el radio de la esfera,

$$r = \rho \operatorname{sen} \varphi$$

con lo cual

$$a = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \quad , \quad b = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$$

y como  $c$  es el cateto adyacente a  $\varphi$  en el triángulo rectángulo de vértices

$$(0, 0, 0) \quad , \quad (0, 0, c) \quad , \quad P$$

resulta que

$$c = \rho \cos \varphi$$

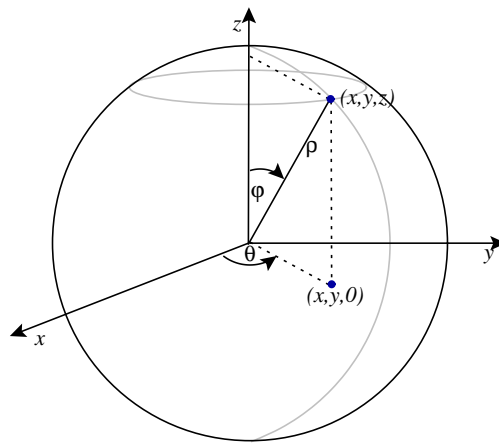
Esto motiva la siguiente definición,

Las **coordenadas esféricas**  $(\rho, \theta, \varphi)$  de un punto  $P$ , cuyas coordenadas cartesianas son  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , se definen por

$$x = \rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \quad , \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \quad , \quad z = \rho \cos \varphi$$

donde

$$\rho > 0 \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$



### Ejercicio 28

Ubique en un gráfico al punto

- $(-1, 2, -3)$  (coordenadas cartesianas)
- $(2, \frac{3\pi}{4}, 3)$  (coordenadas cilíndricas)
- $(1, \pi, \frac{\pi}{6})$  (coordenadas esféricas)

NOTA: debe utilizar *únicamente* la interpretación geométrica de cada sistema de coordenadas. Si halla primero las coordenadas cartesianas del punto (en los incisos b) y c)) la respuesta no se considerará válida.

### Ejercicio 29

Grafique

- $r = 2$  (pensádola expresada en coordenadas cilíndricas y luego en esféricas)
- $\theta = \frac{\pi}{3}$  (cilíndricas y esféricas)
- $z = 1$  (cartesianas y cilíndricas)
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (esféricas)

## PROBLEMAS

1. Para cada uno de los siguientes pares de puntos halle la distancia entre ambos y haga un esquema gráfico

(a)  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 2, 0)$                       (b)  $(1, 2)$  y  $(-4, 3)$   
 (c)  $(-3, 0, 4)$  y  $(1, 3, -2)$                       (d)  $(-3, 3)$  y  $(5, -4)$

2. En cada caso, ubique en un esquema gráfico las siguientes ternas de vectores y calcule la norma de cada uno. Compare uno de estos resultados con el obtenido en el ejercicio 1.

(a)  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(1, 0, 0) - (0, 2, 0)$   
 (b)  $(1, 2)$ ,  $(-4, 3)$ ,  $(1, 2) - (-4, 3)$   
 (c)  $(-3, 0, 4)$ ,  $(1, 3, -2)$ ,  $(-3, 0, 4) - (1, 3, -2)$   
 (d)  $(-3, 3)$ ,  $(5, -4)$ ,  $(-3, 3) - (5, -4)$

3. En cada caso, halle una ecuación que represente a todos los puntos  $Q$  que distan  $m$  del punto  $P$

(a)  $P = (1, 3)$ ,  $m = 2$                                       (b)  $P = (-2, -1)$ ,  $m = 1$   
 (c)  $P = (-2, 2, 1)$ ,  $m = 1$                                       (d)  $P = (a, b, c)$ ,  $m = 4$

Grafique el conjunto obtenido.

4. Halle dos vectores ortogonales a  $(-2, 0, 5)$  que no sean paralelos entre sí.

¿Se pueden encontrar dos vectores ortogonales a  $(-2, 0)$  que no sean paralelos entre sí?

5. Halle los vectores normales de los siguientes planos e indique en un esquema gráfico hacia qué lado del plano apuntan

(a)  $x = 2$                                       (b)  $y = -2$                                       (c)  $z = 4$   
 (d)  $x + y = 2$                                       (e)  $x + z = 2$                                       (f)  $y + z = 2$   
 (g)  $x + y + z = 3$                                       (h)  $x - 2y + 3z - 1 = 0$                                       (i)  $4x - 2y - 10 = 0$

6. Dibuje la gráfica de los planos siguientes

(a)  $x + 2y + 3z - 6 = 0$                                       (b)  $5x + 4y + 10z = 20$                                       (c)  $x - y = 0$   
 (d)  $y - 2z = 1$

*Sugerencia:* halle las intersecciones del plano con los ejes coordenados y dibuje el triángulo incluido en el plano

