



ALGEBRA Y GEOMETRIA

PRIMER CUATRIMESTRE 2011

TRABAJO PRÁCTICO 8

CONTENIDO

Matriz	1
Ejercicio 1	2
Diagonal principal — Traza de una matriz	2
Ejercicio 2	3
Matriz transpuesta	3
Matriz simétrica — Matriz antisimétrica	4
Ejercicio 3	5
Matriz diagonal — Matriz Identidad	6
Operaciones (<i>suma, producto por escalar, producto</i>)	6
Ejercicios 4 y 5	8
Ejercicios 6 y 7	10
Producto de matrices cuadradas (<i>particularidades</i>)	11
Ejercicio 8	12
Proposición (<i>transformación lineal asociada a una matriz</i>)	12
Ejercicios 9 y 10	12
Matriz inversible	12
Ejercicios 11 a 17	12

Proposición (<i>inversa del producto de matrices inversibles</i>)	14
Matriz ortogonal	14
Matriz asociada a una transformación lineal	15
Ejercicios 18 a 20	17
Proposición (<i>matriz de una composición</i>)	17
Proposición (<i>matriz del isomorfismo inverso</i>)	18
Ejercicios 21 y 22	18
Rango fila — Rango columna	19
Teorema (<i>rango de una matriz</i>)	20
Ejercicio 23	20
Ejercicio 24	21
Aplicación (<i>sistemas lineales homogéneos</i>)	21
Determinante (<i>de orden 2</i>)	24
Ejercicio 25	24
Propiedades del determinante (<i>de orden 2</i>)	24
Ejercicio 26	25
Teorema (<i>determinante de un producto</i>)	26
Teorema (<i>determinante de la matriz transpuesta</i>)	27
Teorema (<i>determinante de la matriz inversa</i>)	27
Teorema (<i>determinante de un isomorfismo</i>)	28
Determinante (<i>de orden 3</i>)	28
Menor — Cofactor — Matriz adjunta	30
Determinante (<i>de orden n</i>)	32
Regla de Cramer (<i>resolución de sistemas lineales</i>)	35
Ejercicio 27	37
Problemas	38

<p>Página de Álgebra y Geometría http://www.lirweb.com.ar Una vez registrado podrá acceder a sus cursos</p>	<p>Consultas Online http://mateingeuca.wordpress.com</p>
---	---

MATRICES Y DETERMINANTES

Matriz

Una *matriz* es una disposición en forma rectangular de una cantidad finita de números, cada uno de los cuales se llama *elemento* de la matriz, ordenados en filas y columnas. Los siguientes son ejemplos de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad (1 \quad -2 \quad 4 \quad 10), \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -\frac{3}{4} \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \\ -20 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & \pi \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{4} & 5 \\ -4 & 18 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

El *tamaño* u *orden* de la matriz está dado por la cantidad de filas y columnas que tiene; se indica en la forma

$$m \times n$$

donde m —el primero— indica el número de *filas* y n el número de *columnas*. En los ejemplos anteriores, el tamaño de esas matrices, según el orden en que fueron escritas es

$$2 \times 3, \quad 1 \times 4, \quad 3 \times 2, \quad 4 \times 1, \quad 4 \times 4, \quad 1 \times 1$$

Al escribir una matriz genérica de orden $m \times n$ a sus elementos se los representa mediante dos subíndices: el primero indica en qué fila está y el segundo en qué columna,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Así, el elemento a_{ij} está en la intersección de la fila i con la columna j .

El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$, cuyos elementos son números reales, se denota

$$\mathbb{R}^{m \times n}$$

Si, en cambio, los elementos son números complejos, se denota

$$\mathbb{C}^{m \times n}$$

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -\frac{3}{4} \\ 3 & e^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1+2i & -2 & 4i & \pi \\ \frac{1}{2}-i & 2 & -\frac{3}{4} & 5 \\ -4 & 18 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$$

De ahora en más, salvo indicación en contrario, trabajaremos con matrices de elementos reales.

Vamos a definir algunas operaciones entre matrices y entre matrices y escalares (reales).

Diremos que dos matrices A y B son iguales si son del mismo tamaño y para cada i, j

$$a_{ij} = b_{ij}$$

Ejercicio 1

Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 10 \\ 9 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad D = (1 \ 3 \ 5 \ 9 \ 7 \ 6)$$

a) Indique el tamaño de cada una

b) Calcule a_{11} , b_{31} , c_{61} , d_{13} , a_{25}

c) Indique qué lugar ocupa

(i) 8 en la matriz A

(ii) 10 en la matriz B

(iii) 9 en la matriz C

(iv) 9 en la matriz D

d) ¿Es cierto que $C = D$?

Diagonal principal (de una matriz cuadrada)

Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se llama **diagonal principal** de A al lugar que ocupan los elementos a_{ii} ($i = 1, \dots, n$)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Traza

Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se llama **traza** de A al número

$$\text{tr}A = a_{11} + \dots + a_{nn}$$

Ejercicio 2

Cuando corresponda calcule la traza de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & -9 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 7 \\ 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz Transpuesta

Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se define la **transpuesta** de A , que denotamos A^t , como la matriz de orden $n \times m$ que tiene en el lugar ij el elemento que A tiene en el lugar ji ; i.e., si indicamos con a a los elementos de A y con b a los de A^t ,

$$b_{ij} = a_{ji} \quad (\text{para todo } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$$

o sea, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

entonces,

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{i3} & \dots & a_{m3} \\ & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{1j} & a_{2j} & a_{3j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

De modo que transponer una matriz A es crear otra matriz A^t cuyas columnas son las filas de A .

Ejemplo

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} d & 1 & 2 & 3 \\ -1 & d & 4 & 5 \\ -2 & -4 & d & 6 \\ -3 & -5 & -6 & d \end{pmatrix}$$

entonces,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad B^t = \begin{pmatrix} d & -1 & -2 & -3 \\ 1 & d & -4 & -5 \\ 2 & 4 & d & -6 \\ 3 & 5 & 6 & d \end{pmatrix}$$

Es importante notar que cuando la matriz es cuadrada los elementos de la diagonal (principal) no cambian de posición al transponerla y los demás *van* al lugar simétrico del que tenían, respecto de la diagonal (principal).

Desde luego que la única forma en que una matriz y su transpuesta pueden ser iguales es cuando es cuadrada. Cuando esto sucede le damos un nombre especial,

Matriz Simétrica

Una matriz *cuadrada* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice **simétrica** cuando

$$A = A^t$$

Esto significa que en los lugares simétricos respecto de la diagonal, la matriz tiene el mismo valor; i.e.,

$$a_{ij} = a_{ji}$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$. De modo que una matriz simétrica tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots & \\ a_{1i} & a_{2i} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ & & & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz Antisimétrica

Una matriz *cuadrada* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice **antisimétrica** cuando

$$A = -A^t$$

Esto significa que en los lugares simétricos respecto de la diagonal, la matriz tiene el mismo número pero con signo opuesto; i.e.,

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$. Esto dice que en particular para $i = j$

$$a_{ii} = -a_{ii}$$

de donde $a_{ii} = 0$ para todo i . O sea, una matriz antisimétrica tiene sólo ceros en la diagonal. Resulta entonces que una matriz antisimétrica tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots & \\ -a_{1i} & -a_{2i} & \dots & 0 & \dots & a_{in} \\ & & & \vdots & \ddots & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & -a_{in} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3

Calcule las transpuestas de las matrices de los ejercicios 1 y 2 e indique cuáles son simétricas y cuáles antisimétricas, si las hubiere.

