



ALGEBRA Y GEOMETRIA

PRIMER CUATRIMESTRE 2011

TRABAJO PRÁCTICO 9

CONTENIDO

Autovalores y autovectores de una matriz cuadrada	1
Subespacio de autovectores asociado a un autovalor	4
Ejemplos	5
Cálculo de autovalores	6
Ejemplos	8
Proposición (<i>independencia lineal de autovectores correspondientes a autovalores distintos</i>) ..	11
Teorema (<i>Dimensión del subespacio de autovectores asociado a un autovalor</i>)	12
Proposición (<i>condición necesaria y suficiente para la existencia de una base de autovectores</i>)	13
Corolario	14
Matrices semejantes	14
Proposición (<i>autovalores de matrices semejantes</i>)	15
Matriz diagonalizable	15
Proposición (<i>condición suficiente para que una matriz sea diagonalizable</i>)	16
Observación importante	16
Proposición (<i>condición necesaria para que una matriz sea diagonalizable</i>)	18
Teorema (<i>condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable</i>)	18
Diagonalización de matrices simétricas	22
Teorema (<i>autovalores de una matriz simétrica</i>)	23
Teorema (<i>ortogonalidad de autovectores de una matriz simétrica</i>)	24

CONTENIDO *(continuación)*

Diagonalización ortogonal	25
Teorema (<i>diagonalización ortogonal de matrices simétricas</i>)	25
Ejemplo	26
Aplicación (<i>cónica de ejes oblicuos</i>)	27
Apéndice I: <i>Un espacio vectorial complejo – \mathbb{C} –</i>	31
Apéndice II: <i>Multiplicidad del autovalor — Dimensión del espacio de autovectores asociado</i> ..	33
Problemas	34

Página de Álgebra y Geometría

<http://www.lirweb.com.ar>

Una vez registrado podrá acceder a sus cursos

Consultas Online

<http://mateingeuca.wordpress.com>

TEORÍA

En lo que sigue, salvo que indiquemos expresamente lo contrario en alguna situación particular, cuando hablemos de vectores de \mathbb{R}^n nos estaremos refiriendo a *vectores columna*. Con esta convención, cuando multiplicamos la matriz M por un vector \mathbf{v}

$$M\mathbf{v}$$

no hace falta transponerlo, como habría que hacer si lo pensáramos como vector fila.

*Autovalores y autovectores de una matriz*¹

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, decimos que un vector *no nulo* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es **autovector** de A si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

A este escalar λ se lo llama **autovalor** asociado al autovector \mathbf{u} .

Alternativamente, si sabemos que λ es autovalor de A y $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ satisface

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

decimos que \mathbf{u} es un *autovector de A asociado al autovalor λ* .

Ejemplo

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

El vector $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ satisface

$$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\mathbf{u}$$

¹se define exclusivamente para matrices cuadradas

Luego, \mathbf{u} es autovector de A y el autovalor asociado es $\lambda = 3$.

Por otro lado, el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ satisface

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v}$$

De modo que $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ también es autovector de A pero en este caso asociado al autovalor $\lambda = 1$.

Interpretación geométrica

Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Sabemos que la función $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$$

es una transformación lineal cuya matriz asociada (en las bases canónicas) es precisamente A .

Supongamos que \mathbf{u} es un autovector de A con autovalor asociado $\lambda \neq 0$. En tal caso,

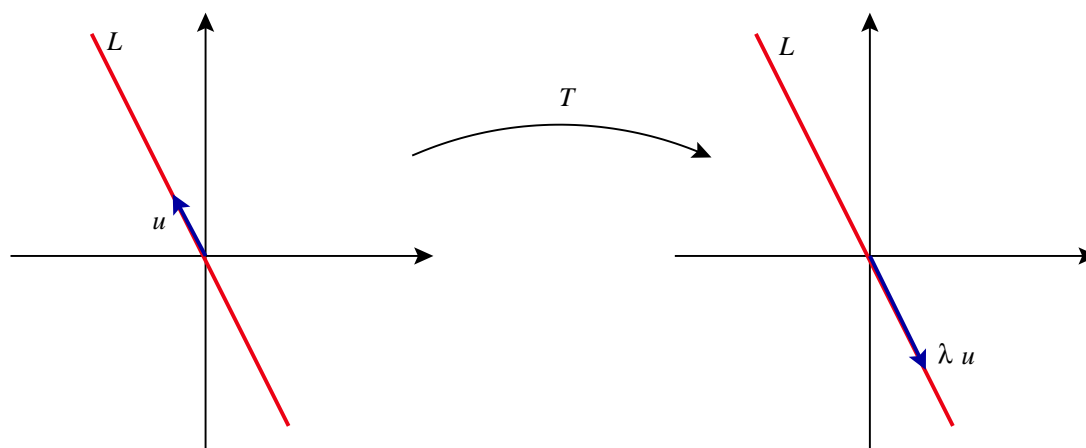
$$T(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$$

Esto nos dice que

$$T(\langle \mathbf{u} \rangle) = \langle \mathbf{u} \rangle \quad ^2$$

o sea, T transformó a la recta generada por \mathbf{u} en ella misma. Con esta información únicamente no podemos decir qué pasó con los demás; pero lo que estaba sobre esa recta seguirá estando ahí,

²¿sería esto cierto si fuese $\lambda = 0$?



Es importante notar que, si bien L se transformó en ella misma, sus puntos no quedaron exactamente donde estaban.

En este ejemplo hemos considerado que λ es negativo y eso produjo que u pasara del segundo al cuarto cuadrante aunque -desde luego- sin salirse de L .

En una situación como ésta suele decirse que $L = \langle \mathbf{u} \rangle$ es un subespacio invariante de T . Utilizando esta nomenclatura podemos decir los subespacios generados por autovectores de una matriz A —correspondientes a autovalores no nulos— son subespacios invariantes de la transformación lineal determinada por A .³

Observación

Consideremos una transformación ortogonal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. A pesar de que todavía no tenemos muchas herramientas podemos sacar algunas conclusiones sobre cómo son los autovalores de una de estas transformaciones, asumiendo que los tiene.

Recordemos que las transformaciones ortogonales conservan ángulos y longitudes; luego,

$$\|T(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$$

es decir que, si λ es un autovalor de T y \mathbf{u} un autovector asociado a λ

$$|\lambda| \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$$

lo que implica —dado que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ — que

$$\lambda = \pm 1 \quad 4$$

Como ejemplo de una de estas transformaciones podemos tomar la rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en \mathbb{R}^2 ,

$$T(x, y) = \left(\cos \frac{\pi}{2} x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} y, \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x + \cos \frac{\pi}{2} y \right) = (-y, x)$$

³i.e., $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$

⁴Estamos considerando valores reales únicamente. Si λ pudiese tomar valores complejos, ¿seguiría siendo válido que 1 y -1 son los únicos valores posibles para λ ?

Supongamos que $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es un autovector asociado a $\lambda = 1$, entonces

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

lo que implica que tiene que ser $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y esto es imposible.

