Índice general

Presentación

La presente Guía de Trabajos Prácticos es una herramienta fundamental para incorporar y fijar los contenidos de Análisis Matemático A (66), asignatura del Ciclo Básico Común dirigida a estudiantes de casi todas las carreras de Ciencias Exactas y Naturales y de Ingeniería.

Las dos primeras prácticas son: Preliminares (Práctica 0) y Funciones Reales (Práctica 1). Ellas constituyen un repaso y puesta al día de conceptos y destrezas algebraicas conocidos de la escuela media. Es importamte reforzar este aspecto para encarar la cursada y la comprensión de los nuevos conceptos.

A partir de la Práctica 2 (Números Reales), cada parte de cada práctica tiene una estructura similar que jerarquiza el tipo de ejercicios que se plantean de la siguiente manera:

Ejercicios introductorios: Presentan los conceptos básicos y elementales de la práctica.

Ejercicios de entrenamiento: Se incorpran y combinan las propiedades de los conceptos introducidos y los resultados que los vinculan.

Ejercicios de evaluación: Han formado parte de evaluaciones o son de nivel equivalente. Se incluyen ejercicios tanto de exámenes parciales como de finales con estructura de opción múltiple.

Problemas y Complementos: Incluyen algunos problemas y temas que son importantes pero que no suelen formar parte de las evaluaciones salvo indicación en contrario de la o el docente del curso.

Se recomienda usar esta Guía con intensidad, siguiendo las indicaciones y sugerencias que se realizan en el aula.

La consulta con el o la docente del curso así como el trabajo grupal con compañeros y compañeras es la forma óptima de aprovechar este material.

Práctica 0: Preliminares

Ejercicio 1 Calcule

a) $\dfrac{5}{8}+\dfrac{7}{8}$

b) $\dfrac{7}{6}+\dfrac{2}{3}$

c) $\dfrac{3}{7}+\dfrac{2}{5}$

d) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{2}{3}-\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{6}\right)$

e) $9\left(\dfrac{\sqrt{9+25}}{2}\right)^{-1}$

f) $\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)\left(\dfrac{8}{9}\right)}{\dfrac{4}{9}}$

g) $\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{9}\right)^{-1}\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{2}\right)^{2}$

h) $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{0}+\sqrt[3]{-\dfrac{27}{8}}$

i) $\left[\left(\dfrac{1}{7}\right)^{6}\left(\dfrac{1}{7}\right)^{3}\right]^{\frac{2}{9}}$

j) $\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^{6}:\left(\dfrac{2}{5}\right)^{4}\right]^{-1}$

k) $\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{2}{5}\right)\left(\dfrac{5}{2}:\dfrac{1}{4}\right)$

l) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$

m) $\left(\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\right)^{2}\right)^{-2}$

Ejercicio 2 Desarrolle

a) $(x-5)^2$ *b)* $(x+7)^2$

c) $(x-3)(x+1)$ *d)* $(x-y)(x+y)$

Ejercicio 3 Escriba como producto de dos factores

a) x^2-81 *b)* x^3-11x

c) x^4-16 *d)* $x^2-10x+25$

Ejercicio 4 Represente en el plano los siguientes puntos

$$(1;3),\ (3;1),\ (-1;2),\ (-1;-5),\ (0;1),\ (1;0),\ (3;3),\ (-1;-1)$$

Para cada uno de estos puntos represente los puntos simétricos respecto de
a) el eje x *b)* el eje y *c)* el origen de coordenadas.

Ejercicio 5 Represente en el plano los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$

a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x=1\}$

b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x\leq 2\}$

c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x<0,\ y=2\}$

d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x<1,\ y<1\}$

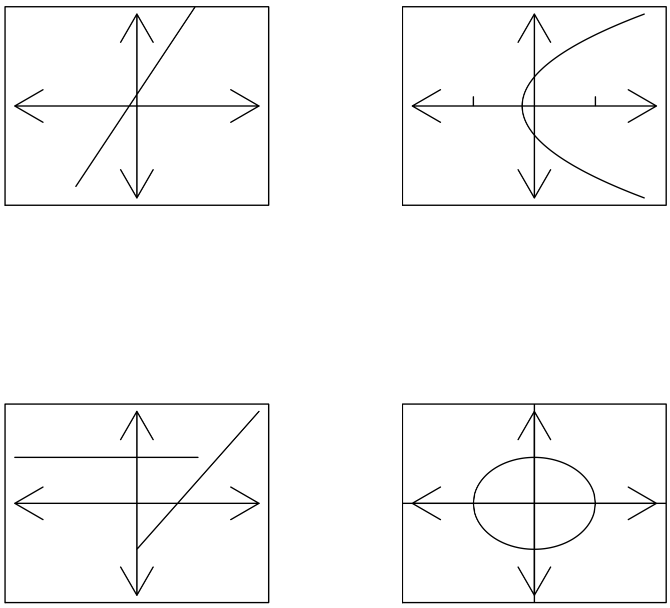
Práctica 1: Funciones Reales

Ejercicio 1 Haga un gráfico que refleje la evolución de la temperatura del agua a lo largo del tiempo atendiendo a la siguiente descripción:

> " Saqué del fuego una cacerola con agua hirviendo. Al principio, la temperatura bajó con rapidez, de modo que a los 5 minutos estaba en 60 grados. Luego, fue enfriándose con más lentitud. A los 20 minutos de haberla sacado estaba en 30 grados y 20 minutos después seguía teniendo algo más de 20 grados, temperatura de la cual no bajó, pues era la temperatura que había en la cocina."

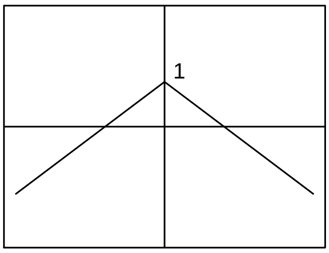
¿Es el gráfico que hizo el único que respeta las consignas anteriories?

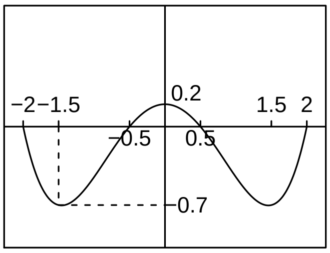
Ejercicio 2 Dados los siguientes conjuntos del plano, determine, en cada caso, si existe una función cuyo gráfico sea el dado.

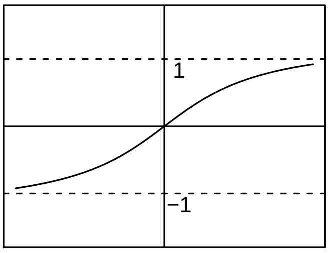


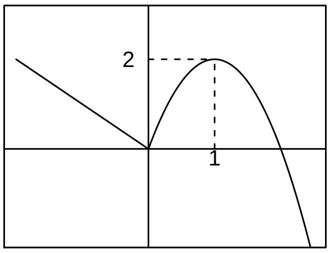
Ejercicio 3 Dibuje una función que sea creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$, cuyo valor máximo sea 4 y se alcance en $x = -1$ y cuyo valor mínimo sea -3 y se alcance en $x = 2$.

Ejercicio 4 Dados los siguientes gráficos de funciones, determine, en cada caso, en qué intervalos es creciente, en qué intervalos es decreciente, en qué punto alcanza su máximo, en que punto alcanza su mínimo y cuál es el valor mínimo y/o el valor máximo.