Matriz Diagonal

Una matriz *cuadrada* se dice **diagonal** si todos sus elementos fuera de la diagonal (principal) son nulos. Es decir, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal si

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

Matriz Identidad de orden n

Un caso muy especial entre las matrices diagonales se da cuando todos los elementos de la diagonal son '1'. Esa matriz, por razones que veremos enseguida, se llama **identidad de orden n** y se la denota por

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Cuando no hay lugar a confusión se la denota simplemente I .

Operaciones

❖ SUMA

Dadas dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ¹ se define la **suma** de A con B como otra matriz de orden $m \times n$, que denotaremos $A + B$, cuyos elementos están dados por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\text{para } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

Es decir,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} + b_{i1} & \dots & a_{ij} + b_{ij} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mj} + b_{mj} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

¹note que ambas deben tener el mismo tamaño

Claramente esta operación es *asociativa* y *conmutativa* y tiene por *elemento neutro* a la **matriz nula**

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

❖ PRODUCTO POR ESCALAR

Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y el número $\alpha \in \mathbb{R}$ se define el **producto de A por α** como la matriz, del mismo tamaño que A, dada por

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1j} & \dots & \alpha a_{1n} \\ & & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \dots & \alpha a_{ij} & \dots & \alpha a_{in} \\ & & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mj} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

Como en el caso anterior, aquí también es evidente que esta operación es *asociativa* y *conmutativa* y tiene por *elemento neutro* al número 1.

Además, es simple comprobar que este producto es distributivo respecto de la suma de matrices y de la suma de escalares.

Conclusión:

$\mathbb{R}^{m \times n}$ —con estas operaciones— es un espacio vectorial

El conjunto de matrices

$$\{E^{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

donde

$$E^{ij} = \begin{pmatrix} & & & & j \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad i$$

(todos los elementos de E^{ij} son nulos salvo en el lugar ij donde tiene un 1) constituye una base de $\mathbb{R}^{m \times n}$ llamada **base canónica**. En particular se obtiene que

$$\dim(\mathbb{R}^{m \times n}) = mn$$

Es muy simple verificar que los espacios vectoriales $\mathbb{R}^{m \times n}$ y \mathbb{R}^{mn} son isomorfos. Basta considerar una transformación lineal que transforme la base canónica de $\mathbb{R}^{m \times n}$ en la base canónica de \mathbb{R}^{mn} para obtener un isomorfismo entre ambos espacios.

Ejercicio 4

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & -9 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 9 & 8 \\ 0 & -9 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$$

Cuando sea posible calcule

(a) $A + B$ (b) $A + B^t$ (c) $(-3)C$ (d) $B + C$ (e) $2A^t - B$

Ejercicio 5

Averigüe si la función $\text{tr} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ es una transformación lineal. En caso de serlo, halle núcleo e imagen.

❖ PRODUCTO DE MATRICES

Dadas dos matrices A y B vamos a definir el producto entre ambas como otra matriz que tiene en el lugar ij al producto escalar entre la fila i de la matriz A y la columna j de la matriz B .

Es evidente que para que esto pueda hacerse es imprescindible que la cantidad de elementos que tiene la fila i de la matriz A coincida con la cantidad de elementos que tiene la columna j de la matriz B .

Esto muestra que no vamos a poder multiplicar cualquier par de matrices.

Dadas $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ definimos el **producto** entre A y B como la matriz que denotaremos AB y cuyos elementos son

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B_1 & A_1 \cdot B_2 & \dots & A_1 \cdot B_k \\ A_2 \cdot B_1 & A_2 \cdot B_2 & \dots & A_2 \cdot B_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_m \cdot B_1 & A_m \cdot B_2 & \dots & A_m \cdot B_k \end{pmatrix}$$

donde,

$$A_i = \text{'fila } i \text{ de } A' \in \mathbb{R}^n, \quad B_j = \text{'columna } j \text{ de } B' \in \mathbb{R}^n$$

De modo que el elemento ij del producto AB resulta ser

$$(a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, \dots, b_{nj}) = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell j}$$

Otra forma de verlo, dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

el lugar ij del producto AB tiene

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj} & \dots & & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & & \dots & & \dots \end{pmatrix}$$

Es claro que

$$AB \in \mathbb{R}^{m \times k}$$

Ejemplo

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

vamos a hallar su producto. Recordemos que no siempre se pueden multiplicar dos matrices: el número de columnas del primer factor debe ser igual al número de filas del segundo factor.

En nuestro caso esto pasa solo si planteamos el producto BA ; en el otro orden no se puede realizar. Siendo $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ y $A \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$, será $BA \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$. Con la notación que introdujimos antes, las filas de B y las columnas de A son

$$B_1 = (1, 0) \quad , \quad B_2 = (2, -3) \quad , \quad B_3 = (4, 2)$$

y

$$A_1 = (5, 0) \quad , \quad A_2 = (-2, 3) \quad , \quad A_3 = (-3, -1) \quad , \quad A_4 = (0, 0) \quad , \quad A_5 = (1, 2)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} (1, 0) \cdot (5, 0) & (1, 0) \cdot (-2, 3) & (1, 0) \cdot (-3, -1) & (1, 0) \cdot (0, 0) & (1, 0) \cdot (1, 2) \\ (2, -3) \cdot (5, 0) & (2, -3) \cdot (-2, 3) & (2, -3) \cdot (-3, -1) & (2, -3) \cdot (0, 0) & (2, -3) \cdot (1, 2) \\ (4, 2) \cdot (5, 0) & (4, 2) \cdot (-2, 3) & (4, 2) \cdot (-3, -1) & (4, 2) \cdot (0, 0) & (4, 2) \cdot (1, 2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ 10 & -7 & -3 & 0 & -4 \\ 20 & -2 & -14 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio 6

Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 5 \\ 0 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule todos los productos posibles entre dos de ellas.

Ejercicio 7

Dadas las matrices

$$A = (2 \quad 1 \quad 3 \quad -2) \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Determine si se pueden realizar los productos AB y BA , a qué espacio pertenece cada uno de ellos y calcúlelos.

Caso particular: AI

Dada una matriz cualquiera $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si la multiplicamos por la matriz identidad de orden n ,

$$AI = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = A$$

²¿tendría sentido, suponiendo $n \neq m$, plantear IA ? ¿De qué orden deberíamos tomar la identidad para poder calcular IA ?

pues el elemento de AI que está en el lugar ij es

$$(a_{i1}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}) \cdot (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0) = a_{ij} \cdot 1 = a_{ij}$$

Producto de matrices cuadradas

Una situación particular se da cuando consideramos matrices cuadradas. En este caso, siendo iguales el número de filas y de columnas, dadas dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cualesquiera sí se puede plantear tanto AB como BA . Lo que no ocurre, en general, es que sean iguales.