Concluimos entonces que $\lambda = 1$ no puede ser autovalor de T .

Si ahora suponemos que $\lambda = -1$ es autovalor de T llegamos a que

$$\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

lo que también implica que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

De modo que los dos únicos posibles valores de λ no resultan ser autovalores.

Conclusión final

T no tiene autovectores ⁵

Observemos que esto es muy razonable dado que T manda cada vector a uno ortogonal a él de forma que ninguno puede quedar sobre la misma recta. Piense en qué ángulo debería hacerse la rotación para que sí tenga autovalores y autovectores *reales*.

Nos ocuparemos de ahora en más de estudiar este tema con el objeto de encontrar resultados que nos permitan calcular autovectores y autovalores de una matriz dada.

Subespacio de autovectores asociado al autovalor λ

Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, si λ es un autovalor de A , llamamos

$$\mathbb{E}_\lambda = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\}$$

El conjunto \mathbb{E}_λ está formado por todos los autovectores de A asociados a λ más el $\mathbf{0}$.

Notemos que

$$\mathbf{u} \in \mathbb{E}_\lambda \iff A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \iff A\mathbf{u} - \lambda\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff (A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \mathbf{u} \in \text{Nu } \tilde{T}$$

siendo \tilde{T} la transformación lineal determinada por la matriz $A - \lambda I$; i.e.,

$$\tilde{T}(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v}$$

En consecuencia,

\mathbb{E}_λ es un subespacio

y se lo llama *subespacio de autovectores asociado a λ* y a veces también *autoespacio asociado a λ* .

⁵Conviene aclarar que lo que no tiene son autovalores *reales*, que son los que nos interesan aquí.

Ejemplo

Volvamos sobre el ejemplo de la página 1. Allí vimos que $\lambda = 3$ y $\lambda = 1$ son autovalores de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculemos los subespacios \mathbb{E}_3 y \mathbb{E}_1 .

► \mathbb{E}_3

Buscamos los $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tales que $A\mathbf{u} = 3\mathbf{u}$. Si denotamos con x, y, z a las coordenadas de \mathbf{u} , se trata de hallar los (x, y, z) que satisfacen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

esto equivale a resolver el sistema

$$\begin{cases} x + z = 3x \\ 2x + y = 3y \\ 3z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

De modo que

$$(x, y, z) \in \mathbb{E}_3 \iff (x, y, z) = (x, x, 2x) = x(1, 1, 2)$$

Por consiguiente,

$$\mathbb{E}_3 = \langle (1, 1, 2) \rangle$$

► \mathbb{E}_1

Ahora buscamos los $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tales que $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Entonces planteamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

que equivale al sistema

$$\begin{cases} x + z = x \\ 2x + y = y \\ 3z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

De modo que

$$(x, y, z) \in \mathbb{E}_1 \iff (x, y, z) = (0, x, 0) = x(0, 1, 0)$$

Por consiguiente,

$$\mathbb{E}_1 = \langle (0, 1, 0) \rangle$$

Obtuvimos de esta forma que \mathbb{E}_1 y \mathbb{E}_3 son subespacios invariantes de $T(x, y, z) = (x+z, 2x+y, 3z)$.

Analizamos un ejemplo más que mostrará que no siempre es cierto que los subespacios \mathbb{E}_λ tienen dimensión 1, como ocurre en el ejemplo anterior. Lo que sí sucede siempre es que $\dim \mathbb{E}_\lambda \geq 1$ por el hecho que los autovectores son –por definición– no nulos.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la simetría respecto del origen; i.e.,

$$T(x, y) = -(x, y)$$

Sin hacer una sola cuenta vemos que $\lambda = -1$ es autovalor de M_T y que su espacio de autovectores asociado

$$\mathbb{E}_\lambda = \mathbb{R}^2$$

con lo cual, $\dim \mathbb{E}_\lambda = 2$.

Cálculo de Autovalores

Consideremos una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ asociada a A ; es decir, $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$.

Supongamos que A tiene un autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ uno de sus autovectores, entonces

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

o, lo que es lo mismo,

$$A\mathbf{u} - \lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

recordando la notación introducida en la página 4, esto nos dice que

$$\mathbf{u} \in \text{Nu } \tilde{T}$$

y, siendo $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, significa que $\tilde{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ no es isomorfismo. De modo entonces que su matriz asociada

$$\tilde{A} = A - \lambda I$$

no es inversible y en consecuencia

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Hemos probado entonces que

Si λ es un autovalor de A , necesariamente debe ser raíz del polinomio

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

al que se denomina **polinomio característico** de la matriz A .

Esto nos da una manera de averiguar quiénes son los autovalores de una matriz dada.

Observación

Conviene tener claro que este polinomio tiene siempre grado n , si la matriz correspondiente es $n \times n$. En consecuencia el polinomio característico va a tener n raíces complejas. Es razonable entonces pensar que, aunque la matriz sea real, sus autovalores y autovectores pueden ser complejos (no reales).

Consideremos por ejemplo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 6$$

Su polinomio característico es

$$\det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & -1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Es claro que A no va a tener autovalores reales. Las dos raíces son

$$\lambda = i \quad \text{y} \quad \lambda = -i$$

Busquemos los autovectores (muy probablemente complejos) asociados a i :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz_1 \\ iz_2 \end{pmatrix}$$

o sea,

$$\begin{pmatrix} -z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz_1 \\ iz_2 \end{pmatrix}$$

de donde,

$$z_1 = iz_2 \quad , \quad z_2 = -iz_1$$

y teniendo presente que $i^2 = -1$, las dos ecuaciones son en realidad la misma

$$z_1 = iz_2$$

con lo cual,

$$\mathbb{E}_i = \{(iz, z) \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Trabajando de igual manera con $-i$ obtenemos

$$\mathbb{E}_{-i} = \{(z, iz) \mid z \in \mathbb{C}\} \quad 7$$

⁶Es la matriz de una de las transformaciones que estudiamos, ¿cuál? Confronte lo hecho antes con esto. ¿Hay contradicción?

⁷Conviene notar que \mathbb{E}_i y \mathbb{E}_{-i} son subespacios del espacio vectorial *complejo* \mathbb{C}^2

Ejemplos

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Cuando comenzamos a tratar este tema comprobamos que $\lambda = 1$ y $\lambda = 3$ son autovalores de A . Ahora sabemos que falta uno, que tiene que ser *real*⁸.

Calculemos

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$$

Luego, el polinomio característico es

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$$

que tiene una raíz doble ($\lambda = 1$) y una raíz simple ($\lambda = 3$). Llegamos así a que A tiene autovalores

$$\lambda = 1 \quad \text{y} \quad \lambda = 3$$

Los correspondientes espacios de autovectores ya fueron calculados.

2. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

Hallamos primero el polinomio característico

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{pmatrix} &= (5-\lambda) \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -6 & -4-\lambda \end{pmatrix} - (-1) \det \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\ &\quad + 3 \det \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 4-\lambda & 2 \end{pmatrix} \\ &= (5-\lambda)[(\lambda-4)(\lambda+4) + 12] + 6(\lambda+4) - 36 \\ &\quad + 3[-12 - 6(\lambda-4)] \\ &= (5-\lambda)(\lambda^2 - 16 + 12) + 6\lambda - 12 + 3(-6\lambda + 12) \\ &= (5-\lambda)(\lambda^2 - 4) - 12\lambda + 24 = (5-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2) - 12(\lambda-2) \\ &= (\lambda-2)[(5-\lambda)(\lambda+2) - 12] = (\lambda-2)(-\lambda^2 + 3\lambda - 2) \\ &= -(\lambda-2)^2(\lambda-1) \end{aligned}$$

Es claro ahora que las raíces de este polinomio son: $\lambda = 1$ (simple) y $\lambda = 2$ (doble).

Veamos quiénes son \mathbb{E}_1 y \mathbb{E}_2 en este caso.

⁸¿por qué?

◆ \mathbb{E}_1

Buscamos todos los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema llegamos a que

$$(x, y, z) = (-3y, y, -3y) = -y(3, -1, 3)$$

por lo tanto,

$$\mathbb{E}_1 = \langle (3, -1, 3) \rangle \quad \text{y entonces} \quad \dim \mathbb{E}_1 = 1$$

◆ \mathbb{E}_2

Buscamos todos los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema vemos que

$$(x, y, z) = (2y + 2z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(2, 0, 1)$$

con lo cual,

$$\mathbb{E}_2 = \langle (2, 1, 0), (2, 0, 1) \rangle \quad \text{y entonces} \quad \dim \mathbb{E}_2 = 2$$

En este caso las dimensiones de los subespacios \mathbb{E}_λ coinciden con las respectivas multiplicidades de los autovalores.

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una rotación de ángulo θ . Su matriz asociada (en las bases canónicas) es

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

En la observación de la página 3 analizamos el caso $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ahora vamos a analizar la situación general de una rotación en el plano.

Busquemos sus autovalores. Sabemos que, por ser una transformación ortogonal, sólo 1 o -1 pueden llegar a ser autovalores *reales* de A .

Veamos si $\lambda = 1$ es autovalor de T . Para serlo es necesario que exista un $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$$

Se trata entonces de ver si existe un $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta = x \\ x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta = y \end{cases} \iff \begin{cases} (\cos \theta - 1)x - y \operatorname{sen} \theta = 0 \\ x \operatorname{sen} \theta + (\cos \theta - 1)y = 0 \end{cases}$$

La única forma en que este sistema pueda tener una solución no nula (como necesitamos) es que el determinante de la matriz asociada sea nulo, es decir

$$\det \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta - 1 \end{pmatrix} = 0$$

o sea,

$$(\cos \theta - 1)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta = 0$$

pero esto sólo puede ocurrir si

$$\cos \theta = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \theta = 0$$

es decir,

$$\theta = 0$$

Concluimos entonces que, entre todas las rotaciones T del plano, la única que admite a $\lambda = 1$ como autovalor es la que corresponde al ángulo $\theta = 0$. Esta rotación es simplemente la identidad,

$$T(x, y) = (x, y)$$

que evidentemente tiene a 1 como autovalor y $\mathbb{E}_1 = \mathbb{R}^2$.

Consideremos finalmente $\lambda = -1$. Trabajando como en la situación anterior llegamos a que la condición para que sea autovalor es que

$$(\cos \theta + 1)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta = 0$$

lo que sólo puede ocurrir si

$$\cos \theta = -1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \theta = 0$$

es decir,

$$\theta = \pi$$

Conclusión: la única rotación T que tiene a $\lambda = -1$ como autovalor es la que corresponde a $\theta = \pi$, con lo cual

$$T(x, y) = (-x, -y) = (-1)(x, y)$$

Se deduce inmediatamente que $\mathbb{E}_{-1} = \mathbb{R}^2$ para esta transformación.

De ahora en más nos vamos a ocupar de analizar, a partir de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dada, cuándo será posible conseguir una base de \mathbb{R}^n formada *exclusivamente* por autovectores de A . Para lograrlo tendremos que dar primero algunos resultados.

Proposición

Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ autovalores *distintos* de A y sean $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ autovectores asociados, respectivamente, a los autovalores anteriores. Entonces,

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$$

es linealmente independiente.

DEMOSTRACIÓN:

Caso 1: $m = 2$

Supongamos que $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Tenemos que probar que $a_1 = a_2 = 0$. Si multiplicamos por A ,

$$\mathbf{0} = A \cdot \mathbf{0} = A(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) = a_1A\mathbf{v}_1 + a_2A\mathbf{v}_2 = a_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{v}_2$$

Entonces,

$$\begin{cases} a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \\ a_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \end{cases}$$

Si multiplicamos miembro a miembro la primera ecuación por λ_2

$$\begin{cases} \lambda_2 a_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 a_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \\ a_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \end{cases}$$

restándola de la segunda nos queda

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$$

y esto implica que

$$a_1 = 0$$

dado que los autovalores son distintos y \mathbf{v}_1 no puede valer cero por ser autovector. Si ahora volvemos a la ecuación

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

resulta que

$$a_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

de donde $a_2 = 0$.

Esto muestra que \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 son linealmente independientes.

Caso 2: vamos a suponer que el resultado es válido para $m - 1$ autovalores y demostraremos que entonces debe serlo también para m .

Tenemos entonces como hipótesis que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}\}$ son linealmente independientes y vamos a probar que también lo son $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}, \mathbf{v}_m\}$.

Supongamos que

$$a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_{m-1}\mathbf{v}_{m-1} + a_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

imitando lo hecho en el caso 1, multiplicamos por A

$$a_1 A \mathbf{v}_1 + \cdots + a_{m-1} A \mathbf{v}_{m-1} + a_m A \mathbf{v}_m = A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

siendo $A \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$,

$$a_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \mathbf{v}_{m-1} + a_m \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

tenemos entonces,

$$\begin{cases} a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_{m-1} \mathbf{v}_{m-1} + a_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0} \\ a_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \mathbf{v}_{m-1} + a_m \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0} \end{cases}$$

multiplicamos la primera ecuación por λ_m

$$\begin{cases} \lambda_m a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m a_{m-1} \mathbf{v}_{m-1} + \lambda_m a_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0} \\ a_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_{m-1} \lambda_{m-1} \mathbf{v}_{m-1} + a_m \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0} \end{cases}$$

restándola de la segunda nos queda

$$a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \mathbf{v}_1 + \cdots + a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \mathbf{v}_{m-1} = \mathbf{0}$$

y como estamos suponiendo que los $m-1$ primeros autovectores son linealmente independientes resulta

$$a_1 (\lambda_1 - \lambda_m) = 0 \quad \dots \quad a_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) = 0$$

de donde necesariamente se deben anular los a_i ($i = 1, \dots, m-1$). De modo que, volviendo a la primera ecuación

$$a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_{m-1} \mathbf{v}_{m-1} + a_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

deducimos que

$$a_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

y entonces también $a_m = 0$; de esta forma, todos los autovectores \mathbf{v}_i son linealmente independientes.

