



ALGEBRA Y GEOMETRIA

PRIMER CUATRIMESTRE 2011

TRABAJO PRÁCTICO 7

CONTENIDO

Transformación Lineal	1
Propiedades básicas — Ejemplos	1
Ejercicios 1 a 9	5
Operaciones con transformaciones lineales	6
Ejemplos	7
Monomorfismo — Epimorfismo — Isomorfismo	7
Núcleo — Imagen	8
Ejercicios 10 y 11	10
Proposición	11
Imagen de un subespacio	13
Ejercicios 12 a 16	13
Proposición	14
Ejercicio 17	15
Corolario	15
Ejercicios 18 a 21	16
Teorema de la Dimensión	17
Ejercicio 22	18

Teorema	18
Ejemplos	19
Ejercicio 23	20
Cálculo del isomorfismo inverso	21
Ejercicio 24	23
Transformaciones ortogonales	23
Ejercicios 25 y 26	24
Propiedades	24
Problemas	26

Página de Álgebra y Geometría

<http://www.lirweb.com.ar>

Una vez registrado podrá acceder a sus cursos

Consultas Online

<http://mateingeuca.wordpress.com>

TRANSFORMACIONES LINEALES

Transformación Lineal

Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} espacios vectoriales, una *transformación lineal* es una función

$$T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

que satisface las siguientes propiedades

$$\diamond T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u}) \quad \text{y}$$

$$\diamond T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Propiedades básicas

Sea $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal, \mathbb{V}, \mathbb{W} espacios vectoriales.

1. $T(a_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + a_k \mathbf{u}_k) = a_1 T(\mathbf{u}_1) + \cdots + a_k T(\mathbf{u}_k)$
para todo $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{V}$ y todo $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$. Basta aplicar reiteradamente las propiedades que definen a una transformación lineal.
2. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ¹
pues $T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0})$ y en consecuencia, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Ejemplos

Las funciones que mencionamos a continuación son transformaciones lineales.

1. $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}, T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$.
2. Llamamos *identidad* a la transformación que asocia cada vector a sí mismo

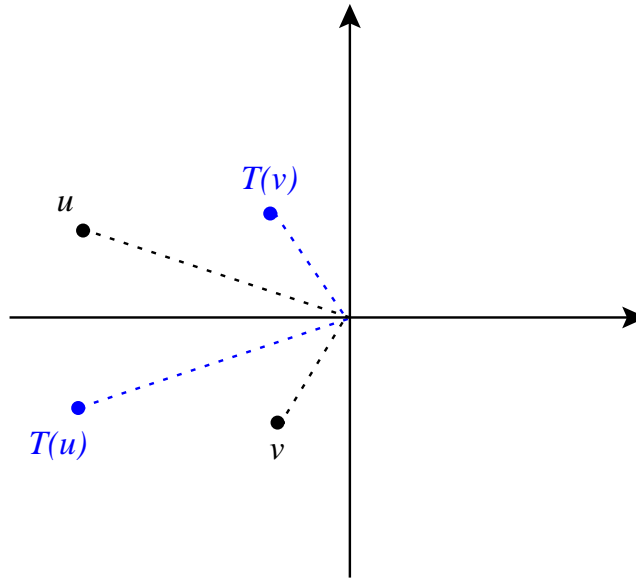
$$\text{id} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \quad , \quad \text{id}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \quad (\text{para todo } \mathbf{u} \in \mathbb{V})$$

3. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y) = (x - 2y, 3x + y, x - 4y)$.

¹el $\mathbf{0}$ del primer miembro es el elemento neutro de \mathbb{V} y el $\mathbf{0}$ del segundo miembro es el elemento neutro de \mathbb{W} ; podrían ser distintos. ¿Se le ocurre un ejemplo donde efectivamente sean distintos?

4. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, -y)$.

T manda cada punto (x, y) a su simétrico respecto del eje x , tal como se aprecia en la siguiente figura



En consecuencia, si por ejemplo aplicamos T a cada uno de los puntos de la parábola $y = x^2$, el resultado será la parábola $y = -x^2$.

5. Dado $\theta \in [0, 2\pi]$, consideremos la aplicación $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (\cos \theta x - \operatorname{sen} \theta y, \operatorname{sen} \theta x + \cos \theta y)$$

Para interpretar mejor cuál es el efecto que produce T sobre cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ será conveniente recurrir a las coordenadas polares,

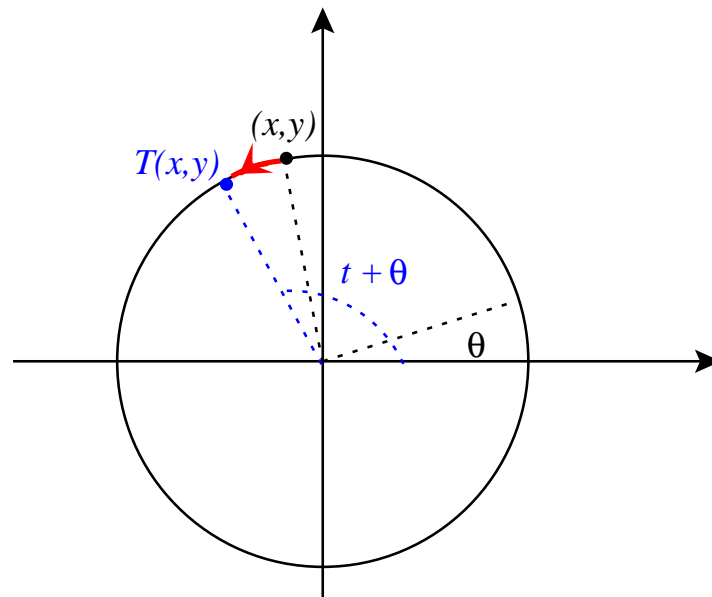
$$x = r \cos t \quad , \quad y = r \operatorname{sen} t \quad (r > 0 \text{ y } 0 \leq t \leq 2\pi)$$

entonces

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T(r \cos t, r \operatorname{sen} t) \\ &= (r \cos \theta \cos t - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} t, r \operatorname{sen} \theta \cos t + r \cos \theta \operatorname{sen} t) \\ &= (r \cos(\theta + t), r \operatorname{sen}(\theta + t)) \end{aligned}$$

Esto nos dice que a un punto de coordenadas polares (r, t) lo transforma en el punto de coordenadas polares $(r, t + \theta)$; es decir, T produce una rotación en un ángulo θ en sentido antihorario ² tal como se ilustra en el siguiente gráfico,

²¿cómo habría que modificar T para lograr una rotación de ángulo θ pero en sentido horario?