Veamos un ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces,

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = BA$$

Conclusión

El producto entre matrices **no** es conmutativo.

Otra característica que es conveniente tener presente es que, contrariamente a lo que sucede con los números reales (y también complejos), el producto de dos matrices no nulas puede ser cero. Veamos dos ejemplos.

Si bien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

no son nulas, su producto

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pero tal vez más sorprendente aún es ver que el cuadrado de una matriz no nula puede ser cero. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Claramente A no es nula. Sin embargo, su cuadrado sí lo es

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8

Halle todas las matrices $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ que conmutan con $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces la función $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}^t \quad (\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n)$$

es una transformación lineal.

Ejercicio 9

Demuestre la proposición anterior.

Ejercicio 10

Halle el dominio, el codominio y la expresión de las transformaciones lineales asociadas a las matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4 \ 0 \ -2 \ 1 \ 7), \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \\ 10 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Matriz inversible

Una matriz *cuadrada* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice *inversible* si existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$AB = BA = I_n$$

Esta matriz B resulta ser *única* y recibe el nombre de *matriz inversa* de A . Se la denota

$$B = A^{-1}$$

Además es inmediato verificar que

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Ejercicio 11

Para cada una de estas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

halle su inversa o muestre que no es inversible.

Ejercicio 12

Compruebe que si $ad - bc \neq 0$ ³, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13

Considere

$$\mathbb{S} : \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) calcule $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) ¿cuál es la relación entre \mathbb{S} y el conjunto

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}?$$

c) halle A^{-1}

d) ¿le sirve la información obtenida en el ítem anterior para averiguar quién es \mathbb{S} ?

NOTA: la matriz A se llama **matriz asociada** al sistema de ecuaciones.

Ejercicio 14

Utilice las ideas presentadas en el ejercicio anterior para resolver el sistema

$$S : \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 5y = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 15

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) compruebe que el sistema

$$S : \begin{cases} 2x + 3y + 6z = 2 \\ 4x + 5y + 7z = -3 \end{cases}$$

se puede expresar en forma matricial como

$$S : AX = B$$

³Luego veremos que esta condición es necesaria y suficiente para la inversibilidad de esta matriz

b) calcule $C^{-1}A$ e investigue si es cierto que $S = S'$ siendo

$$S' : C^{-1}AX = C^{-1}B$$

c) utilice los resultados obtenidos para resolver S .

Ejercicio 16

Escriba en forma matricial los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y utilice las ideas previas para resolverlos

$$S_1 : \begin{cases} x - z = 1 \\ z - w = -1 \\ -x + y + 2z + w = 0 \\ y + z = -2 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x - z = 1 \\ z - w = -1 \\ -x + y + 2z + w = 0 \end{cases}$$

$$\text{NOTA: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 17

Imponga una condición sobre la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que asegure que el sistema

$$AX = B$$

tenga solución única.

Proposición

Si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son inversibles, entonces AB también lo es y vale

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

DEMOSTRACIÓN:

$$ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n, \quad B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

Matriz ortogonal

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice *ortogonal* si

$$AA^t = I_n$$

Es decir, que toda matriz ortogonal es inversible y su inversa es su transpuesta.

Ejemplos

1. La matriz $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ es ortogonal.

En efecto, su transpuesta es $\begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ y el producto de ambas

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Las matrices

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

son ortogonales y el efecto de aplicarlas a un vector es efectuar una rotación de ángulo θ alrededor del eje z (la primera), del eje y (la segunda) y del eje x (la tercera).

Observación

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz ortogonal. Sabemos entonces que $AA^t = I$. Llamemos A_i a la fila i de A y B_j a la columna j de A^t , entonces

- ◆ cuando $i \neq j$ tenemos

$$A_i \cdot B_j = I_{ij} = 0$$

pero como la columna j de A^t es la fila j de A esto dice que

$$A_i \cdot A_j = 0$$

- ◆ cuando $i = j$ tenemos

$$A_i \cdot B_i = I_{ii} = 1$$

o sea,

$$A_i \cdot A_i = 1$$

Conclusión: el conjunto de filas de una matriz *ortogonal* constituye una base *ortonormal* de \mathbb{R}^n . Lo mismo sucede con las columnas.

Matriz de una transformación lineal

Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Consideremos las bases canónicas

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \text{ de } \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \{\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_m\} \text{ de } \mathbb{R}^m$$

Sean

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= (a_{11}, \dots, a_{m1}) = a_{11}\mathbf{E}_1 + \dots + a_{m1}\mathbf{E}_m \\ &\vdots \\ T(\mathbf{e}_j) &= (a_{1j}, \dots, a_{mj}) = a_{1j}\mathbf{E}_1 + \dots + a_{mj}\mathbf{E}_m \\ &\vdots \\ T(\mathbf{e}_n) &= (a_{1n}, \dots, a_{mn}) = a_{1n}\mathbf{E}_1 + \dots + a_{mn}\mathbf{E}_m \end{aligned}$$

Llamamos *matriz de T en las bases canónicas de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m* a la matriz cuyas columnas son los vectores $T(\mathbf{e}_j)$ ($1 \leq j \leq n$) y la denotamos

$$M_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Esta matriz satisface

$$T(x_1, \dots, x_n) = M_T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad 4$$

NOTA: esta definición se puede extender a espacios vectoriales de dimensión finita y a bases cualesquiera del dominio y codominio.

Ejemplo

Sea $T(x, y, z) = (3x - 2y + z, x - z)$. Es una transformación lineal. Calculemos

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (3, 1) = 3\mathbf{E}_1 + 1\mathbf{E}_2 \\ T(0, 1, 0) &= (-2, 0) = -2\mathbf{E}_1 + 0\mathbf{E}_2 \\ T(0, 0, 1) &= (1, -1) = 1\mathbf{E}_1 + (-1)\mathbf{E}_2 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$M_T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y podemos escribir (omitiendo la transposición)

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

⁴En realidad deberíamos escribir $\left(M_T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^t$ dado que $T(x_1, \dots, x_n)$ es un vector fila

Ejercicio 18

Para cada una de las siguientes transformaciones lineales halle

(i) dominio y codominio

(ii) la matriz asociada e indique a qué espacio de matrices pertenece

a) $T(x, y, z) = (x + 3y - 2z, x + y + z, x - z, y + 4z)$

b) $T(x, y, z, w) = (x + w, y - x + z - 3w, x + 4z)$

c) $T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_4 - x_5$

d) $T(x) = (x, 2x, -3x, 0, -x, 5x, 7x)$

e) $T(x) = 3x$

f) $T(x, y) = (\cos \frac{\pi}{3} x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} y, \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} x + \cos \frac{\pi}{3} y)$

Ejercicio 19

Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Si $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ son las columnas de M_T , halle $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$.