Caso general:

Sabemos, por el caso 1, que \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 son linealmente independientes. Ahora consideramos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Como los dos primeros son independientes, el caso 2 nos permite afirmar que también los son

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$$

Sabiendo esto, consideramos ahora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$. Siendo los tres primeros independientes, de nuevo por el caso 2, también lo son

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$$

Y esta argumentación podemos reiterarla hasta completar los m autovectores.⁹

⁹El método empleado en esta demostración se conoce como *Inducción Matemática*

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalor de A . Entonces, si denotamos

$$m_\lambda = \text{multiplicidad de } \lambda \text{ como raíz del polinomio característico}$$

se tiene

$$1 \leq \dim \mathbb{E}_\lambda \leq m_\lambda$$

DEMOSTRACIÓN:

Daremos únicamente la demostración de la primera desigualdad y mencionaremos una muy breve idea de la demostración de la otra.¹⁰

Con respecto a la primera, basta recordar que para que λ sea autovalor de A es necesario que exista un autovector \mathbf{u} que por definición debe ser no nulo; por lo tanto,

$$\langle \mathbf{u} \rangle \subset \mathbb{E}_\lambda$$

y en consecuencia,

$$\dim \mathbb{E}_\lambda \geq 1$$

Con respecto a la segunda desigualdad, se muestra que el polinomio característico se puede escribir en la forma

$$\det(A - tI) = (t - \lambda)^{\dim \mathbb{E}_\lambda} P(t)$$

para un cierto polinomio P .

Y como esto dice que la multiplicidad de λ debe ser mayor o igual que el exponente de $t - \lambda$, queda probada la afirmación.

Proposición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que todas las raíces de su polinomio característico son reales. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ todos autovalores distintos de A . Entonces, son equivalentes

- (i) A tiene n autovectores linealmente independientes
- (ii) $\dim \mathbb{E}_{\lambda_i} = m_{\lambda_i}$ para todo $i = 1, \dots, k$

DEMOSTRACIÓN:

$$\underline{(i) \implies (ii)}$$

El teorema anterior nos asegura que

$$\dim \mathbb{E}_{\lambda_i} \leq m_{\lambda_i}$$

para todo i . Supongamos, razonando por el absurdo, que hay un j para el cual,

$$\dim \mathbb{E}_{\lambda_j} < m_{\lambda_j}$$

¹⁰Una demostración completa de este hecho se puede ver en el Apéndice II

Como todo autovector tiene que estar en alguno de los subespacios \mathbb{E}_{λ_i}

$$n \underset{\substack{= \\ \uparrow \\ \mathbb{E}_\alpha \cap \mathbb{E}_\beta = \mathbb{0} \text{ si } \alpha \neq \beta}}{\quad} \dim \mathbb{E}_{\lambda_1} + \cdots + \dim \mathbb{E}_{\lambda_k} \underset{\substack{< \\ \uparrow \\ \dim \mathbb{E}_{\lambda_j} < m_{\lambda_j}}}{\quad} m_{\lambda_1} + \cdots + m_{\lambda_k} = n$$

lo que es absurdo y provino de suponer que una de las dimensiones era distinta de la multiplicidad correspondiente; luego,

$$\dim \mathbb{E}_{\lambda_i} = m_{\lambda_i} \quad (\text{para todo } i = 1, \dots, k)$$

$$\underline{(ii) \implies (i)}$$

Basta tomar una base de cada \mathbb{E}_{λ_i} dado que dos de ellos sólo se intersecan en el cero debido a la independencia lineal de los autovectores que corresponden a autovalores distintos.

Ejemplo

Consideremos la matriz del ejemplo 2 de la página 8. Ahí obtuvimos que A tenía dos autovalores: uno simple y otro doble; pero en ambos casos la dimensión del espacio de autovectores y la multiplicidad del autovalor correspondiente coincidían. Con lo cual A tiene 3 autovectores linealmente independientes:

$$\{(3, -1, 3), (2, 1, 0), (2, 0, 1)\}$$

y constituyen en consecuencia una base de \mathbb{R}^3 formada por autovectores de A .

Corolario

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene n autovalores reales distintos, tiene n autovectores linealmente independientes.

Basta notar que en tal caso se cumple

$$\dim \mathbb{E}_\lambda = 1 = m_\lambda$$

para todo autovalor λ .

Matrices Semejantes

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Decimos que A y B son *semejantes* si existe una matriz inversible $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$B = C^{-1}AC$$

o, equivalentemente,

$$CB = AC$$

Observación

Que A sea semejante a B es equivalente a que B sea semejante a A . Basta simplemente cambiar C por C^{-1} .

Proposición

Dos matrices semejantes tienen los mismos autovalores.

DEMOSTRACIÓN:

Sean A y B semejantes. Vamos a probar que tienen el mismo polinomio característico; con lo cual, en particular, tendrán los mismos autovalores.

Sabemos que existe C inversible tal que $B = C^{-1}AC$. Entonces,

$$\begin{aligned} \det(B - tI) &= \det(C^{-1}AC - tI) = \det(C^{-1}AC - tC^{-1}C) = \det(C^{-1}AC - tC^{-1}IC) \\ &= \det(C^{-1}AC - C^{-1}(tI)C) = \det(C^{-1}(A - tI)C) = \det(C^{-1}) \det(A - tI) \det C \\ &= \det(A - tI) \end{aligned}$$

Matriz diagonalizable

Una matriz A se dice **diagonalizable** si existe una matriz diagonal real semejante a ella. Es decir, si existe

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

y una matriz inversible $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$A = CDC^{-1}$$

Observación

Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene n autovectores linealmente independientes: $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ y denotemos por $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a sus respectivos autovalores¹¹.

Sea C la matriz que tiene por columnas a los autovectores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ (en ese orden). Por constituir sus columnas una base de \mathbb{R}^n , esta matriz es inversible. Sea

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

¹¹Por supuesto, puede suceder que $\lambda_i = \lambda_j$ aunque $i \neq j$

Calculemos,

$$\begin{aligned} AC &= A(\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n) = (A\mathbf{u}_1 \ A\mathbf{u}_2 \ \dots \ A\mathbf{u}_n) = (\lambda_1\mathbf{u}_1 \ \lambda_2\mathbf{u}_2 \ \dots \ \lambda_n\mathbf{u}_n) \\ &= (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= CD \end{aligned}$$

Hemos probado entonces el siguiente resultado,

Proposición

Si los autovalores de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son todos reales y tales que para cada uno de ellos su multiplicidad coincide con la dimensión del correspondiente subespacio de autovectores. Entonces, A es diagonalizable y además se tiene

$$A = CDC^{-1}$$

siendo,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad C = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A (contados con su multiplicidad) y cada \mathbf{u}_i es un autovector asociado al autovalor λ_i .