Ejercicio 5

a) Encuentre, en cada caso, una función lineal f que satisfaga

i) $f(1) = 5$ y $f(-3) = 2$.

ii) $f(-1) = 3$ y $f(80) = 3$.

iii) $f(0) = 4$ y $f(3) = 0$.

iv) $f(0) = b$ y $f(a) = 0$, donde a y b son números fijos.

b) Calcule en i) y en ii) $f(0)$. Calcule en iii) $f(-2)$

c) Encuentre la pendiente de las rectas que son gráficas de las funciones lineales dadas en *a*). Haga un gráfico de tales rectas.

Ejercicio 6 Halle la ecuación de la recta de pendiente m que pasa por el punto P siendo

a) $P = (2; 3),\ m = 1$

b) $P = (1; 5),\ m = 0$

c) $P = (3; -4),\ m = -2$

d) $P = (0; b),\ m = 1$

Ejercicio 7 Encuentre la función lineal g que da la temperatura en grados Farenheit, conocida la misma en grados Celsius, sabiendo que 0 grados Celsius son 32 grados Farenheit y que 100 grados Celsius son 212 grados Farenheit. Recíprocamente, encuentra la función h que da la tamperatura en grados Celsius conocida la misma en grados Farenheit.

Ejercicio 8 Trace el gráfico de las siguientes funciones cuadráticas

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = -2x^2$

c) $f(x) = x^2 - 3$

d) $f(x) = -(x-5)^2$

Determine en cada caso el conjunto imagen.

Ejercicio 9 Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas determine en qué intervalo crece, en qué intervalo decrece, dónde es positiva, dónde es negativa, en qué puntos se anula y en qué puntos alcanza su extremo.

a) $f(x) = -2x^2$

b) $f(x) = -2x(x-3)$

c) $f(x) = -2x^2 + x$

d) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

e) $f(x) = -2(x+3)(x-5)$

Ejercicio 10 Represente gráficamente las siguientes funciones

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = (x-2)^3$

c) $f(x) = x^4$

d) $f(x) = x^4 - 1$

Ejercicio 11 Represente gráficamente las siguientes funciones

a) $f(x) = \dfrac{4}{x}$

b) $f(x) = -\dfrac{4}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{4}{x-3}$

d) $f(x) = \dfrac{4}{x-3} + 2$

e) $f(x) = \dfrac{4x+5}{x-2}$

f) $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+1}$

Indique en cada caso, el dominio de la función. Indique también en qué intervalos es creciente y en qué intervalos es decreciente.

Ejercicio 12 Considere las funciones $f(x) = 2x^2 + 5x$, $g(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $h(x) = 2x - 6$.

a) Calcule si es posible:

$(f \circ f)(-1) \qquad (f \circ h)(1) \qquad (g \circ f)(-1) \qquad (h \circ g)(2).$

b) Halle fórmulas para las composiciones que se indican a continuación

$$(f \circ g) \qquad (g \circ f) \qquad (f \circ g) \circ h \qquad (f \circ h) \qquad (f \circ f).$$

c) $f \circ g$ y $g \circ f$ ¿Son la misma función?

Ejercicio 13 Halle la función inversa de

a) $f(x) = 3x - 5$

b) $f(x) = x^2, \; x \leq 0$

c) $f(x) = 2(x-1)^2$, $x \geq 1$

d) $f(x) = 2(x-1)^2$, $x \leq 1$

e) $f(x) = 3 - \sqrt{x+5}, \quad x \geq -5$

Ejercicio 14 Represente gráficamente las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt{x}$ *b*) $f(x) = -\sqrt{x}$ *c*) $f(x) = \sqrt{x+3}$

Indique en cada caso, el dominio de la función. Analice monotonía.

Ejercicio 15 Halle el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt{x-8}$ *b*) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ *c*) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

Ejercicio 16 Dadas las funciones exponenciales $f(x) = r^x \left(r = 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}\right)$,

a) Haga el gráfico de cada una de ellas.

b) Determine el dominio y la imagen.

c) Analice la monotonía.

Ejercicio 17 Si notamos con $\log_r(x)$ a la función inversa de r^x, $r > 0$, $r \neq 1$

a) Haga el gráfico de $y = \log_r(x)$ para $r = 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$.

b) Determine el dominio y la imagen.

c) Analice la monotonía.

Ejercicio 18 Encuentre el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x) = \ln(2x)$ *b*) $g(x) = \ln(3x^2 + 2x)$.

En cada caso determine los valores de x para los cuales la función vale 0.

Ejercicio 19 Halle la función inversa de

a) $f(x) = \ln(2x)$ *b)* $f(x) = \ln(x^2 + 4)$, $x > 0$ *c)* $f(x) = e^{x+3} + 4$.

Ejercicio 20 A partir de los gráficos de $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $h(x) = \cos(x)$ haga el gráfico de

a) $f(x) = \cos(2x + \pi)$ *b)* $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Ejercicio 21 Determine todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

a) $\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$

b) $\cos(2x) = \frac{3}{2}$

c) $\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 1$

d) $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$

e) $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(2x)\cos(x)$

f) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x) - \operatorname{sen}(x))$

Ejercicio 22 Haga el gráfico de las funciones inversas de $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $h(x) = \cos(x)$. Determine los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

a) $\operatorname{arc\,sen}(x) = \frac{\pi}{4}$ *b)* $\arccos(x) = \pi$

Ejercicio 23 Represente gráficamente las siguientes funciones

a) $f(x) = |\,x\,|$

b) $f(x) = |\,x - 5\,|$

c) $f(x) = |\operatorname{sen}(x)|$

d) $f(x) = |\,e^x\,|$

Ejercicio 24

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ -x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 3x - 4 & 1 < x \end{cases}$$

calcule $f(-3), f(1)$ y $f(4)$. ¿Para qué valores de y la ecuación $f(x) = y$ tiene solución? ¿Cuándo es única?

Ejercicio 25 Idem para la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \leq -4 \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{si } x > -4 \end{cases}$$

Práctica 2: Números Reales

Ejercicios introductorios

Ejercicio 1 Represente en la recta numérica

a) $-1\,;\,3\,;\,6\,;\,\dfrac{3}{8}\,;\,1+\dfrac{2}{5}\,;\,1-\dfrac{2}{5}\,;\,-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}+1\,;\,\sqrt{2}-1\,;\,-\sqrt{2}+1;\,-\sqrt{2}-1.$

b) $-\,3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,-\pi\,;\,-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\,;\,\dfrac{3\,\pi}{2}\,;\,3{,}14\,;\,-3{,}14.$

Ejercicio 2 Represente en la recta los siguientes conjuntos

a) $[2,4]\cap[3,6]$ *b)* $[2,4]\cup[3,6]$ *c)* $(-\infty,3)\cap(1,+\infty)$

d) $(-1,3)\cap[3,+\infty)$ *e)* $(-1,3)\cup[3,+\infty)$ *f)* $(-1,3)\cup(3,5)$

Ejercicio 3 Represente en la recta los siguientes conjuntos. Escríbalos como intervalos o como unión de intervalos.

a) Todos los números reales mayores que -1.
b) Todos los números reales mayores o iguales que 2.
c) Todos los números reales que distan del cero menos que 3.

d) $\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x-3>5\}$

e) $\{x\in\mathbb{R}\,/\,1<2x-3<5\}$

f) $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\,(2x-3)>0\}$

g) $\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-36<0\}$

h) $\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,1+\dfrac{2}{x}<3\right\}$

i) $\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\dfrac{1}{x}<\dfrac{4}{x}\right\}$

j) $\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|<3\}$

k) $\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x-2|<3\}$

l) $\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|>3\}$

m) $\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x+2|<3\}$

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 4 Considere los siguientes conjuntos

$A=\left\{\dfrac{1}{n}\,/\,n\in\mathbb{N}\right\}$ $B=\left\{\dfrac{n}{n+1}\,/\,n\in\mathbb{N}\right\}$ $C=(0,7)$

$D=\mathbb{N}$ $E=\left\{n-\dfrac{1}{n^2}\,/\,n\in\mathbb{N}\right\}$ $F=\{1,2,3,4\}$

$G=\{5;\,5{,}9;\,5{,}99;\ldots\}$ $H=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x-2|<1\}$ $I=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|>3\}$

En cada caso

a) ¿Cuáles están acotados superiormente?

b) ¿Cuáles están acotados inferiormente?

c) ¿Cuáles de ellos tienen a 0 como cota inferior y cuáles a 7 como cota superior?

d) Determine en los casos que exista, el ínfimo y el supremo.

