FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS E INGENIERIA

UCA

ALGEBRA Y GEOMETRIA

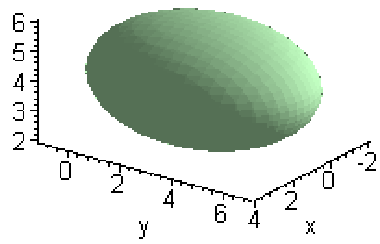
PRIMER CUATRIMESTRE 2011

TRABAJO PRÁCTICO 5

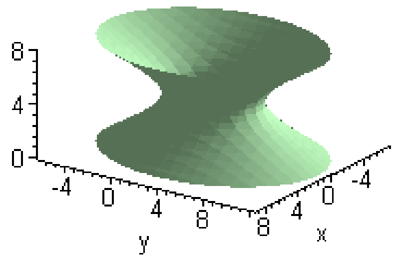
CONTENIDO

Página de Algebra y Geometría	**Consultas Online**
`http://www.lirweb.com.ar`	`http://mateingeuca.wordpress.com`
Una vez registrado podrá acceder a sus cursos	

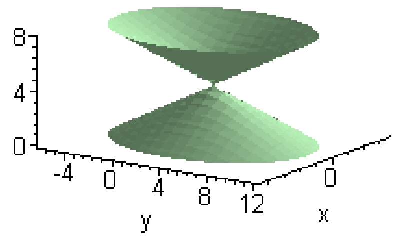
CUÁDRICAS



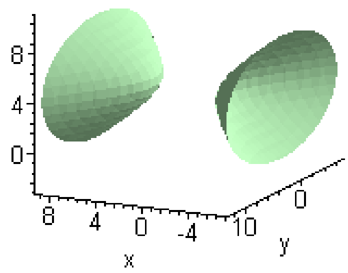
ELIPSOIDE: $$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$$



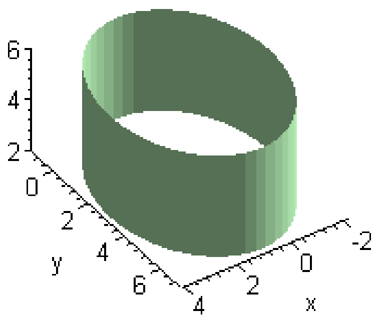
HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA: $$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=1$$



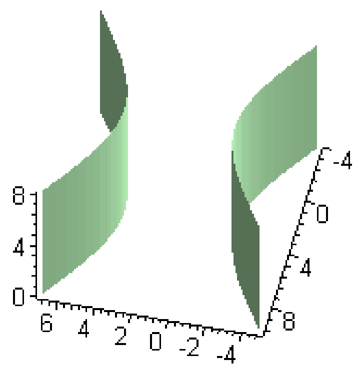
CONO: $$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(z-\gamma)^2}{c^2}=0$$



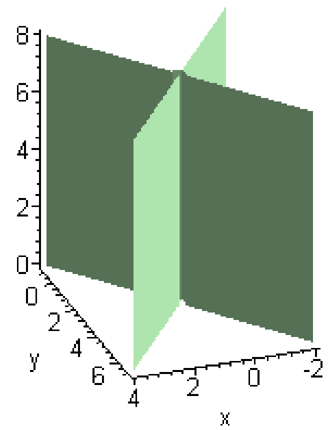
HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} - \dfrac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$



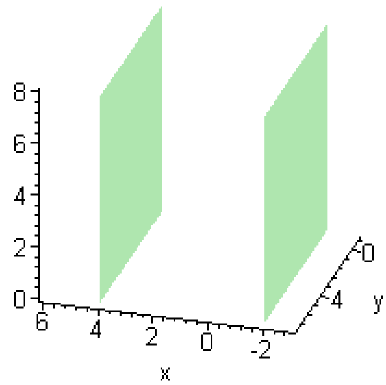
CILINDRO ELÍPTICO: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$



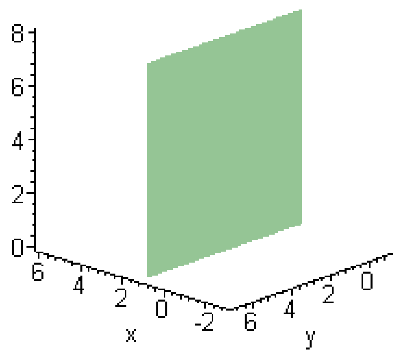
CILINDRO HIPERBÓLICO: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$



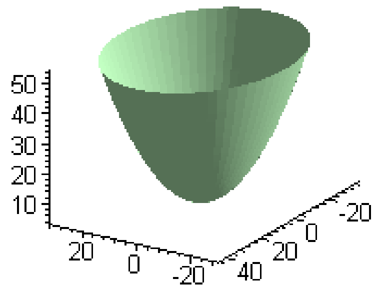
DOS PLANOS NO PARALELOS: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = 0$



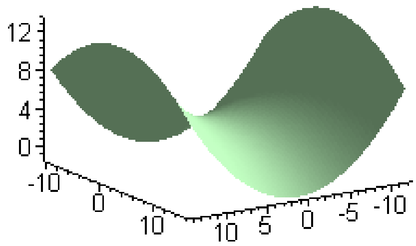
DOS PLANOS PARALELOS: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$



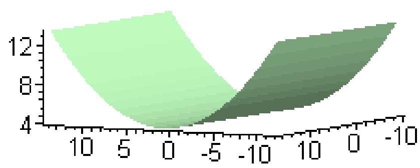
PLANO DOBLE: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 0$



PARABOLOIDE ELÍPTICO: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} - 2(z-\gamma) = 0$



PARABOLOIDE HIPERBÓLICO: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} - 2(z-\gamma) = 0$



CILINDRO PARABÓLICO: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - 2(z-\gamma) = 0$

Ejercicio 1

Reconozca de qué cuádrica se trata y haga un esquema gráfico que la represente

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

b) $2x^2 + 8(y-1)^2 + \frac{2(z+1)^2}{9} = 8$

c) $(x+4)^2 + y^2 = 9$

d) $(y-2)^2 + z^2 = 1$

e) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 34$

f) $x^2 + 4x - 4y^2 + 8 = 0$

g) $z = y^2$

h) $x = 2y^2 - 6y + 3$

Ejercicio 2

Escriba la ecuación de las cuádricas dadas por las siguientes condiciones

a) la esfera de centro en $(-2, 1, 3)$ y radio 2

b) el paraboloide circular de eje vertical, vértice en $(1, 0, 2)$ y tal que su intersección con el plano $z = 4$ produce una circunferencia de radio 4

c) el cilindro circular que tiene por eje a la recta $y = 3$ y radio 5

d) el cilindro parabólico paralelo al eje x, apoyado sobre el plano $y = 4$ y ubicado a su izquierda y que corta al plano xz en las rectas de ecuaciones $\begin{cases} y = 0 \\ z = 6 \end{cases}$ y $\begin{cases} y = 0 \\ z = -6 \end{cases}$

e) el hiperboloide de dos hojas con centro en el origen y eje vertical al que corta en los puntos $(0, 0, -3)$ y $(0, 0, 3)$ y tal que su intersección con el plano $z = -6$ es una circunferencia de radio 3.