7. Muestre que la ecuación de un plano no vertical que pasa por el punto  $(a, b, c)$  es

$$z = A(x - a) + B(y - b) + c$$

*Sugerencia:* por ser no vertical se puede suponer que es de la forma:  $z = Ax + By + C$

8. Dados dos vectores no paralelos  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  determine si las siguientes ternas de  $\mathbb{R}^3$  tienen orientación positiva o negativa

(a)  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}\}$

(b)  $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}\}$

(c)  $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}, -\mathbf{u} \times \mathbf{v}\}$

9. Represente gráficamente los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$

(a)  $A_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

(b)  $A_2 = \{(x, y, -2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

(c)  $A_3 = \{(x, y, 2) \mid x, y \geq 0\}$

(d)  $A_4 = \{(x, y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

(e)  $A_5 = \{(x, y, x) \mid 1 \leq x, y \leq 2\}$

(f)  $A_6 = \{(x, y, x^2 + y^2) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

10. Dado el vector  $\mathbf{u} = (-3, 1, 5)$  encuentre un vector unitario  $\mathbf{v}$  que haga que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

tome el mayor valor posible. ¿Hay sólo uno?

Repita el ejercicio pero con el objetivo que el producto escalar tome el menor valor posible.

¿Cuáles serían las respuestas si se reemplazara a  $\mathbf{u}$  por cualquier vector no nulo?

11. En cada caso, halle la ecuación de un plano  $\pi$  que satisfaga las siguientes condiciones

a) es ortogonal al vector  $(2, -1, 3)$  y pasa por  $(0, 2, -3)$ .

b) es ortogonal al vector  $(2, -1, 3)$ .

c) pasa por  $(0, 1, 3)$ ,  $(-1, 3, 0)$  y  $(4, 0, -2)$

d) pasa por  $(0, 2, -1)$  y es paralelo al plano de ecuación  $2x - 3y + 4z = 0$

e) los vectores  $(-1, 0, 1)$  y  $(0, 2, 0)$  son paralelos a  $\pi$ .

f) es ortogonal al plano de ecuación  $2x - y + 4z = -1$  y es paralelo a la recta  $L$  que pasa por los puntos  $(-1, 0, 1)$  y  $(0, 2, 2)$ .

g) es vertical y paralelo al vector  $\mathbf{u} = (-2, 3, 0)$

Analice en cada caso si hay más de uno.

12. Halle la distancia entre los conjuntos dados

a) la recta  $L : (x, y) = (-1, 1) + t(4, 3)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) y el punto  $P = (3, -1)$

b) la recta  $L : (x, y) = (-1, 1) + t(4, 3)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) y el punto  $P = (-13, -8)$

c) la recta  $L : \begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$  y el punto  $P = (2, 3, -3)$

d) el plano  $\pi : 3x - 2y + z = 4$  y el punto  $P = (0, 0, 4)$

e) el plano  $\pi : 3x - 2y + z = 4$  y la recta  $L : (x, y, z) = (0, 0, 4) + t(1, 1, -1)$  ( $t \in \mathbb{R}$ )

13. En cada caso, halle todos los  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  que satisfacen

a)  $\mathbf{u} \cdot (-1, 2, 1) = 0$  y  $\mathbf{u} \cdot (3, 0, 0) = 0$

- b)  $\mathbf{u} \cdot (3, -2, 1) = 0$   
 c)  $\mathbf{u} \cdot (3, -2, 1) = 0$  y  $\|\mathbf{u}\| = 1$   
 d)  $\mathbf{u} \cdot (3, -2, 1) = 0$  y  $\|\mathbf{u}\| < 1$   
 e)  $\mathbf{u}$  forma un ángulo de  $\frac{\pi}{4}$  radianes con el semieje  $z$  positivo  
 f)  $\mathbf{u}$  forma un ángulo de  $\frac{\pi}{4}$  radianes con el semieje  $z$  negativo

Interprete geoméricamente cada resultado.

14. Muestre que  $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$  para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ .
15. En cada uno de los casos siguientes: halle la ecuación correspondiente y grafique
- esfera de centro en  $(-1, 2, 3)$  y radio 2
  - esfera de centro en  $(2, -1, 3)$  que pasa por el origen
  - circunferencia que tiene al segmento  $[(-1, 3), (2, 6)]$  por diámetro.
  - segmento de recta que une  $(4, -1, 3)$  con  $(2, 3, -1)$
16. Las siguientes ecuaciones pueden representar subconjuntos tanto de  $\mathbb{R}^2$  como de  $\mathbb{R}^3$ . Analice en cada caso qué se obtiene cuando se la considera en el plano y cuando se lo hace en el espacio
- |                     |   |                       |
|---------------------|---|-----------------------|
| (a) $x = 0$         | (b) $y = 0$                                 | (c) $x = 0$ e $y = 0$ |
| (d) $x^2 + y^2 = 1$ | (e) $x + y = 3$                             | (f) $x^2 - y^2 = 1$   |
| (g) $y^2 - x^2 = 1$ | (h) $\frac{x^2}{2} + \frac{(y-2)^2}{4} = 3$ | (i) $x - 4y^2 = 9$    |
| (j) $y - 4x^2 = 9$  |   |                       |

Para cada ecuación haga un gráfico para el caso del plano y otro para el caso del espacio.