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 5 Sea $A = \left\{ \dfrac{3(-1)^n + 2}{n};\ n \geq 2,\ n \in \mathbb{N} \right\}$. Entonces A
(Marque la única respuesta correcta)

☐ no tiene ni ínfimo ni supremo.

☐ tiene ínfimo y tiene supremo.

☐ tiene ínfimo y no tiene supremo.

☐ no tiene ínfimo y tiene supremo.

Ejercicio 6 Sea $B = \{y \in \mathbb{R}:\ y = x^2 - 3x + 2,\ x \in \mathbb{R}\}$. Entonces B
(Marque la única respuesta correcta)

☐ no tiene ni ínfimo ni supremo.

☐ tiene ínfimo y tiene supremo.

☐ tiene ínfimo y no tiene supremo.

☐ no tiene ínfimo y tiene supremo.

Ejercicio 7 Sea $C = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 2\}$. Entonces
(Marque la única respuesta correcta)

☐ $\inf C = -2$, $\sup C = 2$.

☐ $\inf C = 1$, $\sup C = 5$.

☐ $\inf C = 1$, $\sup C = 2$.

☐ $\inf C = -2$, $\sup C = 5$.

Problemas y Complementos

Ejercicio 8 Dados los números 3,14 y π

a) Halle un número racional comprendido entre ambos.

b) Halle un número irracional comprendido entre ambos (Ayuda: escriba su desarrollo decimal).

Ejercicio 9 Sean A y B dos conjuntos de números reales no vacíos y acotados de modo que $A \subset B$. Ordene de menor a mayor los siguientes números:

$$\sup A, \, \sup B, \, \inf A, \, \inf B.$$

Exhiba un ejemplo donde $\sup A = \sup B$ y otro donde la desigualdad sea estricta.

Ejercicio 10

a) Demuestre que $\sqrt{6}$ es un número irracional.

b) Demuestre que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ es un número irracional.

Ejercicio 11 Escriba el número racional 0,12424... como una fracción.

Práctica 3: Sucesiones

PRIMERA PARTE: NOCIÓN DE LÍMITE

Ejercicios introductorios

Ejercicio 1 Dadas las sucesiones

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \qquad b_n = \frac{2^{n-1}}{(2n-1)^3}$$

$$c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \qquad d_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}$$

Calcule a_9 ; b_5 ; c_3 ; d_{11}.

Ejercicio 2 Para cada una de las siguientes sucesiones, proponga el término general a_n y clasifique las mismas en convergentes o divergentes.

a) $1,\ 2,\ 3,\ 4, ...$

b) $-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4}, ...$

c) $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4}, ...$

d) $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{16}, ...$

e) $-1,\ 2,\ -3,\ 4, ...$

f) $0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{4}, ...$

g) $1,\ -1,\ 1,\ -1, ...$

h) $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4}, ...$

i) $1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 3...$

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 3 Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{2n}{n+1}\right)^3$

b) $b_n = \frac{3n^2+2}{2n^2+5n}$

c) $c_n = \frac{3n^2+2}{2n^3+5n}$

d) $d_n = \frac{-4n^3+2n^2-3n-1}{5n^2+4}$

e) $e_n = \frac{\sqrt{n^3}+2}{n^2-1}$

f) $f_n = \sqrt{\frac{4n^2-1}{9n^2+2}}$

g) $g_n = \frac{-n}{\sqrt{n^2-n}+n}$

Ejercicio 4

Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \frac{n^2-5n+7}{n+3} + \frac{n^2+5}{n+1}$

b) $b_n = \frac{n^2-5n+7}{n+3} - \frac{n^2+5}{n+1}$

c) $c_n = \sqrt{n^2+n-2}+n$

d) $d_n = \sqrt{n^2+n-2}-n$

e) $e_n = \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-n-3}$

f) $f_n = \sqrt{\dfrac{2n^2-1}{3n^2+2}+\dfrac{3n-1}{2n+3}}$

g) $g_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

h) $h_n = n(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

i) $i_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}-n}$

j) $j_n = \sqrt{n}(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n})$

Ejercicio 5 Calcule, si existen, los siguientes límites

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n+5}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2+(-1)^n)\operatorname{sen} n}{n}$

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 6 Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{n+1}+(-1)^n\frac{n^5+\cos n}{2-n^6}\right)$$

Ejercicio 7 Halle los valores de a y b para que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^6+3bn^4+2\sqrt{n}}{5n^4-3n+4}=4.$$

Ejercicio 8 Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+7n^2}{5+n^2}+\sqrt{n^2+6n+17}-\sqrt{n^2+17}\right).$$

Ejercicio 9 ¿Para qué valor de $a\in\mathbb{R}$ vale que

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n^2+a}-\sqrt{n^2+3}\right)=a-5?$$

Ejercicio 10 Sea $a_n = \sqrt{9n^2+bn}-3n$.
a) Encuentre todos los $b\in\mathbb{R}$ para los cuales $0<\lim\limits_{n\to\infty} a_n<1$
b) Encuentre $b\in\mathbb{R}$ para que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2b-11$

Ejercicio 11 Encuentre $p > 0$ sabiendo que existe y es positivo el

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sqrt{n^p+7} - \sqrt{n^p+2}\right)$$

Ejercicio 12 En cada caso, marque la única respuesta correcta

a) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y b_n es acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$

☐ oscila
☐ tiende a más infinito
☐ es una indeterminación
☐ está acotada.

b) La sucesión $\dfrac{n^4}{n+1} + \cos n$

☐ oscila
☐ tiende a más infinito
☐ es una indeterminación
☐ está acotada.

c) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

☐ es igual a 0
☐ tiende a más infinito
☐ es una indeterminación
☐ no existe

Ejercicio 13 Marque la única respusta correcta

El $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n} - 1}{n^2+1} =$

☐ 0
☐ $-\infty$
☐ $+\infty$
☐ 1

Ejercicio 14 Marque la única respuesta correcta

El $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 + 7n^2 + \cos n}{7n^3 + 2n^2 + \cos n}$

☐ no existe
☐ $= \dfrac{2}{7}$
☐ $= \dfrac{7}{2}$
☐ 1

SEGUNDA PARTE: SUCESIONES MONÓTONAS

Ejercicios introductorios

Ejercicio 15 Calcule, si existen, los siguientes límites

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

b) $\lim_{n\to\infty} (1,5)^n$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$

d) $\lim_{n\to\infty} (3+\operatorname{sen} n)(0,8)^n$

e) $\lim_{n\to\infty} (0,9)^n(1,1)^{n+1}$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+4^{n+1}+2}{2^{2n}+2^n}$

g) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1}$

h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n^3+2n^2+1}{n^2+2}}$

i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5n+1}{3n+1}}$

j) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{5n^2+3}\right)^{1/n}$

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 16 Calcule, si es posible, los siguientes límites

a) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n-1}$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{17}{n}\right)^n$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-5}\right)^n$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+1}{3n-5}\right)^n$

e) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

f) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2-5}\right)^{\frac{n^2+2}{2n+1}}$

g) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\operatorname{sen} n}{n^2}\right)^n$

h) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\cos n}{5n^3+1}\right)^{2n^2+3}$