Observación

Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonalizable. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus autovalores y supongamos que λ_1 tiene multiplicidad $k > 1$.¹²

Sabemos que existe una matriz inversible C tal que

$$A = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{k+1} & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1}$$

¹²i.e., $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ no son todos distintos

Se tiene

$$A - \lambda_1 I = C \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 - \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{k+1} - \lambda_1 & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda_n - \lambda_1 \end{pmatrix} C^{-1}$$

Llamemos B a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{k+1} - \lambda_1 & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda_n - \lambda_1 \end{pmatrix}$$

que tiene sus k primeras filas nulas y el resto no nulas porque estamos suponiendo que k es la multiplicidad de λ_1 con lo cual, ninguno de los otros λ_i puede ser igual a λ_1 . Entonces,

$$A - \lambda_1 I = CBC^{-1}$$

Si buscamos el subespacio de autovectores asociado a λ_1 , se trata de resolver el sistema

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

es decir,

$$CBC^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Llamemos $\mathbf{v} = C^{-1}\mathbf{u}$. Obtenemos así el sistema

$$B \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

La dimensión del espacio de soluciones tanto de (1) como de (2) es la misma porque C es una matriz inversible. Si en sistema (2) reemplazamos B obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{k+1} - \lambda_1 & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda_n - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y entonces es claro que se puede expresar como el conjunto de soluciones de

$$\begin{cases} (\lambda_{k+1} - \lambda_1)v_{k+1} = 0 \\ \vdots \\ (\lambda_n - \lambda_1)v_n = 0 \end{cases}$$

Recordando que $\lambda_1 \neq \lambda_i$ para todo $i = k + 1, \dots, n$ llegamos a que la dimensión de este subespacio es

$$n - (n - k) = k$$

Y debido a la equivalencia entre (1) y (2), podemos afirmar que

$$\dim \mathbb{E}_{\lambda_1} = k = m_{\lambda_1}$$

Lo que hicimos para λ_1 vale para cualquier autovalor múltiple. De modo que hemos probado el siguiente resultado

Proposición

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonalizable y tiene un autovalor múltiple λ , entonces

$$\dim \mathbb{E}_{\lambda} = m_{\lambda} = \text{multiplicidad de } \lambda$$

Las dos últimas proposiciones se pueden resumir en el siguiente teorema

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que todos sus autovalores son números reales. Entonces son equivalentes

- (i) A es diagonalizable
- (ii) $\dim \mathbb{E}_{\lambda} = m_{\lambda}$ para todo autovalor λ

Corolario

Si el polinomio característico de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene n raíces reales distintas, A es diagonalizable.

Ejemplos

1. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculemos los autovalores,

$$0 = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 4 \\ 3 & 2-t & -1 \\ 2 & 1 & -1-t \end{pmatrix} = (1-t)[(t-2)(t+1)+1] + [-3(t+1)+2] + 4[3+2(t-2)]$$

es decir, son las raíces del polinomio

$$-(t-1)(t-2)(t+1)+1-t-3(t+1)+2+4(2t-1) = -(t-1)(t-2)(t+1)+1-t-3t-3+2+8t-4$$

que se puede escribir en la forma

$$-(t-1)(t-2)(t+1)+4t-4 = -(t-1)(t-2)(t+1)+4(t-1) = (t-1)[4-(t-2)(t+1)] = 0$$

por lo tanto las raíces son

$$t = 1, -2, 3$$

Siendo todas las raíces reales y simples sabemos que A es diagonalizable ya que seguro se cumple

$$\dim \mathbb{E}_\lambda = 1 = m_\lambda$$

para todos los autovalores.

Hallemos ahora los autovectores correspondientes.

Para $\lambda = 1$

$$(A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o sea,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que equivale a

$$\begin{cases} -y + 4z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

resolviendo este sistema vemos que

$$\mathbb{E}_1 = \langle (1, -4, -1) \rangle$$

Para $\lambda = -2$

$$(A + 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o sea,

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que equivale a

$$\begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

resolviendo este sistema vemos que

$$\mathbb{E}_{-2} = \langle (-1, 1, 1) \rangle$$

Para $\lambda = 3$

$$(A - 3I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o sea,

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que equivale a

$$\begin{cases} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

resolviendo este sistema vemos que

$$\mathbb{E}_3 = \langle (1, 2, 1) \rangle$$

Finalmente podemos afirmar que la matriz diagonal semejante a A es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y entonces,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} C^{-1}$$

siendo C la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de esta matriz, es decir, las raíces de la ecuación

$$\det(A - tI) = 0$$

son -1 (doble) y 8 (simple). Los correspondientes espacios de autovectores son

$$\mathbb{E}_{-1} = \langle (0, 2, -1), (-1, 2, 0) \rangle, \quad \mathbb{E}_8 = \langle (2, 1, 2) \rangle$$

Como en ambos casos se cumple que la dimensión de \mathbb{E}_λ coincide con la multiplicidad de λ podemos afirmar que A es diagonalizable, siendo la matriz diagonal semejante

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} C^{-1}$$

siendo C la matriz

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Es claro que A tiene un único autovalor con multiplicidad 2. ¹³

Calculemos \mathbb{E}_2 ,

$$(A - 2I)\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

¹³¿por qué podemos asegurar esto sin hacer ninguna cuenta?

es decir,

$$\mathbb{E}_2 : y = 0$$

Entonces,

$$\dim \mathbb{E}_2 = 1 < 2 = m_2$$

Por los resultados vistos podemos asegurar que no es diagonalizable.

Pero también podríamos comprobarlo de la siguiente manera. Si A fuese diagonalizable existiría una matriz inversible C tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A = C \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C^{-1} = C 2I C^{-1} = 2C C^{-1} = 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

lo que claramente es falso.

Diagonalización Ortogonal de Matrices Simétricas

Acabamos de ver que, bajo ciertas circunstancias, una matriz A resulta semejante a una matriz diagonal. Es decir, existe una matriz *inversible* C tal que

$$A = CDC^{-1}$$

donde D es la matriz (diagonal) que tiene los autovalores de A en su diagonal.

Vamos a ver ahora que hay un conjunto de matrices que tienen una propiedad más fuerte que ésta: *existe una matriz ortogonal* P tal que

$$A = PDP^t$$

siendo D como antes.

Antes tendremos que ver algunos resultados que nos permitirán llegar a esa conclusión.

Lema:

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$.¹⁴ Entonces,

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A^t\mathbf{v} \rangle$$

DEMOSTRACIÓN:

$$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + \dots + a_{1n}u_n \\ a_{21}u_1 + \dots + a_{2n}u_n \\ \vdots \\ a_{n1}u_1 + \dots + a_{nn}u_n \end{pmatrix}$$

¹⁴ver Apéndice I

y

$$A^t \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ & & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n \\ a_{12}v_1 + \dots + a_{n2}v_n \\ \vdots \\ a_{1n}v_1 + \dots + a_{nn}v_n \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= (a_{11}u_1 + \dots + a_{1n}u_n)\bar{v}_1 + \dots + (a_{n1}u_1 + \dots + a_{nn}u_n)\bar{v}_n \\ &= a_{11}u_1\bar{v}_1 + \dots + a_{1n}u_n\bar{v}_1 \\ &\quad + a_{21}u_1\bar{v}_2 + \dots + a_{2n}u_n\bar{v}_2 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_{n1}u_1\bar{v}_n + \dots + a_{nn}u_n\bar{v}_n \\ &= (a_{11}\bar{v}_1 + \dots + a_{n1}\bar{v}_n)u_1 + \dots + (a_{1n}\bar{v}_1 + \dots + a_{nn}\bar{v}_n)u_n \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ a_{ij} \in \mathbb{R}}}{=} u_1 \overline{(a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n)} + \dots + u_n \overline{(a_{1n}v_1 + \dots + a_{nn}v_n)} \\ &= \langle \mathbf{u}, A^t \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

De modo que,

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A^t \mathbf{v} \rangle$$

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica. Entonces todas las raíces del polinomio característico son reales.