SISTEMAS DE ECUACIONES

Nos ocuparemos en esta sección de encontrar el conjunto de puntos que satisface una serie de condiciones dadas mediante ecuaciones. Analizaremos un buen número de situaciones y daremos en cada caso una interpretación geométrica del resultado.

◆ SISTEMAS LINEALES EN $\mathbb{R}^2$

Se trata de encontrar todos los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} \tag{1}$$

Siendo que cada ecuación representa una recta en el plano, las posibilidades son:

— $\emptyset$: *si estas rectas son distintas y paralelas*

— un punto P: *si no son paralelas; en tal caso P representa a la intersección*

— una recta: *si ambas ecuaciones representan a la misma recta*

Comencemos considerando un caso particular

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ \qquad dy = \beta \end{cases} \tag{2}$$

Si fuese $d = 0$, también debería serlo β y en tal caso no tendríamos realmente *dos* condiciones. Supongamos entonces que $d \neq 0$. Resulta que (2) es equivalente a

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ \qquad y = \dfrac{\beta}{d} \end{cases} \tag{3}$$

Llegado a este punto tendremos que considerar dos casos:

Caso 1: $\quad a = 0$

Nos queda que (3) se convierte en

$$\begin{cases} by = \alpha \\ dy = \beta \end{cases} \tag{4}$$

y argumentando con b como lo hicimos con d, podemos suponer que $b \neq 0$. De esta forma, se trata de dos rectas horizontales —y por lo tanto paralelas— por lo cual la solución será

(i) $\emptyset$: si $\dfrac{\alpha}{b} \neq \dfrac{\beta}{d}$ o bien

(ii) la recta de ecuación $y = \dfrac{\alpha}{b}$: si $\dfrac{\alpha}{b} = \dfrac{\beta}{d}$

Caso 2: $a \neq 0$

En esta situación, (3) equivale a

$$\begin{cases} ax + \frac{b\beta}{d} = \alpha \\ y = \frac{\beta}{d} \end{cases} \tag{5}$$

y siendo $a \neq 0$, es exactamente lo mismo que escribir

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha}{a} - \frac{b\beta}{ad} \\ y = \frac{\beta}{d} \end{cases} \tag{6}$$

Obtuvimos entonces que hay un único punto que satisface ambas ecuaciones y es

$$P = \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{b\beta}{ad}, \frac{\beta}{d}\right)$$

Esto significa que las rectas dadas por

$$ax + by = \alpha \qquad \text{y} \qquad dy = \beta$$

no son paralelas y por lo tanto se cortan en un punto que acabamos de ver que es P.

Resumiendo, las soluciones del sistema (2) son

(i) $\emptyset$: si $\frac{\alpha}{b} \neq \frac{\beta}{d}$ y $a = 0$

(ii) la recta de ecuación $y = \frac{\alpha}{b}$: si $\frac{\alpha}{b} = \frac{\beta}{d}$ y $a = 0$

(iii) P: si $a \neq 0$

Para concluir con los sistemas lineales en $\mathbb{R}^2$ vamos a analizar la situación general llevándola a una similar a (2).

Si en el sistema (1) resulta que $a = 0$ o $c = 0$ estamos otra vez en la situación que acabamos de analizar. Por lo tanto, podemos suponer que

$$a \neq 0 \quad \text{y} \quad c \neq 0$$

Siendo que al multiplicar miembro a miembro una ecuación por un número distinto de cero no se altera el conjunto de sus soluciones, podemos asegurar que el sistema (1) equivale a

$$\begin{cases} acx + bcy = c\alpha \\ acx + day = a\beta \end{cases} \tag{7}$$

ahora bien,

$$\begin{cases} acx + bcy = c\alpha \\ acx + day = a\beta \end{cases} \underset{acx=c\alpha-bcy}{\overset{\Longleftrightarrow}{\uparrow}} \begin{cases} acx + bcy = c\alpha \\ c\alpha - bcy + day = a\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} acx + bcy = c\alpha \\ (da - bc)y = a\beta - c\alpha \end{cases}$$

y multiplicando miembro a miembro la primera ecuación por $\frac{1}{c}$ obtenemos finalmente que el sistema (1) es equivalente a

$$\begin{cases} ax \quad + \quad by = \alpha \\ \qquad (da - bc)y = a\beta - c\alpha \end{cases} \tag{8}$$

que claramente corresponde al tipo (2) y en consecuencia ya sabemos cómo resolver.

Ejemplos

En cada uno de los siguientes casos vamos a encontrar las soluciones y luego interpretaremos geométricamente el resultado.

1. Sea

$$\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

Como todos los coeficientes de x y de y son no nulos, estamos en la última situación analizada; procedemos como lo hicimos entonces y obtenemos

$$\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 6x + 9y = -6 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases} \underset{6x=-6-9y}{\overset{\Longleftrightarrow}{\uparrow}} \begin{cases} 6x + 9y = -6 \\ -6 - 9y - 4y = 8 \end{cases}$$

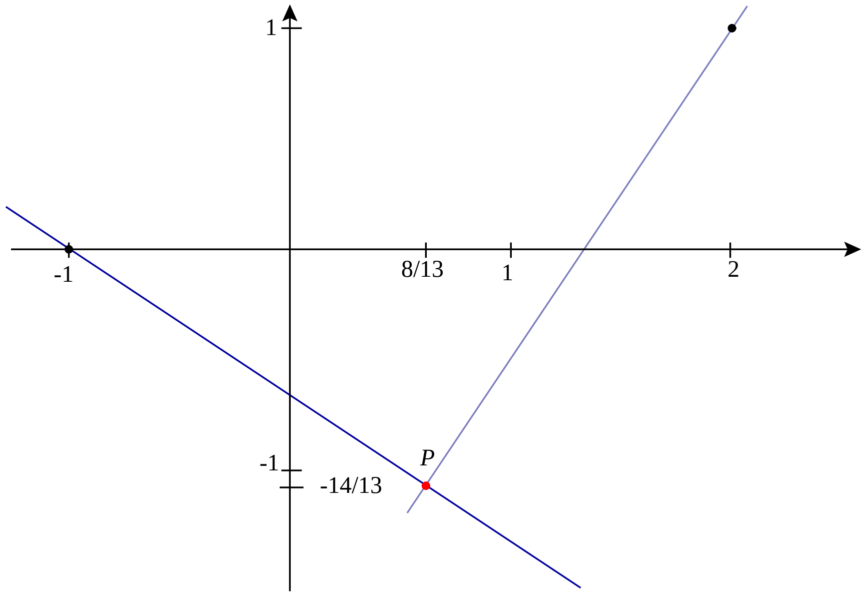
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6x + 9y = -6 \\ -13y = 14 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ y = -\dfrac{14}{13} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - \dfrac{42}{13} = -2 \\ y = -\dfrac{14}{13} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{42}{13} - 2 \\ y = -\dfrac{14}{13} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{13} \\ y = -\dfrac{14}{13} \end{cases}$$

Conclusión: hay un único punto —$P = (\frac{8}{13}, -\frac{14}{13})$— que cumple las condiciones del sistema.