Ejercicio 17 Calcule, si es posible, los siguientes límites

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{n}\right)^n$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{n^2}\right)^n$

c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^{n+1}}$

d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^{2n+1}+\cos n}{2.\,9^n+\operatorname{sen} n}$

e) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3.\,2^n+n}{2^{n+1}+n^3}$

Ejercicio 18 Calcule, si existen, los siguientes límites

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n2^n}{n!}$

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^{10}}{n!}$

d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n!}{3^n+5n!}$

Ejercicio 19 En cada caso, la sucesión a_n se encuentra sujeta a las condiciones indicadas. Calcule, cuando sea posible, su límite.

a) $2-\dfrac{3}{2^n} < 5-2a_n < 1+\sqrt[n]{n}$

b) $\dfrac{1}{a_n} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

c) $0 < 3a_n+2 < \dfrac{2^n n!}{n^{2n+1}}$

d) $2a_n+6 > \dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}-1}$

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 20 Sea a_n una sucesión que satisface

$$\frac{5}{\sqrt[n]{n}} < \frac{2}{a_n} < \sqrt[n]{5^n+2}$$

Calcular, si existe, el $\lim_{n\to\infty} a_n$

Ejercicio 21 Sean $a_n = n(0,95)^n$ y $b_n = \dfrac{(1,02)^n}{\sqrt{n}}$. Calcule

a) $\lim_{n\to\infty} a_n$.

b) $\lim_{n\to\infty} b_n$.

c) $\lim_{n\to\infty} (a_n)(b_n)$.

Ejercicio 22 Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$ sabiendo que $0 < 5-3a_n \leq 7^n\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n^2}$

Ejercicio 23 Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n n^2 + n}.$$

Ejercicio 24 Halle todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la sucesión $a_n = \dfrac{x^{2n+1}}{n^3\ 4^{n+1}}$ es convergente. Para los x hallados calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ejercicio 25 Calcule, si existe, el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n^4 + 2n^2}{n^4 + n^2 + 1} \right)^{3n^2} + \frac{\operatorname{sen}(n^4 + 2n^2)}{3n^2} \right]$$

Ejercicio 26 Sea a_n tal que $5n - 6n^2 - 7 < 4n^2 a_n < \dfrac{n^3 + n^2 3^n}{n!} - 6n^2$. Calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ejercicio 27 Halle $a \in \mathbb{R}$ para que el $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n^3 + a}{5n^3 + 3} \right)^{4n^3} = e^3$.

Ejercicio 28 Sea $a_n = \left(\dfrac{5n + 8}{5n + 3} \right)^n . \left(\dfrac{n^5 + 1}{n^4 + 1} \right)$. Calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(5a_n)}{\sqrt{a_n}}$.

Ejercicio 29 Sea a_n tal que $\left(\dfrac{2n + 11}{2n + 3} \right)^n \leq 2a_n - 6 \leq e^4 + \dfrac{\cos(9n)}{4^n}$. Calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ejercicio 30 Sea $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{k^n . n!}$. ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{N}$, resulta $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

Problemas y Complementos

Ejercicio 31 Muestre que el valor del $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{5}{n} + \dfrac{b}{n^2} \right)^{n^2}$ no depende de la constante b.

Ejercicio 32 Usando subsucesiones, pruebe que cada una de las siguientes sucesiones carece de límite:

a) $0,\ 1,\ 2,\ 0,\ 1,\ 2, ...$

b) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2} \right)$

c)

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 2 + \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejercicio 33 Se sabe que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L > 0$. Calcule

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{2n} - a_{3n})$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Ejercicio 34 Considere la sucesión definida recurrentemente como

$$a_1 = 1, \; a_{n+1} = 2\, a_n, \; n \in \mathbb{N}.$$

a) Calcule el cociente de D$'$ Alembert. A partir del mismo, concluya que la sucesión es creciente.

b) Muestre que $a_n = 2^{n-1}, \; n \geq 1$.

Ejercicio 35 Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones dadas en forma recurrente:

a) $a_1 = 5, \; \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{3n}$.

b) $a_1 = 1, \; a_{n+1} = \dfrac{n^n + 3^n}{n!} a_n$.

Ejercicio 36 Se definen $a_n = (-1)^n \dfrac{3n-1}{7n+2}$ y $b_n = (a_n)^2$.

a) Pruebe por medio de subsucesiones que a_n no tiene límite.

b) Calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Ejercicio 37 Sea (a_n) la sucesión definida como $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt[n]{3^n + 2^n}}$$

Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} (2,9)^n.a_n$.

Ejercicio 38 Sea a_n una sucesión definida en forma recurrente como :

$$a_1 = 5, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{5n}.$$

Se define $b_n = n^2\, a_n$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Práctica 4: Límites y Continuidad

PRIMERA PARTE: LÍMITE DE FUNCIONES

Ejercicios introductorios

Ejercicio 1 Calcule los siguientes límites

a) $\lim_{x\to+\infty} (x^4 - 10x + 1)$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+1}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+3x+1}{2x^4+2x^2+1}$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x+5}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}-x}{x+5}$

f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x-\cos x}$

g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+6}}{5x-1}$

h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5-\sqrt{x}}{1+4\sqrt{x}}$

i) $\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2+1})$

j) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-6x-40} - x\right)$

k) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

l) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|+1}$

m) $\lim_{x\to+\infty} e^{-4x}$

n) $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Ejercicio 2 Calcule, si es posible, los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -3x^5 + x^2 - 1$

b) $f(x) = \sqrt{9+x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{1-x}$

d) $f(x) = \frac{x^2+3}{2x-1}$

e) $f(x) = \frac{x^3-5x^2}{x+3}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2-2x+3} - x$

g) $f(x) = \frac{e^{x+1}+4}{3-2e^x}$

h) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

i) $f(x) = e^{1/x}$

j) $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$

Ejercicio 3 Calcule, si se puede, los límites en el infinito, además de los límites en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \frac{1}{x^3},\ x = 0^+, x = 0^-$

b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$, $x = -3^+, x = -3^-$

c) $f(x) = \dfrac{5x^2}{x+3}$, $x = -3^+, x = -3^-$

d) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$, $x = -1^+$

e) $f(x) = e^{1/x}$, $x = 0^+, x = 0^-$

f) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$, $x = 0^+, x = 0^-$

g)$f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}, x = 1, x = -1^+, x = -1^-$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}, x = 1^-, x = -1^+$

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 4 Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^4-2}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{4x-12}$

c) $\lim\limits_{x\to 3^+} \left(\dfrac{x^2-2x-3}{4x-12}\right)^{\dfrac{2}{x-3}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x^2-1}{x-2} - \dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-x}$

g) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{\sqrt{2x+6}-4}$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x \left(2 + \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

Ejercicio 5 Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{2x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\operatorname{sen} 2x}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen} 3x}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x+6)}{x+2}$

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(3x)}{x}$

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(5x)}{x^2}$

g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x+4\operatorname{sen}(2x)}{x^2+5\operatorname{sen} x}$

Ejercicio 6 Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{\dfrac{x^2+1}{x+1}}$

b) $\lim_{x\to -\infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x+4}\right)^{\dfrac{2x^2+1}{x-3}}$

c) $\lim_{t\to 0} (1+3t)^{1/t}$

d) $\lim_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{1/x}$

e) $\lim_{x\to 2^+} \left(\dfrac{3x+2}{5x-2}\right)^{\dfrac{1}{x-2}}$

f) $\lim_{x\to 2^-} \left(\dfrac{3x+2}{5x-2}\right)^{\dfrac{1}{x-2}}$

g) $\lim_{x\to 2^-} \left(1+\dfrac{3}{x+1}\right)^{\dfrac{x^2}{2x+1}}$

h) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\ln(h+2)-\ln 2}{h}$

i) $\lim_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y}$

j) $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^h-1}{h}$

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 7 Sea $f(x)$ una función tal que

$$\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} < f(x) < \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} + \frac{19}{4}$$

Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{x f(x) + \operatorname{sen} x}{x}$.