DEMOSTRACIÓN:

Sea λ una raíz de la ecuación característica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

En principio, $\lambda \in \mathbb{C}$ y en consecuencia si \mathbf{v} es un autovector de A asociado a λ ,

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

sólo podemos asegurar que $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$.

Si aplicamos el lema anterior con $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ tenemos que

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, A^t \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle$$

por ser A simétrica. Calculemos cada miembro de esta igualdad

$$\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \|\mathbf{v}\|^2$$

y

$$\langle v, A\mathbf{v} \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \bar{\lambda} \|\mathbf{v}\|^2$$

con lo cual,

$$\lambda \|\mathbf{v}\|^2 = \bar{\lambda} \|\mathbf{v}\|^2$$

y siendo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ esto implica que

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

lo que dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ como queríamos demostrar.

Antes vimos que los autovectores correspondientes a autovalores distintos eran linealmente independientes. Para matrices simétricas tenemos un resultado más fuerte

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica. Entonces, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son autovalores de A y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ son autovectores, respectivamente, de λ_1 y λ_2

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$$

DEMOSTRACIÓN:

Apelando de nuevo al lema tenemos

$$\langle A\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 \rangle$$

que, por ser ahora vectores reales se escribe en la forma

$$A\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot A\mathbf{v}_2$$

Teniendo en cuenta que son autovectores

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$$

o sea,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$$

lo que implica

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$$

dado que los autovalores son distintos.

Diagonalización Ortogonal

Dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ decimos que es *diagonalizable ortogonalmente* si existe una matriz ortogonal $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$D = P^t A P$$

es diagonal.

Los elementos de la diagonal de D son los autovalores de A .

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces,

A es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si A es simétrica

DEMOSTRACIÓN:

\Rightarrow

Sea P ortogonal tal que

$$D = P^t A P$$

es diagonal. Por ser ortogonal, $P^{-1} = P^t$; entonces,

$$A = P D P^t$$

y en consecuencia,

$$A^t = (P D P^t)^t = (P^t)^t D^t P^t = P D P^t = A$$

\Leftarrow

Sólo hace falta mostrar que para todo autovalor λ de A

$$\dim \mathbb{E}_\lambda = m_\lambda$$

Omitimos esta demostración porque escapa al nivel del curso.

Observación

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no necesariamente todos distintos) son sus autovalores, sabemos que existe una base ortonormal de \mathbb{R}^n formada por autovectores de A . Si llamamos $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ a esta base y suponemos que están ordenados de modo que

$$A \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i \quad (\text{para cada } 1 \leq i \leq n)$$

resulta

$$A = PDP^t$$

siendo

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_n)$$

Ejemplo

Dada la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

vamos a encontrar D y P .

Calculemos primero los autovalores de A :

$$\det(A - tI) = 0$$

es decir,

$$(t - 2)(t - 3) - 2 = 0 \iff t^2 - 5t + 4 = 0$$

cuyas raíces son: $t = 1$ y $t = 4$.

Ahora encontramos autovectores para cada uno de estos autovalores

Para $t = 1$,

$$(A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tenemos

$$\mathbb{E}_1 = \langle (-\sqrt{2}, 1) \rangle$$

Para $t = 4$

$$(A - 4I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tenemos

$$\mathbb{E}_4 = \langle (\sqrt{2}, 2) \rangle$$

Sabemos que estos generadores de \mathbb{E}_1 y \mathbb{E}_4 son ortogonales –por ser A simétrica– pero no tienen norma 1.

Sean entonces,

$$\mathbf{u}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \mathbf{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$$

Finalmente,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

y la matriz A se escribe en la forma

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Aplicación

Vamos a utilizar los cálculos hechos en el ejemplo anterior para averiguar qué representa geoméricamente la ecuación

$$2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy = 1$$

El primer término de la ecuación es un polinomio (en dos variables) con la particularidad de tener todos sus monomios de grado 2¹⁵. A este tipo de polinomios se los puede escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

para alguna matriz simétrica A . En nuestro caso esa matriz es precisamente la del ejemplo anterior. De modo que

$$2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y por lo tanto,

$$2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy = 1 \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Teniendo en cuenta lo hecho en el mencionado ejemplo podemos decir que

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy = 1 &\iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \\ &\iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} P D P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \\ &\iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \\ &\iff \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 1 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff u^2 + 4v^2 = 1 \end{aligned}$$

Lo que hicimos para lograr la transformación de una ecuación e otra fue aplicarle a los (x, y) la transformación lineal que tiene por matriz a P^t ; i.e.,

$$T(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y, \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y \right)$$

¹⁵a estos polinomios se los llama *formas cuadráticas*

que resulta ser una transformación ortogonal y por las conocidas propiedades de estas transformaciones sabemos que no va a modificar la *forma* de la curva que representa la ecuación dada.

Por lo tanto,

$$2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy = 1$$

tendrá la misma forma que

$$u^2 + 4v^2 = 1$$

sólo que estará ubicada en otro lugar del plano.

Intentemos analizar cuál es el efecto que produce aplicar T . Notemos en principio que T no es una rotación, dado que su determinante es -1 y las rotaciones tienen determinante 1 . Pero sí está relacionada con una rotación. Veamos en qué forma

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y, \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-x) + \frac{1}{\sqrt{3}}y, -\frac{1}{\sqrt{3}}(-x) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-x) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)y, -\frac{1}{\sqrt{3}}(-x) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y \right) \\ &= (\cos \theta (-x) - \operatorname{sen} \theta y, \operatorname{sen} \theta (-x) + \cos \theta y) \\ &= R_\theta(-x, y) \quad = \quad R_\theta \circ S(x, y) \\ &\quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad \quad \quad S(x,y)=(-x,y) \end{aligned}$$

donde $\theta = \pi + \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ y R_θ indica la rotación de ángulo θ alrededor del origen en sentido antihorario.

