



ALGEBRA Y GEOMETRIA

PRIMER CUATRIMESTRE 2011

TRABAJO PRÁCTICO 6

CONTENIDO

Espacio Vectorial	1
Ejemplos	2
Propiedades	6
Ejercicio 1	3
Ejercicio 2	6
Ejercicios 3 y 4	7
Subespacios	8
Ejemplos	8
Ejercicios 5 a 7	9
Ejercicios 8 y 9	11
Suma e intersección de subespacios	11
Ejemplos	12
Ejercicio 10	15
Ejercicio 11	16
Combinación lineal — Subespacio generado	16
Ejemplos	16
Propiedades	18

Ejercicios 12 a 14	18
Ejercicio 15	19
Dependencia e independencia lineal	19
Ejercicios 16 y 17	21
Base	22
Ejercicio 18	22
Ejercicio 19	24
Ejercicio 20	26
Dimensión	26
Ejercicio 21	32
Suma directa	33
Ejercicio 22	33
Producto escalar en \mathbb{R}^n	33
Subespacios ortogonales	34
Ejercicio 23	35
Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt	35
Ejercicio 24	37
Problemas	38

Página de Álgebra y Geometría

<http://www.lirweb.com.ar>

Una vez registrado podrá acceder a sus cursos

Consultas Online

<http://mateingeuca.wordpress.com>

ESPACIOS VECTORIALES

Espacio Vectorial

Pensemos en el conjunto \mathbb{R}^2 donde tenemos definidas dos operaciones

□ SUMA

Dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

con lo cual $(a, b) + (c, d)$ también está en \mathbb{R}^2 .

□ PRODUCTO POR ESCALAR

Dados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

con lo cual $\alpha(a, b)$ también está en \mathbb{R}^2 .

Hemos visto anteriormente que estas dos operaciones poseen las siguientes propiedades,

$$\begin{aligned} \text{conmutatividad : } & (a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b) \\ \text{asociatividad : } & [(a, b) + (c, d)] + (h, k) = (a, b) + [(c, d) + (h, k)] \\ \text{elemento neutro : } & (a, b) + (0, 0) = (a, b) \\ \text{inverso : } & (a, b) + (-a, -b) = (0, 0) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \text{asociatividad : } & (\alpha\beta)(a, b) = \alpha(\beta(a, b)) \\ \text{elemento neutro : } & 1(a, b) = (a, b) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \text{distributividad respecto de la suma de vectores : } & \alpha[(a, b) + (c, d)] = \alpha(a, b) + \alpha(c, d) \\ \text{distributividad respecto de la suma de escalares : } & (\alpha + \beta)(a, b) = \alpha(a, b) + \beta(a, b) \end{aligned} \tag{3}$$

También sabemos que propiedades enteramente análogas a éstas las satisface el conjunto \mathbb{R}^3 con la suma y producto por escalar que definimos en él.

En esta práctica nos vamos a ocupar de estudiar estos y otros conjuntos que satisfacen este tipo de propiedades, a los que llamaremos *espacios vectoriales*.

Definición

Supongamos que tenemos un conjunto \mathbb{V} donde es posible definir dos operaciones:

- ❖ *suma* “+”: $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ cada vez que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ y
- ❖ *producto por un número real* “.”¹: $\alpha \cdot \mathbf{u} \in \mathbb{V}$ cada vez que $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$

de forma tal que se satisfagan las propiedades equivalentes a (1) – (3). Es decir,

¹tal como sucede con el producto de números reales, mientras no se preste a confusión, se omite el punto “.” y se escribe simplemente $\alpha\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}
\text{conmutatividad} : \quad & \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} && \text{para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V} \\
\text{asociatividad} : \quad & [\mathbf{u} + \mathbf{v}] + \mathbf{w} = \mathbf{u} + [\mathbf{v} + \mathbf{w}] && \text{para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V} \\
\text{elemento neutro} : \quad & \text{existe } \mathbf{0} \in \mathbb{V} \text{ tal que } \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} && \text{para todo } \mathbf{u} \in \mathbb{V} \\
\text{inverso} : \quad & \text{para todo } \mathbf{u} \in \mathbb{V} \text{ existe } -\mathbf{u} \in \mathbb{V} \text{ tal que } \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{S}$$

$$\begin{aligned}
\text{asociatividad} : \quad & (\alpha\beta).\mathbf{u} = \alpha.(\beta.\mathbf{u}) && \text{para todo } \mathbf{u} \in \mathbb{V}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\
\text{elemento neutro} : \quad & 1.\mathbf{u} = \mathbf{u} && \text{para todo } \mathbf{u} \in \mathbb{V}
\end{aligned} \tag{P}$$

$$\begin{aligned}
\text{distributividad (vectores)} : \quad & \alpha.(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha.\mathbf{u} + \alpha.\mathbf{v} && \text{para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}, \alpha \in \mathbb{R} \\
\text{distributividad (escalares)} : \quad & (\alpha + \beta).\mathbf{u} = \alpha.\mathbf{u} + \beta.\mathbf{u} && \text{para todo } \mathbf{u} \in \mathbb{V}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{D}$$

Al conjunto \mathbb{V} dotado de estas dos operaciones se lo llama *espacio vectorial real*² y a sus elementos los llamaremos *vectores*.

Ejemplos

- \mathbb{R}^2 con la suma y producto por escalar usuales es un espacio vectorial real. En realidad no tenemos nada que probar porque eso fue hecho cuando presentamos \mathbb{R}^2 al comienzo de la materia.
- Lo mismo ocurre con \mathbb{R}^3 con la suma y producto por escalar usuales.
- Dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \overset{n}{\dots} \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

con la operación *suma* definida por

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

y la operación *producto por escalar* definida por

$$\alpha.(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

resulta ser un espacio vectorial real. La verificación de las propiedades, (S), (P) y (D) es —salvo el número de coordenadas— la misma que para $n = 2$ (i.e., para \mathbb{R}^2).

- Consideremos el conjunto \mathbb{V} dado por

$$\mathbb{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$$

Claramente $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^3$. Entonces, usando la suma y producto por escalar de \mathbb{R}^3 podemos *sumar* y *multiplicar por un escalar* a los elementos de \mathbb{V} .

La mayoría de las propiedades listadas en (S), (P) y (D) sabemos que se satisfacen porque los elementos de \mathbb{V} son, en particular, elementos de \mathbb{R}^3 . Sólo tendríamos que verificar la existencia de neutro e inverso para la suma y, por supuesto, que la suma de elementos de \mathbb{V} sigue estando en \mathbb{V} y que lo mismo ocurre para el producto por escalar

²si en lugar de tomar los escalares en \mathbb{R} los tomásemos en \mathbb{C} se llamaría *espacio vectorial complejo*.

(i) *Suma*

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$. Debemos probar que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{V}$. Pero $\mathbf{u} = (0, y, z)$ y $\mathbf{v} = (0, y', z')$; luego,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (0, y + y', z + z') \in \mathbb{V}$$

por tener la primer coordenada nula.

(ii) *Producto por escalar*

Sean $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Debemos probar que $\alpha\mathbf{u} \in \mathbb{V}$. Por estar \mathbf{u} en \mathbb{V} tenemos $\mathbf{u} = (0, y, z)$ y entonces

$$\alpha\mathbf{u} = (0, \alpha y, \alpha z) \in \mathbb{V}$$

por tener la primer coordenada nula.

(iii) *Neutro*

Sabemos que existe $\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ que cumple

$$(x, y, z) + (0, 0, 0) = (x, y, z)$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pero $\mathbf{0}$ está en \mathbb{V} pues su primera coordenada es cero; luego,

$$(x, y, z) + (0, 0, 0) = (x, y, z)$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{V}$.

(iv) *Inverso*

Tomemos un $\mathbf{u} = (x, y, z) \in \mathbb{V}$, entonces $x = 0$. Es decir,

$$\mathbf{u} = (0, y, z)$$

pero como \mathbf{u} está también en \mathbb{R}^3 , existe

$$-\mathbf{u} = (0, -y, -z)$$

tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Y podemos asegurar que $-\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ puesto que su primera coordenada es nula.

Concluimos entonces que \mathbb{V} , con la suma y producto por escalar de \mathbb{R}^3 , resulta ser un espacio vectorial.

Ejercicio 1

Compruebe que el conjunto

$$\mathbb{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ y } z = 0\}$$

con la suma y producto por escalar usuales de \mathbb{R}^3 es un espacio vectorial.

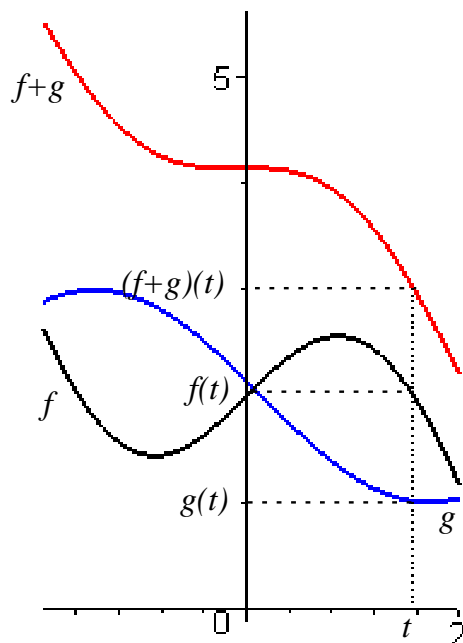
5. Sea ahora \mathbb{V} el conjunto de todas las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} ; i.e.,

$$\mathbb{V} = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

Definimos la *suma* de la manera habitual. Dadas $f, g \in \mathbb{V}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

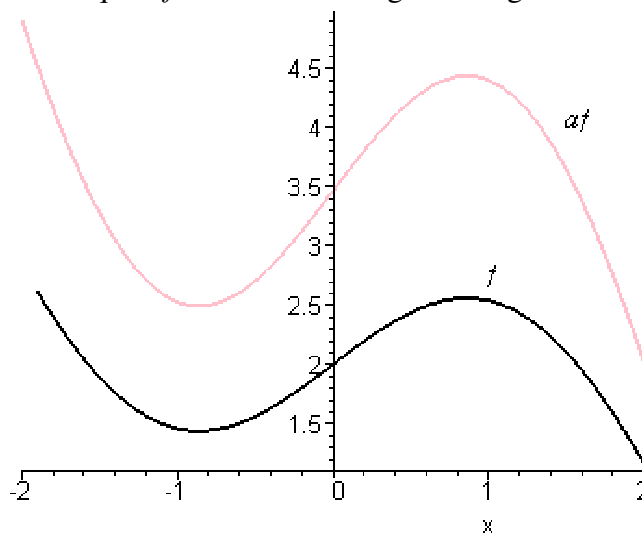
Es claro que $f + g$ vuelve a ser una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} ; por lo tanto, $f + g \in \mathbb{V}$. Veamos en un esquema gráfico el resultado de sumar dos funciones



Definimos el *producto por escalar* también de la manera habitual. Dada $f \in \mathbb{V}$ y $a \in \mathbb{R}$,

$$(af)(x) = af(x)$$

También aquí es claro que af está en \mathbb{V} . La siguiente figura ilustra esta otra operación ³



Para poder asegurar que \mathbb{V} es un espacio vectorial tenemos que verificar que se cumplen (S), (P) y (D).