Ejercicio 8 Determine en cada caso el valor de la constante a:

a) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{ax^2+4x+1}-1}{x} = 5$

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+ax-1}-\sqrt{x^3+ax-1}}{x-1} = -2$

Ejercicio 9 Halle los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de las siguientes funciones. Además calcule, si existe, el límite en los puntos indicados

a) $f(x) = \dfrac{10e^{2x}}{5e^{2x} + 3x^2}$ *b)* $g(x) = \dfrac{4e^{-x^2}}{x^2 - 16}$, $x = 4$, $x = -4$.

Ejercicio 10 Marque la única respuesta correcta:

a) El $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

☐ no existe ☐ es igual a 1 ☐ es igual a 0 ☐ es infinito

b) El $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + ax + 1} - 1}{x} = 2$ para

☐ ningún valor de a ☐ $a = 4$ ☐ $a = 0$ ☐ todo a

Problemas y Complementos

Ejercicio 11 Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x\pi)}{\operatorname{sen}(3x\pi)}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x\pi)}{x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + 5x)}{e^x - 1}$

Ejercicio 12 Sea $f(x) = \dfrac{2x^4}{x^3 + 1}$. Halle los valores de a y b para los cuales el $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

Ejercicio 13 Sea $f(x) = \dfrac{e^x + 3x^2}{e^x + x^2}$. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de f.

SEGUNDA PARTE: CONTINUIDAD

Ejercicios introductorios

Ejercicio 14 Determine los puntos de discontinuidad de las funciones dadas a continuación. Vea si en esos puntos la discontinuidad es evitable.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} & \text{si } x > 7 \\ 0 & \text{si } x \leq 7. \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$$

Ejercicio 15 En cada caso determine el o los valores de la constante a para los cuales las funciones resulten continuas.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} x^2+ax & \text{si } x \geq 2 \\ a-x^2 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

$$c)\ f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x+1}} & \text{si } x > -1 \\ 3x+a & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

$$d)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 5x+a & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 16 Muestre que las siguientes funciones tienen una discontinuidad evitable en los puntos señalados

$$a)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{\sqrt{x+4}-3} & \text{si } x \neq 5, x \geq -4 \\ 0 & \text{si } x = 5. \end{cases} \text{, en } x = 5$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4} & \text{si } x \neq 9, x \geq -7 \\ 0 & \text{si } x = 9. \end{cases} \text{, en } x = 9$$

Ejercicio 17

a) Demuestre que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(-1, 1)$. Encuentre un intervalo de longitud $0,2$ o menor que contenga dicha solución.

b) Demuestre que la ecuación $x^2 = \sqrt{x+1}$ tiene al menos una solución. Encuentre un intervalo de longitud 1 o menor que la contenga.

Ejercicio 18 Pruebe que las siguientes ecuaciones tienen al menos una solución real. En cada caso encuentre un intervalo de longitud 1 o menor que contenga a una de ellas.

a) $2x - 1 = \cos x$

b) $x^{11} + x^2 + 1 = 0$

c) $\ln x = -3x$

d) $\dfrac{x}{x^4+1} = 0,2$

e) $\dfrac{x^2+1}{x+2} + \dfrac{x^4+1}{x-3} = 0$

Ejercicio 19 Para cada una de las siguientes funciones determine ceros, puntos de discontinuidad. A partir de ellos, halle el conjunto donde la función es positiva.

a) $f(x) = x^2(x+3)(x-2)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$

c) $f(x) = x \ln x$

d) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x+5}$

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 20 Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(ax)}{4x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$.

Halle $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x = 0$.

Ejercicio 21 Sea $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(ax) - 1}{2 \operatorname{sen} x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en $x = 0$ cualquiera sea $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 22 Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2+3-3\cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Halle $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x = 0$

Ejercicio 23 Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-6\sqrt{x}}{x-4} & \text{si } x > 4 \\ a & \text{si } x \leq 4 \end{cases}$

Halle $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x = 4$.

Ejercicio 24 Marque la única respuesta correcta

Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6-2\sqrt{x^2+5}}{2-x} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases}$

La función f es continua en $x = 2$ para

☐ $k = 2$ ☐ $k = \dfrac{4}{3}$ ☐ $k = -\dfrac{4}{3}$ ☐ ningún k

Ejercicio 25 Marque la única respuesta correcta

Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{x} + 2 & \text{si } x > 0 \\ \cos(ax) + 3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

La función f es continua en $x = 0$ para

☐ ningún valor de a ☐ $a = 2$ ☐ $a = 1$ ☐ cualquier valor de a

Problemas y Complementos

Ejercicio 26 Sea $f : [-8; +\infty) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{\sqrt{x+8}-3} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que f resulte continua en $x = 1$.

b) ¿Se puede afirmar que $f(x_0) = 2$ para algún $x_0 > 1$? ¿Por qué?

Ejercicio 27 Encuentre una solución aproximada de la ecuación

$$x^5 - 6x + 4 = 0$$

con un error menor a $0,01$.

Ejercicio 28 Sea f una función continua tal que $f(3) = 1$. Probar que existe un intervalo abierto I que contiene a 3 y tal que $0 \leq f(x) \leq 2$ para todo $x \in I$.

Ejercicio 29 Sea f una función continua tal que $f(0) = \dfrac{1}{2}$ y $f(2) = -1$. Sea $g(x) = \dfrac{x^2+1}{f(x)}$. Probar que existe $x_0 \in (0;2)$ donde g tiene una discontinuidad. ¿Es evitable?

Ejercicio 30 Determine los puntos de discontinuidad de las funciones dadas a continuación. Vea si en esos puntos la discontinuidad es evitable.

$a) f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x(x-\pi)}$

$b) f(x) = \dfrac{x^2}{1-\cos x}$

Práctica 5: Derivada

Ejercicios introductorios

Ejercicio 1 Justifique, por medio de los cocientes incrementales, las siguientes igualdades

a) $f(x) = 7 \Longrightarrow f'(x) = 0$

b) $f(x) = 3x + 5 \Longrightarrow f'(x) = 3$

c) $f(x) = (x+1)^2 \Longrightarrow f'(4) = 10$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow f'(2) = -\dfrac{1}{4}$

e) $f(x) = \sqrt{x+5} \Longrightarrow f'(4) = \dfrac{1}{6}$

Ejercicio 2 Halle, usando el cociente incremental, el valor de la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican. Escriba la ecuación de la recta tangente en esos mismos puntos,

a) $f(x) = 4x + 7,$ en $x = 3$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x-1},$ en $x = 5$

c) $f(x) = \sqrt{x+12},$ en $x = 13$

d) $f(x) = \ln(x),$ en $x = 1$

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 3 ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ la recta tangente es paralela al eje x?