Veamos ahora cómo se piensa esto de manera geométrica. Cada ecuación del sistema dado representa una recta en el plano real. Las dibujamos



De modo que al resolver este sistema lo que hicimos fue hallar la intersección de las dos rectas determinadas por sendas ecuaciones.

2. Sea

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -\frac{1}{3}x + y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

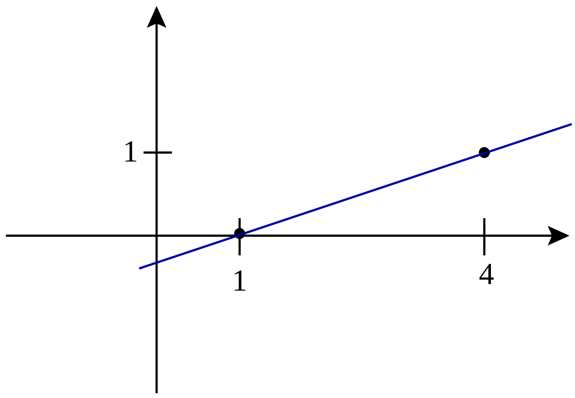
Comenzamos trabajando como en el caso anterior,

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -\frac{1}{3}x + y = -\frac{1}{3} \end{cases} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{multiplicamos la} \\ \text{segunda ecuación por } -3}}{\iff} \begin{cases} x - 3y = 1 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \iff x - 3y = 1$$

En realidad, ambas ecuaciones representan a la *misma* recta; de modo que el conjunto de puntos del plano que cumplen las condiciones del sistema son los puntos de la recta de ecuación

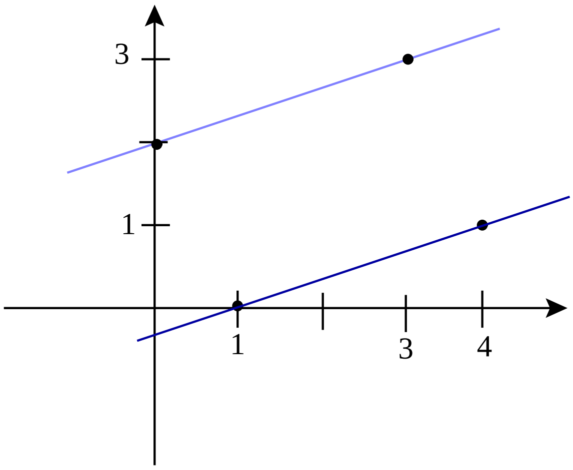
$$x - 3y = 1$$

Gráficamente,



3. Sea
$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -\frac{1}{3}x + y = 2 \end{cases}$$
Siguiendo el procedimiento de los incisos anteriores,
$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -\frac{1}{3}x + y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y = 1 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$$
lo que claramente muestra que el sistema es incompatible; i.e., no hay ningún punto de $\mathbb{R}^2$ que satisfaga ambas ecuaciones simultáneamente.

Gráficamente,



Viendo quiénes son las rectas se entiende por qué ningún punto de $\mathbb{R}^2$ satisface *ambas* ecuaciones.

Ejercicio 3

Resuelva los siguientes sistemas e interprete la solución gráficamente

a) $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 4x + 8y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 4x + 8y = -8 \end{cases}$

◆ SISTEMAS NO LINEALES EN $\mathbb{R}^2$

Esta forma de trabajo que hemos estado aplicando sirve también para resolver sistemas de ecuaciones que no son lineales.

Vamos a considerar una serie de ejemplos en los que hallaremos analíticamente el conjunto de puntos que satisfacen el sistema dado y luego veremos cuál es la interpretación geométrica del problema.

Ejemplos

1. Sea

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2y + 3x^2 = 0 \end{cases}$$

Comenzamos *igualando* los coeficientes de y en ambas ecuaciones pero con el cuidado debido para no modificar el conjunto de soluciones [1]

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2y + 3x^2 = 0 \end{cases} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 4x + 6y = 0 \\ 6y + 9x^2 = 0 \end{cases} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 6y=-4x}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} 4x + 6y = 0 \\ -4x + 9x^2 = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 4x + 6y = 0 \\ (9x - 4)x = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 4x + 6y = 0 \\ x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{4}{9} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{4}{9} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x = \frac{4}{9} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad (x, y) = (0, 0) \quad \text{o} \quad (x, y) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{8}{27}\right)
\end{aligned}$$

Finalmente, hemos probado que hay sólo dos puntos que satisfacen el sistema original,

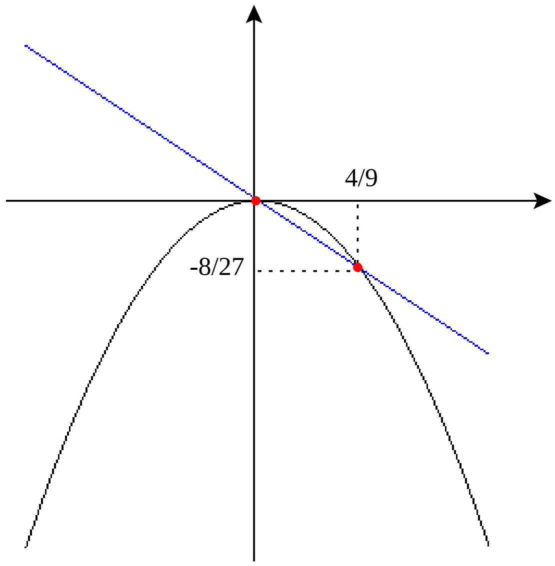
$$(0, 0) \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{4}{9}, -\frac{8}{27}\right)$$

Analicemos ahora este mismo problema desde el punto de vista geométrico. Los puntos que satisfacen ambas ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 2y + 3x^2 = 0 \end{cases}$$

podemos pensarlos como intersección de dos curvas: la recta $2x + 3y = 0$ y la parábola $2y+3x^2 = 0$; entonces, dibujamos ambas curvas y obtenemos –gráficamente– el conjunto de soluciones,

[1] es imprescindible que los sistemas que vayamos obteniendo sean equivalentes al dado; i.e., que tengan el mismo conjunto de soluciones.