De modo entonces que la ecuación

$$u^2 + 4v^2 = 1$$

representa la misma curva que

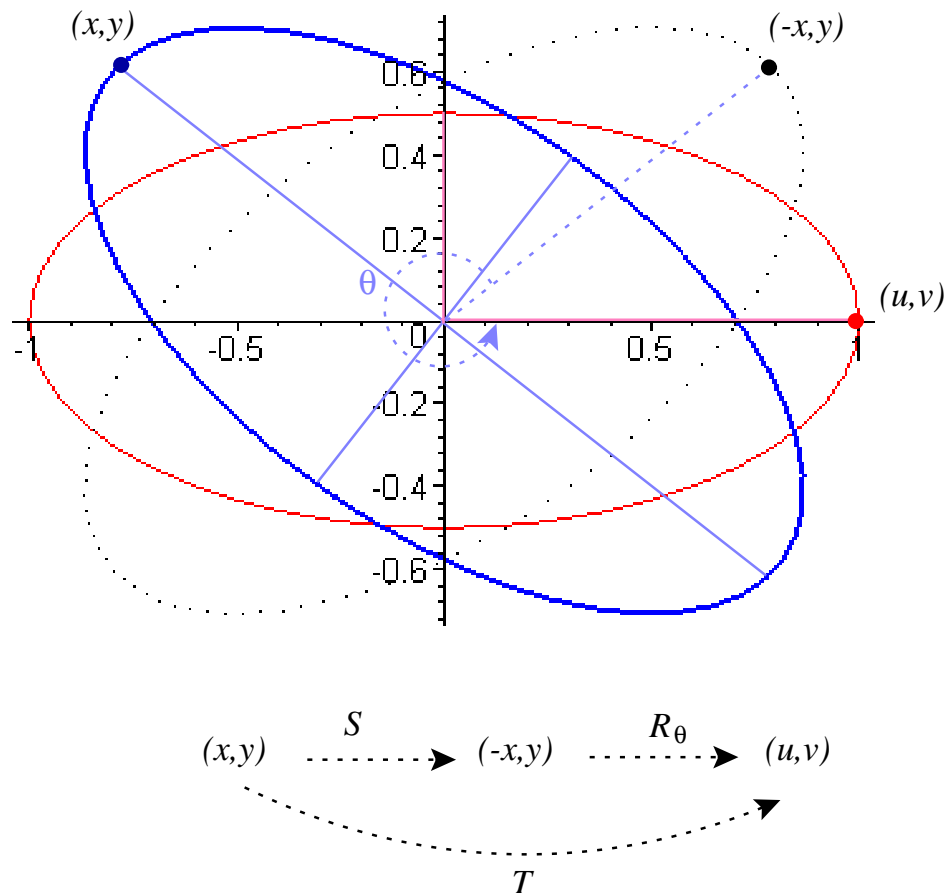
$$2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy = 1$$

sólo que transformada por una simetría seguida de una rotación alrededor del origen. Por lo tanto podemos asegurar que

$$2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy = 1$$

es una elipse.

La siguiente figura ilustra este hecho



S : simetría respecto del eje y

R_θ : rotación

$T = R_\theta \circ S$

La elipse azul es la dada, la punteada representa su imagen luego de aplicarle la simetría S y la elipse roja representa la rotación de la punteada en el ángulo θ y es también la imagen de la original por la transformación T .

Los dos segmentos celestes son los ejes de la elipse dada que tienen las direcciones de los autovectores asociados a los autovalores 1 y 4.

Por último mencionemos que este trabajo nos da también una forma fácil de hallar una parametrización de la elipse dada.

En efecto, es simple encontrar las ecuaciones paramétricas de $u^2 + 4v^2 = 1$

$$\begin{cases} u = \cos t \\ v = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

y como sabemos que la relación entre los puntos de una y otra elipse está dada por

$$(u, v) = T(x, y)$$

deducimos que

$$(x, y) = T^{-1}(u, v)$$

y siendo P la matriz asociada a T^{-1} podemos asegurar que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

lo que nos dice que

$$\begin{cases} x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cos t + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{sen} t \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t + \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{sen} t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

son las ecuaciones paramétricas de la elipse de ecuación

$$2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy = 1$$

NOTA: el gráfico anterior lo hicimos utilizando el programa Maple y para ello nos resultó muy útil contar con las ecuaciones paramétricas de esta elipse.

APÉNDICE I

Un espacio vectorial complejo: \mathbb{C}^n

Cuando definimos la noción de espacio vectorial dijimos que los escalares eran números reales. Si volvemos a repasar estos conceptos notaremos que no hay ningún inconveniente en extender estas ideas a los números complejos. Claro está que si a los elementos de \mathbb{R}^n los multiplicamos, por ejemplo por el escalar i , la n -upla dejará de estar en \mathbb{R}^n ; es decir, \mathbb{R}^n no es un espacio vectorial complejo.

Pero \mathbb{C} , que claramente es un espacio vectorial real (de dimensión 2), se puede también considerar un espacio vectorial complejo. Sólo que en este caso su dimensión *compleja* ya no es 2; es 1 pues todo $z \in \mathbb{C}$ se puede escribir en la forma

$$z = z \cdot 1$$

es decir,

$$\mathbb{C} = \langle 1 \rangle$$

donde las combinaciones lineales ahora se toman con escalares complejos.

Definimos

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq n\} = \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$$

Se define la suma y el producto por escalar (con escalares complejos) de manera enteramente análoga al caso \mathbb{R}^n . Con estas operaciones \mathbb{C}^n se convierte en un *espacio vectorial complejo* con dimensión *compleja* n . El conjunto

$$\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$$

es una base de este espacio

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) = z_1(1, 0, \dots, 0) + z_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + z_n(0, \dots, 0, 1)$$

Se define un producto escalar (llamado producto interno) entre vectores de \mathbb{C}^n como el número (complejo)

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n$$

Notemos que, definido de esta forma, resulta

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$$

tal como sucede en el caso real. Si lo hubiéramos definido *sin el conjugado en el segundo factor* el producto escalar de una n -upla con ella misma ni siquiera sería un número real. Además, identificando a \mathbb{C}^n con \mathbb{R}^{2n} ¹⁶, resulta que la noción de distancia inducida por este producto interno (o escalar) coincide con la definida en \mathbb{R}^{2n} .

Tiene las mismas propiedades de linealidad (respecto de la suma) que el producto escalar en \mathbb{R}^n pero en lo referido a escalares se tiene

$$\langle \lambda(z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = \lambda \langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle$$

¹⁶la upla $(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$ se identifica con $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$

y

$$\langle (z_1, \dots, z_n), \lambda(w_1, \dots, w_n) \rangle = \bar{\lambda} \langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle$$

También hay una modificación en la simetría. En \mathbb{R}^n el producto escalar es conmutativo; en \mathbb{C}^n no, lo que vale es

$$\langle (w_1, \dots, w_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle = \overline{\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle}$$

Se define la norma de (z_1, \dots, z_n) por

$$\| (z_1, \dots, z_n) \| = \sqrt{\langle (z_1, \dots, z_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_n \bar{z}_n} = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$$

Es importante observar que cuando $(z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = (z_1, \dots, z_n) \cdot (w_1, \dots, w_n)$$

APÉNDICE II

Multiplicidad de un autovalor — Dimensión de su espacio de autovectores

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y un autovalor λ , vamos a probar que

$$m_\lambda \geq \dim \mathbb{E}_\lambda$$

Para simplificar la notación llamaremos

$$k = \dim \mathbb{E}_\lambda$$

Teniendo presente la definición de multiplicidad de una raíz de un polinomio, bastará probar que el polinomio característico se escribe en la forma

$$\det(A - tI) = (t - \lambda)^k P(t)$$

para algún polinomio P .