Ejercicio 4 Sean $f(x) = 3x^2 + x$ y $g(x) = 5x + 2$. Encuentre el punto en el cual las rectas tangentes de f y g resultan paralelas. Halle las correspondientes ecuaciones.

Ejercicio 5 Usando las reglas de derivación, halle las derivadas de las siguientes funciones en su dominio de definición.

a) $f(x) = x^3 + x^2 + \operatorname{sen}(x)$

b) $f(x) = x^2 \cos(x)$

c) $f(x) = 3\operatorname{sen}(x)$

d) $f(x) = x\ln(x)$

e) $f(x) = x^5 + \dfrac{1}{x}$

f) $f(x) = e^x + \ln(x)$

g) $f(x) = x\operatorname{sen}(x) + e^x\cos(x)$

h) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

i) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$

j) $f(x) = (x+2)(x^2+1)\ln(x)$

k) $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2+1}$

Ejercicio 6 Usando la regla de la cadena, halle las derivadas de las siguiente funciones en su dominio de definición

a) $f(x) = (1+x)^2$
b) $f(x) = (1+x)^3$
c) $f(x) = (1+x)^{2001}$
d) $f(x) = e^{x+3}$
e) $f(x) = (1-x)^3$
f) $f(x) = \cos(3x)$
g) $f(x) = 3\text{sen}^4(x)$
h) $f(x) = \ln(x+1)$
i) $f(x) = \ln(2+\text{sen}(x))$
j) $f(x) = e^{x^2+\cos(x)}$
k) $f(x) = \ln^2(x^2+1)$
l) $f(x) = \ln(5x)$
m) $f(x) = \dfrac{(2x^3+3)^2}{\ln(x^2+1)}$
n) $f(x) = \sqrt{4+5x^2}$

Ejercicio 7 Sean f y g funciones tales que $f(x) = 1+\sqrt{x}$, $g'(x) = \cos^2(3x)+1$ y $g(0) = 4$. Calcule $(f \circ g)'(0)$ y $(g \circ f)'(0)$.

Ejercicio 8 Calcule la derivada de la función en su dominio de definición, siendo $f(x) =$

a) x^x
b) $x^{3x} + 2^x$
c) $(\text{sen}^3(x))^{\ln(x)}$
d) $x^{\sqrt{x}}$

Ejercicio 9 Pruebe que la función $f(x) = 7e^{kx}$ es solución de la ecuación $f'(x) = kf(x)$.

Ejercicio 10 Para cada una de las siguientes funciones estudie la continuidad y, mediante el estudio del cociente incremental, la derivabilidad en el punto indicado.

a) $f(x) = \begin{cases} 3+\sqrt{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 2x+4 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ en $x = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & \text{si } x > 1 \\ 3x+1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ en $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 11 Sea $f(t) = te^{3t}$. ¿Existe alguna recta tangente al gráfico de f que además pase por el punto $(0,0)$?

Ejercicio 12 Pruebe que el gráfico de la función $f(x) = x + \ln(x)$ tiene una recta tangente que pase por el punto $(0,0)$.

Ejercicio 13 Halle, si existen, la o las ecuaciones de las rectas tangentes al gráfico de $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ que pasen por el punto

a) $(1,0)$ *b)* $(0,0)$ *c)* $(0,4)$.

Ejercicio 14 La recta tangente de la función f en el punto de abscisa $x = -1$ tiene ecuación $y = -5x + 3$. Calcule la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $g(x) = f(-x^2 + \operatorname{sen}(\pi x))$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Ejercicio 15 Se sabe que $y = 2x + 1$ es la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 2$. Halle la ecuación de la recta tangente al gráfico de $g(x) = \dfrac{e^{f(x^2+1)-5x}}{\cos(\pi x) + 3}$ en $x_1 = 1$.

Ejercicio 16 Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + a\ln(x) & \text{si } x \geq 1 \\ bx + 5 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

Determine a y b para que f sea derivale en $x = 1$.

Ejercicio 17 Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Halle los valores de a y b para que f resulte derivable.

Ejercicio 18 Marque la única respuesta correcta: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$. Entonces, en $x = 1$

☐ f es continua pero no derivable.

☐ f es continua y derivable.

☐ f no es continua pero si es derivable.

☐ f no es ni continua ni derivable.

Ejercicio 19 Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Marque la única respuesta correcta

☐ f es continua y derivable en $x = 0$.

☐ f es continua pero no derivable en $x = 0$.

☐ f no es continua ni derivable en $x = 0$.

☐ f no es continua pero si derivable en $x = 0$.

Problemas y Complementos

Ejercicio 20 Dados a y $b \in R$ muestre que $f(x) = a\,\mathrm{sen}(x) + b\cos(x)$ es solución de la siguiente ecuación

$$f^{''}(x) + f(x) = 0$$

Ejercicio 21 Considere la función $f : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-2} & \text{si } x \neq 4 \\ a & \text{si } x = 4 \end{cases}.$$

Encuentre $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua. Determine si resulta derivable en $x_0 = 4$.

Ejercicio 22 Pruebe que la función $f(x) = x|x|$ es derivable para todo x, que $f^{'}(x)$ es continua pero que no existe $f^{''}(0)$.

Ejercicio 23 La temperatura C de un cuerpo que inicialmente estaba a 90 grados Celsius, se enfría de acuerdo a la ley $C(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$ (se está suponiendo que la temperatura ambiente es de 20^o Celsius) donde t es el tiempo en minutos.

a) Calcule con qué velocidad se está enfriando el cuerpo a los 5 minutos.

b) Muestre que la velocidad de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura C y la temperatura ambiente. Más precisamente:

$$C^{'}(t) = -0,1\,(C(t) - 20)$$

c) Muestre que la velocidad de enfriamiento va tendiendo a 0 conforme avanza el tiempo.

Ejercicio 24 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5e^{x^3+2x}$

a) Muestre que $f^{'}(x) > 0$ para todo x. Además, note que $f(0) = 5$.

b) Use el teorema de la función inversa para justificar la existencia de $\left(f^{-1}\right)^{'}(5)$ y calcule su valor.

Práctica 6: Teorema del Valor Medio

Ejercicios introductorios

Ejercicio 1

a) Considere la función $f(x) = x^{2/3}$ definida en el intervalo $[-1, 1]$. Esta función es continua sobre este intervalo y $f(-1) = f(1)$. Sin embargo, su derivada no se anula nunca. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Rolle?

b) Sea $f(x) = x^3 + 3x^5$, $-1 \leq x \leq 1$. Pruebe que en $x_0 = 0$ f no tiene extremo y que $f^{'}(0) = 0$. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Fermat?

Ejercicio 2 Considere la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x$ y el intervalo cerrado, $[-1, 3]$. Compruebe que el valor $c \in (-1, 3)$ al que hace referencia el Teorema del Valor Medio es calculable en este caso.

Ejercicio 3 Pruebe las siguientes identidades

a) $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ *b*) $\ln(x^a) = a\ln(x)$

(**Ayuda**: use que si dos funciones f y g tienen la misma función derivada, entonces $f(x) = g(x) + c$, donde c es una constante.)

Ejercicio 4 Pruebe que la única solución de la ecuación

$$f^{'}(x) = 2f(x), \qquad f(0) = 1,$$

es $f(x) = e^{2x}$. (**Ayuda**: si $u(x)$ es solución de la ecuación estudie la derivada de $h(x) = \dfrac{u(x)}{e^{2x}}$.)