Como en casos anteriores, la mayoría de estas propiedades son inmediatas por reducirse a las conocidas para los números reales. Las que realmente requieren alguna argumentación son

³el valor de a que se tomó para graficar es $a = \sqrt{3}$

(i) *Neutro*

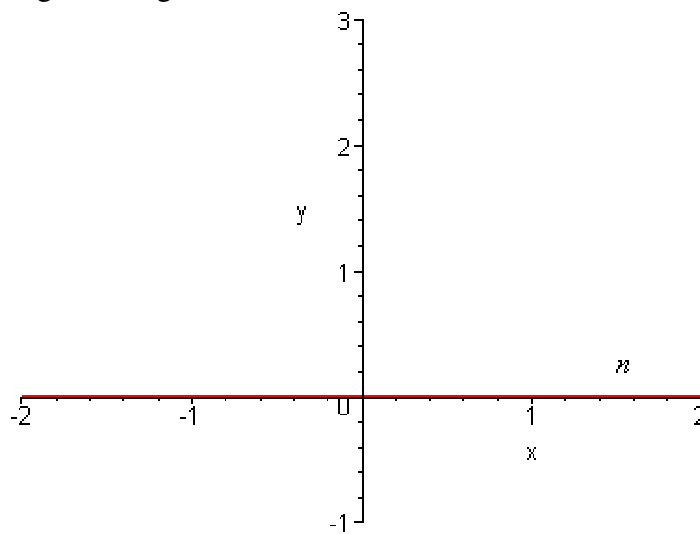
Buscamos una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} que al sumarla a cualquier otra no la modifique. Si la llamamos $n(x)$, debe cumplir

$$f(x) = (f + n)(x) = f(x) + n(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Pero entonces,

$$n(x) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y de esta forma concluimos que n debe ser la función idénticamente nula. La siguiente figura la ilustra,

(ii) *Inverso*

Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, buscamos otra —llamémosla g — tal que

$$0 = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

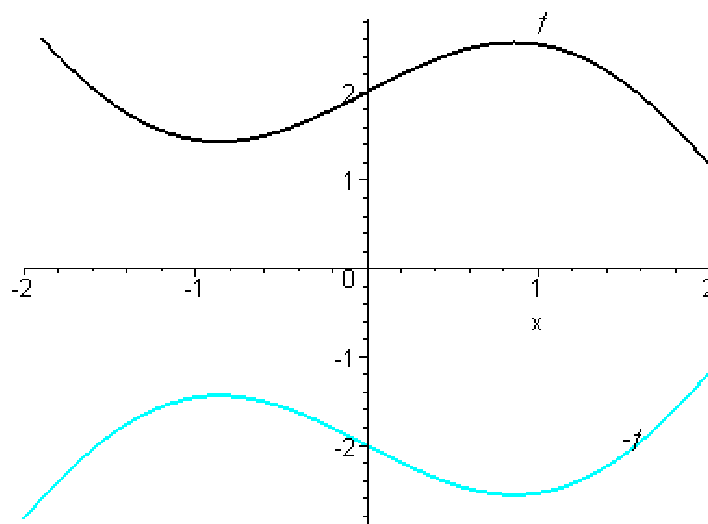
para todo $x \in \mathbb{R}$. Pero entonces, para cada x en \mathbb{R} debe ser

$$g(x) = -f(x)$$

De esta forma, la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = -f(x)$ es una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} (con lo cual está en \mathbb{V}) y satisface

$$f + g = 0$$

Mostramos así que existe $-f$ y que pertenece a \mathbb{V} . Un caso particular se ilustra en la figura



Ejercicio 2

En el espacio vectorial \mathbb{V} anterior considere los elementos $f, g \in \mathbb{V}$

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = -2x + 3$$

- haga un esquema de los gráficos de f y de g
- halle $f + g$ y represente su gráfico en el esquema anterior
- en otro esquema gráfico represente a $2f$ y a $-g$.

Propiedades

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial real.

- El elemento neutro de la suma es único.
- Para cada $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$, su inverso $-\mathbf{u}$ es único.
- $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$

En efecto,

$$0\mathbf{u} = (0 + 0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}$$

es decir,

$$0\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}$$

pero como sabemos que existe el inverso de $0\mathbf{u}$,

$$0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u}) = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})$$

o sea,

$$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

como afirmamos.

4. $\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

En efecto,

$$\alpha \mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \mathbf{0} + \alpha \mathbf{0}$$

es decir,

$$\alpha \mathbf{0} = \alpha \mathbf{0} + \alpha \mathbf{0}$$

razonando como en el caso anterior,

$$\alpha \mathbf{0} + (-\alpha \mathbf{0}) = \alpha \mathbf{0} + \alpha \mathbf{0} + (-\alpha \mathbf{0})$$

y por lo tanto,

$$\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

como afirmamos.

5. Si $\alpha \mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces $\alpha = 0$ o $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

En efecto,

si $\alpha = 0$, se cumple la tesis. Supongamos entonces que $\alpha \neq 0$. En tal caso existe $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}$ y tenemos

$$\frac{1}{\alpha} \alpha \mathbf{u} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

pero, $\frac{1}{\alpha} \alpha \mathbf{u} = \mathbf{u}$, luego

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

NOTA: Si $\alpha = 0$ o $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ya vimos que $\alpha \mathbf{u} = \mathbf{0}$. De modo que en realidad hemos probado

$$\alpha \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \alpha = 0 \text{ o } \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

6. $(-\alpha)\mathbf{u} = -\alpha\mathbf{u}$

Siendo $-\alpha\mathbf{u}$ el *único* inverso de $\alpha\mathbf{u}$ y teniendo en cuenta que

$$\alpha \mathbf{u} + (-\alpha)\mathbf{u} = (\alpha + (-\alpha))\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

resulta

$$(-\alpha)\mathbf{u} = -\alpha\mathbf{u}$$

Ejercicio 3

Considere el conjunto $\mathbb{V} = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$.

- ¿Es cierto que la función $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sin(\pi x)$ pertenece a \mathbb{V} ?
- ¿Se debe dar la misma respuesta para la función $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$?
- Averigüe si \mathbb{V} es un espacio vectorial considerando la suma y el producto por escalar usuales.

Ejercicio 4

- a) Muestre que $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$
- b) ¿Puede ser $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y $\alpha \neq 0$?

Subespacios

Un subconjunto \mathbb{S} de un espacio vectorial \mathbb{V} se denomina *subespacio* de \mathbb{V} si se cumplen las siguientes condiciones

- ◆ $\mathbf{0} \in \mathbb{S}$
- ◆ si $\mathbf{u} \in \mathbb{S}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha\mathbf{u} \in \mathbb{S}$
- ◆ si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{S}$

Ejemplos

1. $\mathbb{S} = \{t(-1, 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^2 .

Comprobemos que \mathbb{S} verifica las tres condiciones de la definición

- (i) $(0, 0) \in \mathbb{S}$, pues

$$(0, 0) = 0 \cdot (-1, 3) \quad (t = 0)$$

- (ii) $\alpha\mathbf{u} \in \mathbb{S}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{S}$, pues

$$\mathbf{u} = t(-1, 3) \quad (\text{para algún } t \in \mathbb{R})$$

entonces,

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha t(-1, 3) \in \mathbb{S}$$

dado que $\alpha t \in \mathbb{R}$.

- (iii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{S}$ para cada $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}$, pues

$$\mathbf{u} = t(-1, 3) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = r(-1, 3)$$

para ciertos $t, r \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = t(-1, 3) + r(-1, 3) = (t + r)(-1, 3) \in \mathbb{S}$$

ya que $t + r \in \mathbb{R}$.

2. $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 .⁴

Veamos que se cumplen las tres condiciones

(i) $(0, 0, 0) \in \mathbb{S}$, pues $(0, 0, 0)$ evidentemente cumple que su primera coordenada es 0.

(ii) $\alpha \mathbf{u} \in \mathbb{S}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{S}$, pues

$$\mathbf{u} = (0, y, z) \quad (\text{por estar } \mathbf{u} \text{ en } \mathbb{S})$$

y $\alpha \mathbf{u} = (0, \alpha y, \alpha z)$ también tiene su primer coordenada nula; luego,

$$\alpha \mathbf{u} \in \mathbb{S}$$

(iii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{S}$ para cada $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}$ pues, por estar en \mathbb{S} ,

$$\mathbf{u} = (0, a, b) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (0, c, d)$$

por lo cual,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (0, a + c, b + d)$$

i.e., también tiene su primer coordenada nula y en consecuencia está en \mathbb{S} .

3. $\mathbb{S} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua en } \mathbb{R}\}$ es un subespacio de \mathbb{V} , el espacio vectorial de las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

(i) $f = 0 \in \mathbb{S}$, pues la función idénticamente nula en \mathbb{R} es continua en \mathbb{R} .

(ii) $\alpha f \in \mathbb{S}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathbb{S}$, pues cualquier múltiplo de una función continua es continua.

(iii) $f + g \in \mathbb{S}$ para cada $f, g \in \mathbb{S}$, pues la suma de funciones continuas es continua.

Ejercicio 5

Sea $L : (x, y) = t(-2, 3)$, $(t \in \mathbb{R})$. Analice si L es subespacio de \mathbb{R}^2 .

Ejercicio 6

Sea $L : (x, y) = t(-2, 3)$, $(t \geq 0)$. Analice si L es subespacio de \mathbb{R}^2 .

Ejercicio 7

¿Es cierto que si \mathbb{S} y \mathbb{T} son subespacios de \mathbb{V} también lo es $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$?

⁴cf. el ejemplo 4. de la página 2.

Observaciones

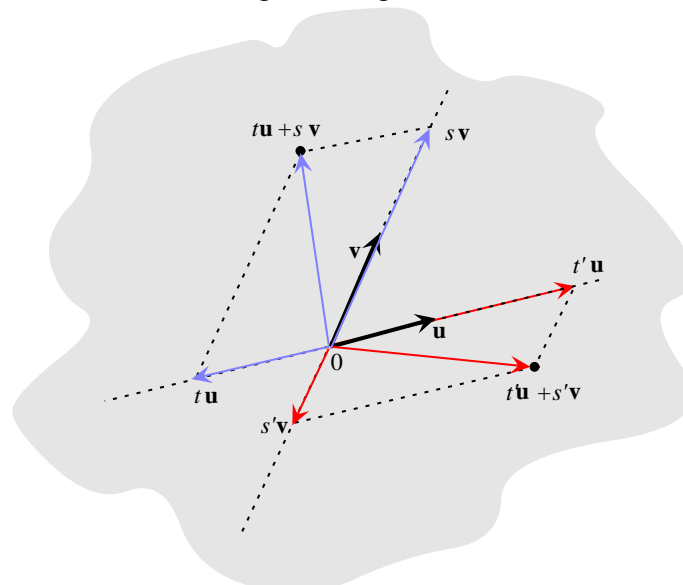
Sea \mathbb{V} un espacio vectorial.

1. El conjunto $\mathbb{S} = \{\mathbf{0}\}$ —formado únicamente por el elemento neutro del espacio vectorial— es un subespacio de \mathbb{V} .
2. \mathbb{V} es claramente subespacio de sí mismo.
3. Estos dos casos tan particulares de subespacios se llaman **subespacios triviales** del espacio vectorial. Cualquier otro subespacio que no sea trivial se llama **subespacio propio** del espacio vectorial \mathbb{V} .
4. Es muy importante notar que cada vez que un vector no nulo ⁵ \mathbf{u} está en un subespacio, *necesariamente* todos sus múltiplos también están. En particular, si el espacio es algún \mathbb{R}^n y si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ está en un subespacio $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$, entonces la recta

$$L : (x_1, \dots, x_n) = t\mathbf{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

está incluida en \mathbb{S} .

5. Consideremos nuevamente que el espacio vectorial es algún \mathbb{R}^n para poder hacer una interpretación geométrica. Teniendo en cuenta la observación anterior y recordando que cada vez que dos vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} están un subespacio la suma también resulta
 - a) si \mathbf{u} y \mathbf{v} son no nulos y \mathbb{S} es un subespacio que los contiene, las dos rectas generadas, respectivamente, por \mathbf{u} y por \mathbf{v} están en \mathbb{S}
 - b) cualquier vector que sea suma de un vector en una de las rectas y otro vector en la otra, está en \mathbb{S} . De modo que el plano generado por \mathbf{u} y \mathbf{v} está totalmente incluido en \mathbb{S} . Esto se ilustra en la siguiente figura,



Todo vector de este plano es suma de un múltiplo de \mathbf{u} y un múltiplo de \mathbf{v}

⁵por supuesto esto también es válido para $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, pero sus múltiplos no generan una recta.