Sea $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ una base de \mathbb{E}_λ . Completamos a una base de \mathbb{R}^n con $n - k$ vectores $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$. Entonces,

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

es una base de \mathbb{R}^n . Esto asegura que la matriz B , cuyas columnas son

$$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$$

es inversible. Entonces,

$$\begin{aligned} \det(A - tI) &= \det(B^{-1}(A - tI)B) \\ &= \det\left(B^{-1}\begin{pmatrix} (A - tI)\mathbf{u}_1 & \dots & (A - tI)\mathbf{u}_k & (A - tI)\mathbf{v}_{k+1} & \dots & (A - tI)\mathbf{v}_n \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\left(B^{-1}\begin{pmatrix} (\lambda - t)\mathbf{u}_1 & \dots & (\lambda - t)\mathbf{u}_k & (A - tI)\mathbf{v}_{k+1} & \dots & (A - tI)\mathbf{v}_n \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\left((\lambda - t)B^{-1}\mathbf{u}_1, \dots, (\lambda - t)B^{-1}\mathbf{u}_k, B^{-1}(A - tI)\mathbf{v}_{k+1}, \dots, B^{-1}(A - tI)\mathbf{v}_n\right) \\ &= (t - \lambda)^k \det\left(B^{-1}\mathbf{u}_1, \dots, B^{-1}\mathbf{u}_k, B^{-1}(A - tI)\mathbf{v}_{k+1}, \dots, B^{-1}(A - tI)\mathbf{v}_n\right) \end{aligned}$$

en virtud de la linealidad del determinante en cada componente. Y como el segundo factor es un polinomio en t , queda probada la afirmación.

NOTA: en la segunda y cuarta igualdad hemos hecho uso de la siguiente propiedad del producto de matrices. Si C y D son dos matrices de $\mathbb{R}^{n \times n}$ y denotamos por D_1, \dots, D_n a las columnas de D , entonces las columnas del producto CD son

$$CD_1 \dots CD_n$$

PROBLEMAS

1. Calcule los autovalores de las siguientes matrices

$$\begin{array}{lll}
 A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & A_7 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} & A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & A_{10} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & & \\
 A_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & A_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} & &
 \end{array}$$

y luego halle los respectivos espacios de autovalores.

NOTA: estas matrices son las mismas del ejercicio 20 de la práctica 8.

2. A partir de los cálculos hechos en el ejercicio 1. determine cuáles de las matrices dadas son diagonalizables y cuáles no lo son y explique el por qué en cada caso. Para las A_i que sean diagonalizables, halle las matrices D_i y C_i que hacen que

$$A_i = C_i D_i C_i^{-1}$$

y calcule $\det(A_i)$.

3. a) Escriba la definición de matriz diagonalizable
 b) Escriba la definición de matriz diagonalizable ortogonalmente
 c) Expresé en sus propias palabras las definiciones anteriores tratando de conservar la precisión de los conceptos
 d) Explique el significado de la afirmación
La noción de diagonalización ortogonal es más fuerte que simplemente la noción de diagonalización

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se sabe que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son autovalores de A y que $\mathbf{u}_i \in \mathbb{E}_{\lambda_i}$ ($\mathbf{u}_i \neq 0$) para $i = 1, 2$. En cada una de las siguientes afirmaciones falta una hipótesis para que sean verdaderas, agréguela

- a) Si, entonces \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 son linealmente independientes.
- b) Si, entonces \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 son ortogonales.
- c) Si, entonces λ_1 y λ_2 son reales.
- d) Si, entonces sus autovalores pueden no ser reales.
- e) Si A es, entonces A es simétrica.
- f) Si A es, entonces A es diagonalizable.
- g) Si A es, entonces A es diagonalizable ortogonalmente.

5. Encuentre una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que no sea diagonalizable.

Sugerencia: si busca bien en *Teoría* va a encontrar una manera de construirla que le evitará hacer cuentas tediosas.

6. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Compruebe que $BC = I$ y que $A = BDC$
- b) Calcule los autovalores de A
- c) Halle los respectivos espacios de autovectores
- d) Calcule A^3
- e) Calcule A^4
- f) ¿Necesitó usar quién era C para responder el item anterior?
- g) ¿Es posible encontrar una base ortonormal de \mathbb{R}^3 formada por autovectores de A ?
En caso de serlo, hállela.

7. Dadas las matrices A y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$$

- a) halle una matriz invertible C tal que $AC = CD$ y compruebe que A y D son semejantes
- b) calcule los autovalores de A , sin hacer cuentas
- c) encuentre una recta \mathbb{L} tal que $T(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$. ¿Es única?
- d) averigüe si existe un plano \mathbb{S} tal que $T(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$. En caso de serlo, podría haber más de uno?
- e) ¿Es A diagonalizable?
- f) ¿Es A ortogonalmente diagonalizable?

8. Dadas la matriz A y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$$

a) Compruebe que A es semejante a $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sugerencia: encuentre una matriz inversible C tal que $AC = CD$

b) Calcule los autovalores de A

c) Encuentre una recta \mathbb{L} tal que $T(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$. ¿Es única?

d) Averigüe si existe un plano \mathbb{S} tal que $T(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$. En caso de serlo, podría haber más de uno?

e) ¿Existe un plano \mathbb{T} tal que $T(\mathbb{T})$ sea una recta? ¿Es único?

f) ¿Es cierto que si \mathbf{u} y \mathbf{v} son dos autovectores de A linealmente independientes entonces $T(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$? ¿Y que $T(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) \subset \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$?

9. Sea $D : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ la derivación. Muestre que la función $f(x) = e^{\alpha x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ fijo) es un autovector de D . ¿Quién es su autovalor asociado?

Enuncie este resultado usando el lenguaje habitual de Cálculo Elemental.

10. Procediendo como en la aplicación de la página 27 muestre que la curva dada por la ecuación

$$xy = 1$$

es una hipérbola. Haga un gráfico aproximado y encuentre las ecuaciones paramétricas de la rama que se encuentra en el primer cuadrante utilizando funciones hiperbólicas.

NOTA: desde luego, en este caso se pueden encontrar ecuaciones paramétricas de la hipérbola completa simplemente a partir de su ecuación, pero se pide que lo haga siguiendo el procedimiento presentado en la aplicación mencionada.

11. Halle una matriz ortogonal P y una diagonal D de modo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

se escriba en la forma

$$A = PDP^t$$

12. Clasifique la cuádrlica

$$S : y^2 - x^2 - z^2 + 2xz = 0$$

haga un esquema gráfico y exhiba las ecuaciones paramétricas de la misma.

¿Qué tipo de transformación le aplicó a S para llevarla a su forma canónica?

Sugerencia: la matriz A del ejercicio 11. le puede servir.