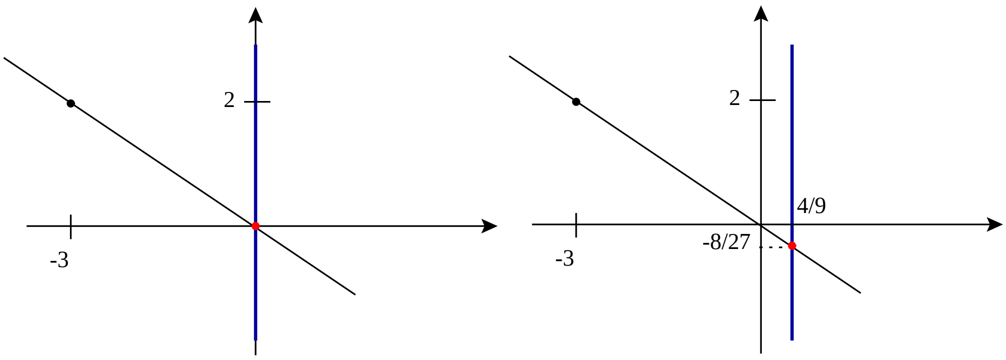


Comentario

Si repasamos lo hecho para resolver este primer sistema no lineal, vemos que partimos del sistema dado y lo fuimos transformado —con cuidado de no perder ni agregar soluciones— en un par de sistemas donde cada ecuación era lineal. En realidad, para encontrar las soluciones del sistema dado resolvimos dos sistemas lineales

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

y al unir sus respectivas soluciones obtuvimos las del original. Visto esto gráficamente,



2. Sea

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y^2 - x^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

Utilizando las ideas presentadas en los ejemplos anteriores podemos decir que

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y^2 - x^2 + 2y = 0 \end{cases} \underset{x^2=y^2+1}{\overset{\Longleftrightarrow}{\uparrow}} \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y^2 - 1 - y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2y = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 + 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} |x| = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad x = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resulta entonces que los puntos del plano que son solución del sistema dado son exactamente dos:

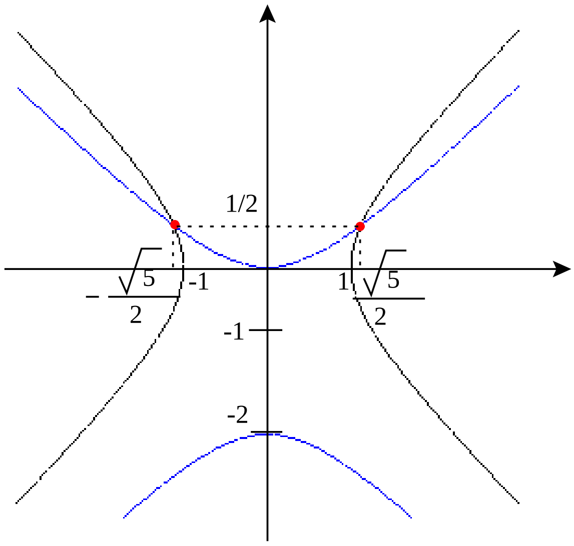
$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Analicemos ahora geométricamente este problema. Está claro que la primera ecuación representa la hipérbola equilátera de eje focal horizontal. Respecto de la segunda notemos que

$$y^2-x^2+2y = 0 \iff y^2+2y-x^2 = 0 \iff (y+1)^2-1-x^2 = 0 \iff (y+1)^2-x^2 = 1$$

es decir, también representa una hipérbola pero ahora su centro está desplazado a $(0, -1)$ y su eje focal es vertical.

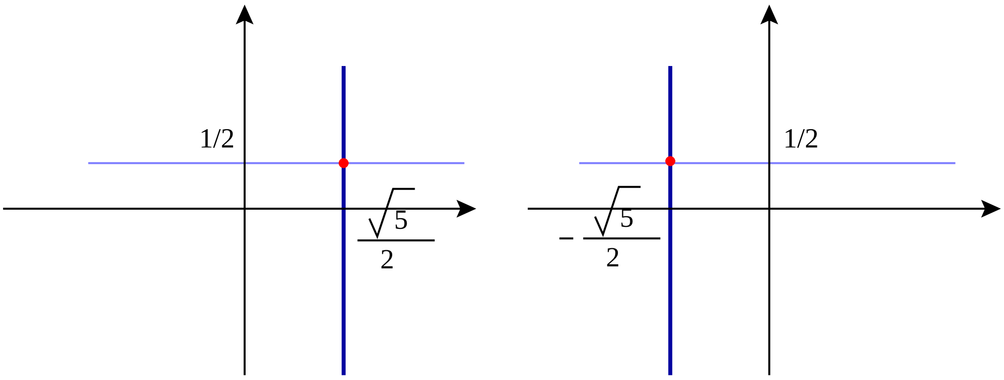
Resulta así que los dos puntos que obtuvimos como solución son las intersecciones de estas hipérbolas,



Por otro lado, reuniendo las soluciones de los sistemas

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} , \quad \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

fue que llegamos al conjunto de soluciones del sistema dado. Visto gráficamente,



Ejercicio 4

Resuelva los siguientes sistemas e interprete geométricamente el resultado

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x^2 + y^2 + 4x - 4y = 4 \\ x^2 + y^2 - 4x - 8y = -4 \end{cases}$

◆ Sistemas Lineales en $\mathbb{R}^3$

Como hicimos en $\mathbb{R}^2$ primero analizaremos una situación muy particular que es muy fácil de resolver. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = \alpha \\ \qquad\; b_2y + b_3z = \beta \\ \qquad\qquad\;\; c_3z = \gamma \end{cases}$$

con $a_1, b_2, c_3 \neq 0$.

Claramente la última ecuación dice que $z = \frac{\gamma}{c_3}$. Con esto, la segunda ecuación se convierte en

$$b_2y + b_3\frac{\gamma}{c_3} = \beta$$

de donde

$$y = \frac{\beta - b_3\frac{\gamma}{c_3}}{b_2}$$

y reemplazando estos valores en la primera

$$x = \frac{-a_2\frac{\beta - b_3\gamma/c_3}{b_2} - a_3\gamma/c_3}{a_1}$$

Fue muy simple encontrar la solución de este sistema por el hecho que *ciertos* coeficientes eran nulos. Desafortunadamente no son todos así, pero podemos llevarlos a un sistema similar al que acabamos de resolver y que tiene exactamente las mismas soluciones. Lo haremos con un ejemplo que es representativo de la situación general.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 2 \end{cases} \tag{9}$$

