ANÁLISIS MATEMÁTICO (66) GUÍA DEL DOCENTE

PROPUESTA DE TRABAJO EN EL AULA

LA GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS, TIENE UN NUEVO DISEÑO. LA PONDREMOS A PRUEBA DURANTE UN TIEMPO PARA IR AJUSTANDO DETALLES Y CORRIGIENDO ERRORES QUE SEGURAMENTE ENCONTRAREMOS.

El curso de Análisis Matemático A (66), destinado a estudiantes de las carreras de Ciencias Exactas y Naturales (salvo Biología) y de Ingeniería, está diseñado para que sea teórico - práctico.

En el aula debemos procurar un equilibrio adecuado entre la exposición por parte del docente, la discusión entre docente y estudiante y la práctica y consolidación de técnicas y rutinas básicas y fundamentales. También debemos estimular la interacción y discusión entre estudiantes (dentro y fuera del aula) y el planteo y resolución de problemas interesantes.

Las dos primeras prácticas (Preliminares y Funciones Reales) constituyen un repaso y puesta al día de conceptos y destrezas algebraicas que se suponen conocidas por los y las estudiantes (aunque sabemos que no siempre es así). Pongamos énfasis en esos conceptos básicos y destrezas elementales, necesarios en el desarrollo del curso. Contamos con una guía de Preliminares (además de la Práctica 0) para aquellos/as estudiantes que necesiten un refuerzo en estos temas.

A partir de la Práctica de Números Reales, cada parte tiene una estructura que jerarquiza el tipo de ejercicios que se propone:

- **Ejercicios introductorios**: Se presentan los conceptos básicos y elementales de la práctica.
- **Ejercicios de entrenamiento**: Se incorporan y combinan las propiedades de los conceptos introducidos y los resultados que los vinculan.
- **Ejercicios de evaluación**: Han formado parte de evaluaciones o son de nivel equivalente. Se incluyen ejercicios tanto de parciales como de finales con la estructura de opción múltiple.
- **Problemas y Complementos**: Incluyen algunos problemas y temas que son importantes pero que no suelen formar parte de las evaluaciones, salvo indicación expresa de la coordinación de la materia. Tales temas se abordan en el aula en función del tiempo y de la disposición del curso.

Esta jerarquización pretende indicar a los y las estudiantes el énfasis que le tiene que poner a cada tema y a su vez guiarlos en cómo deben organizar el estudio.

Se sugiere hacer uso cotidiano de la Guía de Trabajos Prácticos para brindar una referencia clara y unificada del nivel del curso.

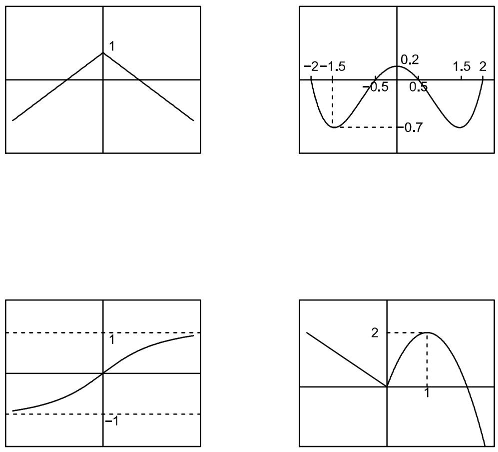
Cuando el equipo docente del aula lo considere oportuno, puede proponer al curso que entreguen ejercicios por ellos resueltos y hacerles una devolución sobre la tarea realizada en la siguiente clase (en la guía figura como "tarea para la casa" y en general hace referencia al Campus donde procuraremos tener dicha tarea). Esta hábito ha demostrado tener muy buenos resultados en el rendimiento del curso.

Clase 1 Práctica 0 - Preliminares

Se pretende que esta práctica sea resuelta por los estudiantes. No obstante ello, después de que los alumnos hayan resuelto varios, se le puede dedicar un tiempo a algunas cuestiones elementales de manejo algebraico y de sentido común tales como:

- Exponentes (**Ej. 1**)
- Factorización (**Ej. 2 y 3**)
- Representación de puntos en el plano (**Ej. 4 y 5**)

Práctica 1 - Funciones reales (Ejercicios 1 a 4)
ERRATA DE LA PRÁCTICA 1: faltan los gráficos del ejercicio 4. Pueden dibujarlos en la clase, son los siguientes



Presentar a las funciones como un lenguaje para describir fenómenos (**Ej. 1**). Trabajaremos solamente con funciones reales a valores reales: $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ver Fascículo 1
Mostrar que el gráfico de una función permite dar una buena descripción del fenómeno que se representa (crecimiento, extremos, puntos notables, etc.: **Ej. 4**). Es por ello que será uno de los objetivos del curso el poder obtener el gráfico de una función a partir de la información de que se disponga. Conviene apoyarse en un ejemplo concreto.
Proponer a los estudiantes hacer el **Ej. 3**. Puede ser instructivo que comparen entre ellos el gráfico que cada uno obtuvo, observando que todos tienen la misma "pinta".
Si queda tiempo, avanzar sobre la Clase 2.

Clase 2 Práctica 1 - Funciones reales *(Ejercicio 5 a 15)*

Las funciones más usuales:

- La **función lineal**. El objetivo es que puedan determinar la ecuación de una recta conociendo:
  - dos puntos del gráfico (**Ej. 5**)
  - la pendiente y un punto del gráfico (**Ej. 6**)
  - el gráfico con información suficiente.

Poner de manifiesto que los modelos lineales son los más sencillos y, por ello, muy importantes. Proponer a los estudiantes que resuelvan el **Ej. 5 (a)** y (**Ej. 6 (c)**).

- La **función cuadrática**. Graficar $f(x) = a(x - x_0)^2 + b$ en ejemplos concretos, variando los parámetros (empiece por los más sencillos). Interprete geométricamente tales parámetros. Describa el gráfico de una función cuadrática (ceros, positividad, crecimiento, extremos, etc.) (**Ej. 8 y 9**).
- **Funciones polinómicas**. Graficar $f(x) = x^n$ para distintos valores de n mostrando cómo varía el gráfico de acuerdo a si n es par o impar y a medida que n crece (**Ej. 10**) .
- Graficar $f(x) = \dfrac{1}{x}$ mostrando las "ramas infinitas" o asíntotas. (**Ej. 11**)
- **Composición**. Mostrar cómo funciona la operación: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. No conviene a esta altura hacer mucha historia con la compatibilidad de dominio e imagen (**Ej. 12**).
- **Función inversa**. Presentarla como solución única de la ecuación $f(x) = y$. No meterse con inyectividad y suryectividad. Gráfico de la inversa (**Ej. 13**).
- La **función raíz cuadrada**. Dominio. Imagen. Gráfico. (**Ej. 14** y **Ej. 15**)

Proponer a los alumnos que hagan solos alguno de la práctica que el docente indique.