Ejercicio 8

Sean $L_1 : x = 0$ y $L_2 : y = 0$. Haga un esquema gráfico y determine si es cierto que

- a) $(1, 0) \in L_1 \cup L_2$
- b) $(0, 1) \in L_1 \cup L_2$
- c) $4(1, 0) \in L_1 \cup L_2$
- d) $(1, 0) + (0, 1) \in L_1 \cup L_2$

¿Puede responder sin hacer cálculos adicionales si $L_1 \cup L_2$ es un subespacio de \mathbb{R}^2 ?

Ejercicio 9

Averigüe si el conjunto $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y \geq 0\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

Suma de subespacios

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial y consideremos dos de sus subespacios: \mathbb{S} y \mathbb{T} . Llamamos *subespacio suma* al conjunto

$$\mathbb{S} + \mathbb{T} = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{S} \text{ y } \mathbf{v} \in \mathbb{T}\}$$

*Proposición*⁶

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial y sean \mathbb{S} y \mathbb{T} dos subespacios de \mathbb{V} . Entonces,

- a) $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ es un subespacio de \mathbb{V}
- b) $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ es un subespacio de \mathbb{V} .

DEMOSTRACIÓN:

a)

(i) $\mathbf{0} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$

Como ambos conjuntos son subespacios, $\mathbf{0} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{0} \in \mathbb{T}$. Luego, $\mathbf{0} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

(ii) $\mathbf{u} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\mathbf{u} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$

Teniendo en cuenta que \mathbb{S} y \mathbb{T} son subespacios,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u} \in \mathbb{S}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\mathbf{u} \in \mathbb{S} \\ \mathbf{u} \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\mathbf{u} \in \mathbb{T} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha\mathbf{u} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$$

⁶Prácticamente la misma demostración muestra que la intersección de cualquier familia ⁷ de subespacios es subespacio y que la suma de cualquier familia *finita* de subespacios es también subespacio.

$$(iii) \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$$

Teniendo en cuenta que \mathbb{S} y \mathbb{T} son subespacios,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{S} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{T} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{T} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$$

Podemos asegurar entonces que $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ es un subespacio de \mathbb{V} .

b)

$$(i) \mathbf{0} \in \mathbb{S} + \mathbb{T}$$

Como ambos conjuntos son subespacios, $\mathbf{0} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{0} \in \mathbb{T}$ y entonces, dado que $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$, resulta que $\mathbf{0}$ es suma de un elemento de \mathbb{S} y un elemento de \mathbb{T} ; i.e. $\mathbf{0}$ está en $\mathbb{S} + \mathbb{T}$.

$$(ii) \mathbf{u} \in \mathbb{S} + \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \mathbf{u} \in \mathbb{S} + \mathbb{T}$$

Que $\mathbf{u} \in \mathbb{S} + \mathbb{T}$ significa que existen dos vectores: $\mathbf{u}' \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{u}'' \in \mathbb{T}$ tales que $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}''$. Entonces, teniendo en cuenta que \mathbb{S} y \mathbb{T} son subespacios,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}' \in \mathbb{S}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \mathbf{u}' \in \mathbb{S} \\ \mathbf{u}'' \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \mathbf{u}'' \in \mathbb{T} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \mathbf{u} = \alpha(\mathbf{u}' + \mathbf{u}'') = \alpha \mathbf{u}' + \alpha \mathbf{u}'' \in \mathbb{S} + \mathbb{T}$$

$$(iii) \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S} + \mathbb{T} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{S} + \mathbb{T}$$

Como antes, que $\mathbf{u} \in \mathbb{S} + \mathbb{T}$ significa que existen dos vectores: $\mathbf{u}' \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{u}'' \in \mathbb{T}$ tales que $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}''$ y análogamente existen dos vectores $\mathbf{v}' \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{v}'' \in \mathbb{T}$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$. Entonces, teniendo en cuenta que \mathbb{S} y \mathbb{T} son subespacios,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}', \mathbf{v}' \in \mathbb{S} \Rightarrow \mathbf{u}' + \mathbf{v}' \in \mathbb{S} \\ \mathbf{u}'', \mathbf{v}'' \in \mathbb{T} \Rightarrow \mathbf{u}'' + \mathbf{v}'' \in \mathbb{T} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}'' + \mathbf{v}' + \mathbf{v}'' = (\mathbf{u}' + \mathbf{v}') + (\mathbf{u}'' + \mathbf{v}'') \in \mathbb{S} + \mathbb{T}$$

Podemos asegurar entonces que $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ es un subespacio de \mathbb{V} .

Ejemplos

1. Consideremos las rectas

$$\mathbb{L}: (x, y) = t(2, 1) \quad , \quad \mathbb{L}': (x, y) = s(-3, 1) \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

que como vimos en un ejemplo anterior, son subespacios de \mathbb{R}^2 .

La intersección de ambas es el subespacio nulo pues si un $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{L} \cap \mathbb{L}'$ tendríamos

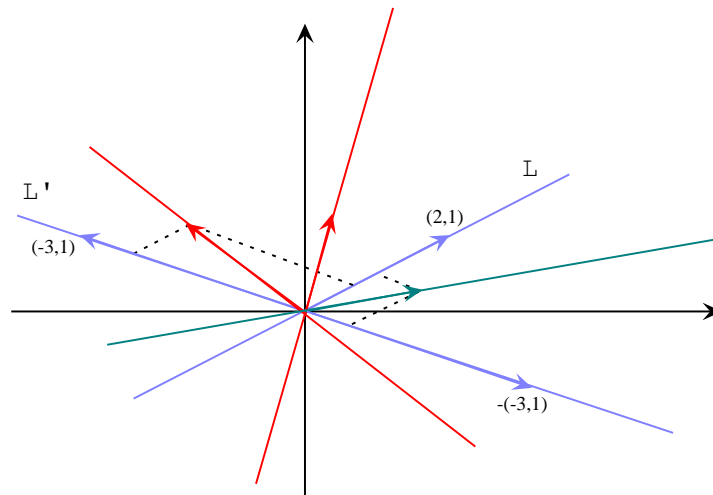
$$(x, y) = t(2, 1) = s(-3, 1)$$

para ciertos $t, s \in \mathbb{R}$. Pero en tal caso debería ser

$$\begin{cases} x = 2t = -3s \\ y = t = s \end{cases}$$

lo que es imposible a menos que $t = s = 0$.

Por otro lado, $\mathbb{L} + \mathbb{L}'$ también es un subespacio de \mathbb{R}^2 . Mirando atentamente la siguiente figura,



es claro —ley del paralelogramo mediante— que todo vector de \mathbb{R}^2 se puede escribir como suma de un vector de \mathbb{L} y uno de \mathbb{L}' y por lo tanto está en $\mathbb{L} + \mathbb{L}'$. Esto nos dice que

$$\mathbb{L} + \mathbb{L}' = \mathbb{R}^2$$

Para comprobarlo analíticamente comencemos por notar que los vectores de $\mathbb{L} + \mathbb{L}'$ se escriben en la forma,

$$\alpha(2, 1) + \beta(-3, 1) \tag{4}$$

para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tomemos entonces un vector (x, y) cualquiera de \mathbb{R}^2 y veamos que se puede escribir así. Que esto pase equivale a decir que existen números α y β tales que

$$x = 2\alpha - 3\beta \quad , \quad y = \alpha + \beta$$

Resolviendo este sistema ⁸ llegamos a que

$$\alpha = \frac{3y + x}{5} \quad , \quad \beta = \frac{2y - x}{5}$$

O, dicho de otro modo, todo (x, y) de \mathbb{R}^2 se puede escribir

$$(x, y) = \frac{3y + x}{5} (2, 1) + \frac{2y - x}{5} (-3, 1)$$

y en consecuencia hemos llegado a probar que todos los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ están en $\mathbb{L} + \mathbb{L}'$. Concluimos entonces que

$$\mathbb{L} + \mathbb{L}' = \mathbb{R}^2$$

⁸pensando a α y β como las incógnitas

2. Sean

$$\pi_1 : 2x + y + z = 0 \quad , \quad \pi_2 : x - y + z = 0$$

Estos dos planos del espacio vectorial \mathbb{R}^3 son subespacios ⁹.

El resultado anterior nos asegura que la recta de ecuaciones

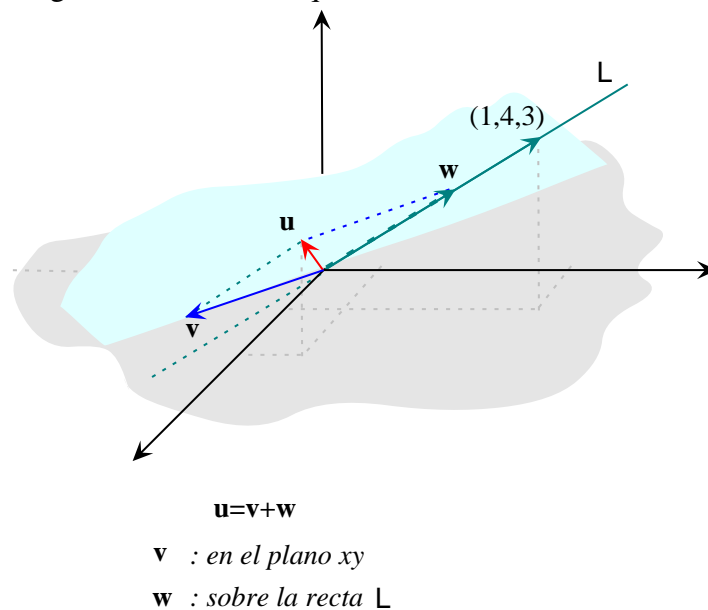
$$\mathbb{L} : \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

también lo es.

Notemos que \mathbb{L} es la recta que pasa por el origen ¹⁰ y está dirigida por el vector $(2, -1, -3)$.

3. Consideremos ahora el plano $\pi : z = 0$ y la recta $\mathbb{L} : (x, y, z) = t(1, 4, 3) (t \in \mathbb{R})$.

En la siguiente figura se ilustra un esquema de esta situación.



Allí tomamos un vector \mathbf{u} de \mathbb{R}^3 y lo escribimos como suma de un vector $\mathbf{w} \in \mathbb{L}$ y un vector \mathbf{v} que está en la intersección de π con el plano generado por \mathbf{u} y $(1, 4, 3)$.

Esto sugiere que al sumar cada vector de \mathbb{L} con cada vector de π podemos ir obteniendo cada uno de los vectores del espacio.

Esto es realmente así. Veamos cómo justificarlo. Comencemos por notar que un elemento genérico de $\pi + \mathbb{L}$ es de la forma

$$(\alpha, \beta, 0) + \gamma(1, 4, 3)$$

para ciertos números $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Bastará entonces ver que todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se escribe de esa forma. Pero que esto pase equivale a decir que existen números $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\gamma \\ y = -\beta + 4\gamma \\ z = 3\gamma \end{cases}$$

⁹será uno de los ejercicios propuestos

¹⁰si no, no sería subespacio

Resolviendo este sistema vemos que los valores de α, β, γ deben ser

$$\alpha = \frac{3x - z}{3}, \quad \beta = \frac{3y - 4z}{3}, \quad \gamma = \frac{z}{3}$$

Dicho de otro modo, cualquier (x, y, z) de \mathbb{R}^3 se escribe

$$(x, y, z) = \left(\frac{3x - z}{3}, \frac{3y - 4z}{3}, 0 \right) + \frac{z}{3}(1, 4, 3)$$

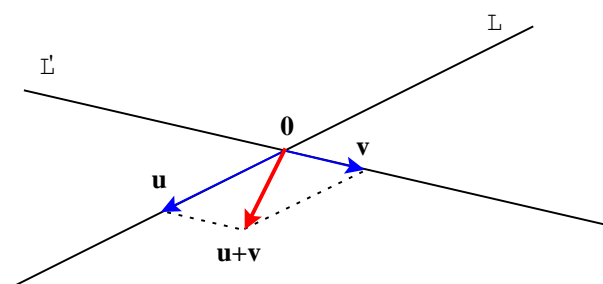
y por consiguiente está en $\pi + \mathbb{L}$. Concluimos entonces que

$$\pi + \mathbb{L} = \mathbb{R}^3$$

Observación

Al haber considerado la intersección de subespacios y haber obtenido que siempre resulta ser un subespacio se nos podría ocurrir plantearnos la situación análoga respecto de la unión.