este sistema es equivalente a

$$\begin{cases} 4x - 12y + 4z = 4 \\ \mathbf{4x} + 2y - z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 2 \end{cases} \underset{4x=4+12y-4z}{\overset{}{\underset{\uparrow}{\iff}}} \begin{cases} 4x - 12y + 4z = 4 \\ \mathbf{4 + 12y - 4z} + 2y - z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x - 12y + 4z = 4 \\ \quad 14y - 5z = -4 \\ 2x - 3y - 2z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ \quad 14y - 5z = -4 \\ 2x - 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 6y + 2z = 2 \\ \quad 14y - 5z = -4 \\ \mathbf{2x} - 3y - 2z = 2 \end{cases} \underset{2x=6y-2z+2}{\underset{\uparrow}{\iff}} \begin{cases} 2x - 6y + 2z = 2 \\ \quad 14y - 5z = -4 \\ \mathbf{6y - 2z + 2} - 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ \quad 14y - 5z = -4 \\ \quad 3y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ \quad 3.14y - 3.5z = -3.4 \\ \quad 14.3y - 14.4z = 14.0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ \quad 42y - 15z = -12 \\ \quad \mathbf{42y} - 56z = 0 \end{cases} \underset{42y=15z-12}{\underset{\uparrow}{\iff}} \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ \quad 14y - 5z = -4 \\ \quad \mathbf{15z - 12} - 56z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ \quad 14y - 5z = -4 \\ \qquad -41z = 12 \end{cases}$$

Y este sistema —equivalente al original— tiene la forma del que resolvimos al comienzo. Fácilmente se obtiene que

$$z = -\frac{12}{41} \quad , \quad y = -\frac{16}{41} \quad , \quad x = \frac{5}{41}$$

Es decir, el único punto que satisface las tres ecuaciones simultáneamente es

$$\left(\frac{5}{41} , -\frac{16}{41} , -\frac{12}{41} \right)$$

Comentario

El procedimiento utilizado recién puede parecer un poco largo pero fue hecho para que quede absolutamente claro que en cada paso *realmente* obtenemos un sistema *equivalente* al anterior.

Notemos que

$$\mathbf{4 + 12}\boldsymbol{y} \mathbf{- 4}\boldsymbol{z} + 2y - z = 0$$

no es otra cosa que la diferencia entre la primera ecuación (multiplicada por 4, para igualar los coefientes de x) y la segunda (la que queríamos modificar). Algo similar ocurrió cuando trabajamos para modificar la tercera a partir de la segunda.

Entonces, podríamos simplemente escribir lo siguiente

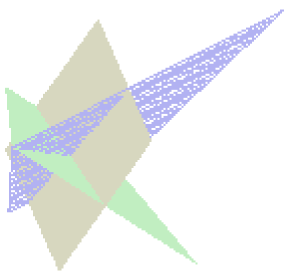
$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ (4-4)x + (2-(-12))y + (-1-4)z = 0 - 4 \\ (2-2)x + (-3-(-6))y + (-2-2)z = 2 - 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ \quad 14y + -5z = -4 \\ \quad 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ \quad 14y + -5z = -4 \\ \quad (42-42)y + (-56-(-15))z = 0 - (-12) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ \quad 14y + -5z = -4 \\ \quad\quad -41z = 12 \end{cases}$$

Geométricamente, este sistema representa la intersección de tres planos



Consideremos ahora el siguiente sistema,

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 4x + 2y - z = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Cada ecuación representa un plano y como no son paralelos [2] sabemos que el conjunto de puntos que satisface este sistema tiene que ser una recta.

Veamos cómo podemos verificar analíticamente que esto es realmente así. Comenzamos operando como en el ejemplo anterior y llegamos a que el sistema (10) equivale a

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 14y - 5z = -4 \end{cases} \tag{11}$$

Pero entonces, (x, y, z) es solución de (11) si y sólo si

$$z = \frac{14y + 4}{5} \qquad \text{y} \qquad x - 3y + z = 1$$

que equivale a

$$z = \frac{14}{5}y + \frac{4}{5} \qquad \text{y} \qquad x = 3y - \frac{14}{5}y + \frac{1}{5}$$

Es decir, (x, y, z) es solución de (11) si y sólo si

$$x = \frac{1}{5}y + \frac{1}{5} \qquad \text{y} \qquad z = \frac{14}{5}y + \frac{4}{5}$$

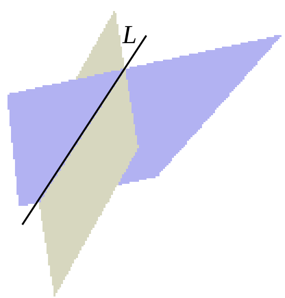
Pero entonces, toda solución de (11) se puede escribir en la forma,

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \left(\frac{1}{5}y + \frac{1}{5}\,,\ y\,,\ \frac{14}{5}y + \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\,,\ 0\,,\ \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}y\,,\ y\,,\ \frac{14}{5}y\right) \\ &= \left(\frac{1}{5}\,,\ 0\,,\ \frac{4}{5}\right) + y\left(\frac{1}{5}\,,\ 1\,,\ \frac{14}{5}\right)\end{aligned}$$

Confirmamos así que la solución de (10) es la recta L expresada paramétricamente en la forma

$$L: \quad (x, y, z) = \left(\frac{1}{5}\,,\ 0\,,\ \frac{4}{5}\right) + t\left(\frac{1}{5}\,,\ 1\,,\ \frac{14}{5}\right) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Gráficamente,



[2] ¿cómo puede comprobarse esto?

Aunque no tiene sentido llamar *sistema* a una sola ecuación, es oportuno analizar cómo se pueden encontrar las ecuaciones paramétricas de un plano, conocida su ecuación implícita ya que algo similar hemos hecho para hallar L en el ejemplo anterior.

Dado el plano

$$\pi: \quad ax + by + cz = d \qquad ((a,b,c) \neq (0,0,0))$$

tenemos que $(x,y,z) \in \pi$ si y sólo si [3]

$$y = \frac{d}{b} - \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}z$$

y entonces, $(x,y,z) \in \pi$ si y sólo si

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= \left(x, \frac{d}{b} - \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}z, z\right) = \left(0, \frac{d}{b}, 0\right) + \left(x, -\frac{a}{b}x, 0\right) + \left(0, -\frac{c}{b}z, z\right) \\ &= \left(0, \frac{d}{b}, 0\right) \; + \; x\left(1, -\frac{a}{b}, 0\right) \; + \; z\left(0, -\frac{c}{b}, 1\right)\end{aligned}$$

Ejercicio 5

Halle el conjunto de soluciones de estos sistemas y represente gráficamente el resultado

a) $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ x + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 3x - 3y + 9z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 3x - 3y + 9z = 6 \end{cases}$

◆ Sistemas no lineales en $\mathbb{R}^3$

Como cuando analizamos los sistemas en $\mathbb{R}^2$, no pretendemos hacer un estudio exhaustivo sino sólo dar algunas ideas que faciliten la resolución de los que surgen al estudiar extremos de funciones de varias variables y también los que nos ayuden a encontrar ecuaciones paramétricas de curvas y superficies.