Clase 3 Práctica 1 - Funciones reales *(Ejercicio 16 a 22)*

- **Funciones exponenciales y logarítmicas**. Hacer los gráficos. Recordar las propiedades más usadas en la operatoria algebraica (**Ej. 16** al **Ej. 19**).
- **Funciones trigonométricas**. Hacer los gráficos. Dar la imagen. Dedicarle unos minutos al uso de la calculadora para obtener valores de funciones trigonométricas haciendo notar que el dominio de las mismas son los números reales y no los "grados". Mostrar cómo se usan los "modos" de la calculadora. Dar el gráfico de las funciones inversas restringiendo el dominio. Hacer algún comentario de los valores dados por la calculadora en sintonía con la restricción del dominio hecha. (**Ej. 20** al **Ej. 22**)

Clase 4 Práctica 1 - Funciones reales *(Ejercicio 23 a 25)*

- **Otras funciones**. Proponer a los y las estudiantes que hagan el **Ej. 24**. Explicar cómo se leen las fórmulas de las funciones dadas a trozos.
- Complete los temas pendientes de las clases anteriores.
- Consultas con ejercicios propuestos por el docente.

Clase 5 Práctica 2 - Números reales *(Ejercicio 1 a 7)*

Números reales. Seguir básicamente el nivel del Fascículo 1 de Números reales.

- Conjuntos numéricos.
- Representación en la recta numérica (**Ej. 1**)
- Intervalos (**Ej. 2 y 3**)
- Dar la demostración de que $\sqrt{2}$ no es racional. Poner énfasis en el método de reducción al absurdo empleado. Lo usaremos mucho.

- Desarrollos decimales periódicos y no periódicos. Densidad. A nivel informativo. Remitirlos a los ejercicios del **Complemento**.
- Resaltar la importancia de la completitud de los números reales: por ejemplo, si trabajáramos con los racionales el teorema de Bolzano (una función continua que pasa de negativo a positivo necesariamente se anula) no sería cierto. A nivel divulgativo.
- Axiomas de cuerpo. Dar una descripción breve. Hacer notar que los reales y los racionales no se distinguen por los axiomas de cuerpo ordenado. Falta la completitud para distinguir a $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.
- Cotas superiores. Proponer que hagan el **Ej. 4** para los conjuntos A, E y G.
- Supremo e ínfimo. No es necesario dar la caracterización del supremo. Se puede zafar a lo largo del curso, usando la idea de "menor cota superior". (**Ej. 5 a 7**).
- Axioma de completitud. Advertir que este axioma diferencia a los reales de los racionales.
- Enunciar el Principio de Arquímedes. Los números naturales no están acotados.
- Proponer a los estudiantes que consideren los conjuntos del **Ej. 4** y encuentren supremo e ínfimo, si existen, en cada caso. Discutir desde los ejemplos que el supremo e ínfimo pueden o no pertenecer al conjunto.

Tarea para la casa

1. El conjunto $C = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+1}{2x+3} > 1\}$ se puede escribir como un intervalo abierto. Encuentre dicho intervalo y diga cuál es la menor de las cotas superiores.
2. Sea $B = \{\dfrac{3n+1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.
   (a) Demuestre que si $b \in B$, entonces $b < 3$.
   (b) Demuestre que $2,99$ no es cota superior de B.

Clase 6 Práctica 3 - Sucesiones *(Ejercicio 1 a 5)*

Sucesiones. Se puede seguir el Fascículo 2 de *Sucesiones*. Se sugiere presentar algún problema para motivar el tema. En el Fascículo 2 hay dos ejemplos.
Siguiendo la idea del fascículo, presentar varios ejemplos de sucesiones (antes de definir el concepto) y señalar que nos va a interesar estudiar su comportamiento para valores "grandes" de n. Introducir las definiciones y las ideas básicas:

- Definición de sucesión.
- Término general (**Ej. 1** y **Ej. 2**)
- Tipos de representación (en la recta y en el plano)
- La noción de límite
- Mostrar que hay sucesiones que no convergen. Hacer una buena clasificación de lo que se puede esperar (Ver fascículo **pág. 8**). Introducir la notación necesaria. Aclarar que el símbolo usado para indicar "infinito" no es un número y no se puede operar con él alegremente. Mostar ejemplos.

- Dar las **propiedades del límite** más importantes. No es necesario dar las demostraciones. La mayoría de ellas se pueden visualizar geométricamente. Si el público lo aprecia dar la demostración de la conservación de signo (poniendo énfasis en cómo se "traduce" la idea geométrica). Ilustrar con ejemplos que no vale la recíproca de esta propiedad.

- **Álgebra de límites**. Se sugiere no dar las demostraciones. Los tecnicismos pueden oscurecer las ideas. En cambio, ejemplificar. Poner énfasis en que es necesario, para aplicar el álgebra de límites, que los límites sean finitos y sujetos a las restricciones que la operatoria imponga. Mostar que, sin embargo hay situaciones no contempladas en el enunciado de álgebra de límites, que valen. Por ejemplo:

  Infinito por infinito = infinito, Infinito dividido cero = infinito, etc.

- **Indeterminaciones**. Mostrar algunas situaciones donde el álgebra de límites no puede ser utilizado directamente. (**Ej. 3 y 4**). Aclarar que decir que "tenemos una indeterminación" no es una solución a un cálculo de límite (sólo es un diagnóstico). Nos indica que tendremos que desarrollar alguna estrategia algebraica para poder calcular el límite ("salvar la indeterminación"). En este sentido, estudiar el cociente de polinomios y las situaciones que se pueden atacar multiplicando por la expresión conjugada. En el caso de cocientes de polinomios, resolver los límites sacando factor común en el numerador y en el denominador las respectivas potencias mayores para no perder el signo. Por ejemplo, calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+3}{3-n^2}$ sacando n^3 en el numerador y n^2 en el denominador.

- Hacer notar la diferencia entre la propiedad "0 por acotada = 0" y la indeterminación "0 por infinito".

Clase 7 Práctica 3 - Sucesiones *(Ejercicio 6 a 14 - 1 hora)*

Ejercitar las técnicas presentadas la clase anterior:

- Comparar potencias (enteras o fraccionarias) en cocientes de expresiones polinómicas o algebraicas. (**Ej. 6 y 7**)

- "Racionalizar" raíces cuadradas. (**Ej. 8**)

- Determinar parámetros en cálculo de límites (**Ej. 9, 10 y 11)**

Práctica 3 - Sucesiones (Ejercicio 15 a 19 - 2 horas)
Sigue siendo útil usar el apunte.

- Dar el teorema de las **sucesiones monótonas**. Se puede hacer a demostración (Anexo B) aunque alcanza para convencerse con un buen gráfico

- Estudiar $a_n = r^n$. Mostrar la utilidad de estudiar el cociente de D'Alembert para determinar la monotonía de una sucesión de términos positivos.

- Para estudiar $a_n = \sqrt[n]{n}$ y mostrar que tiende a 1 (como está en la pág 27) conviene estudiar primero $b_n = \dfrac{r^n}{n}$ para $r > 1$. Hacer en detalle el **Ej. 15 g** o similar.

- El **número** e. Ver el apunte. Proponer a los alumnos que resuelvan algún límite del **Ej. 16**.