Miremos la siguiente figura que representa dos subespacios (rectas) en \mathbb{R}^2



*La suma no está en la unión de los subespacios;
luego, la unión no es subespacio*

La unión $\mathbb{L} \cup \mathbb{L}'$ está formada *únicamente* por las dos rectas. En consecuencia, si bien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{L} \cup \mathbb{L}'$ no se cumple que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{L} \cup \mathbb{L}'$. Esto muestra que la unión **no** es un subespacio, al menos en este caso.

Este ejemplo basta para concluir que *no se puede afirmar* que la unión de subespacios es subespacio. Sin embargo, hay situaciones particulares en las que la unión sí resulta ser un subespacio, con lo cual *tampoco podemos afirmar* que la unión de subespacios nunca da un subespacio. La figura anterior puede darle una idea para construir un ejemplo donde la unión resulte ser un subespacio.

Ejercicio 10

Dé un ejemplo de un par de subespacios \mathbb{S} y \mathbb{T} tales que

- $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$ no sea subespacio
- $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$ sea subespacio

Combinación lineal de vectores

En los ejemplos de la página 13 trabajamos con expresiones del tipo

$$\alpha(2, 1) + \beta(-3, 1)$$

que podríamos definir como una suma de múltiplos de los vectores $(2, 1)$ y $(-3, 1)$. Si reemplazamos a estos dos vectores de \mathbb{R}^2 por otros dos cualesquiera, digamos \mathbf{u} y \mathbf{v} , esa expresión tomará la forma

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$$

Pero esto también lo podemos hacer para un par de vectores en cualquier espacio vectorial \mathbb{V} e incluso también para más de *dos* vectores. A expresiones de este tipo es que vamos a llamar una *combinación lineal*.

Por lo dicho, hablando informalmente, diremos que una combinación lineal de un conjunto de vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ es la suma de múltiplos de todos ellos. Formalicemos ahora este concepto.

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ vectores de \mathbb{V} y $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ números reales. Llamamos *combinación lineal* de $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ al vector \mathbf{v} que se escribe en la forma

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{u}_k$$

Ejercicio 11

En un esquema gráfico ubique a los vectores $\mathbf{u} = (3, 1)$, $\mathbf{v} = (2, -1)$ y $\mathbf{w} = (-2, 3)$. Muestre *gráficamente* que \mathbf{w} es combinación lineal de \mathbf{u} y \mathbf{v} .

Luego halle analíticamente los valores de α y β que hacen cierta la igualdad $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$.

Subespacio generado — Conjunto de generadores

Sea A un subconjunto no vacío del espacio vectorial \mathbb{V} . Consideremos el conjunto de combinaciones lineales de elementos de A ,

$$a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_m\mathbf{u}_m$$

donde $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in A$.

Ejemplos

1. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, $A = \{(-2, 3)\}$

Como A tiene un único elemento, el conjunto anterior es simplemente

$$\{a(-2, 3) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

i.e., la recta que pasa por el origen y por $(-2, 3)$. Es un subespacio de \mathbb{V} .

$$2. \mathbb{V} = \mathbb{R}^3, A = \{(2, -1, 3), (0, 1, -2)\}$$

En este caso, el conjunto de combinaciones lineales de elementos de A es

$$\{a(2, -1, 3) + b(0, 1, -2) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

i.e., el plano de ecuación

$$x - 4y - 2z = 0$$

que también es un subespacio.

$$3. \mathbb{V} = \mathbb{R}^3, A : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Cada recta por el origen pasa por un punto de A ¹¹. Luego, cualquier vector del espacio se puede escribir en la forma

$$(x, y, z) = \alpha \mathbf{u}$$

con $\mathbf{u} \in A$; i.e., está en el conjunto de combinaciones lineales de elementos de A . Concluimos así que el conjunto de combinaciones lineales de elementos de A es \mathbb{R}^3 .

Notemos que también obtuvimos un subespacio en este caso (todo el espacio, en realidad). En este caso, el conjunto de combinaciones lineales de elementos de A coincide con el conjunto¹²

$$\{\alpha \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in A, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

En todos los casos anteriores el resultado fue un subespacio de \mathbb{V} . Esto pasa en general,

Proposición (Subespacio generado)

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial y $A \subset \mathbb{V}$ no vacío. Entonces, el conjunto de combinaciones lineales

$$\{a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_m \mathbf{u}_m \mid a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in A, m \in \mathbb{N}\}$$

es un subespacio de \mathbb{V} .

DEMOSTRACIÓN:

Llamemos \mathbb{S} al conjunto de combinaciones lineales de A

(i) $\mathbf{0} \in \mathbb{S}$

Basta tomar todos los escalares nulos.

(ii) $\mathbf{u} \in \mathbb{S}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \mathbf{u} \in \mathbb{S}$

Si $\mathbf{u} \in \mathbb{S}$, debe ser de la forma

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_m \mathbf{u}_m$$

para ciertos $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in A$ y ciertos números $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\alpha \mathbf{u} = (\alpha a_1) \mathbf{u}_1 + \cdots + (\alpha a_m) \mathbf{u}_m \in \mathbb{S}$$

¹¹en realidad, por dos.

¹²piense un ejemplo donde esto no sea cierto

$$(iii) \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{S}$$

Sabemos que existen $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in A$ y escalares $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u} = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_m \mathbf{u}_m \\ \mathbf{v} = b_1 \mathbf{v}_1 + \dots + b_k \mathbf{v}_k \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_m \mathbf{u}_m + b_1 \mathbf{v}_1 + \dots + b_k \mathbf{v}_k$$

es decir, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{S}$.

Hemos probado que \mathbb{S} es efectivamente un subespacio de \mathbb{V} . Lo denotamos por,

$$\langle A \rangle = \{a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_m \mathbf{u}_m \mid a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in A, m \in \mathbb{N}\}$$

y lo llamamos *subespacio generado* por A . Pensándolo desde el lado del subespacio, decimos que A es un *conjunto de generadores* de \mathbb{S} .

Ejercicio 12

Sea $A = \{(1, 0, 2), (-3, 0, 1)\}$. Halle $\langle A \rangle$.

Ejercicio 13

Dados los polinomios $P = 1$, $Q = X$ y $R = X^2$. Halle $\langle P, Q, R \rangle$.

Ejercicio 14

Considere el espacio vectorial $\mathbb{V} = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

- compruebe que las funciones $\alpha, \beta \in \mathbb{V}$ siendo $\alpha(x) = \sin x$, $\beta(x) = \cos x$
- halle una función $g \in \langle \alpha, \beta \rangle$ tal que $g(0) = 3$ y $g(\frac{\pi}{2}) = -5$.

Propiedades

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial y $A \subset \mathbb{V}$ no vacío.

- $A \subset \langle A \rangle$

Todo $\mathbf{u} \in A$ se puede escribir en la forma

$$\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u}$$

que claramente está en $\langle A \rangle$ ¹³.

- $\langle A \rangle$ es el menor subespacio que contiene a A .

Se trata de ver que si \mathbb{S} es un subespacio que contiene a A , entonces también contiene a $\langle A \rangle$.

Sea $\mathbf{w} \in \langle A \rangle$. Entonces,

$$\mathbf{w} = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_m \mathbf{u}_m$$

¹³ ($m = 1$, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$, $a_1 = 1$)

para ciertos $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in A$ y ciertos $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$. Como $A \subset \mathbb{S}$, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in \mathbb{S}$. Por lo tanto,

$$a_1 \mathbf{u}_1, \dots, a_m \mathbf{u}_m \in \mathbb{S}$$

y entonces,

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_m \mathbf{u}_m \in \mathbb{S}$$

i.e., $\mathbf{w} \in \mathbb{S}$. Esto muestra que $\langle A \rangle \subset \mathbb{S}$.

3. Si \mathbb{S} y \mathbb{T} son subespacios de \mathbb{V} , $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ es el menor subespacio de \mathbb{V} que contiene a $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$.

Cualquier elemento $\mathbf{w} \in \mathbb{S} \cup \mathbb{T}$ está en alguno de los dos conjuntos,

— si está en \mathbb{S} , $\mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{0} \in \mathbb{S} + \mathbb{T}$

— si está en \mathbb{T} , $\mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{w} \in \mathbb{S} + \mathbb{T}$

En consecuencia,

$$\mathbb{S} \cup \mathbb{T} \subset \mathbb{S} + \mathbb{T}$$

Supongamos ahora que \mathbb{W} es un subespacio que contiene a $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$. Debemos probar que entonces, $\mathbb{S} + \mathbb{T} \subset \mathbb{W}$.

Tomemos $\mathbf{w} \in \mathbb{S} + \mathbb{T}$, se escribe en la forma

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

para algún $\mathbf{u} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{T}$. Pero esto implica que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{W}$ pues tanto \mathbb{S} como \mathbb{T} están incluidos en \mathbb{W} . Entonces, como \mathbb{W} es subespacio y contiene a \mathbf{u} y a \mathbf{v} debe contener a la suma que es precisamente \mathbf{w} .

Corolario

Sean \mathbb{S} y \mathbb{T} subespacios del espacio vectorial \mathbb{V} . Entonces,

$$\mathbb{S} + \mathbb{T} = \langle \mathbb{S} \cup \mathbb{T} \rangle$$

Ejercicio 15

Halle el menor subespacio que contiene a las rectas

$$L_1 : (x, y, z) = t(1, 2, 1) \quad (t \in \mathbb{R}) \quad , \quad L_2 : (x, y, z) = s(0, 1, -3) \quad (s \in \mathbb{R})$$

Dependencia e Independencia Lineal

Los vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 0)$ pertenecen al subespacio

$$\mathbb{S} : z = 0$$

Además

$$a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(1, 1, 0) = (a + c, b + c, 0) = (a + c)(1, 0, 0) + (b + c)(0, 1, 0)$$

con lo cual,

$$\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0) \rangle = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$$

y ambos representan a \mathbb{S} .

Independencia lineal de vectores

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial y $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in \mathbb{V}$. Decimos que el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ es **linealmente independiente** si ninguno de los \mathbf{u}_i pertenece al subespacio generado por los demás. Si esto no ocurre, es decir si alguno de los \mathbf{u}_i está en el subespacio generado por los demás, decimos que el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ es **linealmente dependiente**.

Proposición

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial y $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{V}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) El conjunto $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ es linealmente independiente

b) $a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_m\mathbf{u}_m = 0 \implies a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$

DEMOSTRACIÓN:

$$\underline{a) \implies b)}$$

Supongamos que $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ es linealmente independiente y probemos que la única solución de la ecuación " $a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_m\mathbf{u}_m = 0$ " es

$$a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$$

Supongamos, razonando por el absurdo, que hay uno de los a_i que no es cero. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que es $a_1 \neq 0$. En tal caso, es posible *despejar* \mathbf{u}_1

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\mathbf{u}_2 - \dots - \frac{a_m}{a_1}\mathbf{u}_m$$

pero en tal caso $\mathbf{u}_1 \in \langle \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m \rangle$ y esto es absurdo pues estamos suponiendo que son linealmente independientes.