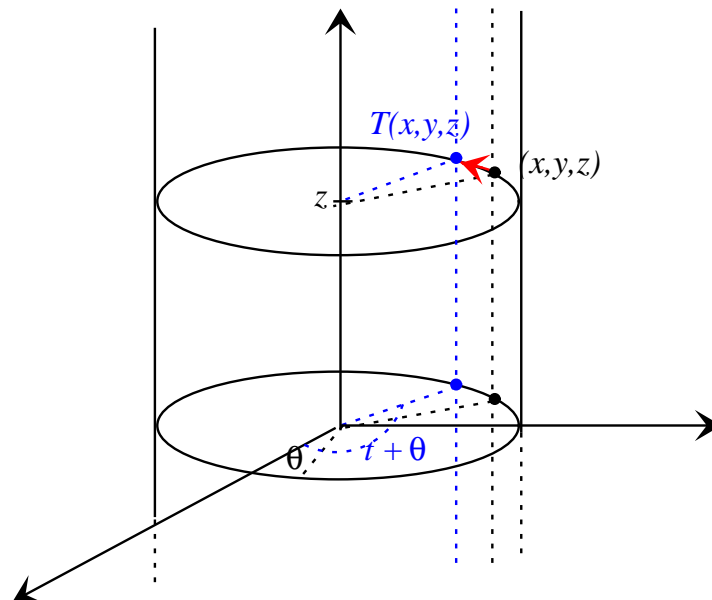


6. Dado $\theta \in [0, 2\pi]$, consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (\cos \theta x - \operatorname{sen} \theta y, \operatorname{sen} \theta x + \cos \theta y, z)$$

En este caso, para interpretar mejor cómo actúa T nos conviene utilizar coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T(r \cos t, r \operatorname{sen} t, z) \\ &= (r \cos \theta \cos t - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} t, r \operatorname{sen} \theta \cos t + r \cos \theta \operatorname{sen} t, z) \\ &= (r \cos(t + \theta), r \operatorname{sen}(t + \theta), z) \end{aligned}$$



Queda claro que T no modifica la *altura* y respecto de las dos primeras variables, el efecto es el mismo que produce la transformación del ejemplo anterior; con lo cual, sobre el plano horizontal de altura z se produce una rotación de ángulo θ en sentido antihorario, si observamos desde arriba del plano ³.

³¿cómo se vería esta rotación si observamos desde abajo?

7. Las *proyecciones* sobre cada componente

$$\pi_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \pi_1(x, y) = x \quad , \quad \pi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \pi_2(x, y) = y$$

8. *Proyección sobre el plano xy*

$$\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \quad , \quad \pi(x, y, z) = (x, y, 0)$$

9. Consideremos el espacio vectorial de las funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$:

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$$

Definimos la transformación $I : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

Las conocidas propiedades de la integral definida muestran que I es una transformación lineal.

10. Consideremos el espacio vectorial de las funciones con derivada primera continua en el intervalo (a, b) , denotado por

$$C^1(a, b) = \{f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f' \text{ es continua}\} = \{f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f' \in C(a, b)\}$$

La transformación $D : C^1(a, b) \longrightarrow C(a, b)$ dada por

$$D(f) = f'$$

es una transformación lineal, lo que se comprueba fácilmente a partir de las propiedades de la derivada.

11. El ejemplo anterior se puede generalizar. Consideremos el espacio vectorial de las funciones que tienen n derivadas continuas, denotado por

$$C^n(a, b) = \{f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f^{(n)} \in C(a, b)\}$$

La aplicación $D : C^n(a, b) \longrightarrow C^{n-1}(a, b)$ definida por

$$D(f) = f'$$

es una transformación lineal. ¿Es cierto que $D(f) \in C^{(n-1)}(a, b)$?

12. Volvamos al espacio vectorial $C[a, b]$ y definamos ahora la transformación P que a cada función f , continua en $[a, b]$, le asocia la primitiva dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Tenemos entonces que $P : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ y

$$P(f) = F$$

i.e.,

$$P(f)(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Los resultados conocidos sobre integrales muestran que P es una transformación lineal. ¿Es cierto que $P(f) \in C[a, b]$?

Ejercicio 1

Analice si puede calcular $T(2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{w})$ sabiendo que T es una transformación lineal que satisface

$$T(\mathbf{u}) = (1, 0, -1) \quad , \quad T(\mathbf{v}) = (0, 0, 2) \quad , \quad T(\mathbf{w}) = (3, 0, 1)$$

o necesita más información.

Si $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ son otros tres vectores tales que

$$T(\mathbf{U}) = (1, 0, -1) \quad , \quad T(\mathbf{V}) = (0, 0, 2) \quad , \quad T(\mathbf{W}) = (3, 0, 1)$$

¿puede responder –sin hacer cuentas– cuánto vale $T(2\mathbf{U} - 3\mathbf{V} + \frac{1}{2}\mathbf{W})$?

Ejercicio 2

Compruebe que las siguientes funciones son transformaciones lineales

- a) $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$, $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$
- b) $\text{id} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$, la identidad
- c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = ax + by + cz$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ fijos)
- d) T : rotación definida en el ejemplo 5.

Ejercicio 3

Averigüe si las siguientes funciones son transformaciones lineales

- a) $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = x^2$
- b) $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = \text{sen } x$
- c) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, y, x - 1)$
- d) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y) = x^2 - y^2 - (x + 1)^2 + (y - 1)^2$

Ejercicio 4

Se sabe que las funciones $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfacen

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \quad , \quad f(a\mathbf{u}) = af(\mathbf{u}) \quad , \quad g(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = g(\mathbf{u}) + g(\mathbf{v}) \quad , \quad g(a\mathbf{u}) = ag(\mathbf{u})$$

para cada $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ y cada $a \in \mathbb{R}$. Analice si

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad T(\mathbf{u}) = (f(\mathbf{u}), g(\mathbf{u}))$$

es una transformación lineal.

Ejercicio 5

Utilice resultados obtenidos en los ejercicios anteriores para averiguar –sin hacer cuentas– si la función $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (2x - 3y + z, x - 4y + 5z)$ es una transformación lineal.

Ejercicio 6

Halle todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$T(1, 0, 0) = 2 \quad , \quad T(0, 1, 0) = -3 \quad , \quad T(0, 0, 1) = 1$$

Ejercicio 7

Halle todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$T(0, 1, 0) = 2 \quad , \quad T(0, 0, 1) = -3 \quad , \quad T(1, 0, 0) = 1$$

NOTA: no tiene la misma respuesta que el ejercicio anterior.

Ejercicio 8

Halle la expresión general de cualquier transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejercicio 9

Halle la expresión general de cualquier transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Operaciones con transformaciones lineales

◆ SUMA

Dadas las transformaciones lineales $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ y $S : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ se define la **suma** de ambas como la función $T + S : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ dada por

$$(T + S)(\mathbf{u}) = T(\mathbf{u}) + S(\mathbf{u})$$

el hecho de tener el mismo espacio vectorial \mathbb{V} por dominio y el mismo espacio vectorial \mathbb{W} por codominio hace que esté bien definida esta operación.

Además, $T + S$ resulta ser también una transformación lineal

◆ PRODUCTO POR ESCALAR

Dada la transformación lineal $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ y el número $\alpha \in \mathbb{R}$ se define el **producto por escalar** de T por α como la función $\alpha T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ dada por

$$(\alpha T)(\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$$

que resulta ser también una transformación lineal.

◆ COMPOSICIÓN

Dadas las transformaciones lineales $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ y $S : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{U}$ se define la **composición** de T con S como la función $S \circ T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$ dada por

$$S \circ T(\mathbf{u}) = S(T(\mathbf{u}))$$

que resulta ser también una transformación lineal.

Caso particular

Si partimos de una transformación lineal $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, tenemos definida la composición

$$T \circ T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \quad , \quad T \circ T(\mathbf{u}) = T(T(\mathbf{u}))$$

Por similitud con la operación producto de números se suele denotar en la forma

$$T \circ T = T^2$$

y más generalmente podríamos definir la *potencia* m -ésima de una transformación lineal en las condiciones de T por

$$T^m = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_m$$

Ejemplo

Esta última operación nos permite dar otro ejemplo de transformación lineal basado en uno de los anteriores. Recordemos la transformación del ejemplo 11., pero ahora modificamos su dominio y codominio reemplazándolo por el conjunto de las funciones que son infinitamente derivables, denotado por

$$C^\infty(a, b) = \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es infinitamente derivable}\}$$

de esta forma la aplicación

$$D : C^\infty(a, b) \rightarrow C^\infty(a, b) \quad , \quad D(f) = f'$$

está bien definida⁴ y al tener dominio y codominio iguales se puede componer consigo misma. Así tenemos entonces, otra transformación lineal

$$D^2 = D \circ D : C^\infty(a, b) \rightarrow C^\infty(a, b) \quad , \quad D^2(f) = D(D(f)) = D(f') = f''$$

Es claro que esto se puede reiterar hasta lograr una transformación lineal que asigne a cada f su k -ésima derivada.