Ejercicio 20

Considere las siguientes transformaciones lineales

$$T(x, y, z) = (x + 3y - 2z, x + y + z, x - z, y + 4z), \quad R(x, y, z, w) = (x + w, y - x + z - 3w, x + 4z)$$

a) halle la expresión de $T \circ R$

b) calcule M_T , M_R y $M_{T \circ R}$

c) compare $M_T M_R$ con $M_{T \circ R}$

Proposición (matriz de una composición)

Sean $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ transformaciones lineales. Entonces, la transformación lineal $S \circ T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tiene por matriz

$$M_{S \circ T} = M_S M_T$$

DEMOSTRACIÓN:

Denotemos

$$M_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad M_S = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ & & \ddots & \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{km} \end{pmatrix}, \quad M_{S \circ T} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ & & \ddots & \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \end{pmatrix}$$

Tenemos, para cada $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$,

$$M_{S \circ T} \mathbf{u}^t = S \circ T(\mathbf{u}) = M_S(M_T \mathbf{u}^t) = M_S M_T \mathbf{u}^t$$

Si lo aplicamos, en particular, a cada $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

$$M_{S \circ T} \mathbf{e}_j^t = M_S M_T \mathbf{e}_j^t$$

pero esto dice que ambas matrices — $M_{S \circ T}$ y $M_S M_T$ — tienen las mismas columnas; luego, son iguales.

Proposición

Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Entonces,

T es isomorfismo si y sólo si M_T es inversible

En tal caso,

$$M_{T^{-1}} = (M_T)^{-1}$$

DEMOSTRACIÓN:

— Supongamos que T es isomorfismo.

La proposición anterior nos dice que la matriz de $T \circ T^{-1}$ es $M_T M_{T^{-1}}$. Pero por otro lado, siendo inversas, la matriz de $T \circ T^{-1}$ es I_n ; luego,

$$M_T M_{T^{-1}} = I_n$$

y lo mismo vale para

$$M_{T^{-1}} M_T = I_n$$

esto implica que M_T es inversible y que su inversa es la matriz de T^{-1} .

— Supongamos que M_T es inversible.

Llamemos A a su inversa. Definamos la transformación lineal,

$$S(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}^t$$

Tenemos,

$$S \circ T(\mathbf{v}) = A(M_T \mathbf{v}^t) = A M_T \mathbf{v}^t = \mathbf{v}^t \quad (\text{para todo } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n)$$

y

$$T \circ S(\mathbf{u}) = M_T(A\mathbf{u}^t) = M_T A \mathbf{u}^t = \mathbf{u}^t \quad (\text{para todo } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n)$$

lo que muestra que S es la inversa de T y en consecuencia T es un isomorfismo.

Ejercicio 21

Se sabe que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

son inversas una de otra. Halle M_T para $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (-2x - 4z, 8x + 2y + 8z, 2z)$$

¿Necesita hacer algún cálculo para

- responder si T es o no isomorfismo?
- hallar la expresión de T^{-1} ?

Ejercicio 22

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, considere su transformación lineal asociada $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x + y + z, x - 2z, y + z)$.

- Halle la expresión de $T^{-1}(u, v, w)$ ⁵
- Encuentre $M_{T^{-1}}$
- ¿Necesita hacer algún otro cálculo para dar A^{-1} ?

Rango Fila — Rango Columna

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ llamamos

- ◆ **rango fila** de A al número máximo de filas linealmente independientes que tiene la matriz A
- ◆ **rango columna** de A al número máximo de columnas linealmente independientes que tiene la matriz A .

Ejemplos

- Sea $A = I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Las filas de A son los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^n , luego el rango fila de A es n . El mismo valor toma el rango columna pues las columnas también están formadas por los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^n .

⁵en la Práctica 7 se mostró una forma de hallarlo

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$

Como los vectores $(1, 0, 3, 4)$ y $(5, -1, 0, 3)$ son independientes, su rango fila es 2. Respecto de las columnas es claro que las cuatro (siendo vectores de \mathbb{R}^2) no pueden ser independientes. En realidad, por ejemplo las dos primeras $(1, 5)$ y $(0, -1)$ son independientes y en consecuencia forman una base de \mathbb{R}^2 ⁶. De modo que no puede haber más de dos linealmente independientes. Por lo tanto, el rango columna también es 2.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Es claro que el rango fila es 2. Respecto del rango columna, tenemos que considerar los vectores

$$(2, 1, 1), (4, 2, 0), (8, 4, 0)$$

también es fácil ver que el máximo número de vectores linealmente independientes entre ellos es 2. De modo que el rango columna también es 2.

Observación

En estos ejemplos obtuvimos que los rangos fila y columna coincidían. Esto pasa siempre. Se puede probar el siguiente resultado,

Teorema

Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ los rangos fila y columna coinciden.

Rango de una matriz

Dado que los rangos fila y columna coinciden, podemos llamar simplemente *rango* de una matriz A a cualquiera de esos dos valores y lo denotamos

$$\text{rg}(A)$$

Ejercicio 23

Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. ¿Hay alguna relación entre $\text{rg}(M_T)$ y $\dim \text{Im } T$?

Sugerencia: Recuerde la definición de matriz asociada a una transformación lineal.

⁶¿por qué?

Proposición

Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, $n \geq m$. Entonces,

T es epimorfismo si y sólo si $\text{rg}M_T = m$

DEMOSTRACIÓN:

— Supongamos que T es epimorfismo.

En tal caso,

$$\{T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n)\} \quad (\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \text{ base canónica de } \mathbb{R}^n)$$

generan \mathbb{R}^m y por lo tanto hay exactamente m de ellos que son linealmente independientes. Por lo tanto,

$$\text{rg}M_T = m$$

— Supongamos que $\text{rg}M_T = m$.

Los vectores columna de M_T son

$$T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n)$$

y como el rango es m sabemos que m de ellos son linealmente independientes y como están en \mathbb{R}^m son una base. Pero entonces,

$$\mathbb{R}^m = \langle T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n) \rangle = \text{Im } T$$

i.e., T es epimorfismo.

Ejercicio 24

Conociendo —y habiendo justificado— la respuesta al Ejercicio 23, ¿se podría simplificar la fundamentación de la proposición anterior?

Aplicación (Sistemas de Ecuaciones Lineales Homogéneas)

Dado el sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

con $m \leq n$, llamemos \mathbb{S} al subespacio de soluciones y $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ a la matriz del sistema ⁷; es decir, el sistema dado se puede expresar en la forma

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{o simplemente} \quad AX = 0$$

⁷en los Ejercicios 12 a 17 introducimos este tema

Entonces,

$$\dim \mathbb{S} = n - \text{rg}A$$

Para comprobarlo basta aplicar el teorema de la dimensión a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por

$$T(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)$$

que escrita en forma matricial se expresa en la forma

$$T(X) = AX \quad (\text{A resulta ser } M_T)$$

cuyo núcleo es precisamente el subespacio \mathbb{S} . En consecuencia, el teorema de la dimensión nos permite afirmar que

$$\dim \mathbb{S} = \dim \text{Nu } T = \dim \mathbb{R}^n - \dim \text{Im } T = n - \text{rg}(M_T) = n - \text{rg}(A)$$

Dicho de otra forma, un subespacio \mathbb{S} de \mathbb{R}^n de dimensión $k \leq n$ se puede expresar como el conjunto de soluciones de un sistema de $n - k$ ecuaciones lineales homogéneas cuya matriz asociada tiene rango $n - k$.