Conclusión: es imposible que alguno de los a_i no sea nulo; i.e.,

$$a_1 = \dots = a_m = 0$$

b) \implies a)

Ahora tenemos por hipótesis que la única solución de “ $a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_m\mathbf{u}_m = 0$ ” es la nula y debemos ver que ninguno de los \mathbf{u}_i está en el subespacio generado por los demás. Otra vez razonamos por el absurdo y suponemos que uno de ellos está en el subespacio generado por los demás. Digamos que se trata de \mathbf{u}_1 . En tal caso,

$$\mathbf{u}_1 = b_2\mathbf{u}_2 + \dots + b_m\mathbf{u}_m$$

para ciertos $b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. Pasamos todo al primer miembro,

$$\mathbf{u}_1 - b_2\mathbf{u}_2 - \dots - b_m\mathbf{u}_m = 0$$

pero entonces $(1, -b_2, \dots, -b_m) \neq (0, \dots, 0)$ es una solución *no nula* de la ecuación “ $a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_m\mathbf{u}_m = 0$ ”. Esto contradice la hipótesis.

Ejemplo

Los vectores $\mathbf{u}_1 = (1, 3, -1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 1, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, 1, 0, 0)$ de \mathbb{R}^4 son linealmente independientes.

En efecto, la ecuación

$$a(1, 3, -1, 2) + b(2, 0, 1, 3) + c(-1, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

implica que

$$\begin{aligned} a + 2b - c &= 0 \\ 3a + c &= 0 \\ -a + b &= 0 \\ 2a + 3b &= 0 \end{aligned}$$

cuya única solución es

$$(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$$

En consecuencia, los tres vectores son linealmente independientes.

Ejercicio 16

Compruebe que el conjunto $\{(-2, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, -2, 0, 0)\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 17

Encuentre un elemento del conjunto $\{(-2, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, -2, 0, 0), (-1, -7, 1, 7)\}$ que sea combinación lineal de los demás.

Teorema

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial y $A \subset \mathbb{V}$ un subconjunto finito. Entonces existe un subconjunto B de A que es linealmente independiente que genera el mismo subespacio $\langle A \rangle$.

DEMOSTRACIÓN:

Sean $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ los elementos de A . Si son linealmente independientes, $B = A$.

Si no lo son, hay uno que es linealmente dependiente con los demás. Digamos que es \mathbf{u}_n ¹⁴,

$$\mathbf{u}_n = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}$$

entonces, cualquier elemento \mathbf{w} de $\langle A \rangle$ se escribe

$$\mathbf{w} = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_n \mathbf{u}_n = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + a_n (\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{u}_{n-1})$$

o sea,

$$\mathbf{w} = (a_1 + a_n \alpha_1) \mathbf{u}_1 + \dots + (a_{n-1} + a_n \alpha_{n-1}) \mathbf{u}_{n-1}$$

por lo tanto,

$$\langle A \rangle = \langle \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\} \rangle$$

Ahora nos preguntamos si

$$B_1 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$$

es linealmente independiente. Si lo es, $B = B_1$. Si no, hay uno de sus elementos que es dependiente con los demás. Digamos que se trata de \mathbf{u}_{n-1} . Razonamos como en la situación anterior y resulta que

$$\langle A \rangle = \langle \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-2}\} \rangle$$

Nos preguntamos si $B_2 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-2}\}$ es linealmente independiente. Si lo es, $B = B_2$. Si no, repetimos el proceso hasta lograr un $B_k = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-k}\}$ que genera $\langle A \rangle$ y es linealmente independiente. En tal caso será $B = B_{n-k}$.

Base

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial. Un conjunto $B \subset \mathbb{V}$ se llama **base** de \mathbb{V} si

$$B \text{ es linealmente independiente} \quad \text{y} \quad \langle B \rangle = \mathbb{V}$$

Ejemplo

El conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 .

Ejercicio 18

Halle una base del subespacio $\mathbb{S} = \langle (-2, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, -2, 0, 0) \rangle$.

¹⁴en caso contrario, los reordenamos

Teorema

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base del espacio vectorial \mathbb{V} si y sólo si todo vector \mathbf{v} de \mathbb{V} se escribe de manera única como combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

DEMOSTRACIÓN

\Rightarrow

Suponemos que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de \mathbb{V} y vamos a probar que todo vector \mathbf{v} se escribe de forma única como combinación de los \mathbf{v}_i . Sea entonces \mathbf{v} un vector cualquiera de \mathbb{V} .

Por ser base, sabemos que

(i) $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente y (ii) $\langle\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}\rangle = \mathbb{V}$

La segunda nos dice que existen escalares a_1, \dots, a_n tales que

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$$

Lo único que resta ver es la unicidad; i.e., que para cada \mathbf{v} los escalares a_1, \dots, a_n son únicos. Supongamos que \mathbf{v} también se puede escribir en la forma

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + \dots + b_n\mathbf{v}_n$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n \\ &= b_1\mathbf{v}_1 + \dots + b_n\mathbf{v}_n\end{aligned}$$

de donde,

$$(a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (a_n - b_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

pero siendo linealmente independientes los \mathbf{v}_i , resulta

$$a_i - b_i = 0 \quad (\text{para todo } i = 1, \dots, n)$$

o sea,

$$a_i = b_i \quad (\text{para todo } i = 1, \dots, n)$$

\Leftarrow

Suponemos ahora que cada $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ se escribe en forma única como combinación lineal de los \mathbf{v}_i y tenemos que probar que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de \mathbb{V} .

Veamos primero que son linealmente independientes. Para eso hay que ver que la única solución de la ecuación

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

es la trivial: $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0)$. Pero esto es consecuencia de que al vector $\mathbf{0}$ también se lo puede escribir

$$\mathbf{0} = 0.\mathbf{v}_1 + \dots + 0.\mathbf{v}_n$$

y estamos suponiendo que la escritura es única; con lo cual,

$$a_i = 0 \quad (\text{para todo } i = 1, \dots, n)$$

Resta ver que $\langle \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \rangle = \mathbb{V}$. Estamos suponiendo que para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ existen *únicos* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n$$

luego,

$$\mathbf{v} \in \langle \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \rangle$$

cualquiera sea $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

Esto muestra que efectivamente $\langle \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \rangle = \mathbb{V}$.

Ejercicio 19

Se sabe que el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es una base de \mathbb{R}^2 y que

$$a\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = -2\mathbf{u} - b\mathbf{v}$$

¿Le alcanza esta información para determinar cuánto valen a y b ?

Base Canónica de \mathbb{R}^n

Los vectores

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

forman una base de \mathbb{R}^n que se llama *base canónica*.

Tiene la ventaja, sobre las demás, que es inmediato hallar los coeficientes de la combinación lineal de estos vectores que expresa a un vector cualquiera de \mathbb{R}^n . Simplemente,

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_n) \\ &= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1) \\ &= x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

Componentes de un vector en una base

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial y $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base de \mathbb{V} . Entonces, dado un $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ sabemos que existen únicos escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n$$

Como no hay ambigüedad, debido a la unicidad de los escalares, les ponemos un nombre. A estos escalares a_1, \dots, a_n los llamamos *componentes* de \mathbf{v} en la base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$.

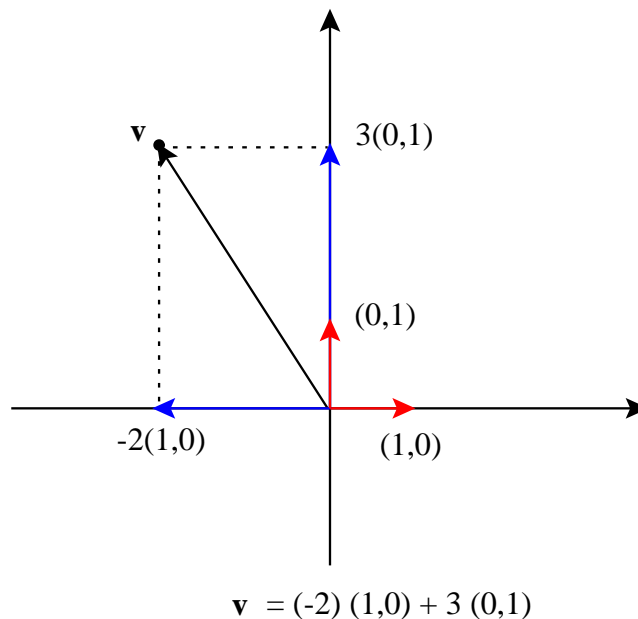
Consideremos a modo de ejemplo el vector $\mathbf{v} = (-2, 3)$. Vamos a encontrar sus componentes en dos bases distintas de \mathbb{R}^2 : $\{(1, 0), (0, 1)\}$ y $\{(2, 1), (-3, 1)\}$.

◆ En $\{(1, 0), (0, 1)\}$

Como observamos más arriba, en este caso es muy simple

$$\mathbf{v} = (-2, 3) = (-2)(1, 0) + 3(0, 1)$$

es decir, en la base canónica, las componentes de un vector coinciden con sus coordenadas.



◆ En $\{(2, 1), (-3, 1)\}$

Aquí no es tan inmediato descubrir el valor de los escalares. Debemos plantear lo que necesitamos

$$\mathbf{v} = (-2, 3) = a(2, 1) + b(-3, 1)$$

lo que produce un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} 2a - 3b = -2 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

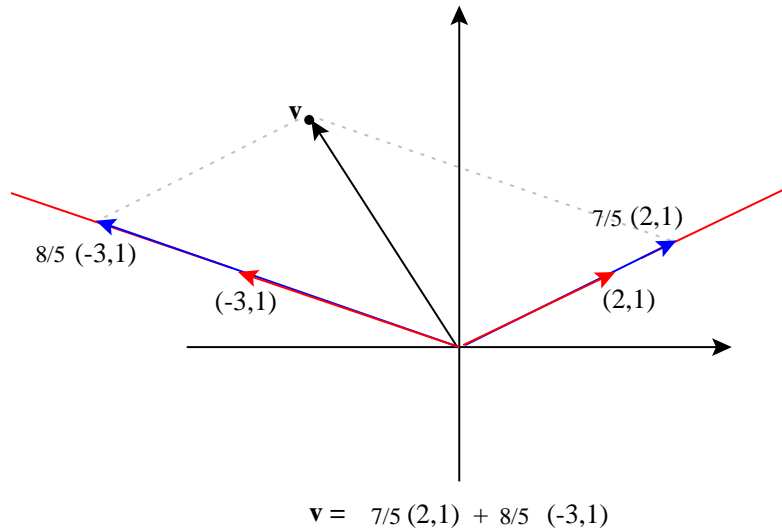
que tiene por (única) solución

$$a = \frac{7}{5}, \quad b = \frac{8}{5}$$

Es decir,

$$\mathbf{v} = (-2, 3) = \frac{7}{5}(2, 1) + \frac{8}{5}(-3, 1)$$

y entonces las componentes de $\mathbf{v} = (-2, 3)$ en la base $\{(2, 1), (-3, 1)\}$ son $(\frac{7}{5}, \frac{8}{5})$



Ejercicio 20

Halle analítica y gráficamente las componentes del vector $(-3, -2)$ en la base

- a) $\{(1, 1), (-1, 1)\}$
- b) $\{(-1, 1), (1, 1)\}$
- c) $\{(1, 3), (4, -1)\}$

Dimensión

Hasta ahora en los ejemplos considerados resultó que todas las bases del mismo espacio vectorial tenían el mismo número de elementos. Esto no es casual. Todos los espacios vectoriales que admiten una base con una cantidad finita de elementos tienen esta propiedad. Vamos a probar un resultado que tendrá a este hecho como consecuencia.

Teorema

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial que tiene una base formada por n vectores. Entonces, cualquier subconjunto de \mathbb{V} que tenga por lo menos $n + 1$ vectores es linealmente dependiente.

DEMOSTRACIÓN

Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ la base de \mathbb{V} que tiene n vectores y, razonando por el absurdo, supongamos que hay $m > n$ vectores

$$\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$$

que son linealmente independientes.