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 5 Para las siguientes funciones, pruebe que el gráfico corta al eje x sólo una vez.

a) $f(x) = -3x + \operatorname{sen}(x), \quad x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = e^{-x} - \ln(x), \quad x > 1$

c) $f(x) = x + \ln(x), \quad x > 0$

d) $f(x) = x^{2n+1} + x^3 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$

e) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x} + 1} - 2, \ x > 0$

Ejercicio 6 Calcule los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(3\pi x)}-1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{6\,(x-3)^2\ \ln(x-3)}{x-4}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1)+x^2-4}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x-1+\cos x}{3x+\operatorname{sen} x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-x-1}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)\,e^{x^2}}{x^2-1}$

Ejercicio 7 Calcule los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x+3x^2}{x^2+7x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\,e^{-x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-2^x)^{\operatorname{sen}(x)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}$

Ejercicio 8 Calcule los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(7x)+2x^2\ln x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)\,(e^x-1)$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 9 Mediante los cocientes incrementales correspondientes, decida si las siguientes funciones son derivables en el punto indicado.

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(3\pi x)}-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ -3\pi & \text{si } x=1 \end{cases}$ en $x=1$

b) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}(7x)+2x^2\ln x & \text{si } x>0 \\ 7x & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$ en $x=0$.

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4x-1+\cos x}{3x+\operatorname{sen} x} & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$ en $x=0$.

Ejercicio 10 Para las siguientes funciones, encuentre a para que f resulte continua. Para el valor de a hallado, decida si la función resulta derivable en el punto indicado.

a) $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x - 10 + 6\sqrt{x}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$ en $x = 1$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5\cos(6x) - a}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$.

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax + 3 - 3\cos(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 6 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x = 0$.

Ejercicio 11 Sea

$$f\,(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(2x-5\right)}{x-3} & \text{si } x > 3 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{4 - 4\cos\left(x-3\right)}{(x-3)^2} & \text{si } x < 3 \end{cases}.$$

a) ¿Para qué valor de $k \in \mathbb{R}$, f resulta continua en $x = 3$?

b) Para el valor de k hallado, ¿existe $f'(3)$?

Ejercicio 12 Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3^{5x+\cos(2x)} + 8x + \ln\left((4x+1)^{-2}\right).$$

Pruebe que $f(x) \neq 1\ \forall x \geqslant 0$.

Ejercicio 13 Considere la función $f\,(x) = \begin{cases} \dfrac{8x^2 + a\left(1 - \cos(x)\right)}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$

Encuentre el valor de a para que f resulte derivable en $x = 0$ y además sea $f^{'}(0) = 3$.

Ejercicio 14 Sea $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente. Pruebe que $2^{h(x)-5} + 3x \neq \operatorname{sen}(x)\ \forall x \geqslant 0$.

Ejercicio 15 Pruebe la desigualdad $x^6 + x^4 + x^2 + 3 \geqslant 12x - 6,\ x \geqslant 1$

Ejercicio 16 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^{3/2}\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Entonces, en $x = 0$
Marque la única respuesta correcta:

- ☐ f es continua pero no derivable.
- ☐ f es continua y derivable.
- ☐ f no es continua pero si es derivable.
- ☐ f no es ni continua ni derivable.

Ejercicio 17 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ ax - a + 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}.$$

Entonces f resulta derivable en $x = 1$ para
Marque la única respuesta correcta:

- ☐ $a = \dfrac{1}{2}$
- ☐ todo $a \in \mathbb{R}$
- ☐ $a = -\dfrac{1}{2}$
- ☐ $a = 1$

Problemas y Complementos

Ejercicio 18 Sea $R(x)$ una función con 3 derivadas continuas en $x = 0$ y tal que $R(0) = R'(0) = R''(0) = 0$. Pruebe que $\dfrac{R(x)}{x^3} = \dfrac{R'''(c)}{3!}$ para algún c entre 0 y x. (**Ayuda**: use el Teorema de Cauchy 3 veces.)

Ejercicio 19 Explique por qué no es correcta la siguiente aplicación de la Regla de L$^{'}$Hospital.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+2x-1}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x+2}{2} = 4$$

Ejercicio 20 Muestre por qué no es posible utilizar la Regla de L$^{'}$Hospital para calcular el límite indicado en cada caso y encuentre el límite por otros medios

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x-e^{-x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

Ejercicio 21 Calcule los siguientes límites donde la Regla de L'Hospital no ayuda.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen} x}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen}(x)}{x+\cos x}1$

Ejercicio 22 Considere $f(x) = 4\sqrt{x} + 3\ln(x) - 2,\ \forall\, x > 0$. Pruebe que existe la función inversa f^{-1} y calcule $\left(f^{-1}\right)^{'}(2)$ (Observe que $f(1) = 2$.)

Ejercicio 23 Sea f una función continua y derivable tal que $f(-2) = f(5) = 0$. Puebe que existe un $c \in (-2, 5)$ tal que $f^{'}(c) = 200f(c)$
Ayuda: considere $g(x) = e^{-200x}f(x)$.

Ejercicio 24 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con dos derivadas continuas tal que $f(0) = 2,\ f^{'}(0) = \frac{5}{6},\ f^{''}(0) = 5$. Se define $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en la forma

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(6x)-2}{5x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} h(x)\ \ y\ \ h'(0)$.

Ejercicio 25 Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = e^{4x} + x^5 + 2$. Pruebe que es biyectiva y que $f^{-1}(3) = 0$. Calcule

$$\lim_{y \to 3} \frac{f^{-1}(y)}{2y - 6}$$

Práctica 7: Estudio de Funciones

PRIMERA PARTE: CONSTRUCCIÓN DE CURVAS

Ejercicios introductorios

Ejercicio 1 Encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^7 + 7x^5 + 4x$

b) $f(x) = 2 - x^{\frac{1}{3}}$

c) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

d) $f(x) = e^{(x-1)^2}$

e) $f(x) = xe^x$

Ejercicio 2 Encuentre, si las hay, las ecuaciones de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas (tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.) de las siguientes funciones. Localice en un dibujo, la posición del gráfico de la función con respecto a las asíntotas halladas:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x+1)}$

c) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 3 Encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 e^{-x}$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[-\pi, \pi]$

c) $f(x) = x \ln x$

d) $f(x) = \dfrac{1 - x}{2x + 3}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

g) $f(x) = x \ln^2 x$

h) $f(x) = 2x^4 - 4x^2$

i) $f(x) = e^{2x^4 - 4x^2}$

Ejercicio 4 Determine $k \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = \dfrac{x + k}{x^2 + 1}$ alcance un extremo local en $x = 2$. ¿Es un máximo o un mínimo local?