⁴¿por qué?

Monomorfismo — Epimorfismo — Isomorfismo

Cuando se trata de transformaciones lineales usamos otros nombres para indicar que son inyectivas, suryectivas o biyectivas⁵. Más precisamente,

- ◊ Un *monomorfismo* es una transformación lineal inyectiva.
- ◊ Un *epimorfismo* es una transformación lineal suryectiva.
- ◊ Un *isomorfismo* es una transformación lineal biyectiva.

Núcleo — Imagen

Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal.

Llamamos *núcleo* de T al conjunto

$$\text{Nu } T = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \quad (\text{Nu } T \subset \mathbb{V})$$

y llamamos *imagen* de T al conjunto

$$\text{Im } T = \{T(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathbb{V}\} \quad (\text{Im } T \subset \mathbb{W})$$

Ejemplos

1. Consideremos la transformación lineal $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\pi(x, y, z) = (y, z)$. Calculemos su núcleo.

Se trata de encontrar todos los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para los cuales $\pi(x, y, z) = (0, 0)$. Es decir,

$$\text{Nu } \pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ y } z = 0\}$$

Por consiguiente,

$$\text{Nu } \pi = \text{eje } x$$

Hallemos ahora su imagen

$$\begin{aligned} \text{Im } \pi &= \{\pi(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \{(y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Podemos entonces decir que π es epimorfismo.

⁵la palabra *homomorfismo*, o simplemente *morfismo*, se aplica a las funciones entre dos estructuras algebraicas que conservan las operaciones; como sucede con las transformaciones lineales entre espacios vectoriales.

2. Consideremos el subespacio $\mathbb{R}_3[X]$ de $\mathbb{R}[X]$. Definimos

$$T : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^4 \quad , \quad T(Q) = (a_0, a_1, a_2, a_3) \quad (\text{si } Q = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)$$

Se puede comprobar fácilmente que T es una transformación lineal. Calculemos su núcleo:

$$Q \in \text{Nu } T \iff T(Q) = (0, 0, 0, 0) \iff Q = 0 + 0.X + 0.X^2 + 0.X^3 \iff Q = 0$$

Es decir,

$$\text{Nu } T = \mathbb{O}$$

Respecto de la imagen,

$$\text{Im } T = \{T(Q) \mid Q \in \mathbb{R}_3[X]\} = \{(a_0, a_1, a_2, a_3) \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^4$$

Esta transformación también es epimorfismo.

3. Modifiquemos un poquito el ejemplo anterior. Sea $T : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(Q) = (a_0, a_1, a_2) \quad (\text{si } Q = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)$$

De nuevo, es muy simple comprobar que es una transformación lineal. Hallemos su núcleo:

$$Q \in \text{Nu } T \iff T(Q) = (0, 0, 0) \iff Q = 0 + 0.X + 0.X^2 + a_3X^3 = a_3X^3$$

Conclusión,

$$\text{Nu } T = \{bX^3 \mid b \in \mathbb{R}\} = \langle X^3 \rangle$$

¿Se le ocurre cómo modificar la definición de T de modo que su núcleo sea el subespacio de $\mathbb{R}_3[X]$ generado por 1 y X^2 ?

Respecto de la imagen,

$$\text{Im } T = \mathbb{R}^3$$

pues cualquier $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ satisface

$$(a, b, c) = T(a + bX + cX^2) \in \text{Im } T$$

4. Núcleo de la transformación lineal del ejemplo 11. (página 4).

Recordemos que se trata de $D : C^1(a, b) \longrightarrow C(a, b)$, $D(f) = f'$. Por lo tanto,

$$f \in \text{Nu } D \iff D(f) = 0 \iff f' = 0 \iff f'(x) = 0 \text{ para todo } x \in (a, b)$$

Pero esta última condición equivale a decir ⁶ que f es constante en el intervalo (a, b) . En conclusión,

$$\text{Nu } D = \{f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es constante en } (a, b)\}$$

⁶¿recuerda qué teorema garantiza esto?

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (ax + by + cz, a'x + b'y + c'z) \quad (a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R} \text{ fijos})$$

El núcleo de esta transformación lineal no es otra cosa que el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

6. Sea $\mathbb{S} : x - y + z = 0$, $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$. Su complemento ortogonal es $\mathbb{S}^\perp = \langle (1, -1, 1) \rangle$. Como, en particular, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^\perp$ resulta que para cada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ existen *únicos* $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{S}^\perp$ tales que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

Esto nos permite definir la siguiente aplicación

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_1$$

Esta aplicación es una transformación lineal. Veamos quién es su núcleo:

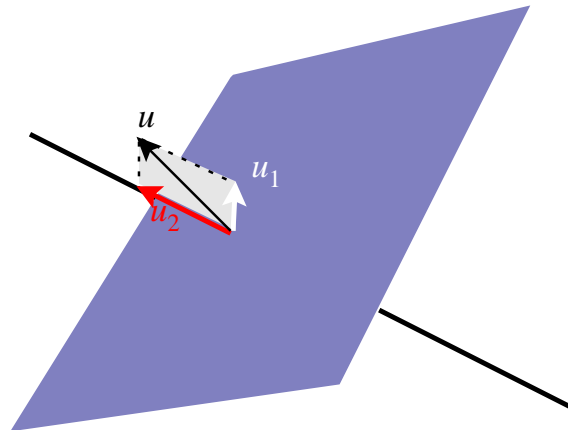
$$\mathbf{v} \in \text{Nu } T \iff T(\mathbf{v}) = 0 \iff \mathbf{v}_1 = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 \iff \mathbf{v} \in \mathbb{S}^\perp$$

\uparrow
 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$

es decir,

$$\text{Nu } T = \mathbb{S}^\perp = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

El siguiente gráfico ilustra la descomposición (única) de cada vector de \mathbb{R}^3 como suma de uno en \mathbb{S} y otro en su complemento ortogonal,



Ejercicio 10

Halle el núcleo de las siguientes transformaciones lineales

a) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x) = (x, -3x)$

b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y) = 3x - 2y$

c) $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, T(f) = f(1)$

($\mathbb{V} = \{h \mid h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$)

Sea $f(x) = e^x - 1$. ¿Es cierto que $f \in \text{Nu } T$?

Mencione otras tres funciones que estén en el núcleo de T .

d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (x + y - z, 2x - y + 3z)$

Ejercicio 11

Calcule la imagen de las siguientes transformaciones lineales

a) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x) = (x, -3x)$

b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y) = 3x - 2y$

c) $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, T(f) = f(1)$ ($\mathbb{V} = \{h \mid h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$)

Proposición

Sean \mathbb{V}, \mathbb{W} espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces,

- (i) los conjuntos $\text{Nu } T$ e $\text{Im } T$ son subespacios de sus respectivos espacios vectoriales
- (ii) T es monomorfismo si y sólo si $\text{Nu } T = \mathbb{0}$
- (iii) T es epimorfismo si y sólo si $\text{Im } T = \mathbb{W}$
- (iv) Si T es un isomorfismo, su inversa T^{-1} también lo es.