Ejemplo

Dado el subespacio $\mathbb{S} = \langle (1, 0, 0, -2), (2, 1, -1, 1) \rangle$ vamos a hallar un sistema de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones sea precisamente \mathbb{S} .

Notemos que los generadores de \mathbb{S} son linealmente independientes, luego $\dim \mathbb{S} = 2$; como el espacio es \mathbb{R}^4 , sabemos que \mathbb{S} va a ser el conjunto de soluciones de un sistema de la forma

$$\begin{cases} ax + by + cz + dw = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d'w = 0 \end{cases}$$

con coeficientes tales que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

sea 2; i.e., (a, b, c, d) y (a', b', c', d') deben ser independientes.

Solo tenemos que determinar cuánto valen los coeficientes $a, b, c, d, a', b', c', d'$.

Como los vectores $(1, 0, 0, -2)$ y $(2, 1, -1, 1)$ deben satisfacer estas ecuaciones tenemos

$$\begin{cases} (a, b, c, d) \cdot (1, 0, 0, -2) = 0 \\ (a, b, c, d) \cdot (2, 1, -1, 1) = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} (a', b', c', d') \cdot (1, 0, 0, -2) = 0 \\ (a', b', c', d') \cdot (2, 1, -1, 1) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Teniendo en cuenta que $\{(1, 0, 0, -2), (2, 1, -1, 1)\}$ es una base de \mathbb{S} , $(*)$ dice que los vectores (a, b, c, d) y (a', b', c', d') son ortogonales a todos los vectores de \mathbb{S} ; es decir,

$$(a, b, c, d), (a', b', c', d') \in \mathbb{S}^\perp$$

Siendo $\dim \mathbb{S}^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathbb{S} = 4 - 2 = 2$ concluimos que

$$\{(a, b, c, d), (a', b', c', d')\}$$

tiene que ser una base de \mathbb{S}^\perp .

Se trata entonces de buscar una base de \mathbb{S}^\perp . Un $(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^\perp$ si y sólo si

$$\begin{cases} (x, y, z, w) \cdot (1, 0, 0, -2) = 0 \\ (x, y, z, w) \cdot (2, 1, -1, 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2w = 0 \\ 2x + y - z + w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2w \\ y = z - 3w \end{cases}$$

es decir, $(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^\perp$ si y sólo si

$$(x, y, z, w) = (2w, z - 3w, z, w) = (0, z, z, 0) + (2w, -3w, 0, w) = z(0, 1, 1, 0) + w(2, -3, 0, 1)$$

Obtenemos así una base de \mathbb{S}^\perp

$$\{(0, 1, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\}$$

y por lo tanto, \mathbb{S} se puede expresar en la forma

$$\mathbb{S} : \begin{cases} (0, 1, 1, 0) \cdot (x, y, z, w) = 0 \\ (2, -3, 0, 1) \cdot (x, y, z, w) = 0 \end{cases}$$

es decir,

$$\mathbb{S} : \begin{cases} y + z = 0 \\ 2x - 3y + w = 0 \end{cases}$$

Determinantes

◆ DETERMINANTES DE ORDEN 2

El *determinante de orden 2* es la *única* función

$$\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes propiedades

- (i) $\det(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha \det(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta \det(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 $\det(\mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) = \alpha \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta \det(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- (ii) $\det(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$
- (iii) $\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$ $\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)$

Las propiedades enunciadas en (i) dicen que si *miramos* a \det como función solo de la primera variable (o solo de la segunda) es una transformación lineal.

Ejercicio 25

A partir de la definición de determinante de orden 2 calcule

- a) $\det((3, 0), (0, 5))$
 b) $\det((1, 0), (-2, 7))$

Propiedades del determinante de orden 2

1. $\boxed{\det(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = 0}$ $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$

$$\det(\mathbf{0}, \mathbf{u}) \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \alpha=0}}{\det(0 \cdot \mathbf{0}, \mathbf{u})} = 0 \det(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = 0$$

2. $\boxed{\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$ $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) + \det(\mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \det(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \det(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \det(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \det(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

3. $\boxed{\det(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = (a\beta - b\alpha) \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$ $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \det(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) &= a \det(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) + b \det(\mathbf{v}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \\ &= a[\alpha \det(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \beta \det(\mathbf{u}, \mathbf{v})] + b[\alpha \det(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \beta \det(\mathbf{v}, \mathbf{v})] \\ &= a\beta \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b\alpha \det(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \\ &= (a\beta - b\alpha) \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

4. \mathbf{u} y \mathbf{v} son linealmente dependientes si y solo si $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$

- Supongamos primero que $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ (i.e., son dependientes) y veamos que su determinante es nulo,

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det(\alpha\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \alpha \det(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$$

- Ahora asumamos que $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ y comprobemos que \mathbf{u} y \mathbf{v} son linealmente dependientes. Llamemos

$$\mathbf{u} = (a, b) \quad , \quad \mathbf{v} = (c, d)$$

entonces,

$$0 = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ad - bc$$

lo que equivale a decir

$$ad = bc$$

Caso 1: $a = 0$

Esto implica que $bc = 0$, o sea $b = 0$ o $c = 0$

— si $b = 0$: $\mathbf{u} = (a, b) = (0, 0)$ que es dependiente con cualquier otro, en particular \mathbf{v}

— si $b \neq 0$: $c = 0$ y entonces $\mathbf{u} = (0, b)$ y $\mathbf{v} = (0, d)$. Pero en tal caso

$$\mathbf{v} = (0, d) = \frac{d}{b}(0, b) = \frac{d}{b}\mathbf{u}$$

i.e. , \mathbf{u} y \mathbf{v} son linealmente dependientes.

Caso 2: $a \neq 0$

En este caso, $d = \frac{b}{a}c$ y por lo tanto,

$$\mathbf{v} = (c, d) = \left(c, \frac{b}{a}c\right) = c\left(1, \frac{b}{a}\right) = \frac{c}{a}(a, b) = \frac{c}{a}\mathbf{u}$$

y también concluimos en este caso que son linealmente dependientes.

Ejercicio 26

Utilizando la definición y las propiedades del determinante de orden 2 calcule

a) $\det((-2, 3), (5, 4))$

b) $\det((-2, 3), (-4, 6))$

c) $\det((0, 0), (-7, 12))$

d) $\det(3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}, 5\mathbf{u} + 4\mathbf{v})$

sabiendo que $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2$

e) $\det((a, b), (x, y))$

Observación

Una consecuencia de la última propiedad es que

$$\det((a, b), (\alpha, \beta)) = \det(a(1, 0) + b(0, 1), \alpha(1, 0) + \beta(0, 1)) = a\beta - b\alpha$$

lo que dice que para cualquier par de vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ en \mathbb{R}^2

$$\det((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = u_1v_2 - u_2v_1 \quad (\star)$$

Esto muestra que no puede haber más de una función que cumpla las propiedades que definen a \det . Sigue faltando probar que *realmente* existe \det . Pero para ello bastaría verificar que la función definida por (\star) cumple con las condiciones (i) – (iii), lo que es muy simple.