- Dar el **criterio del cociente** y el **de la raíz enésima**. No hace falta dar una demostración. Se retomará cuando demos Series. Dar ejemplos (**Ej. 17**)

Tarea para la casa; adicionales 3 subidos al campus en la actividad 3

Clase 8 Práctica 3 - Sucesiones *(Ejercicio 20 a 30)*

Proponer y discutir con el curso una selección de ejercicios de evaluación. Se sugiere elegir entre **Ej. 21 - 22 - 23 - 25 - 27**
Complementos (si el tiempo lo permite)

- Presentar las **subsucesiones** (Anexo F). Usarlas para mostrar que ciertas sucesiones no tienen límite. (**Ej. 32**). La propiedad de que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente se puede postergar para cuando demos funciones continuas en intervalos cerrados.

- **Sucesiones recurrentes**. Resolver alguno de los problemas propuestos como motivadores en la clase 6. Mostar en detalle cómo hacemos uso del teorema de las sucesiones monótonas.

Clase 9 *Práctica 4 (Ejercicio 1 a 4)*

Límite de funciones

- **Límites en el infinito**. Extender los conceptos y propiedades conocidos para sucesiones para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$. Mostrar que la información que da el valor del límite en el infinito es útil para empezar a dibujar el gráfico de una función. Por ejemplo, a partir de $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ y de que $f(x) = 0$ cada vez que $\cos x = 0$ se puede obtener un gráfico bastante aproximado.(**Ej. 1 y 2**).

- **Límite en un punto**. A partir de gráficos introducir la notación de límite lateral (**Ej. 3**). Después de algunos ejemplos que se pueden acompañar de un gráfico, dar la definición de $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y de $\lim_{x\to a} f(x) = l$. En ambos casos dar la interpretación geométrica. Anunciar que el álgebra de límites, usado para sucesiones, se adapta para el límite de funciones.

- Proponer a los estudiantes que hagan los **Ej. 3g)** y **4f)**.

- Escribir, en algunos ejemplos de límite que se hagan, las ecuaciones de las **asíntotas** horizontales y/o verticales que aparezcan. Por ejemplo, dada la función $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2-4}$, mostrar que calculando los siguientes límites: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ y teniendo en cuenta que $f(0) = -\frac{1}{4}$, que la función es par y que nunca se anula, se puede obtener la "pinta" del gráfico de la función con bastante precisión.

Clase 10 *Práctica 4 (Ejercicio 5 a 9)*

Límites especiales

- $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$. Hay una visualización geométrica clásica que suele estar en los libros de cálculo (*Calculus* de Apóstol por ejemplo). Proponer a los alumnos que hagan algún inciso del **Ej. 5**.

- $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. La demostración se hace usando parte entera y el resultado conocido para sucesiones, pero no es conveniente darla en el pizarrón. Mostrar, haciendo un cambio de variables que $\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$ (**Ej. 6**).

- Mostrar en otros ejemplos la utilidad de cambiar variables para calcular límites. Por ejemplo, en el **Ej.6i y 6j)**.

Nota: El **Ej. 6i)** sale usando propiedades del logaritmo y el **Ej. 6j)** haciendo $x = e^b - 1$ y usando el **Ej. 6i)**.

Tarea para la casa: ejercicio 1 de los adicionales 4 subidos al campus en la actividad 4.

Clase 11 *Práctica 4 (Ejercicio 14 a 25)*

Continuidad

- Dar la noción de continuidad. Dar ejemplos de funciones continuas y no continuas (**Ej. 14**). Discontinuidad evitable y no evitable (**Ej. 15** y **Ej. 16**).
- Propiedad de conservación de signo de una función continua. Con un dibujo alcanza para mostrarlo.
- **Teorema de Bolzano**. Si se da la demostración poner de manifiesto el rol esencial que juega el axioma de completitud.
- **Teorema de los valores intermedios**. Enunciarlo y aplicarlo para obtener la existencia de soluciones de alguna ecuación. Por ejemplo $x^5 - 5x^2 + 1 = 0$ tiene alguna solución en el intervalo $(0, 1)$. (**Ej. 17** y **Ej. 18**).
- Se posterga la discusión de funciones continuas en intervalos cerrados hasta el momento en que se estudien problemas de optimización.
- Positividad y negatividad. (**Ej. 19**)

Tarea para la casa: ejercicio 2 de los adicionales 4 subidos al campus en la actividad 4.

Clase 12 *Prácticas 3 y 4 Repaso*

Ponerse al día.

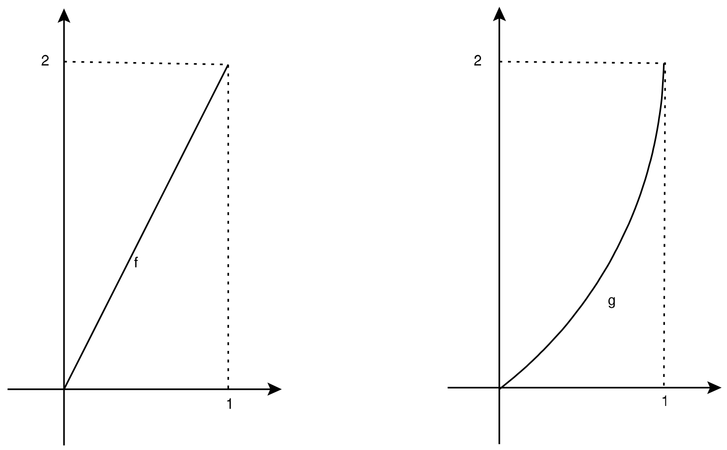
Proponer ejercicios a los y las estudiantes como por ejemplo

1. Sea $f(x)$ una función que satisface $\dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} + \dfrac{19}{4}$. Calcular, si existe, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
2. Calcular, si existe, $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{2}{\operatorname{sen}(x)}}$.
3. La función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2+5}-3}$ no está definida ni en $x = -2$ ni en $x = 2$. Por lo tanto, no es continua en esos puntos. Una de las dos discontinuidades es evitable. Determine cuál y redefina f en ese punto para que resulte continua.

Clase 13 *Práctica 5 (Ejercicio 1 a 5)*

Derivadas

- **Introducción**. Aunque el gráfico de una función es un conjunto de puntos, no es un buen sistema para representarla, obtener indiscriminadamente las coordenadas de muchos puntos. Además de ser poco práctico, se puede perder información útil. Por ejemplo: si de la función $f(x) = x\operatorname{sen}(x)$ sólo sabemos que pasa por los puntos de la forma $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, aunque son infinitos puntos, sabemos muy poco de f. La **derivada** de una función nos permite *medir* y *cuantificar* la *variación* de una función. Por ejemplo, las funciones f y g variaron lo mismo en 1 unidad: (2 unidades). Pero esto



no nos dice nada sobre la rapidez con que ocurrió el cambio. En la figura se ve que son claramente diferentes.