[3] podemos suponer, por ejemplo, que $b \neq 0$ ya que alguno de ellos debe ser no nulo

Conviene tener claro desde un comienzo qué esperamos obtener al resolver un sistema. Cuando analizamos los de dos ecuaciones en $\mathbb{R}^2$, la solución se interpreta como la intersección de dos curvas; por lo tanto, salvo que tengan alguna porción de curva en común, el resultado esperado en este tipo de situaciones es, por lo general, un conjunto de puntos aislados.

En $\mathbb{R}^3$, la situación análoga sería tener tres ecuaciones con tres incógnitas. Esto significa intersecar tres superficies; de modo que, salvo que tengan alguna porción de superficie o curva en común, también obtendremos en general puntos aislados.

Pero en el espacio también podemos plantear sistemas de sólo dos ecuaciones. En este caso estamos intersecando dos superficies; por lo tanto, frecuentemente obtendremos como resultado una curva.

Analizaremos algunos ejemplos analíticamente y luego daremos la interpretación geométrica correspondiente.

Ejemplos

1. Sea

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy = 1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Recordando lo hecho con ecuaciones lineales, podemos reemplazar la última ecuación por la diferencia entre la primera y la última y obtendremos un sistema equivalente

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3xz + y = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy = 1 \\ 3y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = \dfrac{1}{y} = 3 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 - x - y \\ x = 3 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 1 - 3 - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{7}{3} \\ x = 3 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

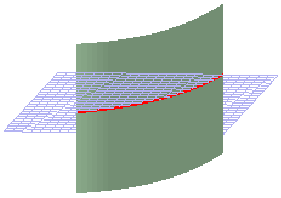
Obtuvimos en este caso que hay un único punto en la intersección de las tres superficies y es

$$P = \left(3, \frac{1}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

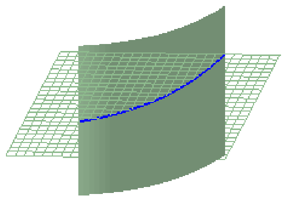
Veamos ahora este problema desde el punto de vista geométrico. El punto P resulta ser la intersección de las superficies

$$S : \quad x + y + z = 1 \quad , \quad T : \quad xy = 1 \quad , \quad U : \quad x - 2y + z = 0$$

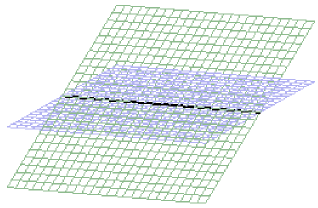
Si miramos las intersecciones de a dos



$S \cap T$

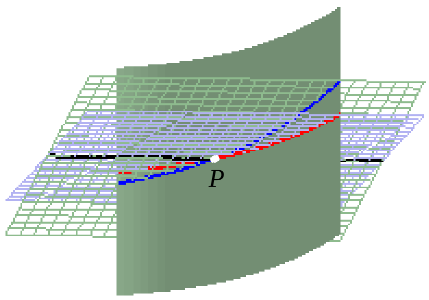


$T \cap U$



$S \cap U$

Si ahora reunimos a las tres superficies, los dos planos y una de las hojas del cilindro hiperbólico,



$S \cap T \cap U$

Las tres curvas se cortan en P.

2. Sea

$$\begin{cases} xyz = 0 \\ x^2z + z^2 = 0 \\ yx^2 + 2yz = 0 \end{cases}$$

Cada una de estas ecuaciones representa una superficie

$$S: \quad xyz = 0 \quad , \quad T: \quad x^2z + z^2 = 0 \quad , \quad U: \quad yx^2 + 2yz = 0$$

Hallar la solución del sistema es encontrar la intersección de estas tres superficies. Hagamos esto analíticamente; luego mostraremos su representación gráfica.

$$
\begin{cases} xyz = 0 \\ x^2z + z^2 = 0 \\ yx^2 + 2yz = 0 \end{cases}
\iff
\begin{cases} x = 0 \text{ o } y = 0 \text{ o } z = 0 \\ x^2z + z^2 = 0 \\ yx^2 + 2yz = 0 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} x = 0 \\ x^2z + z^2 = 0 \\ yx^2 + 2yz = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y = 0 \\ x^2z + z^2 = 0 \\ yx^2 + 2yz = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} z = 0 \\ x^2z + z^2 = 0 \\ yx^2 + 2yz = 0 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ yz = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y = 0 \\ z(x^2 + z) = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} z = 0 \\ yx^2 = 0 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \text{ o } z = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \text{ o } x^2 + z = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \text{ o } x^2 = 0 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}
$$

$$
\text{o } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + z = 0 \end{cases}
$$

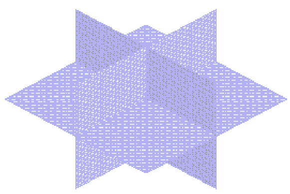
$$
\text{o } \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y = 0 \\ z = -x^2 \end{cases}
$$

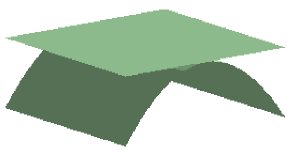
Concluimos que (x, y, z) es solución de este sistema si y sólo si está sobre el eje y o sobre el eje x o bien sobre una parábola incluída en el plano $y = 0$.
Podemos entonces decir que el conjunto solución de este sistema es

$$
\{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0, -x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}
$$

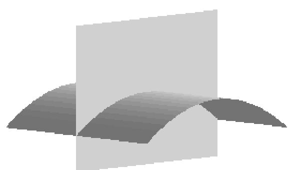
Para ver esto geométricamente comencemos graficando las tres superficies



S



T



U

Tal vez no esté de más notar que cada una de estas superficies es unión de otras,

- S es la unión de los planos coordenados pues

$$xyz = 0 \iff x = 0 \quad \text{o} \quad y = 0 \quad \text{o} \quad z = 0$$

- T es unión de un plano y un cilindro parabólico pues

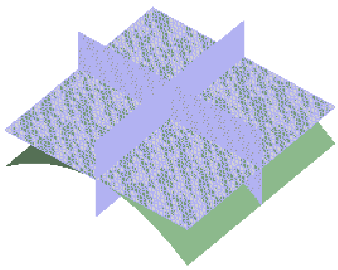
$$x^2z + z^2 = 0 \iff z = 0 \quad \text{o} \quad z = -x^2$$

- U es también unión de un plano y un cilindro parabólico pues

$$yx^2 + 2yz = 0 \iff y = 0 \quad \text{o} \quad 2z = -x^2$$

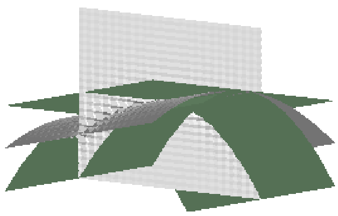
Las siguientes figuras muestran la intersección de

- S con T



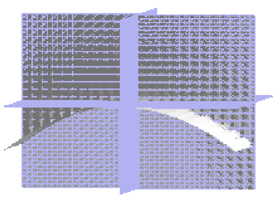
La intersección es el plano z=0

- T con U



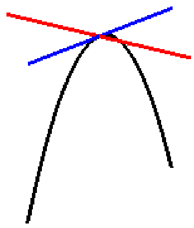
La intersección es la recta de ecuaciones
y=0 , z=0

- S con U



La intersección es el plano y=0

Y, finalmente, la figura



$S \cap T \cap U$

representa la solución del sistema.