Una consecuencia inmediata de este resultado es que

$$\mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} \text{ son independientes} \iff \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$$

Determinante de una matriz 2×2

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

pensamos a cada una de sus filas como vectores de \mathbb{R}^2 y así definimos

$$\det A = \det((a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22}))$$

teniendo en cuenta que

$$(a_{11}, a_{12}) = a_{11}(1, 0) + a_{12}(0, 1) \quad , \quad (a_{21}, a_{22}) = a_{21}(1, 0) + a_{22}(0, 1)$$

y usando propiedades de \det obtenemos

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Teorema

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, entonces

$$\det(AB) = \det A \det B$$

DEMOSTRACIÓN:

Denotemos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

con lo cual,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

y entonces,

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ &= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} \\ &\quad - a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} - a_{12}b_{22}a_{22}b_{21} \\ &= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} \\ &= b_{11}b_{22}[a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}] + b_{12}b_{21}[a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}] \\ &= b_{11}b_{22}[a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}] - b_{12}b_{21}[a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}] \\ &= [a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}][b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}] \\ &= \det A \det B \end{aligned}$$

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, entonces

$$\det(A^t) = \det A$$

DEMOSTRACIÓN:

Si denotamos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

y por consiguiente

$$\det(A^t) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det A$$

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ inversible, entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos que $AA^{-1} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces, un resultado anterior nos dice que

$$1 = \det I_2 = \det(AA^{-1}) = \det A \det(A^{-1})$$

de donde,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Teorema

Sean $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Entonces,

T es isomorfismo si y solo si $\det A \neq 0$

DEMOSTRACIÓN:

Tenemos

$$T(1, 0) = (a_{11}, a_{21}) \quad , \quad T(0, 1) = (a_{12}, a_{22})$$

Entonces,

$T(1, 0)$ y $T(0, 1)$ son linealmente independientes si y solo si

$$0 \neq \det((a_{11}, a_{21}), (a_{12}, a_{22})) = \det(A^t) = \det A$$

◆ DETERMINANTES DE ORDEN 3

El *determinante de orden 3* es la *única* función

$$\det : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes propiedades para cada $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(i) \det(\alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \alpha \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) + \beta \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$$

$$\det(\mathbf{u}_1, \alpha \mathbf{u}_2 + \beta \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3) = \alpha \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) + \beta \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3)$$

$$\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \alpha \mathbf{u}_3 + \beta \mathbf{v}_3) = \alpha \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) + \beta \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3)$$

$$(ii) \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 0 \quad \text{si } \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j \text{ para algún } i \neq j$$

$$(iii) \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1 \quad \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$$

Propiedades del determinante de orden 3

$$1. \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = 0 \text{ si alguno de los vectores } \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

$$2. \det(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3) = -\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$$

$$\det(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) = -\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$$

$$\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2) = -\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$$

Veámoslo para $\det(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) = \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Como en el caso de los determinantes de orden 2,

$$0 = \det(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3) = \det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) + \det(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)$$

de donde se concluye lo afirmado.

$$3. \det(\mathbf{e}_1, (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) = a_2b_3 - a_3b_2 \quad \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{e}_1, (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) &= \det(\mathbf{e}_1, a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\ &= \det(\mathbf{e}_1, a_1\mathbf{e}_1, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\ &\quad + \det(\mathbf{e}_1, a_2\mathbf{e}_2, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\ &\quad + \det(\mathbf{e}_1, a_3\mathbf{e}_3, b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\ &= \det(\mathbf{e}_1, a_2\mathbf{e}_2, b_1\mathbf{e}_1) + \det(\mathbf{e}_1, a_2\mathbf{e}_2, b_2\mathbf{e}_2) \\ &\quad + \det(\mathbf{e}_1, a_2\mathbf{e}_2, b_3\mathbf{e}_3) + \det(\mathbf{e}_1, a_3\mathbf{e}_3, b_1\mathbf{e}_1) \\ &\quad + \det(\mathbf{e}_1, a_3\mathbf{e}_3, b_2\mathbf{e}_2) + \det(\mathbf{e}_1, a_3\mathbf{e}_3, b_3\mathbf{e}_3) \\ &= a_2b_3 \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + a_3b_2 \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) \\ &= a_2b_3 - a_3b_2 \end{aligned}$$

$$4. \det(\mathbf{e}_2, (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) = -(a_1b_3 - a_3b_1) \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$$

$$5. \det(\mathbf{e}_3, (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) = a_1b_2 - a_2b_1 \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$$

Determinante de una matriz 3×3

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

tal como hicimos en el caso 2×2 pensamos a sus filas como vectores de \mathbb{R}^3 y así definimos

$$\det A = \det((a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33}))$$

Las propiedades anteriores muestran que

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} = -\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
 &= \det (a_{11}(1, 0, 0) + a_{12}(0, 1, 0) + a_{13}(0, 0, 1), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33})) \\
 &= a_{11} \det ((1, 0, 0), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33})) \\
 &\quad + a_{12} \det ((0, 1, 0), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33})) \\
 &\quad + a_{13} \det ((0, 0, 1), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33})) \\
 &= a_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{12} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
 &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Observación

Esto provee una forma de calcular un determinante de orden 3 reduciéndolo a calcular determinantes de orden 2

◆ DETERMINANTES DE ORDEN n

Vamos finalmente a enunciar los resultados correspondientes a un determinante de orden n ; las demostraciones hechas para el caso $n = 2$ dan una idea, en una situación mucho más simple, del por qué de ciertas propiedades. Las demostraciones de estos resultados en el caso general, si bien no son difíciles, sí son considerablemente engorrosas.

Antes vamos a necesitar unas últimas definiciones,

Menores y Cofactores — Matriz Adjunta

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

su determinante es de orden n . Si excluimos la fila i y la columna j nos queda una matriz de $\mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$. A su determinante

$$M_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

que es de orden $n - 1$ se lo llama **menor** correspondiente al elemento a_{ij} de la matriz A y al número

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

se lo denomina **cofactor del elemento** a_{ij} .

Se llama **matriz adjunta** de A a la matriz

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

i.e., la matriz que en el lugar ij tiene al cofactor del elemento a_{ij} de A .

Esta notación nos será útil para enunciar un resultado que generaliza lo hecho para reducir el cálculo de determinantes de tercer orden al cálculo de determinantes de segundo orden y, en particular, la matriz adjunta para hallar la inversa de una matriz.