- Dar la idea intuitiva de recta tangente a una curva en un punto.
- Definir derivada en un punto a través del cálculo de la pendiente de la recta tangente.
- Dar ejemplos sencillos: si $f(x) = x^2 + 3$, calcular $f'(1)$. Si $g(x) = \frac{1}{x}$, calcular $g'(2)$. Calcular en alguno de los casos la ecuación de la recta tangente y graficar.
- Dar ejemplos de funciones no derivables en algún punto: $f(x) = |x|$ en $x = 0$ y $f(x) + \sqrt[3]{x-1}$ en $x = 1$. Conviene dejar para después ejemplos más complicados como $f(x) = x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
- Proponer a los alumnos que resuelvan algún ítem del **Ej. 1** o del **Ej. 2**.
- Calcular, por ejemplo, $(\ln(x))'$.
- Dar pistas para calcular las derivadas de la función exponencial y de la función $f(x) = x^p$. Ir fabricando una tabla de derivadas de las funciones más usuales.
- Enunciar y demostrar: derivable en un punto implica continua en el punto. Utilizar los ejemplos anteriores para ver que la recíproca es falsa.
- Definir función derivable en un intervalo abierto.
- Reglas de derivación. Enunciar todas. Dar ejemplos.(**Ej. 5**)

Tarea para la casa: ejercicios 1 y 2 de los adicionales 5 subidos al campus en la actividad 5.

Clase 14 *Práctica 5 (Ejercicios 6 a 10)*

- **Regla de la Cadena**. Dar ejemplos. **Ej. 6 y 7**
- Calcular $((f)^g)'$ con un ejemplo. Indicar a los alumnos que hagan algún ítem del **Ej. 8**.
- Tratamiento de derivadas de funciones dadas a trozos. (**Ej. 10**).
- **Complementos** Enunciar el **Teorema de la función inversa**. Dar la idea geométrica. Dar un ejemplo: arcsen o arccos.
- Velocidad instantánea.

- Diferencial. Interpretar geométricamente: Δx, Δy y dy. Observe que dy depende de x y de Δx. Utilizar el diferencial para calcular aproximadamente $\sqrt[3]{123}$. Calcular el valor hallado con el que entrega la calculadora y observar que el valor obtenido es mayor ya que la recta tangente está "arriba" del gráfico de la función.

  sea derivable en $x = 2$.

  Tarea para la casa: ejercicio 3 de los adicionales 5 subidos al campus en la actividad 5.

Clase 15 *Práctica 5 (Ejercicios 11 a 19)*

Ponerse al día. Alternar en la clase consultas, propuestas de problemas para que resuelvan los alumnos en el banco con la asistencia docente, que los alumnos pasen a resolver problemas o la metodología que mejor le resulte. Que no sea la mera explicación en el pizarrón.
Simulacro de parcial (30 a 40 minutos) - Opcional

1. Dada la sucesión $a_n = \dfrac{(1,01)^{3n}}{n}$.
   (a) Calcule el $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+14}-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ a & \text{si } x = 2 \end{cases}$
   (a) Determine a para que f resulte continua en $x = 2$.
   (b) Para el valor de a hallado calcule, si existe, $f'(2)$.

Clase 16 *Práctica 6 (Ejercicios 1 a 8)*

- Definir máximo y mínimo local.
- **Teorema de Fermat**. Si f está definida en (a, b) y en $x_0 \in (a, b)$ es derivable y alcanza un mínimo (o un máximo) local, entonces $f'(x_0) = 0$. Dar la idea de la demostración: considerar el caso en que f alcanza un mínimo en x_0. Hacer un gráfico y observar que $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Observar que se satisface la desigualdad contraria con el límite por izquierda, con lo cual se deduce que $f'(x_0) = 0$. Hacer notar la importancia de las hipótesis: intervalo abierto y derivabilidad en el punto. Para ello considerar los ejemplos $f(x) = \frac{1}{x}$ en [1,2] (alcanza el mínimo en $x = 2$ pero la derivada de f no se anula) y $g(x) = |x|$ en $(-1, 1)$ (no es derivable en $x = 0$ y alcanza su mínimo allí).
- **Teoremas de Lagrange (o del Valor Medio)**. Dar, vía gráficos, la idea geométrica de los teoremas de Rolle y de Lagrange: existe al menos un punto en el intervalo tal que la recta tangente en ese punto es paralela a la secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Analizar las hipótesis:
  - Existencia de la derivada $f(x) = 1 - |x|$ en $[-1, 1]$, no es derivable en 0.
  - Continuidad en el intervalo cerrado: $f(x) = x$ si $x > 0$ y $f(0) = 1$ no es continua en el origen.
- Proponer a los alumnos que resuelvan el **Ej. 1** o **2**.
- Enunciar las consecuencias directas del Teorema del valor medio
  - $f'(x) = 0$ entonces f es constante
  - $f'(x) > 0$ entonces f es creciente
  - $f'(x) < 0$ entonces f es decreciente.

- Usar el TVM para demostrar alguna desigualdad. Por ejemplo $x \geq \cos(x) + \frac{\pi}{2}$, $x \geq \frac{\pi}{2}$. Para ello considere $f(x) = x - \cos(x) - \frac{\pi}{2}$ en un intervalo $[\frac{\pi}{2}, y]$.

- Proponer a los alumnos que resuelvan algún ítem del **Ej. 5**.

- **Teorema de Cauchy**. Enunciar sin demostrar. Hay una interpretación geométrica a partir de creerse que $(f(t), g(t))$ describe una curva en el plano. En tal caso es igual que el teorema del valor medio.(Ver Calculus de Apóstol).

- **Regla de L'Hopital**. Mostrar que si $f(a) = g(a) = 0$ el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ se parece a $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ cerca de $x = a$ (para ello hay que usar el Teorema de Cauchy). Enunciar la regla (en el caso 0/0) y aplicarla en casos sencillos: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x^2}$. Cuando se aplica reiteradamente la regla de L'Hopital hay que tener cuidado en verificar que el cociente que se considera en cada caso es de la forma 0/0.

- Proponer algún ítem de los **Ej. 6, 7 u 8**

- Generalizar a otras indeterminaciones.

Clase 17 *Práctica 6 (Ejercicios 9 a 17)*

Ponerse al día. Alternar en la clase consultas, propuestas de problemas para que resuelvan los alumnos en el banco con la asistencia docente, que los alumnos pasen a resolver problemas o la metodología que mejor le resulte. Que no sea la mera explicación en el pizarrón.

- Proponer el siguiente problema: demostrar que la ecuación $x^3 + 12x + k = 0$ tiene una única solución, cualquiera sea k.

- Consultas.

Tarea para la casa Ejercicios de la los adicionales 6 subidos al campus en la actividad 6.

Para hacer entre todos

1. Sea $f(x) = x^3 \ln(x)$ para $x > 0$. ¿En qué intervalo es estrictamente creciente? Demuestre que f tiene un mínimo absoluto. ¿Cuál es valor mínimo?

2. Hallar a tal que la ecuación $3x^3 - ax + 6 = 0$ tenga tres soluciones. Demuestre que en tal caso, hay dos que son positivas.

3. Demuestre que $\dfrac{\ln(x)}{x} \leq \dfrac{1}{e}$ para todo $x > 0$.

Clase 18 *Práctica 7 (Ejercicio 1 al 9)*

En esta clase se explotan las consecuencias del Teorema del Valor Medio, con el objeto de, partiendo de la expresión analítica de $y = f(x)$, obtener el gráfico de f.