DEMOSTRACIÓN:

(i)

Veamos primero que $\text{Nu } T$ es subespacio de \mathbb{V} :

— $\mathbf{0} \in \text{Nu } T$

pues toda transformación lineal satisface $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

— si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Nu } T$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \text{Nu } T$

Debemos ver que $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Pero como \mathbf{u} y \mathbf{v} están en el núcleo, T los manda al cero, con lo cual

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

— si $\mathbf{u} \in \text{Nu } T$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces $a\mathbf{u} \in \text{Nu } T$

Debemos ver que $T(a\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ y sabemos que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$; luego,

$$T(a\mathbf{u}) = aT(\mathbf{u}) = a.\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Veamos ahora que $\text{Im } T$ es subespacio de \mathbb{V} :

— $\mathbf{0} \in \text{Im } T$

pues toda transformación lineal satisface $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

— si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \text{Im } T$, entonces $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \text{Im } T$

Sabemos que existen $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \mathbb{V}$ tales que $\mathbf{v} = T(\mathbf{u})$ y $\mathbf{w} = T(\mathbf{u}')$. Entonces,

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{u}') = T(\mathbf{u} + \mathbf{u}') \in \text{Im } T$$

— si $\mathbf{w} \in \text{Im } T$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces $a\mathbf{w} \in \text{Im } T$

Sabemos que existe $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ tal que $\mathbf{w} = T(\mathbf{u})$, entonces,

$$a\mathbf{w} = aT(\mathbf{u}) = T(a\mathbf{u}) \in \text{Im } T$$

(ii)

— Supongamos que T es monomorfismo. Debemos ver que $\text{Nu } T = \mathbf{0}$. Tomemos un $\mathbf{u} \in \text{Nu } T$; luego, $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Pero también vale que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$; i.e.,

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{0})$$

de donde, por ser T inyectiva, resulta que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

— Supongamos ahora que $\text{Nu } T = \mathbf{0}$ y veamos que entonces T es inyectiva (i.e., monomorfismo). Si hubiesen dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ tales que

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$$

resultaría que

$$\mathbf{0} = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} - \mathbf{v})$$

con lo cual, $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \text{Nu } T = \mathbf{0}$ lo que implica que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Concluimos así que T es monomorfismo.

(iii)

Es simplemente la definición de suryectividad.

(iv)

Sabemos que por ser inversa de una función, T^{-1} es inversible y por consiguiente biyectiva. Sólo nos resta probar que es transformación lineal. Tomemos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{W}$ y $a \in \mathbb{R}$ y veamos que

$$T^{-1}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T^{-1}(\mathbf{v}) + T^{-1}(\mathbf{w}) \quad \text{y} \quad T^{-1}(a\mathbf{v}) = aT^{-1}(\mathbf{v})$$

En efecto,

$$\begin{aligned} T(T^{-1}(\mathbf{v} + \mathbf{w})) &= \mathbf{v} + \mathbf{w} & \text{y} \\ T(T^{-1}(\mathbf{v}) + T^{-1}(\mathbf{w})) &= T(T^{-1}(\mathbf{v})) + T(T^{-1}(\mathbf{w})) = \mathbf{v} + \mathbf{w} \end{aligned}$$

con lo cual

$$T\left(T^{-1}(\mathbf{v} + \mathbf{w})\right) = T\left(T^{-1}(\mathbf{v}) + T^{-1}(\mathbf{w})\right)$$

y la inyectividad de T nos asegura que entonces

$$T^{-1}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T^{-1}(\mathbf{v}) + T^{-1}(\mathbf{w})$$

como afirmamos.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} T(T^{-1}(a\mathbf{v})) &= a\mathbf{v} && \text{y} \\ T(aT^{-1}(\mathbf{v})) &= aT(T^{-1}(\mathbf{v})) = a\mathbf{v} \end{aligned}$$

con lo cual

$$T\left(T^{-1}(a\mathbf{v})\right) = T\left(aT^{-1}(\mathbf{v})\right)$$

y de nuevo la inyectividad de T nos asegura que

$$T^{-1}(a\mathbf{v}) = aT^{-1}(\mathbf{v})$$

como afirmamos.

Imagen de un subespacio

Sean \mathbb{V} , \mathbb{W} espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Dado un subespacio $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$, llamamos *imagen* de \mathbb{S} por T al conjunto

$$T(\mathbb{S}) = \{T(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathbb{S}\}$$

A partir de esta definición es claro que

$$\text{Im } T = T(\mathbb{V}) \quad \text{y} \quad T(\text{Nu } T) = \mathbb{O}$$

De manera análoga a lo hecho con $\text{Im } T$ se muestra que $T(\mathbb{S})$ es también un subespacio de \mathbb{W} .

Ejercicio 12

En cada caso halle $T(\mathbb{S})$

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (\cos \theta x - \text{sen } \theta y, \text{sen } \theta x + \cos \theta y)$ ($\theta = \frac{\pi}{3}$) , $\mathbb{S} = \langle (-1, 1) \rangle$

b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x, y - z)$, $\mathbb{S} : y - z = 0$

c) $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$, $\mathbb{S} = \text{Nu } T$ (\mathbb{V} , \mathbb{W} : espacios vectoriales)

d) $D : C^1(0, 1) \rightarrow C(0, 1)$, $D(f) = f'$, $\mathbb{S} = \{f \in C^1(0, 1) \mid f \text{ es constante}\}$

Ejercicio 13

Sea $\mathbb{S} = \langle (1, 0, 1) \rangle$ y $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación lineal. ¿Es cierto que $T(\mathbb{S}) = \langle T(1, 0, 1) \rangle$?

Ejercicio 14

Sea $\mathcal{S} = \langle (1, 0, 1), (2, 1, 0) \rangle$ y $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación lineal. ¿Es cierto que $T(\mathcal{S}) = \langle T(1, 0, 1), T(2, 1, 0) \rangle$?

Ejercicio 15

Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} dos vectores linealmente independientes en el espacio vectorial \mathbb{V} . Si $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ es monomorfismo, ¿qué se puede decir sobre la independencia lineal del conjunto $\{T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\}$?

Si en lugar de dos vectores linealmente independientes tenemos tres vectores linealmente independientes, ¿cuál es la conclusión?

Ejercicio 16

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ un monomorfismo y $\mathcal{S} = \langle (1, 1, 0), (1, 1, 1) \rangle$. ¿Le alcanzan estos datos para poder dar una base de

a) $\text{Im } T$?

b) $T(\mathcal{S})$?

Cuando sea posible, exhibala.

Proposición

Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces,

- (i) si T es monomorfismo y $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es linealmente independiente en \mathbb{V} , $\{T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)\}$ es linealmente independiente en \mathbb{W}
- (ii) si $B \subset \mathbb{V}$ genera al subespacio \mathcal{S} de \mathbb{V} , $T(B)$ genera a $T(\mathcal{S})$
- (iii) si T es epimorfismo y B genera \mathbb{V} , $T(B)$ genera a \mathbb{W} .

DEMOSTRACIÓN:

(i)

Debemos ver que

$$a_1 T(\mathbf{u}_1) + \dots + a_n T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dots = a_n = 0$$

En efecto,

si $a_1 T(\mathbf{u}_1) + \dots + a_n T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0}$, $T(a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_n \mathbf{u}_n) = \mathbf{0}$. Esto dice que

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_n \mathbf{u}_n \in \text{Nu } T \quad \begin{array}{c} = \\ \uparrow \\ T \text{ es mono} \end{array} \quad \odot$$

o sea,

$$a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

pero como son independientes, se concluye que

$$a_1 = \dots = a_n = 0$$

con lo cual probamos que los vectores $T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)$ son linealmente independientes.