Siendo B una base podemos escribir a cada \mathbf{w}_i como combinación lineal de los \mathbf{v}_j ,

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n \\ \mathbf{w}_2 &= a_{12}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{n2}\mathbf{v}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_m &= a_{1m}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{nm}\mathbf{v}_n\end{aligned}\tag{5}$$

para ciertos escalares a_{ij} ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$).

Ahora bien, como los \mathbf{w}_i son independientes, ninguno de ellos puede ser cero ¹⁵ luego, alguno de los escalares debe ser no nulo. Reordenando los vectores, si fuese necesario, podemos suponer que $a_{11} \neq 0$. Es posible entonces *despejar* \mathbf{v}_1 de la primera ecuación y reemplazarlo en el resto de las ecuaciones. Esto produce el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_2 &= b_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + b_{n2}\mathbf{v}_n + b_{12}\mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_3 &= b_{23}\mathbf{v}_2 + \cdots + b_{n3}\mathbf{v}_n + b_{13}\mathbf{w}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_m &= b_{2m}\mathbf{v}_2 + \cdots + b_{nm}\mathbf{v}_n + b_{1m}\mathbf{w}_1\end{aligned}\tag{6}$$

Recordando que \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 son independientes, no puede ser que

$$\mathbf{w}_2 = b_{12}\mathbf{w}_1$$

luego, alguno de los coeficientes anteriores de la primera ecuación debe ser no nulo. Supongamos que es $b_{22} \neq 0$.

Repitiendo el procedimiento anterior llegamos ahora al sistema

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_3 &= c_{33}\mathbf{v}_3 + \cdots + c_{n3}\mathbf{v}_n + c_{23}\mathbf{w}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_m &= c_{3m}\mathbf{v}_3 + \cdots + c_{nm}\mathbf{v}_n + c_{2m}\mathbf{w}_2\end{aligned}\tag{7}$$

Si seguimos con este procedimiento, al ser $n < m$, llegará un momento en el cual los $\mathbf{w}_{n+1}, \dots, \mathbf{w}_m$ quedarán escritos como combinación de los $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ y esto no es posible porque estamos suponiendo que son independientes.

Luego, no es posible que haya más de n vectores independientes en un espacio que tiene una base de n elementos.

Corolario 1

Si \mathbb{V} tiene una base de n elementos y $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ son linealmente independientes, entonces

$$n \geq m$$

¹⁵¿por qué?

Corolario 2

Si \mathbb{V} tiene una base con n elementos, todas sus bases están formadas por n vectores.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ y $B' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ son bases de \mathbb{V} . El corolario anterior nos dice

$$m \leq n : \quad \text{por ser } B \text{ base de } \mathbb{V} \text{ y los } \mathbf{w}_i \text{ independientes}$$

pero también que

$$n \leq m : \quad \text{por ser } B' \text{ base de } \mathbb{V} \text{ y los } \mathbf{v}_i \text{ independientes}$$

Luego,

$$m = n$$

como afirmamos.

Este último resultado nos permite asignar un número a cada espacio vectorial que admita una base con una cantidad finita de elementos. Como todas las bases tienen la misma cantidad de vectores, le asignamos *ese número*¹⁶ que llamaremos **dimensión** de \mathbb{V} y denotaremos

$$\dim \mathbb{V}$$

A este tipo de espacios vectoriales se los llama de **dimensión finita**.

Convención

Si $\mathbb{V} = \{\mathbf{0}\}$, decimos que $\dim \mathbb{V} = 0$.

Caso particular

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

pues ya vimos que tiene una base con n elementos, la base canónica.

Teorema

Si \mathbb{S} es un subespacio de un espacio vectorial \mathbb{V} de dimensión n , entonces

$$\dim \mathbb{S} \leq n$$

DEMOSTRACIÓN:

El caso $\mathbb{S} = \mathbf{0}$ es trivialmente cierto. Lo mismo sucede si $\dim \mathbb{V} = 0$.

¹⁶la cantidad de elementos que tiene una de sus bases (y por lo tanto todas las demás)

Consideremos entonces que $\mathbb{S} \neq 0$ y que $n \geq 1$. Al estar \mathbb{S} incluido en \mathbb{V} , todo conjunto linealmente independiente de vectores de \mathbb{S} es, en particular, un conjunto linealmente independiente de vectores de \mathbb{V} . Por lo tanto, su número no puede superar a n . Por otro lado, todo subespacio de un espacio vectorial puede ser considerado, él mismo, un espacio vectorial y por consiguiente tiene sentido hablar de bases de \mathbb{S} que, por lo que acabamos de decir, no pueden tener más de n vectores. Luego,

$$\dim \mathbb{S} \leq \dim \mathbb{V}$$

Observación

Si fuese

$$\dim \mathbb{S} = \dim \mathbb{V}$$

ambos tendrían bases de n elementos. Pero como $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$, la base de \mathbb{S} terminaría siendo una base de \mathbb{V} y por consiguiente

$$\mathbb{S} = \langle B \rangle = \mathbb{V}$$

si B denota una base de \mathbb{S} .

Conclusión: el único subespacio de que tiene la misma dimensión que el espacio es el mismo espacio.

Lema

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial de dimensión n y sea \mathbb{S} un subespacio propio. Si $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ es una base de \mathbb{S} y $\mathbf{v} \notin \mathbb{S}$, entonces

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}\}$$

es linealmente independiente.

DEMOSTRACIÓN:

Para comprobarlo planteamos la ecuación

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_m \mathbf{u}_m + a \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

y debemos ver que todos los coeficientes son nulos. En principio, como $\mathbf{v} \notin \mathbb{S} = \langle \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\} \rangle$ debe ser

$$a = 0$$

pero entonces,

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_m \mathbf{u}_m = \mathbf{0}$$

y esto, dado que los \mathbf{u}_i forman una base de \mathbb{S} implica que

$$a_1 = \dots = a_m = 0$$

Probamos así lo afirmado.

Teorema

Sea \mathbb{V} un espacio vectorial de dimensión n y sea $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ una base de un subespacio propio \mathbb{S} de \mathbb{V} . Entonces existen $n - m$ vectores $\mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ en \mathbb{V} tales que

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

es una base de \mathbb{V} .

DEMOSTRACIÓN

El hecho de ser \mathbb{S} un subespacio *propio* de \mathbb{V} nos dice que $m < n$ y que los vectores

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$$

no generan \mathbb{V} . Existe entonces un vector en \mathbb{V} que no es combinación de ellos; llamémoslo \mathbf{u}_1 . El lema anterior nos asegura que el conjunto

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1\}$$

es linealmente independiente.

Llegado este punto nos preguntamos si $n = m + 1$. Si es así, entonces ya probamos el resultado. Si $m + 1 < n$,

$$\mathbb{S}' = \langle \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1\} \rangle$$

es un subespacio propio de \mathbb{V} . Repitiendo el argumento anterior encontramos un vector $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{V}$ que no está en \mathbb{S}' y entonces el conjunto

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$$

es linealmente independiente. Comprobamos si $m + 2 = n$. En caso de serlo, terminamos la prueba. Si no es así, repetimos el procedimiento. Como la dimensión de \mathbb{V} es finita es claro que luego de $n - m$ pasos llegaremos a igualar la dimensión del espacio.

Luego, bastará llamar

$$\mathbf{v}_{m+1} = \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{v}_n = \mathbf{u}_{n-m}$$

Dimensión de la suma de subespacios

Ahora ya estamos en condiciones de calcular la dimensión del subespacio $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ conociendo la dimensión de cada uno.

Supongamos que $\dim \mathbb{S} = n$ y $\dim \mathbb{T} = m$. Vamos a considerar dos casos

◆ *Caso 1:* $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \{0\}$

Tomemos una base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de \mathbb{S} y una base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ de \mathbb{T} . El hecho de no tener elementos comunes, salvo el cero, hace que los vectores

$$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$$

sean linealmente independientes. En efecto, si

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_n \mathbf{u}_n + b_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + b_m \mathbf{v}_m = 0$$

resulta que

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_n \mathbf{u}_n = -b_1 \mathbf{v}_1 - \cdots - b_m \mathbf{v}_m$$

pero el primer miembro está en \mathbb{S} y el segundo está en \mathbb{T} , por lo cual ambos están en la intersección y eso implica que sean cero; i.e.,

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_n \mathbf{u}_n = 0 \quad \text{y} \quad b_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + b_m \mathbf{v}_m = 0$$

pero entonces, como los \mathbf{u}_i forman una base de \mathbb{S} y los \mathbf{v}_j una base de \mathbb{T} , son independientes y por lo tanto

$$a_1 = \cdots = a_n = 0 \quad , \quad b_1 = \cdots = b_m = 0$$

Concluimos que la unión de las dos bases es un conjunto linealmente independiente.

Por otro lado, si $\mathbf{w} \in \mathbb{S} + \mathbb{T}$, existen $\mathbf{u} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{T}$ tales que

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

Por estar \mathbf{u} en \mathbb{S} y ser $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

Análogamente con \mathbb{T} ,

$$\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_m \mathbf{v}_m$$

de donde,

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n + \beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_m \mathbf{v}_m$$

y de esta forma vemos que

$$w \in \langle \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \rangle$$

Resulta entonces que la unión de las bases genera $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ y está formada por vectores linealmente independientes. Podemos afirmar que es una base de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$. Siendo que tiene $n + m$ elementos concluimos que

$$\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = n + m = \dim \mathbb{S} + \dim \mathbb{T}$$

en este caso.

◆ *Caso 2:* $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} \neq 0$

Sabemos que $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ es un subespacio y que no es nulo, por lo tanto

$$\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = k \geq 1$$

Comencemos por tomar una base $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$ de este subespacio. Al estar incluido tanto en \mathbb{S} como en \mathbb{T} , los \mathbf{w}_j están en \mathbb{S} y \mathbb{T} y siguen siendo independientes.

Aplicamos entonces el teorema anterior y extendemos la base de la intersección a sendas bases de \mathbb{S} y de \mathbb{T}

$$\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n\} \text{ de } \mathbb{S} \quad \text{y} \quad \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_m\} \text{ de } \mathbb{T}$$

Afirmamos que

$$B = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_m\}$$

es una base de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$.

Argumentando como en el caso anterior se ve que son linealmente independientes, aquí es fundamental el hecho que los vectores $\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n$ no están en \mathbb{T} y que los vectores $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_m$ no están en \mathbb{S} . Resta ver que

$$\langle B \rangle = \mathbb{S} + \mathbb{T}$$

Si $\mathbf{u} \in \langle B \rangle$, $\mathbf{u} = a_1 \mathbf{w}_1 + \dots + a_k \mathbf{w}_k + b_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \dots + b_n \mathbf{u}_n + c_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} + \dots + c_m \mathbf{v}_m$ y como, por ejemplo

$$a_1 \mathbf{w}_1 + \dots + a_k \mathbf{w}_k + b_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \dots + b_n \mathbf{u}_n \in \mathbb{S} \quad \text{y} \quad c_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} + \dots + c_m \mathbf{v}_m \in \mathbb{T}$$

resulta que $\mathbf{u} \in \mathbb{S} + \mathbb{T}$.

Por otro lado, si $\mathbf{u} \in \mathbb{S} + \mathbb{T}$, $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{T}$. Entonces,

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{w}_k + \alpha_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

y

$$\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \beta_k \mathbf{w}_k + \beta_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} + \dots + \beta_m \mathbf{v}_m$$

de modo que

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\alpha_1 + \beta_1) \mathbf{w}_1 + \dots + (\alpha_k + \beta_k) \mathbf{w}_k + \alpha_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n + \beta_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} + \dots + \beta_m \mathbf{v}_m$$

y esto implica que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \langle B \rangle$. En consecuencia B genera el subespacio suma.