- **Crecimiento y decrecimiento** (**Ej. 1**).

- **Extremos locales** (**Ej. 7**).

- **Asíntotas** (**Ej. 2 y 5**). Recordar asíntotas verticales y horizontales. Mostrar cómo se hallan las asíntotas oblicuas: $y = mx + b$ es asíntota oblicua de f a derecha, si y sólo si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = b$.

- **Concavidad y convexidad** (**Ej. 6**) Dar la idea geométrica: f es cóncava (convexa) en (a, b) si la cuerda que une dos puntos del gráfico está arriba (abajo) de la curva. Observar, vía un gráfico, que si f es derivable, en las regiones donde es cóncava, a medida que aumenta x aumenta la pendiente de la recta tangente, es decir f', aumenta. Dar el análogo para convexa.
  - **Teorema**. Sea f derivable en (a, b). Si f' es creciente entonces f es cóncava; si f' es decreciente entonces f es convexa.
  - **Teorema**. $f'' > 0$ entonces f es cóncava. ($f'' < 0$ entonces f es convexa).
  - **Punto de inflexión**. Un punto donde la curva pasa de cóncava a convexa o viceversa se llama punto de inflexión. **Teorema**: si x_0 es un punto de inflexión de f y f' existe y es continua y derivable, entonces $f''(x_0) = 0$. Observar que no vale la recíproca : $f(x) = x^4$. Además se puede tener un punto de inflexión sin que exista la derivada segunda. (por ejemplo $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$.)
- Hacer algunos ejemplos sencillos, por ejemplo $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ o $f(x) = \dfrac{x^3-16}{x}$.
- Hacer entre todos el estudio de $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ (**Ej 7q)**).

Clase 19 *Práctica 7 (Ejercicios 10 al 26)*

- **Construcción de curvas**. Está dada toda la teoría necesaria para resolver los problemas. Proponer a los alumnos que resuelvan un estudio de función completo.
- Cantidad de soluciones de una ecuación y desigualdades.
  - Una función continua en un intervalo cerrado es acotada. La demostración requiere del axioma del supremo o equivalente (encaje de intervalos). Darla solamente si el público es sensible a ella. Mostrar en cambio que el resultado puede fallar si el intervalo no es cerrado.
  - **Teorema de Weiestrass**. Una función continua en un intervalo cerrado alcanza su **máximo absoluto** y su **mínimo absoluto**. Apoyándose en el resultado anterior hay una demostración muy elegante considerando la función auxiliar $g(x) = \dfrac{1}{m - f(x)}$ donde m es el supremo de f en el intervalo. Si f no alcanzara el máximo la función g resultaría continua pero no acotada produciendo una contradicción.

- Repaso de estudio de funciones. Si no se hizo hasta ahora, hacer algún caso con un punto donde no existe la derivada y otro en un intervalo cerrado.
- Plantear y resolver algún problema. Insistir en determinar el dominio de las variables que se definan. Hacer un *resumen* de la información útil para representar el gráfico de una función.

Tarea para la casa: ejercicios adicionales subidos al campus en la actividad 7 (cuidado que son muchos, dividir esta tarea con la próxima clase)

Clase 20 *Práctica 7 (Ejercicios 30 a 41)*

- Plantear y resolver algún problema. Insistir en determinar el dominio de las variables que se definan. Hacer un *resumen* de la información útil para representar el gráfico de una función.
  - Hallar dominio de f. Si f no está definido en a pero si está definido en un entorno, calcular $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ (puede o no haber una asíntota vertical).
  - Hallar los puntos críticos: puntos donde la derivada es nula o no existe.

- Hallar los intervalos en los cuales la derivada es positiva (intervalos de crecimiento) y los intervalos donde la derivada es negativa (intervalos de decrecimiento). Para ello se puede usar el Teorema de Bolzano aplicado a la función derivada.
- Utilizar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento para clasificar los puntos críticos.
- Hallar los puntos donde $f'' = 0$. Hallar los intervalos en los cuales la derivada segunda es positiva (concavidad) y los intervalos donde la segunda derivada es negativa (convexidad).
- Asíntotas. Hallar $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Si alguno de ellos es más o menos infinito, ver si hay asíntota oblicua.
- Ceros. Si la función se deja hallar los ceros y los intervalos de positividad y de negatividad.
- Valores de f. Calcular el valor de f en los puntos críticos.

Dice Miguel de Guzmán: *Insistiremos en que rara vez será necesario someter la curva a un estudio tan prolijo. Esta lista es como el tablero en el que el artesano pone sus herramientas. Raramente tendrá que utilizar todas ellas para ejecutar una obra. Pero es bueno que las tenga a mano y conozca su uso.*

Tarea para la casa: ejercicios adicionales subidos al campus en la actividad 7 que quedaron de la clase pasada. (cuidado que son muchos, dividir esta tarea con la clase anterior)

Clase 21 *Prácticas 1 a 7*

Repaso.

Clase 22 *Prácticas 1 a 7*

Repaso.

Clase 23 *Primer Parcial*

SEGUNDA PARTE

Clase 24 *Práctica 8 (Ejercicio 1 al 21)*

Polinomio de Taylor

- **Planteo del problema**. Dada una función f ($f(x) = e^{2x}$, por ejemplo) se trata de encontrar un polinomio $P(x)$ de grado n ($n = 3$) que "aproxime" a $f(x)$ para valores cercanos a $x = 0$. Los polinomios son las funciones más sencillas (para su evaluación sólo necesitamos de sumas y productos). Gran parte del análisis numérico se basa en la idea de aproximar funciones complicadas por otras más sencillas y es aquí donde los polinomios juegan un papel importante.

- **Solución**: Para obtener $P(x)$ se le pide
  - $P(0) = f(0)$ (que coincidan en el punto),
  - $P'(0) = f'(0)$ (que coincidan las rectas tangentes),
  - $P''(0) = f''(0)$ (que coincidan las curvaturas),
  - $P'''(0) = f'''(0)$ (generalizando lo anterior).

  Como $P(x)$ es un polinomio de grado tres tiene la forma $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, donde los a_i son a determinar. Tenemos cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. La *única solución* del sistema es $a_i = \dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$.

  Hacer la cuenta en el caso del ejemplo e inferir la fórmula general a posteriori. Dibujar en un mismo sistema de coordenadas al gráfico de f, al polinomio de orden 1 (recta tangente) al de orden 2 y de orden 3. Mostrar que los sucesivos polinomios aproximan bien, cerca del cero pero que lejos no tienen nada que ver con la función. También se puede comentar que a medida que aumenta el orden mejora la aproximación pero se complica el polinomio. En las cuestiones prácticas será útil saber cuándo se tiene una aproximación "razonable" y estimar el error que se comete al reemplazar la función por su polinomio de Taylor.

- Proponer a los alumnos que hagan el **Ej. 2**.

- **Teorema:** f con n derivadas continuas (se puede pedir menos). Existe un único polinomio (llamado *Polinomio de Taylor*) que satisface $P^{(j)}(0) = f^{(j)}(0)$ para $0 \leq j \leq n$. Además, si a_j son los coeficientes del polinomio P, vale $a_j = \dfrac{f^{(j)}(0)}{j!}$.