17. Calcule
- el área del paralelogramo determinado por los vectores
 
$$\mathbf{u} = (-1, 2, 4) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (0, 2, 2)$$
  - el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores
 
$$\mathbf{u} = (-1, 2, 4) \quad , \quad \mathbf{v} = (1, 1, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = (0, 2, 2)$$
18. a) Los siguientes puntos vienen dados en coordenadas cilíndricas; exprese cada uno en coordenadas cartesianas y esféricas
- $$\left(1, \frac{\pi}{4}, 1\right) \quad , \quad \left(2, \frac{\pi}{2}, -4\right) \quad , \quad \left(2, \frac{\pi}{6}, 2\right) \quad , \quad \left(1, \frac{\pi}{6}, 0\right) \quad , \quad \left(2, \frac{3\pi}{4}, -2\right)$$
- b) Exprese en coordenadas cilíndricas y esféricas los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas
- $$\left(0, \frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \quad , \quad \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad , \quad (-7, 0, 0) \quad , \quad (\sqrt{2}, 1, 1)$$

19. Describa el significado geométrico de las siguientes aplicaciones en coordenadas cilíndricas

- a)  $(r, \theta, z) \longrightarrow (r, \theta, -z)$   
 b)  $(r, \theta, z) \longrightarrow (r, \theta + \pi, z)$   
 c)  $(r, \theta, z) \longrightarrow (r, \theta + 3\frac{\pi}{4}, z)$

20. Describa el significado geométrico de las siguientes aplicaciones en coordenadas esféricas

- a)  $(r, \theta, \varphi) \longrightarrow (r, \theta + \pi, \varphi)$   
 b)  $(r, \theta, \varphi) \longrightarrow (r, \theta, \pi - \varphi)$   
 c)  $(r, \theta, \varphi) \longrightarrow (2r, \theta + \frac{\pi}{2}, \varphi)$

21. a) Describa las superficies dadas en coordenadas cilíndricas

- (i)  $r = \text{constante}$                       (ii)  $\theta = \text{constante}$                       (iii)  $z = \text{constante}$

b) Describa las superficies dadas en coordenadas esféricas

- (i)  $r = \text{constante}$                       (ii)  $\theta = \text{constante}$                       (iii)  $\varphi = \text{constante}$

22. a) Grafique la curvas dadas en coordenadas esféricas

- (i)  $r = 2, \theta = \frac{\pi}{4}$                       (ii)  $r = 2, \varphi = \frac{\pi}{3}$                       (iii)  $\theta = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{4}$

b) Grafique las curvas dadas en coordenadas cilíndricas

- (i)  $r = 2, \theta = \frac{\pi}{2}$                       (ii)  $r = 2, z = 3$                       (iii)  $\theta = \frac{\pi}{4}, z = 1$

23. Haga un esquema gráfico de las siguientes regiones descriptas en coordenadas esféricas

- |   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| (a) $\begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$  | (b) $\begin{cases} \rho = 2 \\ \varphi = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$                         | (c) $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{3} \\ \varphi = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$  | (d) $\rho \leq 2$                         |
| (e) $2 \leq \rho \leq 3$  | (f) $\rho \geq 3$  | (g) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$  | (h) $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$  |
| (i) $\pi \leq \theta \leq 2\pi$   | (j) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  | (k) $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$                                 | (l) $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ |
| (m) $\begin{cases} \rho \leq 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{4} \end{cases}$  | (n) $\begin{cases} \rho \leq 2 \\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ | (o) $\begin{cases} \rho \leq 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$               |   |
| (p) $\begin{cases} \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$ | (q) $\begin{cases} \rho \leq 2 \\ \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$  | (r) $\begin{cases} \rho \leq 2 \\ \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$ |   |

En los casos que corresponda indique quiénes son las cuádricas que limitan a estas regiones.

24. Halle la ecuación de una esfera con centro en  $(-1, 2, 3)$  y que pase por  $(0, 0, 9)$ .

25. Muestre que si

$$\mathbf{u} \cdot (1, 0, 0) = 0 \quad , \quad \mathbf{u} \cdot (1, 1, 0) = 0 \quad , \quad \mathbf{u} \cdot (1, 1, 1) = 0$$

entonces,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

26. Se sabe que el extremo de  $\mathbf{u}$  está sobre la esfera de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , que  $\mathbf{v}$  es unitario y que  $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{3\pi}{4}$ .

¿Le alcanza la información para calcular  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ ?

Interprete geoméricamente.