Ejercicio 21

Dados los subespacios

$$\mathbb{S} = \langle (1, 0, 1, 0), (3, 0, 1, 1) \rangle, \quad \mathbb{T} : x - 4y + z - w = 0$$

- averigüe qué relación debe haber entre α y β para asegurar que $\alpha(1, 0, 1, 0) + \beta(3, 0, 1, 1) \in \mathbb{T}$
- ¿le sirve la información obtenida para hallar $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$?
- halle la dimensión de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$.

Suma Directa

Con las notaciones del teorema anterior, llamemos

$$\mathbb{T} = \langle \{\mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_n\} \rangle$$

Es claro que

$$\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{V} \quad (8)$$

Pero además estos dos subespacios satisfacen

$$\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \mathbf{0} \quad (9)$$

A los subespacios que satisfacen (8) y (9) se los llama **complementarios**.

La suma de dos subespacios que cumplen la condición (9) se llama **suma directa** y se denota

$$\mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$$

En el caso de subespacios complementarios es claro que

$$\mathbb{S} \oplus \mathbb{T} = \mathbb{V}$$

Ejercicio 22

Determine si los siguientes pares de subespacios están en suma directa y halle una base del subespacio suma

a) $\mathbb{S} = \langle (1, 1, -1, 1), (0, 2, 3, 0) \rangle$, $\mathbb{T} = \langle (3, 0, 1, 0) \rangle$

b) $\mathbb{S} : \begin{cases} x - y + w = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$, $\mathbb{T} = \langle (1, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle$

Producto escalar en \mathbb{R}^n

En \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 ya tenemos definido el producto escalar entre vectores y sabemos que los vectores cuyo producto escalar es nulo forman un ángulo recto.

Vamos a extender esas definiciones a \mathbb{R}^n . Llamaremos **producto escalar** o **producto interno** entre los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ al número

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$$

El número

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

se llama **norma** de \mathbf{u} y generaliza a \mathbb{R}^n la noción de distancia al origen.

Decimos que el vector \mathbf{u} está **normalizado** cuando es unitario. Cualquier vector no nulo \mathbf{u} se puede normalizar dividiéndolo por su norma,

$$\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

Este vector tiene la misma dirección y sentido que \mathbf{u} y tiene norma 1.

Definimos el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} como el único valor α entre 0 y π que satisface

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Y esto sugiere decir que dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son *ortogonales* cuando $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Dado un conjunto $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ decimos que es *ortogonal* si

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$$

para todo $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, k$)

Y decimos que es *ortonormal* si además todos sus vectores son unitarios.

Proposición

Sea $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ un conjunto ortogonal de vectores no nulos de \mathbb{R}^n , entonces es linealmente independiente.

DEMOSTRACIÓN:

Planteemos la ecuación

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

y veamos que todos los a_i son cero.

Fijemos un i entre 1 y k y multipliquemos por \mathbf{u}_i la ecuación anterior,

$$[a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_k \mathbf{u}_k] \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u}_i = 0$$

distribuyendo,

$$a_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_i + \dots + a_{i-1} \mathbf{u}_{i-1} \cdot \mathbf{u}_i + a_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i + a_{i+1} \mathbf{u}_{i+1} \cdot \mathbf{u}_i + \dots + a_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_i = 0$$

pero la condición de ortogonalidad nos dice que todos los sumandos son cero salvo $a_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i$; luego,

$$a_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 0$$

y como $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = \|\mathbf{u}_i\|^2 \neq 0$ debe ser,

$$a_i = 0$$

Siendo i arbitrario, probamos lo afirmado.

Subespacios ortogonales

Dos subespacios \mathbb{S} y \mathbb{T} de \mathbb{R}^n se dicen *ortogonales* si cada elemento de uno de ellos es ortogonal a cada elemento del otro.

Es decir,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{S}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{T}$.

Notemos que en tal caso resulta

$$\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \mathbf{0}$$

Y, en consecuencia, si valiera que

$$\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^n$$

obtendríamos

$$\mathbb{S} \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^n$$

En tal situación se dice que \mathbb{S} es el *complemento ortogonal* de \mathbb{T} o, equivalentemente, que \mathbb{T} es el *complemento ortogonal* de \mathbb{S} .

Ejemplo

Consideremos el subespacio de \mathbb{R}^3

$$\mathbb{S} = \langle \{(2, 1, 0), (-3, 0, 1)\} \rangle$$

Como el vector

$$\mathbf{w} = (2, 1, 0) \times (-3, 0, 1) = (1, -2, 3)$$

es ortogonal a \mathbb{S} resulta que el subespacio

$$\mathbb{T} = \langle \{(1, -2, 3)\} \rangle$$

es el complemento ortogonal de \mathbb{S} .

NOTA: al tener \mathbb{S} dimensión 2 ya sabíamos que \mathbb{T} tenía que tener dimensión 1.

Ejercicio 23

Considere los planos

$$\pi_1 : 2x - y + z = 0 \quad , \quad \pi_2 : y + z = 0$$

a) halle una dirección normal a cada uno de ellos y calcule el ángulo que forman

b) haga un esquema gráfico de estos planos

NOTA: No hace falta que los ubique en un sistema de ejes cartesianos

c) ¿son π_1 y π_2 subespacios ortogonales?

d) ¿le sorprende el resultado?

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

A partir de una base de \mathbb{R}^n , $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$, se trata de encontrar otra, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, que sea ortonormal y que también satisfaga que

$$\langle \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \rangle = \langle \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \rangle$$

para todo $k = 1, \dots, n$.

Teorema (Gram-Schmidt)

Sea $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ un conjunto linealmente en \mathbb{R}^n . Entonces, el conjunto de vectores

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}, \quad \dots, \quad \mathbf{v}_m = \frac{\mathbf{w}_m}{\|\mathbf{w}_m\|}$$

donde los \mathbf{w}_i están definidos por

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{u}_2 - \text{proy}_{\mathbf{w}_1} \mathbf{u}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_m &= \mathbf{u}_m - \text{proy}_{\mathbf{w}_1} \mathbf{u}_m - \text{proy}_{\mathbf{w}_2} \mathbf{u}_m - \dots - \text{proy}_{\mathbf{w}_{m-1}} \mathbf{u}_m \end{aligned} \tag{10}$$

es un conjunto ortonormal que satisface,

$$\langle \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \rangle = \langle \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \rangle$$

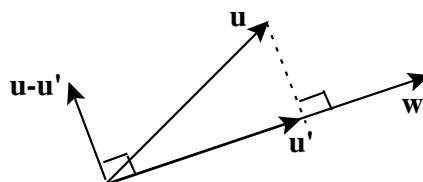
para todo $k = 1, \dots, n$.

No vamos a dar una demostración formal de este resultado pero sí daremos una idea del por qué de esta construcción.

Recordemos que habíamos definido

$$\text{proy}_{\mathbf{w}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}} \mathbf{w}$$

que resulta ser un vector paralelo a \mathbf{u} cuya longitud está determinada por la proyección ortogonal del extremo de \mathbf{u} sobre \mathbf{w} ,



\mathbf{u}' es la proyección ortogonal
de \mathbf{u} sobre \mathbf{w}
 $\mathbf{u}-\mathbf{u}'$ es ortogonal a

\mathbf{w} y $\mathbf{u}-\mathbf{u}'$ son ortogonales y generan el mismo subespacio que \mathbf{w} y \mathbf{u}

Ejemplo

Dado el conjunto linealmente independiente $\{(2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 vamos a aplicar el proceso de Gram-Schmidt para conseguir un conjunto ortonormal tal que el primer vector conserve la dirección y sentido de $(2, 1, 0)$ y que ambos generen el mismo plano.

Comenzamos definiendo

$$\mathbf{u} = (2, 1, 0)$$

Calculamos ahora

$$\text{proy}_{(2,1,0)}(-3, 0, 1) = \frac{(2, 1, 0) \cdot (-3, 0, 1)}{(2, 1, 0) \cdot (2, 1, 0)} (2, 1, 0) = -\frac{6}{5}(2, 1, 0)$$

y ahora definimos

$$\mathbf{v} = (-3, 0, 1) - [-\frac{6}{5}(2, 1, 0)] = (-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 1)$$

El conjunto

$$\left\{ (2, 1, 0), \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 1\right) \right\}$$

es ortogonal pero no ortonormal. Sólo nos falta normalizarlos. Entonces, el conjunto

$$\left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}\right) \right\}$$

cumple con las condiciones pedidas.

Ejercicio 24

Aplique el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la siguiente base de \mathbb{R}^3

$$B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

En sendos esquemas gráficos represente a la base B y a la obtenida mediante el proceso anterior.

PROBLEMAS

1. a) Considere el espacio vectorial \mathbb{R}^2 y encuentre todos $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen
 - (i) $2\mathbf{u} + 3(2, 1) = (0, 0)$
 - (ii) $4\mathbf{u} - 2(-1, 3) = (0, 1)$
 - (iii) $(\frac{1}{2} + \frac{2}{3})\mathbf{u} + 5(\frac{1}{6}(3, 4)) = \frac{1}{5}(2, -1)$
- b) Considere el espacio vectorial $C[-1, 1] = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$ y halle todas las $f \in \mathbb{V}$ que satisfacen
 - (i) $2f - 1 = g$ siendo $g(x) = \cos x$
 - (ii) $\ln f = 1$
 - (iii) $e^f = g$ siendo $g(x) = x + 2$
 - (iv) $2f + \frac{1}{g} = g$ siendo $g(x) = e^x$

Nota: siendo f una función de $[-1, 1]$ en \mathbb{R} hallarla significa decir cuánto vale en cada $x \in [-1, 1]$.

2. Responda las siguientes preguntas

- a) Si sumamos dos números complejos, ¿es cierto que el resultado es un número complejo?
- b) Si multiplicamos a un número complejo por un número real, ¿es cierto que el resultado es un número complejo?
- c) El 0, ¿es un número complejo?
- d) Sumar números complejos, ¿es una operación conmutativa?
- e) ¿Es cierto que $(z + v) + w = z + (v + w)$ si $z, v, w \in \mathbb{C}$?

Ahora analice si es cierto que \mathbb{C} es un espacio vectorial real.

Sugerencia: consulte la página 1.

3. Responda las siguientes preguntas

- a) Si sumamos dos funciones derivables, ¿es cierto que el resultado es una función derivable?
- b) Si multiplicamos a una función derivable por un número real, ¿es cierto que el resultado es también una función derivable?
- c) La función idénticamente nula, ¿es derivable?
- d) Sumar dos funciones, ¿es una operación conmutativa?
- e) ¿Es cierto que $(f + g) + h = f + (g + h)$ si f, g, h son funciones derivables?

Ahora analice si es cierto que $\mathbb{V} = \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es derivable en } (a, b)\}$ es un espacio vectorial real.

Sugerencia: consulte la página 1.

4. Estudie si los siguientes conjuntos, con las operaciones usuales, resultan ser espacios vectoriales reales

- a) $\mathbb{C}[X]$
- b) $\mathbb{Q}[X]$
- c) \mathbb{V} es el conjunto de todas las sucesiones convergentes de números reales.

5. En cada uno de los casos siguientes \mathbb{S} es un subconjunto de un espacio vectorial real \mathbb{V} . Determine quién es \mathbb{V} y si \mathbb{S} es subespacio de \mathbb{V} .