  No vale la pena dar una demostración detallada si uno hizo con cuidado el ejemplo.

- Calcular el polinomio de orden n del ejemplo del comienzo.

- Proponer a los alumnos que resuelvan el **Ej. 6**. Sacar conclusiones sobre los polinomios de Taylor de funciones polinómicas.

- Generalizar el polinomio de Taylor para $x = x_0$ cualquiera. Hacer un ejemplo: $f(x) = x\ln(x)$. Hallar el polinomio de orden 3 en $x = 1$.

- El resto de la clase usarlo para explotar la unicidad del Polinomio de Taylor (**Ej 8** a **Ej 21**)

Clase 25 *Práctica 8 (Complementos)*

En función de la marcha del curso, usar esta clase o bien de repaso y para ponerse al día, o bien para contar algo sobre el resto del Polinomio de Taylor.
Expresión del Resto

- **Planteo del problema**. Se trata de encontrar una expresión "manejable" del error que se comete cuando aproximamos una función $f(x)$ por su polinomio de Taylor de orden n.
- **Solución**. El error que se comete en calcular $f(x)$ por medio de $P(x)$ es $R(x) = f(x) - P(x)$. A esta expresión la llamamos el *resto de orden n*.
- Resolver el **Ej. 22**. Deducir que si $P_3(x)$ es el polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$ de f, el resto se puede expresar mediante la fórmula $R_3(x) = f(x) - P_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4$ donde c está entre 0 y x.
- En el ejemplo $f(x) = \ln(1+x)$ poner de manifiesto cómo podemos "estimar" el error que cometemos, por ejemplo al calcular $\ln(1,2)$ por medio de $P_3(1,2)$. En este caso la expresión del resto es $R_3(x) = -\dfrac{6 \ \ x^4}{(1+c)^4 4!} = \dfrac{x^4}{4(1+c)^4}$ donde c está entre 0 y x. Como $x = 0,2$ el número c satisface $0 < c < 0,2$. En general interesa el error absoluto (sin importar si es por exceso o por defecto). Es por ello que se quiere encontrar una estimación del módulo de $R_3(0,2)$. Es decir $|R_3(0,2)| = \dfrac{(0,2)^4}{4}\dfrac{1}{(1+c)^4} = 0,0004\dfrac{1}{(1+c)^4}$. Lo más molesto es sacarse de encima el desconocido número c: hay varias formas de hacerlo (y cada caso dicta cuál es la recomendable). Aquí lo hacemos "a mano":

$$0 < c < 0,2 \Rightarrow 1 < 1+c < 1,2 \Rightarrow 1 < (1+c)^4 < (1,4)^4 \Rightarrow 1 > \frac{1}{(1+c)^4} > \frac{1}{(1,2)^4}$$

  Por lo tanto $\frac{1}{(1+c)^4} < 1$. Entonces $|R_3(0,2)| < 0,0004$.
- Proponer como ejercicio el mismo problema para calcular $\ln(0,8)$ (notar que aquí c es negativo).
- Generalizar la expresión del resto para orden n y $x = x_0$: $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ donde c está entre x y x_0.
- Proponer a los alumnos que resuelvan el **Ej. 26** o similar.

Tarea para la casa: ejercicios adicionales 8 subidos al campus en la actividad 8

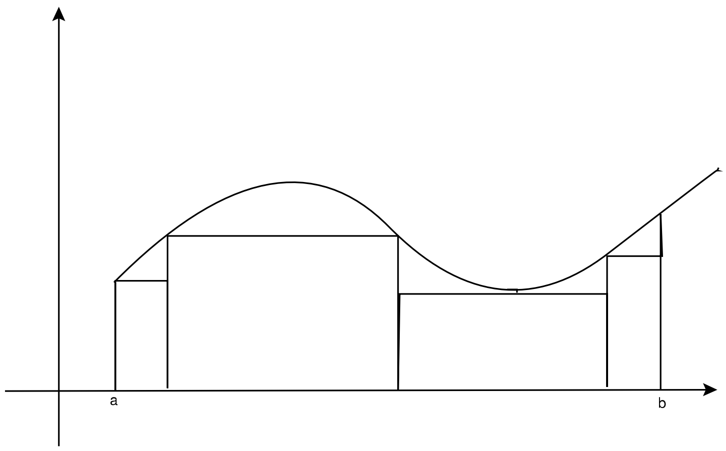
Clase 26 *Práctica 9. Ejercicios 1 al 14.*

Desarrollamos con cierto detalle esta clase con el objeto de unificar criterios.

Definición de integral definida.

Motivar la definición con el problema de definir área bajo el gráfico de una función acotada (a los efectos geométricos será siempre continua y mayor que cero) mediante la suma de áreas de rectángulos. Mostrar que esa aproximación se puede hacer por exceso o por defecto. La idea es tomar "la menor" de las aproximaciones por exceso y "la mayor" de las aproximaciones por defecto y tener la esperanza de que coincidan. Para "formalizar" esta idea (pero no demasiado) es necesario introducir alguna que otra definición y la notación adecuada. Se puede proceder como sigue.

En lo que sigue la única hipótesis sobre f es que es una función acotada en el intervalo $[a, b]$ (aunque la pensaremos continua y positiva para poder seguir con la motivación de calcular el área bajo el gráfico de f). En todo momento apoyarse en un dibujo de una f.



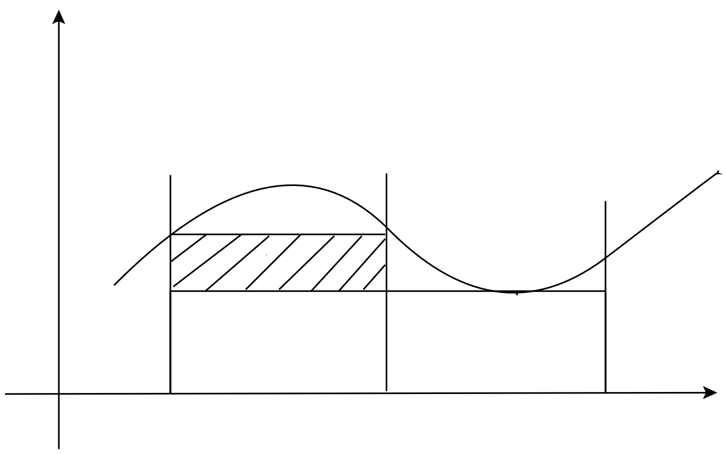
Definir **partición** P de $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.
Dar un par de ejemplos (incluyendo $P = \{a, b\}$)
Definir $m_i = \inf\{f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1}\},\ i = 0, 1, \ldots, n-1$ y mostrar cómo se construyen los rectángulos por debajo del gráfico de f. (ver figura)
Definir **suma inferior** como la suma de las áreas de todos esos rectángulos:

$$s_P(f) = m_0(x_1 - x_0) + \ldots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

Hacer lo propio con $M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ y la **suma superior**

$$S_P(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Las siguientes tres observaciones llevan a la definición de integral. Todas ellas se ven en el dibujo y no requieren una demostración formal:



1. $s_P(f) \leq S_P(f)$ (pues $m_i \leq M_i$)
2. Si le agrego un punto a P (afino la partición) $R = P \cup \{c\} \supset P$ se tiene $s_P(f) \leq s_R(f)$, $S_P(f) \geq S_R(f)$ (en otras palabras, cuando afino la partición, las sumas inferiores se agrandan, las superiores se achican)

   En general si $R \supset P$ valen las desigualdades de arriba. En particular vale $m(b-a) \leq s_P(f),\ \ S_P(f) \leq M(b-a)$.