Nota: Si le resulta difícil imaginar las regiones en el espacio tal vez le ayude ver los gráficos 3d en la página de la materia.

PROBLEMAS

1. Reconozca de qué cuádrica —o parte de ella— se trata y haga un esquema gráfico que la represente

   (a) $x^2 - 9y^2 + 4z^2 = 36$
   (b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 16$
   (c) $18x^2 - 9y^2 - 4z^2 = 36$
   (d) $x^2 - 4y^2 = 0$
   (e) $x^2 - 4y^2 - 16z^2 - 2x - 32z = 15$
   (f) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
   (g) $z = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$
   (h) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
   (i) $z = y^2$
   (j) $x + z^2 - 4z = -3$
   (k) $z = x^2 - y^2$
   (l) $x = y^2 - z^2$
   (m) $x^2 - y^2 + 2x + 4y - z + 6 = 0$

2. En cada uno de los casos siguientes: halle la ecuación correspondiente y grafique

   a) elipsoide de semiejes 2 , 1 , 5 centrado en $(-1, 0, 1)$

   b) hiperboloide de dos hojas centrado en el origen que pasa por $(0, 0, 2)$ y corta al plano $z = 4$ en una circunferencia de radio 3.

3. Las siguientes ecuaciones pueden representar subconjuntos tanto de $\mathbb{R}^2$ como de $\mathbb{R}^3$. Analice en cada caso qué se obtiene cuando se la considera en el plano y cuando se lo hace en el espacio

   (a) $x^2 - y^2 = 1$
   (b) $y^2 - x^2 = 1$
   (c) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 3$
   (d) $x - 4y^2 = 9$
   (e) $y - 4x^2 = 9$

   Para cada ecuación haga un gráfico para el caso del plano y otro para el caso del espacio.

4. Halle la solución, analítica y gráficamente, de los siguientes sistemas lineales en $\mathbb{R}^2$

   (a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 5 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$
   (c) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$
   (d) $\begin{cases} 6x + 7y = 8 \\ 4x + 5y = 9 \end{cases}$

5. ¿Para qué valores de a el siguiente sistema

$$\begin{cases} ax + 2y = 0 \\ 2x + ay = 0 \end{cases}$$

   tiene una recta de soluciones?

6. Dada la ecuación $x + 4y = 7$, encuentre otra, $ax + by = c$, tal que

$$\begin{cases} x + 4y = 7 \\ ax + by = c \end{cases}$$

tenga a $\{(3, 1)\}$ por conjunto de soluciones.
¿Esperaba encontrar *un* valor para cada coeficiente?
Piense geométricamente el problema y vuelva a interpretar la respuesta.

7. Halle la solución, analítica y gráficamente, de los siguientes sistemas lineales en $\mathbb{R}^3$

(a) $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 4x - 6y = -2 \\ -2x + 7y + 2z = 9 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ y + z = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 6x + 7y + 8z = 8 \\ 4x + 5y + 9z = 9 \\ 2x - 2y + 7z = 7 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 4x - 6y = -2 \\ -2x + 7y + 2z = 9 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ -2x + 7y + 2z = 9 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} y + z = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$ (j) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = 5 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ (l) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$

(m) $\begin{cases} 6x + 7y = 8 \\ 4x + 5y = 9 \end{cases}$

8. Elija un valor de a que haga que el siguiente sistema

$$\begin{cases} 3x + 10y = 10 \\ \frac{15}{2}x + 25y = a \end{cases}$$

(i) no tenga ninguna solución

(ii) tenga infinitas soluciones

9. Halle la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones en $\mathbb{R}^2$

(a) $\begin{cases} 12x^3 - 8xy = 0 \\ 2y - 4x^2 = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x \operatorname{sen}(x^2 + y^2) = 0 \\ y \operatorname{sen}(x^2 + y^2) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x^2 - 6y + 6 = 0 \\ 3y^2 - 6x + 3 = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 3x^2y + y^3 - 4xy^2 = 0 \\ x^3 + 3xy^2 - 4yx^2 = 0 \end{cases}$

10. Halle la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones en $\mathbb{R}^3$

(a) $\begin{cases} 12x^3 - 8xy = 0 \\ 2y - 4x^2 = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z^3 - z + y = 0 \\ y^3 + z - y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x\,\mathrm{sen}(x^2 + z^2) = 0 \\ z\,\mathrm{sen}(x^2 + z^2) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3z^2 - 6y + 6 = 0 \\ 3y^2 - 6z + 3 = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 3x^2y + y^3 - 4xy^2 = 0 \\ x^3 + 3xy^2 - 4yx^2 = 0 \end{cases}$

11. Halle la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones en $\mathbb{R}^3$

(a) $\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 - 2xz = 0 \\ -6xy + z^2 = 0 \\ -x^2 + z^2 = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y + z = 0 \\ y^2 - xz = 1 \\ z^2 + xy = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} yz = 0 \\ y^2 - xz = 1 \\ z^2 + xy = 1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} (x + y + z)^2 - 3yz = 0 \\ (x + y + z)^2 - 3xz = 0 \\ (x + y + z)^2 - 3xy = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y + z = 0 \\ y^2 - xz = 1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} yz = 0 \\ z^2 + xy = 1 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \cos x\,\mathrm{sen}\,y\,\mathrm{sen}\,z = 0 \\ \mathrm{sen}\,x\cos y\,\mathrm{sen}\,z = 0 \\ \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,y\cos z = 0 \\ x + y + z = \frac{\pi}{2} \quad , \quad x, y, z > 0 \end{cases}$

12. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que satisface las condiciones dadas

a) pasa por $P = (3, 1, 0)$ y es paralela a la recta $L:\ (x, y, z) = (1, -1, t)$ $(t \in \mathbb{R})$

b) pasa por el origen y por $Q = (x_0, y_0, z_0)$

c) pasa por $P = (x_0, y_0, z_0)$ y por $Q = (x_1, y_1, z_1)$

13. Halle ecuaciones paramétricas del segmento de recta que empieza en $(2, 7, -1)$ y termina en $(4, 2, 3)$.

14. En cada uno de los casos siguientes,

(i) haga un esquema gráfico de la región $R \subset \mathbb{R}^2$ dada

(ii) proyecte R sobre el eje x

(a) R es la parte de la parábola $y = 3x^2 + 4$ que se encuentra en el semiplano $y - x \leqslant 4$