Definición

El **determinante de orden n** es la única función

$$\det : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes propiedades

- (i) $\det(\mathbf{u}_1, \dots, \alpha \mathbf{u}_i + \beta \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{u}_n) = \alpha \det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n) + \beta \det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{u}_n)$
- (ii) $\det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n) = 0$
- (iii) $\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$ $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ base canónica de \mathbb{R}^n

Se define el **determinante de una matriz** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como

$$\det A = \det((a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{n1}, \dots, a_{nn}))$$

Resultados (para orden n)

1. $\det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{u}_n) = 0$
2. $\det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_n) = -\det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n)$
3. $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ son linealmente independientes si y solo si $\det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \neq 0$
4. Si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(AB) = \det A \det B$
5. $\det(A^t) = \det A$
6. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$7. \text{ Si } A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ (matriz diagonal), entonces } \det A = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$$

$$8. \text{ Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ (matriz triangular superior), entonces}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

9. Si A es ortogonal, $|\det A| = 1$
10. Si A es inversible, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
11. Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal, T es isomorfismo si y solo si $\det M_T \neq 0$
12. *Reducción del orden del determinante*

Si A_{ij} denota el cofactor del elemento a_{ij} de la matriz A , para cualquier $1 \leq j \leq n$ vale el **desarrollo por fila**

$$\begin{aligned} \det A &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \\ &= (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j} + \dots + (-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj} \end{aligned}$$

y para cualquier $1 \leq i \leq n$ vale el **desarrollo por columna**

$$\begin{aligned} \det A &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \\ &= (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}M_{in} \end{aligned}$$

donde M_{ij} indica el menor asociado al elemento a_{ij} .

13. Relacionado con el resultado anterior se tiene que

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0 \quad (k \neq j)$$

y también que

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad (k \neq i)$$

14. *Matriz inversa*

Supongamos que A es inversible. Entonces,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj}A)^t = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo (Cálculo de un determinante de orden 4)

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Entonces, usando la propiedad que nos permite reducir el orden del determinante y eligiendo la fila 4 resulta

$$\begin{aligned} \det A &= 0(-1)^{1+4} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} + 1(-1)^{4+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} + 3(-1)^{4+3} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-4)(-1)^{4+4} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pues el segundo determinante tiene dos filas iguales, con lo cual vale 0.

Calculemos los dos determinantes de orden 3

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} &= 2(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 3(-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 2(9 - 8) + 3(8 - 6) \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} &= 2(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + (-1)(-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 2(0 - (-3)) + (8 - 6) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Luego,

$$\det A = 8 - 4 \cdot 8 = -24$$

Esto nos dice, en particular, que A es inversible.

Ejemplos (Cálculo de la inversa de una matriz)

1. Consideremos la matriz

$$A = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo anterior comprobamos que

$$\det A = 8$$

por lo que podemos asegurar que existe su inversa. Para hallarla, comencemos por los cofactores

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 3, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = -2, & A_{13} &= (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -2 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 4, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 8, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 0 \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -3, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -6, & A_{33} &= (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & 8 & 0 \\ -3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

su transpuesta,

$$(\text{adj}A)^t = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -2 & 8 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, recordando que $\det A = 8$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -2 & 8 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2. Rotación alrededor del eje z

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siendo A ortogonal, su inversa es simplemente su transpuesta

$$A^{-1} = A^t = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\text{sen}(-\theta) & 0 \\ \text{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto nos confirma que la inversa de una rotación alrededor del eje z de ángulo θ es otra rotación, alrededor del mismo eje, pero de ángulo $-\theta$.

Sistemas Lineales de $n \times n$ — Regla de Cramer

Anteriormente consideramos sistemas lineales con mayor número de incógnitas que de ecuaciones y llegamos a ver cómo calcular su dimensión a partir de conocer el rango de la matriz del sistema.

Ahora nos ocuparemos de estudiar el caso de sistemas con igual número de incógnitas y de ecuaciones. Concretamente, se trata de estudiar las soluciones de

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (\blacklozenge)$$

que se puede escribir en forma matricial (más compacta) como

$$AX = B$$

donde A es la matriz del sistema (♦), $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Comencemos por notar que si el rango de A no es n necesariamente hay por lo menos una fila de A que es linealmente dependiente con las demás y en tal caso, esa ecuación no aporta ninguna restricción al sistema; por lo cual, en realidad se trata de un sistema con menor número de ecuaciones que de incógnitas que seguro no tendrá una única solución.

Lo que vamos a hacer ahora es dar una manera de encontrar *la única solución* para sistemas lineales de orden n cuya matriz tiene rango n ; i.e., es inversible ⁸.

Vamos a encontrar la única solución del sistema (♦) suponiendo entonces que A es inversible, con lo cual $\det A \neq 0$. Si con A_{ij} denotamos el cofactor del elemento a_{ij} , multiplicamos la i -ésima ecuación por el cofactor A_{i1} ($1 \leq i \leq n$) y nos queda el sistema

$$\begin{cases} a_{11}A_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}A_{11}x_n = b_1A_{11} \\ a_{21}A_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}A_{21}x_n = b_2A_{21} \\ \vdots \\ a_{n1}A_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}A_{n1}x_n = b_nA_{n1} \end{cases} \quad (\diamond)$$

está claro que si (x_1, \dots, x_n) satisface (♦), entonces también es solución de (◇)

Ahora sumamos miembro a miembro, agrupamos y obtenemos que

$$\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}A_{i1} \right) x_1 + \left(\sum_{i=1}^n a_{i2}A_{i1} \right) x_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^n a_{in}A_{i1} \right) x_n = \sum_{i=1}^n b_i A_{i1}$$

Pero los resultados 12. y 13. de la página 32 nos dicen que el coeficiente de x_1 es

$$\det A$$

y los coeficientes de x_2, \dots, x_n son nulos. Concluimos entonces que

$$x_1 = \frac{\sum_{i=1}^n b_i A_{i1}}{\det A}$$

Si en lugar de multiplicar la i -ésima ecuación del sistema (♦) por A_{i1} la multiplicamos por A_{ij} y procedemos como antes, llegamos a que

$$x_j = \frac{\sum_{i=1}^n b_i A_{ij}}{\det A}$$

Vemos entonces que la *única* solución de (♦) que está dada por

⁸Claramente la única solución será: $X = A^{-1}B$ pero esto requiere hallar la inversa de A cosa que puede llevar bastante tiempo.

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n b_i A_{i1}}{\det A}, \dots, \frac{\sum_{i=1}^n b_i A_{in}}{\det A} \right)$$

A este resultado se lo conoce como **Regla de Cramer**.