- a) $\mathbb{S} = \{(x, y, x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- b) $\mathbb{S} = \mathbb{R}_3[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P = 0 \text{ o } \text{gr}(P) \leq 3\}$
- c) $\mathbb{S} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid 0 \text{ es raíz de } P\}$
- d) $\mathbb{S} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{existe } Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tal que } P = (X - 1)Q\}$
- e) $\mathbb{S} = \{f \in C[-1, 1] \mid f(0.5) = 0\}$
- f) $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 0\}$
- g) $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + iz = 0\}$
- h) $\mathbb{S} = \{t(1, 0, 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$
- i) $\mathbb{S} = \{t(0, 1, 0) + s(-1, 0, 2) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$
- j) $\mathbb{S} = \{t(0, 1, 0) + s(-1, 0, 2) + (1, 1, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$
- k) $\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\} \cup \{(0, 0)\}$
- l) $\mathbb{S} = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{u} = (1, u_2)\}$
- m) $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- n) $\mathbb{S} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P = 0 \text{ o } \text{gr}P = 3\}$
- o) $\mathbb{S} = \{f \in C[-1, 1] \mid f \text{ se anula en algún punto de } [-1, 1]\}$

6. Muestre que los únicos subespacios propios de \mathbb{R}^3 son los planos y las rectas que pasan por el origen.

7. Determine cuáles de los siguientes vectores de \mathbb{R}^3 pertenecen al subespacio generado por $(1, 2, 1)$ y $(2, 3, 4)$

- a) $(4, 7, 6)$
- b) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$
- c) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
- d) $(\frac{1}{2}, 1, 1)$
- e) $(2, 9, 5)$

8. Determine cuáles de los siguientes polinomios pertenece al subespacio generado por

$$P = X^3 + 2X^2 + 1, \quad Q = X^2 - 2 \quad \text{y} \quad R = X^3 + X$$

- a) $X^2 - X + 3$
- b) $X^2 - 2X + 1$
- c) $4X^3 - 3X + 5$
- d) $X^4 + 1$
- e) $X - 5$

9. Describa al subespacio generado por los siguientes vectores e indique cuál es el espacio vectorial

- a) $(2, 1, 3)$ y $(-1, 2, 1)$
- b) $(1, 0, 2)$ y $(2, -1, 2)$
- c) $(3, 0, -1)$ y $(-3, 0, 1)$
- d) $(-1, 1, 2)$, $(0, 1, 0)$ y $(2, 4, 1)$
- e) X^2 y $X(X+1)$
- f) $X+1$, X^2-1 y 2
- g) 1 , X , X^2

10. Sea $C^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ admite segunda derivada continua}\}$. Muestre que todos los vectores del subespacio generado por

$$\cos \quad \text{y} \quad \sin$$

satisfacen la ecuación diferencial

$$g'' + g = 0$$

11. Pruebe que los siguientes conjuntos de vectores generan el mismo subespacio

- a) $\{(1, -1, 2), (3, 0, 1)\}$ y $\{(-1, -2, 3), (3, 3, -4)\}$
- b) $\{f, g, h\}$ y $\{F, G, H\}$ siendo

$$f(x) = \sin^2 x, \quad g(x) = \cos^2 x, \quad h(x) = \sin x \cos x$$

en $C(\mathbb{R})$

$$F(x) = 1, \quad G(x) = \sin 2x, \quad H(x) = \cos 2x$$

12. Muestre que el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

es un subespacio de \mathbb{R}^3 . ¿Vale lo mismo para el sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad ?$$

13. ¿Son linealmente independientes los vectores $(0, 2, -1)$, $(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ y $(0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$? En caso de no serlo, halle un subconjunto linealmente independiente que tenga el mayor número de elementos.

14. Pruebe que los siguientes conjuntos son bases de \mathbb{R}^2

- a) $\{(1, 0), (0, -1)\}$
- b) $\{(\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta)\}$ $\theta \in [0, 2\pi]$ fijo
- c) $\{(1, 1), (0, 1)\}$

15. Pruebe que los siguientes conjuntos de vectores son bases de \mathbb{R}^4

- a) $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$
 b) $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (-1, 0, 1, 1), (0, -1, 0, 1)\}$
 c) $\{(2, -1, 0, 1), (1, 3, 2, 0), (0, -1, -1, 0), (-2, 1, 2, 1)\}$

y exprese al vector $(2, -2, 1, 3)$ como combinación lineal de los elementos de estas bases.

16. Muestre que las funciones f , g y h dadas por

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \sin x, \quad h(x) = \cos x$$

son linealmente independientes en $C[-\pi, \pi]$

17. Considere las funciones

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Muestre que son

- (i) linealmente dependientes en $C(\mathbb{R}_{\geq 0})$
 (ii) linealmente independientes en $C(\mathbb{R})$

18. Muestre que las funciones f y g dadas por

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = xe^x$$

son linealmente independientes en $C[0, 1]$.

¿Le sirve este resultado para saber, sin hacer cálculos adicionales, si también lo son en $C[-1, 1]$? ¿Y en $C[0, \frac{1}{2}]$?

19. Halle las componentes de los siguientes vectores de \mathbb{R}^3

- a) $(0, 1, 0)$ b) $(-2, 1, 1)$ c) $(0, 0, 1)$ d) $(4, -2, 2)$ e) $(3, 3, 3)$

en la base $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

20. Pruebe que los vectores $(2, 1, 0)$, $(2, 1, 1)$ y $(2, 2, 1)$ forman una base de \mathbb{R}^3 y halle las coordenadas cartesianas de los vectores cuyas componentes en esa base son

- a) $(1, 0, 0)$ b) $(-1, 2, 1)$ c) $(4, -5, 0)$ d) $(0, 3, 0)$ e) $(2, 2, 1)$

21. *Este ejercicio le va a servir para saber si entendió bien lo que significan las componentes de un vector en una base. Si plantea un sistema y lo resuelve bien significa que entendió el procedimiento pero no el concepto en sí. Si tiene claro el concepto no necesitará hacer cuentas.*

Halle una base de \mathbb{R}^4 respecto de la cual el vector $(-3, 1, 2, -1)$ tenga componentes $(1, 1, 1, 1)$.

¿Cuáles son las componentes de $(-3, 0, 2, 0)$ en esa base?

22. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. Explique, en términos de dependencia e independencia lineal, qué significa que

- a) \mathbf{u} y \mathbf{v} sean paralelos
- b) \mathbf{u} y \mathbf{v} no sean paralelos
- c) $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sean coplanares
- d) $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ no sean coplanares

23. ¿Cuál es la dimensión del subespacio de \mathbb{R}^n generado por los vectores

- a) $(2, 1, -1), (3, 2, 1)$ y $(1, 0, -3)$?
- b) $(1, -1, 2), (0, 2, 1)$ y $(-1, 0, 1)$?
- c) $(1, 0, 2, -1), (3, -1, -2, 0), (1, -1, -6, 2)$ y $(0, 1, 8, -3)$?
- d) $(-1, 1, 6, -2), (\frac{1}{2}, 0, 1, -\frac{1}{2})$ y $(1, 1, 10, -4)$?

24. Pruebe que cualquier subconjunto finito del conjunto

$$\{X^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

es linealmente independiente en $\mathbb{R}[X]$. Deduzca que $\mathbb{R}[X]$ no tiene dimensión finita.

25. ¿Cuál es la dimensión del subespacio de \mathbb{R}^n determinado por la ecuación

$$a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + x_n = 0?$$

Exhiba una base.

26. Dados los vectores

$$\mathbf{u} = (2, 0, 1, 1) \quad , \quad \mathbf{v} = (1, 1, 0, 3)$$

encuentre dos vectores \mathbf{w} y \mathbf{w}' tales que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}'\}$ sea una base de \mathbb{R}^4 .

¿Es posible hallar otra base de \mathbb{R}^4 que tenga a \mathbf{u} y a \mathbf{v} como parte de ella? De ser así, hállela.

27. En cada caso encuentre un conjunto de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones sea el subespacio dado

- a) $\mathbb{S} = \{t(2, 0, 1) + s(-1, 1, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$
- b) $\mathbb{S} = \langle (2, 0, 1), (-1, 1, 0) \rangle$
- c) $\mathbb{S} = \langle (1, 1, 0, 1)(1, 0, 0, 1) \rangle$

28. Para cada par de subespacios, halle la intersección y la suma. Indique si están en suma directa.

- a) $\mathbb{S} : x - 3y + z = 0 \quad , \quad \mathbb{T} = \{t(2, 0, 1) + s(-1, 1, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$
- b) $\mathbb{S} : x - 3y + z = 0 \quad , \quad \mathbb{T} = \langle (2, 0, 1), (-1, 1, 0) \rangle$

- c) $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0\}$, $\mathbb{T} = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$
 d) $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$, $\mathbb{T} = \langle(1, 1, 0), (5, 7, 3)\rangle$
 e) $\mathbb{S} = \langle(1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24)\rangle$, $\mathbb{T} = \langle(1, 1, 0), (3, 2, 1)\rangle$
 f) $\mathbb{S} : x - y + z - w = 0$, $\mathbb{T} : 2x - z + 3w = 0$ (en \mathbb{R}^4)

Calcule la dimensión de cada subespacio.

29. Sean \mathbb{S} y \mathbb{T} dos subespacios de \mathbb{V} tales que $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}$. Muestre que si tienen la misma dimensión son iguales.

Sugerencia: en la primera parte de este trabajo práctico hay algo que le puede ayudar.

30. Para cada uno de los siguientes subespacios, halle una base y extiéndala a una base de \mathbb{V}

- a) $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y = 0\}$
 b) $\mathbb{S} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z - w = 0, x + w = 0\}$
 c) $\mathbb{S} = \langle(1, 1, 0, 1)(1, 0, 0, 1)\rangle$

31. Para cada uno de los siguientes subespacios, halle un complemento. Analice si es único o se podría haber encontrado otro.

- a) $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y = 0\}$
 b) $\mathbb{S} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z - w = 0, x + w = 0\}$
 c) $\mathbb{S} = \langle(1, 1, 0, 1)(1, 0, 0, 1)\rangle$

32. Analice si los siguientes pares de subespacios son ortogonales

- a) $\mathbb{S} = \langle(a, b)\rangle$, $\mathbb{T} = \langle(-b, a)\rangle$ $(a, b) \neq (0, 0)$
 b) $\mathbb{S} = \langle(1, 0, 0), (-3, 2, 1)\rangle$, $\mathbb{T} = \langle(0, 1, 1), (3, -2, 1)\rangle$
 c) $\mathbb{S} = \langle(1, 0, 0), (-3, 2, 1)\rangle$, $\mathbb{T} = \langle(0, 1, 0)\rangle$
 d) $\mathbb{S} : x - 2y + 3z = 0$, $\mathbb{T} = \langle(1, -2, 3)\rangle$

33. Halle un subespacio \mathbb{T} de \mathbb{R}^5 que sea ortogonal a

$$\mathbb{S} = \langle(2, -1, 3, 5, 4)\rangle$$

y calcule $\mathbb{S} + \mathbb{T}$. ¿Es una suma directa?

Encuentre \mathbb{S}^\perp .

34. Repita el ejercicio anterior con el subespacio

$$\mathbb{S} = \langle(1, 0, -2, 3, -1), (0, -7, 4, 5, 8)\rangle$$

35. Considere los subespacios de \mathbb{R}^5

$$\mathbb{S} : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 7x_5 = 0 \\ 8x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases} , \quad \mathbb{T} = \langle(1, -2, 5, -1, 7), (8, -4, 1, -3, 9)\rangle$$

y averigüe si es cierto que $\mathbb{T} = \mathbb{S}^\perp$.

36. Halle el complemento ortogonal de los siguientes subespacios y exhiba una base ortogonal del \mathbb{R}^n correspondiente

a) $\mathbb{S} : x - 2y + 3z = 0 \quad (n = 3)$

b) $\mathbb{S} = \langle (1, -2) \rangle$

c) $\mathbb{S} = \langle (1, 0, 1), (0, 2, -1) \rangle$

d) $\mathbb{S} : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$

37. Halle bases ortonormales de cada uno de los siguientes subespacios y del espacio vectorial correspondiente

a) $\mathbb{S} : x - 2y + 3z = 0$

b) $\mathbb{S} = \langle (1, -2) \rangle$

c) $\mathbb{S} = \langle (1, 0, 1), (0, 2, -1) \rangle$

d) $\mathbb{S} : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$