(b) R es la parte de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ que se encuentra en la región $\begin{cases} x - y \leqslant 1 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

(c) $R : \begin{cases} y \geqslant 3x^2 + 4 \\ y - x \leqslant 4 \end{cases}$ (d) $R : \begin{cases} x^2 - y^2 \geqslant 1 \\ x - y \leqslant 1, x \geqslant 0 \end{cases}$

(e) $R : \quad 1 \leqslant (x - 1)^2 + (y + 3)^2 \leqslant 4$

15. En cada uno de los casos siguientes,

    (i) dé las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap S_2$

    (ii) represente en un esquema gráfico tanto a las superficies como a la curva intersección

    (iii) si C indica la proyección de $S_1 \cap S_2$ sobre el plano indicado, exhiba ecuaciones paramétricas de la curva C

    a) $S_1: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad S_2: \quad z = 2x + 3y - 1$ Proyecte sobre $z = 0$

    b) $S_1: \quad x^2 + y^2 = 9 \quad , \quad S_2: \quad z = x^2 + y^2$ Proyecte sobre $z = 0$

    c) $S_1: \quad y^2 + z^2 = 9 \quad , \quad S_2: \quad x = 1 + y^2 + z^2$ Proyecte sobre $x = 0$

    d) $S_1: \quad \frac{x^2}{4} + z^2 = 1 \quad , \quad S_2: \quad y^2 = x^2 + z^2 + 1$ Proyecte sobre $y = 0$

    e) $S_1: \quad x^2 + y^2 = 4 \quad , \quad S_2: \quad x^2 + z^2 = 9$ Proyecte sobre $z = 0$ y sobre $y = 0$

    f) $S_1: \quad y = x^2 \quad , \quad S_2: \quad x + y + z = 1$ Proyecte sobre $z = 0$

    g) $S_1: \quad z = 3y^2 \quad , \quad S_2: \quad z = 4 - x^2 - y^2$ Proyecte sobre $x = 0$

    h) $S_1: \quad x^2 - y^2 = 1 \quad , \quad S_2: \quad y - x = 1$ Proyecte sobre $z = 0$ y sobre $x = 0$

    i) $S_1: \quad y = x \quad , \quad S_2: \quad x + y + z = 4$ Proyecte sobre $z = 0$ y sobre $y = 0$

16. En cada uno de los casos siguientes,

    (i) haga un esquema gráfico de la curva $S_1 \cap S_2$

    (ii) encuentre un cilindro vertical que contenga a $S_1 \cap S_2$

    (iii) reescriba las ecuaciones implícitas de $S_1 \cap S_2$ utilizando ese cilindro

    (iv) halle las ecuaciones implícitas de la proyección de $S_1 \cap S_2$ sobre $z = 0$

    a) $S_1: \quad z = x^2 + y^2 \quad , \quad S_2: \quad z = 9 - x^2 - y^2$

    b) $S_1: \quad z^2 = x^2 + y^2 + 1 \quad , \quad S_2: \quad z = 9 - x^2 - y^2$

    c) $S_1: \quad z = 4 - x^2 - y^2 \quad , \quad S_2: \quad z = 2x^2 + 3y^2$

    d) $S_1: \quad z = 4x^2 + 9y^2 \quad , \quad S_2: \quad z = 4x + 3$

    e) $S_1: \quad (z - 1)^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad S_2: \quad x^2 + y^2 = 4$

17. Para cada una de las regiones $R \subset \mathbb{R}^3$ halle el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y, z) \in R\}$$

grafíquelo en el plano y haga un esquema gráfico en $\mathbb{R}^3$ que represente tanto a R como a D.

(a) $R: \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ (b) $R: \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ z = 4 - y \end{cases}$

(c) $R: \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2 + 4} \end{cases}$

(d) $R : \begin{cases} z = 2x^2 + 3y^2 \\ z = 9 - x^2 - y^2 \end{cases}$

(e) R es el sólido limitado $\begin{cases} \text{superiormente por la superficie } z = 9 - x^2 - y^2 \\ \text{inferiormente por la superficie } z = 2x^2 + 3y^2 \end{cases}$

(f) $R : \begin{cases} z \geqslant x^2 + y^2 \\ z = 2x + 2y + 2 \end{cases}$ (g) $R : \begin{cases} z \geqslant x^2 + y^2 \\ z \leqslant 2x + 2y + 2 \end{cases}$

(h) R es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está debajo del plano $z = 2x + 2y + 2$

NOTA: D se interpreta como la proyección de R sobre el plano $z = 0$

18. Para cada una de las regiones $R \subset \mathbb{R}^3$ halle el conjunto

$$I = \{z \in \mathbb{R} \mid (x, y, z) \in R\}$$

y haga un esquema gráfico en $\mathbb{R}^3$ que represente tanto a R como a I.

(a) $R : \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ (b) $R : \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ z = 4 - y \end{cases}$

(c) $R : \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2 + 4} \end{cases}$

(d) $R : \begin{cases} z = 2x^2 + 3y^2 \\ z = 9 - x^2 - y^2 \end{cases}$

(e) R es el sólido limitado $\begin{cases} \text{superiormente por la superficie } z = 9 - x^2 - y^2 \\ \text{inferiormente por la superficie } z = 2x^2 + 3y^2 \end{cases}$

(f) $R : \begin{cases} z \geqslant x^2 + y^2 \\ z = 2x + 2y + 2 \end{cases}$ (g) $R : \begin{cases} z \geqslant x^2 + y^2 \\ z \leqslant 2x + 2y + 2 \end{cases}$

(h) R es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está debajo del plano $z = 2x + 2y + 2$

NOTA: I se interpreta como la proyección de R sobre el eje z

19. En cada uno de los casos siguientes,

(i) haga un esquema gráfico de S_1, de S_2 y de la curva $S_1 \cap S_2$

(ii) halle un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que el sólido W limitado por S_1 y S_2 tenga a D como proyección sobre el plano $z = 0$

a) $S_1 : \quad z = x^2 + y^2 \quad , \quad S_2 : \quad z = 9 - x^2 - y^2$

b) $S_1 : \quad z^2 = x^2 + y^2 + 1 \quad , \quad S_2 : \quad z = 9 - x^2 - y^2$

c) $S_1 : \quad z = 4 - x^2 - y^2 \quad , \quad S_2 : \quad z = 2x^2 + 3y^2$

d) $S_1 : \quad z = 4x^2 + 9y^2 \quad , \quad S_2 : \quad z = 4x + 3$

e) $S_1 : \quad (z - 1)^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad S_2 : \quad x^2 + y^2 = 4$