Por último mencionamos que los numeradores

$$\sum_{i=1}^n b_i A_{ij} \quad (1 \leq j \leq n)$$

se pueden interpretar como el determinante de la matriz A en la que se reemplazó la columna j

$$\begin{array}{c} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{array}$$

por el vector B . Con lo cual queda,

$$x_j = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det A} \quad (1 \leq j \leq n)$$

Ejercicio 27

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + z = 2 \\ -x + y = 3 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

a) en forma matricial

b) usando la regla de Cramer

PROBLEMAS

1. Dadas las matrices

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} & A_2 &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} & A_3 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} & A_4 &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \\
 A_5 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} & A_6 &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 0 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & A_7 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & A_8 &= \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \\
 A_9 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} & A_{10} &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} & A_{11} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & A_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Indique el tamaño de cada una y calcule

- a) $A_i + A_j$, cuando sea posible
- b) $A_i + A_j^t$, cuando sea posible
- c) $A_i A_j$, $A_j A_i$, cuando sea posible
- d) A_i^t ($1 \leq i \leq 12$) e indique si es simétrica o antisimétrica
- e) αA_1 , αA_4 , αA_5
- f) $\text{tr} A_i$, cuando corresponda
- g) la diagonal principal de las matrices que sean cuadradas
- h) $\text{rg} A_i$ ($1 \leq i \leq 12$)
- i) A_{12}^6
- j) $A_i A_i^t$, cuando sea posible. Indique si es A_i es ortogonal

2. Halle todas las matrices de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. Calcule A^n cuando

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- d) A diagonal de orden n
- d) A matriz de rotación alrededor del eje z en \mathbb{R}^3
- d) A triangular superior de orden 3

4. Halle todos los valores de α y β que hacen que la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 2 \end{pmatrix}$$

sea inversible y para un par de estos valores, halle la inversa.

NOTA: resuelva el ejercicio sin usar determinantes.

5. Considere la función $\text{tr} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada matriz cuadrada de orden n le asigna su traza.
- ¿es transformación lineal?
 - ¿es monomorfismo?
 - ¿es epimorfismo?
6. Considere la función $\tau : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ que a cada matriz cuadrada de orden n le asigna su transpuesta y realice un análisis similar al del ejercicio anterior.
7. Encuentre la forma que tienen las matrices del subespacio

$$\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

8. Sean $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que P es inversible y Q es ortogonal. Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, calcule
- $(P^{-1}AP)^k$ ($k \in \mathbb{N}$ fijo)
 - $(Q^tAQ)^k$ ($k \in \mathbb{N}$ fijo)
9. Halle todos los valores de a que hacen que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

sea inversible.

10. a) Compruebe que las matrices de la forma

$$A = E^{ij} + E^{ji} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

son simétricas. ¿Cuántas son?

- b) Analice si sucede lo mismo con las matrices de la forma

$$A = E^{ij} - E^{ji} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

De no suceder, investigue si pertenecen a algún otro grupo de matrices mencionado en la teoría.

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Entonces la función $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}^t \quad (\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n)$$

es una transformación lineal.

12. Muestre que toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se puede escribir en la forma

$$A = A_s + A_a$$

siendo A_s una matriz simétrica y A_a una matriz antisimétrica.

13. Analice si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^{n \times n}$ son subespacios. En caso de serlo, halle su dimensión y exhiba una base

- a) $\mathcal{D} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ es diagonal}\}$
- b) $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ es simétrica}\}$
- c) $\mathcal{T} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{tr}A = 0\}$
- d) $\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ es antisimétrica}\}$

14. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \quad (\star)$$

- a) Halle la matriz del sistema y el sistema homogéneo asociado
- b) Calcule la dimensión del subespacio \mathbb{S} formado por las soluciones del sistema homogéneo
- c) Verifique que $(1, 0, -1)$ es solución del sistema (\star) .
- d) ¿Es cierto que si (x_0, y_0, z_0) es solución del homogéneo, entonces $(1, 0, -1) + (x_0, y_0, z_0)$ es solución de (\star) ?
- e) Compruebe que si (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) son soluciones del sistema dado, entonces

$$(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{S}$$

f) Concluya que el conjunto de soluciones de (\star) está dado por

$$S = \{(1, 0, -1) + (x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{S}\}$$

g) ¿Diría que esta conclusión se puede generalizar o que es una particularidad del sistema dado?

15. Siguiendo las ideas desarrolladas en el ejercicio 14. resuelva el sistema (en \mathbb{R}^4)

$$\begin{cases} x - y + 3z - w = 4 \\ 2x + 5z - 4w = 2 \\ -3x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

16. Interprete el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado al sistema del ejercicio anterior como el núcleo de una transformación lineal. Exhiba la expresión de dicha función.
17. Considerando matrices 3×3 , analice si es cierto que
- el producto de matrices ortogonales es ortogonal
 - la suma de matrices ortogonales es ortogonal
 - el producto de una matriz ortogonal por un número es una matriz ortogonal
 - la matriz identidad es ortogonal
18. Se sabe que A es una matriz de rotación en \mathbb{R}^3 alrededor del eje y que tiene traza nula. ¿Le alcanza la información para saber cuál es el ángulo? De ser así, haga un esquema gráfico que ilustre en qué transforma a la recta dada por $\langle(1, 0, 1)\rangle$.
19. Halle los determinantes de las matrices cuadradas del ejercicio 1.
20. Calcule los determinantes de las siguientes matrices

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & A_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 A_4 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & A_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & A_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 A_7 &= \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} & A_8 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & A_9 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 A_{10} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & A_{11} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & A_{12} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

21. Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}^t$. Suponiendo que existe un $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, tal que

$$T(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$$

- ¿en qué transforma T a la recta generada por \mathbf{v} ?
- halle la matriz de la transformación $\tilde{T}(\mathbf{u}) = T(\mathbf{u}) - 2\mathbf{u}$
- ¿puede ser \tilde{T} isomorfismo?
- ¿puede ser $M_{\tilde{T}}$ inversible?
- calcule $\det(A - 2I)$.

22. Para cada una de las matrices del ejercicio 20. halle todos los valores de $t \in \mathbb{R}$ que son raíces de la ecuación

$$\det(A_i - tI) = 0$$

23. Con la notación introducida en el ejercicio 8., calcule

- $\det(P^{-1}AP)$
- $\det(Q^tAQ)$
- $\det[(P^{-1}AP)^k]$ ($k \in \mathbb{N}$ fijo)
- $\det[(Q^tAQ)^k]$ ($k \in \mathbb{N}$ fijo)

24. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y P una matriz inversible de orden n . Se define la matriz $B = P^{-1}AP$. Compare las funciones polinómicas dadas por

$$f(t) = \det(A - tI) \quad , \quad g(t) = \det(B - tI)$$

25. Dado el sistema en \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + 3z = -3 \\ 2x - y + 4z = 2 \end{cases}$$

- escriba el sistema en forma matricial indicando quién es la matriz del sistema y cuál es el vector con los términos independientes
- determine si tiene solución única
- si la respuesta anterior fue afirmativa, halle la solución utilizando la Regla de Cramer.
- encuentre la matriz inversa del sistema dado
- aplique la matriz inversa al vector formado por los términos independientes y compare el resultado con la solución obtenida antes.

26. Dado el sistema en \mathbb{R}^4 ,

$$\begin{cases} 2x - z = -2 \\ y + z = 3 \\ -x + y + 2z + w = 0 \\ z - w = 4 \end{cases}$$

- escriba el sistema en forma matricial indicando quién es la matriz del sistema y cuál es el vector con los términos independientes
- determine si tiene solución única
- si la respuesta anterior fue afirmativa, halle la solución utilizando la Regla de Cramer.
- encuentre la matriz inversa del sistema dado
- aplique la matriz inversa al vector formado por los términos independientes y compare el resultado con la solución obtenida antes.