Dicho de otra forma, *los monomorfismos conservan la independencia lineal*.

(ii)

Sabemos que $\langle B \rangle = \mathbb{S}$ y queremos probar que $\langle T(B) \rangle = T(\mathbb{S})$.

Tomemos un $\mathbf{w} \in T(\mathbb{S})$ arbitrario. Por definición de $T(\mathbb{S})$, existe un $\mathbf{u} \in \mathbb{S}$ tal que $\mathbf{w} = T(\mathbf{u})$.

Ahora bien, siendo que B genera \mathbb{S} y que $\mathbf{u} \in \mathbb{S}$ podemos asegurar que existen $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in B$ y escalares $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_k\mathbf{u}_k$$

por lo tanto,

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{u}) = T(a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_k\mathbf{u}_k) = a_1T(\mathbf{u}_1) + \dots + a_kT(\mathbf{u}_k) \in \langle T(B) \rangle$$

De modo que $T(\mathbb{S}) \subset \langle T(B) \rangle$ y como $T(\mathbb{S})$ es un subespacio que contiene a $T(B)$, $\langle T(B) \rangle \subset T(\mathbb{S})$. Por lo tanto,

$$\langle T(B) \rangle = T(\mathbb{S})$$

como queríamos mostrar.

(iii)

Basta aplicar el resultado anterior al caso $\mathbb{S} = \mathbb{V}$ y recordar que $T(\mathbb{S}) = T(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$ por ser T epimorfismo.

Ejercicio 17

Se sabe que $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que satisface

$$T(1, 0, 0) = (0, 1, 0) \quad , \quad T(0, 1, 0) = (0, 0, 1) \quad , \quad T(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$$

¿Necesita hacer alguna cuenta para responder si T es o no un isomorfismo?

Corolario

Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} espacios vectoriales de dimensión finita y $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ un isomorfismo. Entonces,

- (i) T transforma bases de \mathbb{V} en bases de \mathbb{W}
- (ii) T^{-1} transforma bases de \mathbb{W} en bases de \mathbb{V}
- (iii) $\dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W}$

DEMOSTRACIÓN:

(i)

Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de \mathbb{V} . Debemos ver que el conjunto

$$T(B) = \{T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

es una base de \mathbb{W} , para lo cual habrá que comprobar que $T(B)$ es linealmente independiente y genera a \mathbb{W} .

Lo primero es consecuencia del resultado anterior puesto que T es, en particular, monomorfismo y B , por ser base, es linealmente independiente.

Lo segundo es consecuencia de la parte (iii) del mismo resultado puesto que T es, en particular, epimorfismo y B genera a \mathbb{V} por ser base.

(ii)

Es consecuencia del item anterior dado que T^{-1} también es isomorfismo.

(iii)

A partir de la notación introducida en (i), $\dim \mathbb{V} = n$. En ese inciso probamos que

$$\{T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

es una base de \mathbb{W} . Luego,

$$\dim \mathbb{W} = n = \dim \mathbb{V}$$

Ejercicio 18

La transformación lineal $T : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^4$ satisface

$$T(1) = \mathbf{u}_1 \quad , \quad T(X) = \mathbf{u}_2 \quad , \quad T(X^2) = \mathbf{u}_3 \quad , \quad T(X^3) = \mathbf{u}_4$$

Dé una condición sobre el conjunto $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ que garantice que T sea un isomorfismo.

Ejercicio 19

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Si se sabe que T es monomorfismo, ¿se puede asegurar que $\{T(1, 0), T(0, 1)\}$ es una base de $\text{Im } T$?
¿Alcanza la información para saber si T es epimorfismo?

Ejercicio 20

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Sabiendo que T es epimorfismo, ¿alcanza la información para saber si también es monomorfismo?

Ejercicio 21

Se sabe que $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es monomorfismo. ¿Alcanza la información para calcular la dimensión de la imagen de T ?

Teorema (de la dimensión)

Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} espacios vectoriales, \mathbb{V} de dimensión finita, y $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces,

$$\dim \mathbb{V} = \dim \text{Nu } T + \dim \text{Im } T$$

DEMOSTRACIÓN:

□ *Caso 1:* $\text{Nu } T = \mathbb{O}$

En tal situación podemos decir que T es monomorfismo. Entonces, si B es una base de \mathbb{V} , $T(B)$ es linealmente independiente. Pero como también B genera \mathbb{V} , $T(B)$ genera $\text{Im } T = T(\mathbb{V})$. De modo que $T(B)$ es una base de $\text{Im } T$ y como tiene el mismo número de elementos que B ,

$$\dim \mathbb{V} = \dim \text{Im } T = 0 + \dim \text{Im } T = \dim \text{Nu } T + \dim \text{Im } T$$

□ *Caso 2:* $\text{Nu } T \neq \mathbb{O}$

Tenemos ahora que $\dim \text{Nu } T = k \geq 1$. Sea entonces,

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$$

una base del núcleo de T . Podemos completar a una base de \mathbb{V}

$$B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

si designamos con $n = \dim \mathbb{V}$.

Resulta entonces que $T(B)$ genera $\text{Im } T$. Pero teniendo en cuenta que

$$T(\mathbf{u}_1) = \dots = T(\mathbf{u}_k) = \mathbf{0}$$

el conjunto,

$$B' = \{T(\mathbf{v}_{k+1}), \dots, T(\mathbf{v}_n)\}$$

también genera $\text{Im } T$ y tiene $n - k = \dim \mathbb{V} - \dim \text{Nu } T$ elementos.

Si pudiéramos probar que B' es linealmente independiente, sería una base de $\text{Im } T$ y en consecuencia quedaría probada la tesis de este teorema.

Supongamos que existen escalares $a_{k+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$a_{k+1}T(\mathbf{v}_{k+1}) + \dots + a_nT(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

Esto es decir que

$$T(a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

que a su vez equivale a afirmar que

$$a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n \in \text{Nu } T$$

pero como los subespacios $\text{Nu } T$ y $\langle \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ son complementarios su intersección es el subespacio nulo.

Entonces,

$$a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

y por ser independientes (ya que forman parte de una base) podemos afirmar que

$$a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$$

En consecuencia hemos probado que el conjunto B' efectivamente es linealmente independiente.

Esto concluye la demostración del teorema.

Ejercicio 22

Sean \mathbb{V} y \mathbb{W} dos espacios vectoriales de dimensión n y $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal. Muestre que

- si T es monomorfismo, entonces también es epimorfismo.
- si T es epimorfismo, entonces también es monomorfismo.

Deduzca que cuando dominio y codominio tienen la misma dimensión, monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo son conceptos equivalentes.

Teorema

Sean \mathbb{V} , \mathbb{W} dos espacios vectoriales y sean $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de \mathbb{V} y $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in \mathbb{W}$. Entonces, existe una única transformación lineal $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ tal que

$$T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

DEMOSTRACIÓN:

Vamos a construir una transformación lineal que cumpla lo pedido, con lo cual estará probada la existencia, y al hacerlo quedará claro que en realidad no hay más de una que lo haga.