3. Si P y Q son dos particiones cualesquiera del intervalo vale $s_P(f) \leq S_Q(f)$ (es decir todas las sumas inferiores son menores que cualquier suma superior).

   Esto se deduce de las propiedades anteriores, usando que $R = P \cup Q$ contiene a P y a Q, con lo cual

$$s_P(f) \leq s_{P\cup Q}(f) \leq S_{P\cup Q}(f) \leq S_Q(f)$$

Podemos tomar entonces "la mayor" de las sumas inferiores y "la menor" de las sumas superiores y esperar que estos dos números sean los mismos: el área bajo el gráfico de f. Lo que pasa es que, en general estos dos números no son iguales. Definimos pues la integral inferior y la integral superior de f respectivamente:

$$I_f = \sup\{s_P(f) : P \ \text{ partición}\} \qquad I^f = \inf\{S_Q(f) : Q \ \text{ partición}\}$$

Claramente $I_f \leq I^f$ por la propiedad 3. Pero como dijimos antes, no siempre es igual.
Cuando son iguales decimos que la función f es *integrable* y ponemos

$$I = I_f = I^f = \int_a^b f(x)dx$$

Se puede hacer algún comentario sobre esta notación debida a Leibniz. El signo integral es una "deformación" del símbolo de sumatoria, el símbolo dx juega el papel de la base de "rectángulos infinitamente pequeños" y $f(x)$ juega el papel de la altura de esos rectángulos. Para nosotros es un "paquete" que va junto y que en la práctica resulta ser muy adecuado para los cálculos, lo que podrá verse en las próximas clases.
Hacer notar que para la definición sólo se requirió la acotación de f . De hecho, si f es negativa (o toma valores negativos) la integral es negativa o puede tomar valores negativos.

Uso de la definición: (opcional)
Desarrollar con algún detalle el ejemplo $f(x) = x$, $x \in [0,1]$. Poner de manifiesto que calcularemos el área de un triángulo (para el cual no necesitamos la integral) pero que nos servirá para ver cómo trabaja la definición que acabamos de dar.
Uno de los problemas de la definición es la de considerar *todas* las particiones. En este caso (y en muchos otros) se puede trabajar con una familia de particiones

$$P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$$

Se prueba para este caso que

- ♢ $s_{P_n}(f)$ es una sucesión creciente de números reales y que
- ♢ $S_{P_n}(f)$ es una sucesión decreciente de números reales.
- ♢ $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{P_n}(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{P_n}(f) = \dfrac{1}{2}$ (ver las cuentas más abajo)
- ♢ Entonces vale que:

$$I_f = \sup\{s_P(f) : P \text{ particion}\} \geq \sup\{s_{P_n}(f) : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to+\infty} s_{P_n}(f) = \lim_{n\to+\infty} S_{P_n}(f) =$$

$$= \inf\{S_{P_n}(f) : n \in \mathbb{N}\} \geq \inf\{S_Q(f) : Q \text{ particion}\} = I^f$$

- ♢ Entonces f es integrable y vale $\displaystyle\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

Para calcular s_{P_n} y S_{P_n}, como f es creciente y gracias a que la partición es equiespaciada, se tiene que

$$x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n},\ m_i = \frac{i}{n},\ M_i = \frac{i+1}{n},\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Entonces

$$s_{P_n}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \overset{\text{crece}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

De la misma forma

$$S_{P_n}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n+1)n}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \overset{\text{decrece}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Funciones no integrables

La función de Dirichlet en el intervalo $[0, 1]$ es un ejemplo de función no integrable: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Por la densidad, en todo intervalo de una partición cualquiera, se tiene que $m_i = 0$ y $M_i = 1$ entonces $I_f = 0$ e $I^f = 1$.

Funciones integrables

La cuenta que hicimos en el ejemplo $f(x) = x$ vale para cualquier función creciente o cualquier función decreciente. Podemos enunciar:

- *Teorema:* f monótona , entonces f integrable.

  El siguiente teorema lo enunciamos sin demostración (requiere continuidad uniforme) pero nos responde a la pregunta si hay "suficientes" funciones integrables.

- *Teorema:* toda función continua es integrable en $[a, b]$

Propiedades

Las siguientes propiedades, la integral las hereda de las sumas superiores e inferiores. Si f, g son funciones integrables entonces

♢ $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

♢ $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ cualquiera sea $k \in \mathbb{R}$

♢ $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

♢ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ cualquiera sea $c \in [a, b]$

♢ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

- Proponer que hagan el **Ej. 2a)**

Teorema Fundamental del Cálculo

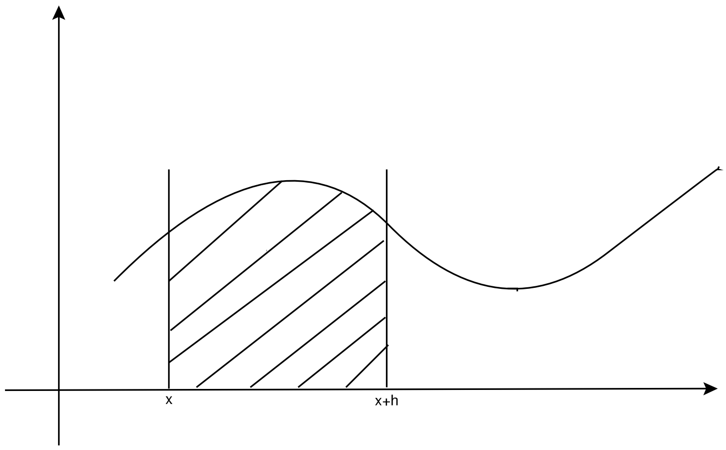
El uso directo de la definición tiene ciertos inconvenientes para el cálculo. De todas maneras hay que destacar que, en la práctica los métodos numéricos rescatan y se apoyan en la definición de integral. Veremos cómo se puede zafar de usar la definición de integral para hallar su valor en cada caso. En lo que sigue f es continua (y por lo tanto integrable). Queremos calcular el valor de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$. Para cada

$x \in [a,b]$ estudiamos la "función área" definida como $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ (hacer un comentario sobre el buen uso de la notación y los papeles que juegan t y x en la última expresión). Mirándola fijo se observa que:

- $A(b) = \int_a^b f(t)dt$ es el valor que buscamos
- $A(a) = 0$

Se puede probar que $A(x)$ es una función continua (para lo cual sólo se requiere que f sea integrable). Pero vamos a calcular el cociente incremental de A con vistas a calcular su derivada (conviene apoyarse en un dibujo)

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$



Si ponemos $m(h) = \min\{f(t) : t \in [x, x+h]\}$ y $M(h) = \max\{f(t) : t \in [x, x+h]\}$ se ve (jugar con el gráfico, no constituye una demostración formal)

- $m(h) \leq \dfrac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq M(h)$ (se ve para $h > 0$ mirando el dibujo, para $h < 0$ se arregla; dejarlo como ejercicio)
- $\lim_{h\to 0} m(h) = \lim_{h\to 0} M(h) = f(x)$ (gracias a la continuidad de f)

Entonces se deduce que

$$\frac{d}{dx}A(x) = A'(x) = f(x)$$

Teorema Fundamental del Cálculo (TFC): Si f es continua entonces $A'(x) = f(x)$.
Derivando integrales: Usar la regla de la cadena para calcular:

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$$

Se sugiere no hacerlo en general, sino en cada ejemplo.