Dado un $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ cualquiera tenemos que decir cuánto vale $T(\mathbf{u})$. Siendo B una base de \mathbb{V} sabemos que existen únicos escalares $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ⁷ tales que

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n$$

⁷las componentes de \mathbf{u} en la base B

Entonces, como T tiene que ser transformación lineal,

$$T(\mathbf{u}) = x_1 T(\mathbf{u}_1) + \cdots + x_n T(\mathbf{u}_n)$$

y como debe cumplir que $T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_i$ para todo $i = 1, \dots, n$

$$T(\mathbf{u}) = x_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + x_n \mathbf{w}_n$$

De esta forma no sólo hemos encontrado *una* T que cumple lo pedido si no que también comprobamos que no puede haber otra.

Ejemplos

1. Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{W} = \mathbb{R}^4$. Tomemos $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y $\mathbf{w}_1 = (2, 1, -3, 4)$, $\mathbf{w}_2 = (-3, 0, 1, 5)$.

Vamos a ver quién es la *única* T que cumple

$$T(1, 0) = (2, 1, -3, 4) \quad , \quad T(0, 1) = (-3, 0, 1, 5)$$

Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

luego,

$$T(x, y) = xT(1, 0) + yT(0, 1) = x(2, 1, -3, 4) + y(-3, 0, 1, 5) = (2x - 3y, x, -3x + y, 4x + 5y)$$

es decir,

$$T(x, y) = (2x - 3y, x, -3x + y, 4x + 5y)$$

2. Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{W} = \mathbb{R}^4$. Tomemos $B = \{(2, -1), (1, 3)\}$ y $\mathbf{w}_1 = (1, 0, -1, 3)$, $\mathbf{w}_2 = (-2, 1, 0, 5)$.

Hallemos la fórmula de la única transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $T(2, -1) = \mathbf{w}_1$ y $T(1, 3) = \mathbf{w}_2$. En el caso anterior no fue necesario hacer cuentas para encontrar las componentes de un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pues al ser B la base canónica, componentes y coordenadas coinciden. En esta nueva situación sí habrá que hacer cuentas para calcular las componentes de (x, y) en la base $\{(2, -1), (1, 3)\}$

$$(x, y) = a(2, -1) + b(1, 3) = (2a + b, 3b - a)$$

necesitamos encontrar a y b en términos de x e y . Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 2a + b = x \\ 3b - a = y \end{cases}$$

obtenemos que

$$a = \frac{3x - y}{7} \quad y \quad b = \frac{x + 2y}{7}$$

y en consecuencia,

$$(x, y) = \frac{3x - y}{7} (2, -1) + \frac{x + 2y}{7} (1, 3)$$

Luego,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T\left(\frac{3x - y}{7} (2, -1) + \frac{x + 2y}{7} (1, 3)\right) \\ &= \frac{3x - y}{7} T(2, -1) + \frac{x + 2y}{7} T(1, 3) \\ &= \frac{3x - y}{7} (1, 0, -1, 3) + \frac{x + 2y}{7} (-2, 1, 0, 5) \\ &= \left(\frac{3x - y}{7} - 2\frac{x + 2y}{7}, \frac{x + 2y}{7}, -\frac{3x - y}{7}, 3\frac{3x - y}{7} + 5\frac{x + 2y}{7}\right) \\ &= \left(\frac{x - 5y}{7}, \frac{x + 2y}{7}, -\frac{3x - y}{7}, \frac{14x + 7y}{7}\right) \end{aligned}$$

3. Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal y la aplicamos a los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^n tendremos

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) \\ T(\mathbf{e}_2) &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) \\ &\vdots \\ T(\mathbf{e}_n) &= (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$T(x_1, \dots, x_n) = T(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n T(\mathbf{e}_n)$$

por ser T transformación lineal. Luego,

$$\begin{aligned} T(x_1, \dots, x_n) &= x_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) + \dots + x_n(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) \\ &= (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) \end{aligned}$$

Se deduce inmediatamente de aquí que el núcleo de una transformación lineal de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m es el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo de m ecuaciones y n incógnitas.

Y de aquí podemos concluir que el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales es siempre un subespacio.

Ejercicio 23

Halle todas las transformaciones lineales que satisfacen

a) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ y

$$T(1, 0, 0) = (3, 1, 2, 0) \quad , \quad T(0, 0, 1) = (0, 2, 2, 0) \quad , \quad T(0, 1, 0) = (0, -2, -1, 3)$$

b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y

$$T(1, 0, 0) = (1, 2) \quad , \quad T(0, 1, 0) = (0, 3)$$

Cálculo del isomorfismo inverso

Lo vamos a hacer con ejemplos que darán la idea de cómo trabajar en situaciones similares.

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (3x - y, y - x)$$

En primer lugar analizaremos si es isomorfismo ⁸.

(i) Calculemos $\text{Nu } T$

$$\begin{aligned} (x, y) \in \text{Nu } T &\iff T(x, y) = (0, 0) \iff (3x - y, y - x) = (0, 0) \iff \begin{cases} 3x - y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 3x \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3x \\ y = x \end{cases} \\ &\iff (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

Luego,

$$\text{Nu } T = \mathbb{O}$$

y en consecuencia T es monomorfismo.

(ii) Ahora deberíamos ver si es epimorfismo. Pero, usando el teorema de la dimensión,

$$\dim \text{Im } T = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \text{Nu } T = 2 = \text{a la dimensión del codominio}$$

por lo tanto,

$$\text{Im } T = \mathbb{R}^2$$

y T es epimorfismo

Ahora estamos seguros de que existe $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, inverso de T .

(iii) Cálculo de $T^{-1}(u, v)$ para cada $(u, v) \in \mathbb{R}^2$

Sabemos que para cada $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ debe ser

$$T(T^{-1}(u, v)) = (u, v)$$

Como $T^{-1}(u, v) \in \mathbb{R}^2$, tendrá dos componentes; digamos que se llaman (x, y) ; o sea, $T^{-1}(u, v) = (x, y)$.

⁸si no lo fuese, no tendría sentido buscar T^{-1} . Pero también es cierto que si encontramos una transformación lineal cuyas composiciones con T dan la identidad, entonces concluimos que T es inversible y por lo tanto isomorfismo y además tenemos a su inverso

Todo se reduce a expresar a (x, y) en términos de (u, v) . Pero,

$$(u, v) = T(T^{-1}(u, v)) = T(x, y) = (3x - y, y - x)$$

con lo cual,

$$\begin{cases} 3x - y = u \\ y - x = v \end{cases}$$

Resolviendo este sistema llegamos a que

$$(x, y) = \left(\frac{u + v}{2}, \frac{u + 3v}{2} \right)$$

y finalmente,

$$T^{-1}(u, v) = \left(\frac{u + v}{2}, \frac{u + 3v}{2} \right)$$

NOTA: si simplemente hubiéramos hallado la transformación

$$L(u, v) = \left(\frac{u + v}{2}, \frac{u + 3v}{2} \right)$$

y verificado que

$$T \circ L(u, v) = (u, v) \quad \text{y} \quad L \circ T(x, y) = (x, y)$$

para todo $(u, v), (x, y) \in \mathbb{R}^2$, también hubiésemos probado que T es isomorfismo y que su inverso en $T^{-1} = L$.