El TFC constituye el resultado más importante del curso. Liga en forma muy estrecha los dos problemas históricos del cálculo que, en términos geométricos son: el problema del área y el problema de hallar rectas tangentes horizontales (el Teorema de Fermat). La regla de Barrow pone de manifiesto la potencia de este teorema.

Regla de Barrow

Primitiva: de f es una función G con la propiedad $G'(x) = f(x)$. Por ejemplo $G(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x) = 2x$.

El TFC permite calcular $A(b) = \int_a^b f(t)dt$ conociendo una primitiva de f. En efecto, sea G una primitiva de f, se tiene que

$$(G(x) - A(x))' = f(x) - f(x) = 0$$

entonces

$$G(x) - A(x) = k.$$

En particular

$$k = G(a) - A(a) = G(a)$$

luego

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

En otras palabras basta conocer una primitiva de f para calcular la integral. Como ejemplo, $G(x) = \frac{x^2}{2}$ es una primitiva de $f(x) = x$ que fue el ejemplo donde usamos la definición. Usando la Regla de Barrow se obtiene

$$\int_0^1 xdx = G(1) - G(0) = \frac{1}{2}.$$

Hacer notar que las primitivas son "esencialmente" iguales entre sí. Más precisamente, difieren en una constante.

Cálculo de primitivas

Por lo expuesto será de gran utilidad tener un "machete" de primitivas lo que se puede lograr "leyendo" una tabla de derivadas al revés (**Ej. 7**):

$f(x)$	$G(x)$
x^n $(n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\operatorname{sen}(x)$
$\operatorname{sen}(x)$	$-\cos(x)$

Proponer a los alumno que resuelvan **Ej. 5a)** y hacer alguno similar al **Ej. 8 y 9**

Tarea para la casa: ejercicio 1 de los adicionales 9 subidos al campus en la actividad 9.

Clase 27 *Práctica 9. Ejercicios 16 al 24.*

Sustitución:

A partir de la regla de la cadena mostrar que $H(x) = f \circ g(x)$ es una primitiva de $f'(g(x))g'(x)$.
Mostar cómo funciona en la práctica. Aquí se ve el valor práctico de la notación de Leibniz en el uso adecuado del símbolo dx.
Resolver algunos ejemplos y proponer a los alumnos que hagan algún ítem del ejercicio 16.
Cambio de variable: Mostrar cómo funciona el método cuando la integral es definida, viendo que se puede tanto cambiar los límites de integración como volver a la variable original.

Partes

A partir de la derivada del producto de dos funciones deducir el método de integración por partes.
Hacer algunos ejemplos tanto para calcular primitivas como para calcular integrales definidas. En este caso se entiende el nombre de "partes" mostrando que una parte queda integrada.

Proponer a los alumnos que resuelvan algún ítem del ejercicio 17.

Fracciones simples Mostar el método sólo en el caso de raíces simples (**Ej. 25**).

Tarea para la casa: ejercicios del 2 al 5 de los adicionales 9 subidos al campus en la actividad 9.

Clase 28 *Práctica 9. Ejercicios de evaluación.*

Ponerse al día con trabajo interactivo de estudiantes y docentes.

Clase 29 *Práctica 10. Ejercicios 1 a 13*

Área entre curvas.
Volver a señalar que la integral no es un área sino que sirve para calcular áreas entre curvas.
Mostrar con algunos ejemplos como los del ejercicio 1 cómo se trabaja en la práctica para calcular el área entre curvas. Proponer a los alumnos que resuelvan algún ítem. Repasar integración por partes y/o sustitución en el caso de integrales definidas. (**Ej 13** por ejemplo).

Clase 30 *Práctica 10. Ejercicios 14 al 24.*

Ecuaciones diferenciales.
El objetivo de estos ejercicios es mostrar al cálculo (gracias al TFC) en toda su potencia y en su uso más frecuente. Las ecuaciones diferenciales constituyen, sin duda, la aplicación más importante del cálculo.
La derivada es una medida de cómo cambia una magnitud. Cuando es ese cambio lo que se conoce en relación al fenómeno naturalmente aparece una ecuación diferencial.
De ninguna manera se pretende introducir teoría general o métodos de resolución de ecuaciones diferenciales. Todos los problemas propuestos se resuelven por integración directa.
Haga una selección de ellos para armar la clase.

Tarea para la casa: ejercicios adicionales 10 subidos al campus en la actividad 10.

Clase 31 *Práctica 11. Ejercicios 1 a 4.*

Series numéricas
Se puede seguir el Fasciculo 4.
Definición. Ejemplos. Series geométricas. Series telescópicas. Condición necesaria. Propiedades de linealidad de las series. Dar ejemplos tales como

1. Calcular la suma de las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+2)}$.

2. Decidir si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^3 + 1}{10n^3 + n}$ es convergente.

Proponer a los alumnos que hagan algún ítem del ejercicio 2.
Series de términos no negativos.
Primer criterio de comparación: Una serie de términos no negativos dominada por una serie convergente, es convergente.
Segundo criterio de comparación: Una serie de términos no negativos que domina a una serie divergente, es divergente.
Proponer a los alumnos que hagan algún ítem del ejercicio 4.

Clase 32 *Práctica 11. Ejercicios 5 a 7*

Criterio integral. Series p.
Criterio de paso al límite. El enunciado es (con la licencia poética sobre la notación de intervalo):
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{c_n} = l \in [0, +\infty)$ y $\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ es convergente entonces $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ es convergente.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{d_n} = l \in (0, +\infty]$ y $\sum\limits_{n\geq 1} d_n$ es divergente entonces $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ es divergente.
Series alternadas Criterio de Leibniz
Convergencia absoluta y condicional Criterios de D´Alembert y Cauchy.
En cada caso trate el tema con ejemplos.

Clase 33 *Práctica 11. Ejercicios 8 a 18.*

Series de potencia. Problema: Hallar todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ es convergente.
Hacer una selección de ejercicios para organizar la clase. Definir radio de convergencia (**Ej. 15**)

Tarea para la casa: ejercicios adicionales 11 subidos al campus en la actividad 11.

Clase 34 *Prácticas 11. Repaso.*

Clase 35 *Práctica 8 a 11.*

Repaso

Clase 36 *Segundo Parcial*