2. Entre los espacios vectoriales \mathbb{R}^3 y $\mathbb{R}_2[X]$ se puede definir la aplicación

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \quad , \quad T(a, b, c) = a + bX + cX^2$$

que resulta ser transformación lineal. Calculemos su núcleo:

$$(a, b, c) \in \text{Nu } T \iff T(a, b, c) = \mathbf{0} \iff a + bX + cX^2 = 0 \iff a = b = c = 0$$

es decir,

$$\text{Nu } T = \mathbf{0}$$

Esto nos dice que T es monomorfismo; pero como $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$, también es epimorfismo ya que

$$\dim \text{Im } T = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Nu } T = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$$

En consecuencia T es isomorfismo. Hallemos T^{-1} . Dado $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, llamemos $(a_0, a_1, a_2) = T^{-1}(P)$; tenemos

$$a + bX + cX^2 = P = T(T^{-1}(P)) = T(a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1X + a_2X^2$$

por lo tanto,

$$a = a_0 \quad , \quad b = a_1 \quad , \quad c = a_2$$

y entonces,

$$T^{-1}(a + bX + cX^2) = (a, b, c)$$

Ejercicio 24

Halle T^{-1} siendo $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que satisface $T(1, 2) = (1, 0)$ y $T(-3, 1) = (0, 1)$.

Averigüe en qué transforma T al paralelogramo determinado por los vectores $(1, 2)$ y $(-3, 1)$.

Transformaciones Ortogonales

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se llama *transformación ortogonal* si

$$T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplos

1. La transformación lineal $T(x, y) = (x, -y)$ es ortogonal. En efecto,

$$\begin{aligned} T(x, y) \cdot T(u, v) &= (x, -y) \cdot (u, -v) = xy + (-y)(-v) = xu + yv \\ &= (x, y) \cdot (u, v) \end{aligned}$$

2. La rotación alrededor del eje z , definida en la página 3, es una transformación ortogonal. En efecto,

$$\begin{aligned} T(x, y, z) \cdot T(u, v, w) &= \\ &= (\cos \theta x + \operatorname{sen} \theta y, -\operatorname{sen} \theta x + \cos \theta y, z) \cdot (\cos \theta u + \operatorname{sen} \theta v, -\operatorname{sen} \theta u + \cos \theta v, w) \\ &= (\cos \theta x + \operatorname{sen} \theta y)(\cos \theta u + \operatorname{sen} \theta v) + (-\operatorname{sen} \theta x + \cos \theta y)(-\operatorname{sen} \theta u + \cos \theta v) + zw \\ &= \cos^2 \theta xu + \operatorname{sen}^2 \theta yv + \operatorname{sen} \theta \cos \theta (xv + yu) \\ &\quad + \operatorname{sen}^2 \theta xu + \cos^2 \theta yv - \operatorname{sen} \theta \cos \theta (xv + yu) + zw \\ &= xu + yv + zw \\ &= (x, y, z) \cdot (u, v, w) \end{aligned}$$

3. Lo mismo ocurre con las rotaciones alrededor de los otros ejes:

$$T_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x, \cos \theta y - \operatorname{sen} \theta z, \operatorname{sen} \theta y + \cos \theta z) \quad (\text{alrededor del eje } x)$$

$$T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (\cos \theta x + \operatorname{sen} \theta z, y, -\operatorname{sen} \theta x + \cos \theta z) \quad (\text{alrededor del eje } y)$$

Ejercicio 25

Averigüe si la transformación $T(x, y, z) = (x, -y, z)$ es ortogonal y explique qué efecto geométrico tiene aplicar T sobre cada punto (x, y, z) del espacio.

Ejercicio 26

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (y, x)$. Determine si T es una transformación ortogonal e investigue cuál es el efecto geométrico de aplicar T a cada punto del plano.

Sugerencia: comience calculando, $T(a, a), T(-a, a), T(1, 2), T(-2, 3), T(0, 4), T(-2, 0)$ y trate de llegar a alguna conclusión.

Propiedades

Toda transformación ortogonal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

1. *conserva longitudes:* $\|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$
pues,

$$\|T(\mathbf{u})\|^2 = T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$$

2. *conserva ángulos:* $\angle(T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})) = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
pues,

$$\cos \angle(T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})) = \frac{T(\mathbf{u}) \cdot T(\mathbf{v})}{\|T(\mathbf{u})\| \|T(\mathbf{v})\|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \cos \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

3. *es isomorfismo.*

En efecto, como $\|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$, $\operatorname{Nu} T = \mathcal{O}$ y como dominio y codominio tienen la misma dimensión, este hecho garantiza que T es isomorfismo.

4. *transforma bases ortonormales en bases ortonormales.*

En efecto, sea $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Sabemos entonces que,

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \quad \text{si } i \neq j, \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1 \quad (\text{para todo } i, j = 1, \dots, n)$$

Pero como T es ortogonal,

$$T(\mathbf{u}_i) \cdot T(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j \quad (\text{para todo } i, j = 1, \dots, n)$$

luego,

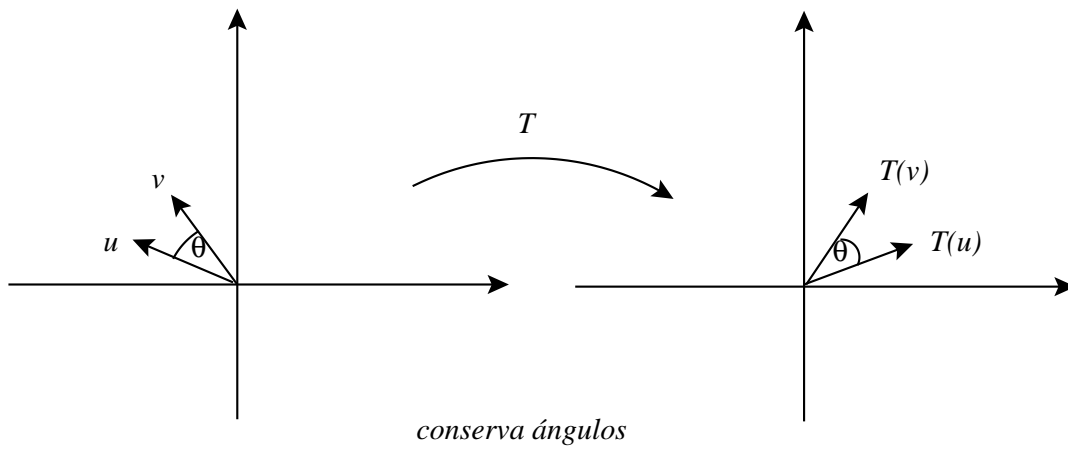
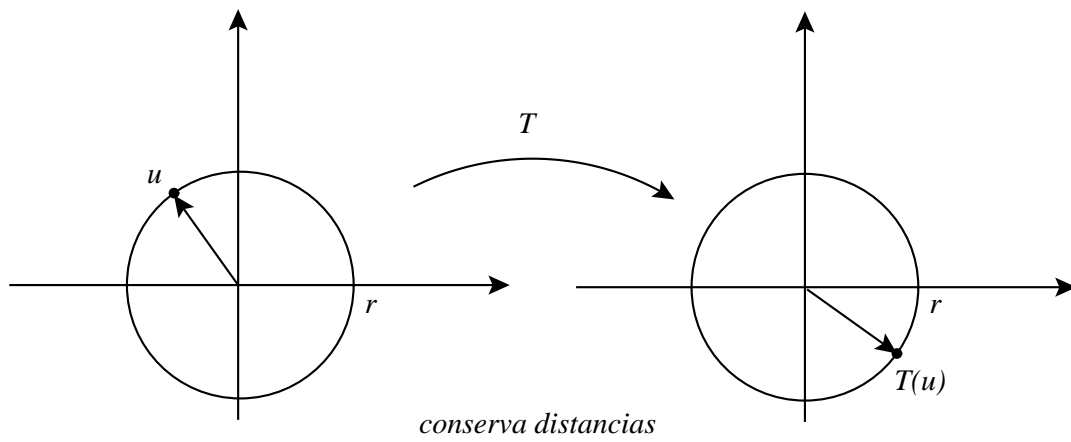
$$T(\mathbf{u}_i) \cdot T(\mathbf{u}_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j, \quad T(\mathbf{u}_i) \cdot T(\mathbf{u}_i) = 1 \quad (\text{para todo } i, j = 1, \dots, n)$$

lo que dice que la base

$$B' = \{T(\mathbf{u}_1), \dots, T(\mathbf{u}_n)\}$$

es ortonormal.

La siguiente figura ilustra algunas de estas propiedades



PROBLEMAS

1. Pruebe que las funciones dadas en los ejemplos de las páginas 1 a 5 , 9 y 9 son efectivamente transformaciones lineales.
2. Muestre que suma, producto por escalar y composición de transformaciones lineales resultan ser transformaciones lineales.
3. Compruebe que la transformación lineal del ejemplo 4. de la página 2 transforma a la curva $C : y = x^2$ en la curva $C' : y = -x^2$.

¿En qué transforma T a la recta $L : (x, y) = t(1, -1) (t \in \mathbb{R})$?

4. Verifique que las siguientes funciones son rotaciones y halle el ángulo (y el eje, cuando corresponda) de rotación

(a) $T(x, y) = (-x, -y)$

(b) $T(x, y, z) = (-x, -y, z)$

(c) $T(x, y, z) = (-x, y, -z)$

(d) $T(x, y) = (-y, x)$

(e) $T(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y, x + y)$

(f) $T(x, y, z) = (x, -z, y)$

(g) $T(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x - y, x - y)$

(h) $T(x, y, z) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), z\right)$

5. Interprete geoméricamente el efecto de aplicar T

(a) $T(x, y, z) = 3(x, y, z)$

(b) $T(x, y, z) = -(x, y, z)$

(c) $T(x, y) = (x - y, x + y)$

(d) $T(x, y) = (x + y, y - x)$

6. En cada caso, halle el conjunto $T(A)$

a) $T(x, y) = (-x, -y)$, $A = \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

b) $T(x, y) = (-x, -y)$, $A = \text{recta por el origen}$

c) $T(x, y) = (-y, x)$, $A = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

d) $T(x, y) = (-y, x)$, $A = \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

e) $T(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), z\right)$, $A = \langle(1, 1, \sqrt{2})\rangle$

f) $T(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), z\right)$, $A = \{(x, y, 3) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

7. Halle una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforme el paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ y $(3, 3)$ en el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$. ¿Es isomorfismo? ¿Es cierto que manda los vértices del paralelogramo en los vértices del cuadrado?
8. Considere la transformación lineal $T(x, y, z) = (x, \cos \frac{\pi}{3} y + \sin \frac{\pi}{3} z, -\sin \frac{\pi}{3} y + \cos \frac{\pi}{3} z)$ y averigüe en qué transforma T a los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^3

(a) $\mathbb{L} = \langle (0, 1, 1) \rangle$

(b) $\mathbb{S} : x = 0$

(c) $S : x = 1$

(d) $L : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

(e) $L : \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

(f) $C : \begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$

9. Determine si las siguientes funciones son transformaciones lineales

a) $T : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \quad , \quad T(P) = P'' - 2P'$

b) $T : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \quad , \quad T(P) = P - P(0)$

10. Halle el núcleo, la imagen y, cuando sea posible, la inversa de cada una de las siguientes transformaciones lineales

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = 2(x, -y)$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y) = x + y$

(c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (y, 0)$

(d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y) = y$

(e) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (y, y + z, x)$

(f) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x) = (x, 3x, -2x)$

(g) $T : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], T(P) = (X^2 + 1)P$

(h) $T : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}), T(f) = f''$

11. Sea T una transformación lineal y \mathbf{u} y \mathbf{v} dos vectores tales que $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$. ¿Dónde está $\mathbf{u} - \mathbf{v}$?

12. Sea $T(x, y) = (x - y, x + y)$. Compruebe que T transforma la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en otra circunferencia.

Halle su radio y dé un argumento geométrico que explique –sin hacer cuentas– por qué esto es cierto.

Sugerencia: esta transformación fue estudiada en un ejercicio anterior.

13. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial de dimensión finita y \mathbb{W} un espacio vectorial. Sea $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ un monomorfismo. ¿Se puede asegurar que si B es una base de \mathbb{V} , entonces $T(B)$ es una base de $\text{Im } T$? Si no pedimos que T sea monomorfismo, ¿qué se puede afirmar?

14. Muestre que los espacios vectoriales \mathbb{R}^4 y $\mathbb{R}_3[X]$ ⁹ son isomorfos.

15. Muestre que todo espacio vectorial \mathbb{V} de dimensión 4 es isomorfo a \mathbb{R}^4 . ¿Se puede generalizar a espacios vectoriales de dimensión n ?

16. Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^4 . Si $\mathbb{S} = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$, halle \mathbb{S}^\perp .

17. ¿Alcanza con saber que el vector \mathbf{u} es ortogonal a los elementos de una base de un subespacio \mathbb{S} para concluir que $\langle \mathbf{u} \rangle$ y \mathbb{S} son ortogonales?

18. Sea T una transformación ortogonal y \mathbf{u} y \mathbf{v} dos vectores que forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$. Halle el ángulo que forman los vectores $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$.

19. Sea T una transformación ortogonal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 y sea $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Halle $T(S)$.

⁹los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual a 3

20. ¿Es posible encontrar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que
- $T(\langle\langle a, b, c \rangle\rangle)$ sea un plano?
 - $T(\langle\langle (1, 0, 2), (0, -1, 3) \rangle\rangle)$ sea una recta?

Cuando sea posible, hállela y determine si es única.

21. Dados los sistemas de ecuaciones lineales

$$(1) : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \end{cases} \quad (2) : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

Analice si existen transformaciones lineales que tengan por núcleo a sus respectivos conjuntos de soluciones. Cuando sea así, halle

- una base del núcleo
 - la dimensión de la imagen
22. Sea \mathbb{V} el espacio vectorial formado por las sucesiones $(a_n) \subset \mathbb{R}$ convergentes. Se define $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$T((a_n)) = \lim a_n$$

- Analice si es transformación lineal
 - Sea $a_n = \frac{1}{n^2+3}$, ¿es cierto que $(a_n) \in \text{Nu } T$?
 - Calcule $\lim(-\pi + \frac{1}{n})$ y decida si $-\pi \in \text{Im } T$
 - Halle su núcleo y su imagen.
23. Halle todos los $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ de modo que exista una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1, 1) = (2, 3) \quad , \quad T(1, -1) = (4, 5) \quad , \quad T(0, 3) = (a, b)$$

24. Sean $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ y $T' : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{U}$ transformaciones lineales. Muestre que

$$(a) \text{Nu } T \subset \text{Nu}(T' \circ T) \quad (b) \text{Im}(T' \circ T) \subset \text{Im } T'$$

25. Sea $\mathbb{V} = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty[a, b] \text{ y } f(a) = 0\}$. Muestre que

- \mathbb{V} es un espacio vectorial y subespacio de $C^\infty[a, b]$
- las funciones

$$D : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \quad , \quad D(f) = f' \quad \text{y} \quad P : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \quad , \quad P(f)(x) = \int_a^x f(t) dt$$

son transformaciones lineales

- D y P son inversas una de otra
- D y P son isomorfismos

¿Se llega al mismo resultado si se reemplaza \mathbb{V} por $C^\infty[a, b]$?

26. Muestre que todo isomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforma paralelogramos en paralelogramos. También transforma los vértices en los vértices.

Sugerencia: describa paramétricamente a un paralelogramo.