Ejercicio 5 Encuentre, si las hay, las ecuaciones de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas (tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$.) de las siguientes funciones. Localice en un dibujo, la posición del gráfico de la función con respecto a las asíntotas halladas:

a) $f(x) = x + e^x \operatorname{sen} x$

b) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

c) $f(x) = x \ln\left(e - \dfrac{1}{x}\right)$

d) $f(x) = 2x + \sqrt{1 + x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{3e^x}{5e^x + 1}$

Ejercicio 6 Determine los intervalos de concavidad y convexidad y localice los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 1$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

e) $f(x) = xe^{-x}$

f) $f(x) = x^2 \ln x$

Ejercicio 7 Para cada una de las siguientes funciones, halle el dominio, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales. Determine cuáles de ellos son absolutos. Escriba la ecuación de las asíntotas. Determine, si la cuenta lo permite, los intervalos de concavidad y de convexidad y los puntos de inflexión. Con la información obtenida haga un gráfico aproximado de la función:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$

b) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

d) $f(x) = xe^{-x}$

e) $f(x) = x \ln x$

f) $f(x) = x \ln^2 x$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

h) $f(x) = x^2 e^{-x}$

i) $f(x) = \dfrac{x^2 + 100}{x^2 - 25}$

j) $f(x) = x\sqrt{4 - x}$

k) $f(x) = x^2(2 - x)^2$

l) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1 - x)$

m) $f(x) = x^5 - 5x$

n) $f(x) = (1 + x + 2x^2)e^x$

o) $f(x) = \sqrt{x - 2} - 5\ln(x - 2)$

p) $f(x) = x - 3(x - 5)^{\frac{2}{3}}$

q) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x - 1)^2}$

r) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

s)*f*) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

t) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{8x}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ 3x - x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Ejercicio 8 Determine la cantidad de soluciones que tienen las siguientes ecuaciones:

a) $x^7 + 3x^5 + 2x + 1 = 0$

b) $e^x = 1 - x$

c) $\dfrac{x^3}{(x-1)^2} = 2$

Ejercicio 9 Pruebe las siguientes desigualdades:

a) $\operatorname{sen} x < x$ si $x > 0$

b) $e^x \geq 1 + x$

c) $x \ln x \geq -1$

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 10 Sea $f(x) = \dfrac{24e^x}{3e^x + 1}$. Halle la imagen de f.

Ejercicio 11 Sea $f(x) = x^2 \ln x$.

a) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = -\dfrac{1}{6}$?

b) ¿Para qué valores de k la ecuación $f(x) = k$ tiene una sola solución?

Ejercicio 12 Determine el mayor valor de k para que la desigualdad

$$x^2 \ln x \geq k,$$

sea verdadera para todo $x > 0$.

Ejercicio 13 Pruebe que $xe^{-8x^2+1} < \dfrac{9}{20}$ si $x > 0$.

Ejercicio 14 Determine los valores de $c \in (0, +\infty)$ para los cuales la ecuación

$$e^{\frac{x^2}{x-1}} = c,$$

tiene una única solución.

Ejercicio 15 Encuentre todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación $\dfrac{e^{4x}}{x^2} = k$ tiene tres soluciones.

Ejercicio 16 Encuentre todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación $\dfrac{e^{\frac{5}{3}x}}{x^5} = k$ no tiene solución.

Ejercicio 17 Sea $f(x) = (x+1)^3 e^{\frac{3}{4}x^2-5} - 3$. Demuestre que para todo $k \in \mathbb{R}$ la ecuación $f(x) = k$ tiene exactamente una solución.

Ejercicio 18 Determine la cantidad de soluciones de la ecuación

$$\sqrt{x-5}\; e^{-4(x-5)^2+1} = 1.$$

Ejercicio 19 Sea $f(x) = \dfrac{2e^{-x^2}}{x^2-4}$. Calcule la imagen de f.

Ejercicio 20 Sea $f(x) = x^3 - 3x + 5$. Pruebe que $f(x) \geq 3$ para todo $x \geq 0$.

Ejercicio 21 Determine la cantidad de soluciones de la ecuación

$$x^2 - \ln(1+9x^2) = -\frac{2}{3}$$

Ejercicio 22 Sea $f(x) = \dfrac{6e^{4x}}{2e^{4x}+3x^2}$. Calcule la imagen de f.

Ejercicio 23 Determine la cantidad de soluciones que tiene la ecuación $\dfrac{2}{x^3} + 486x = 225$

Ejercicio 24 Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que la desigualdad $\ln(4x+3) \leq 4x + a$ es verdadera para todo $x > -\dfrac{3}{4}$.

Ejercicio 25 Demuestre que $x - 1 - x\sqrt{x}$ no toma valores positivos.

Ejercicio 26 Marque la única respuesta correcta.

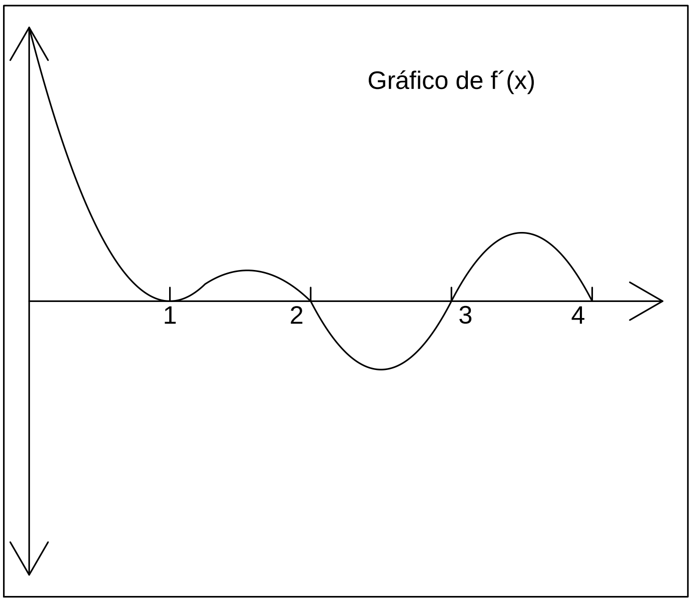
La cantidad de soluciones de la ecuación $\dfrac{x^3}{(x-2)2} = 27$ es

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

Problemas y Complementos

Ejercicio 27 De la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en todo su dominio, se sabe que su derivada se anula en $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$.
Además se tiene que $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0\} = (-\infty, -1) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right)$ y $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) < 0\} = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Encuentre los máximos y los mínimos locales de f.

Ejercicio 28 Sea $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ continua y derivable, tal que el gráfico de la función derivada $y = f'(x)$ es el de la figura dada al final del enunciado de este ejercicio. Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales y los puntos de inflexión de f. Si $f(0) = 1$ haga un gráfico aproximado de $f(x)$.



Ejercicio 29 Sean las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$. Pruebe que existe un único $c > 0$ donde los gráficos de ambas funciones tienen rectas tangentes paralelas en el punto de abscisa $x = c$.

SEGUNDA PARTE: OPTIMIZACIÓN

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 30 Para cada una de las siguientes funciones, analice la existencia de extremos absolutos donde se indica:

a) $f(x) = 3x + 1$, $[-1, 3]$

b) $f(x) = x^2 - 1$, $[-1, 1]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $[2, 5]$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $[0, 2]$, $x \neq 1$

e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $(0, 2]$

f) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(-\infty, +\infty)$

g) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$, $[0, \pi]$

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 31 Sea $f : [-4, 7] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{x}{x^2+25}$. Halle los valores máximo y mínimo absolutos de f.

Ejercicio 32 Sea $f(x) = \dfrac{729}{4(x-2)} + (x-2)^2$ con $x \in [3, 11]$. Halle los puntos en los que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

Ejercicio 33 Sea $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{4}{x} - \dfrac{6}{x^2} + 7$. Halle el máximo y el mínimo absolutos de f.

Ejercicio 34 Sea $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2-9}$ con $x \in [-10, 0]$. Halle los valores de x en los que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

Ejercicio 35 Sea $f(x) = (6-x)e^{\frac{x^2}{16}-3}$ con $x \in \left[0, \dfrac{18}{5}\right]$. Halle los valores de x en los que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

Ejercicio 36 Sea $f(x) = 15x + \dfrac{80}{x^3}$ con $x \in [1, 3]$. Halle los puntos de ese intervalo en los que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

Ejercicio 37 Sea $f : \left[2, \dfrac{13}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-4}}{x}$. Halle los valores máximo y mínimo absolutos de f.

Ejercicio 38 Sea $f : [10, 18] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x-5}{\sqrt{3x-27}}$. Halle los valores máximo y mínimo absolutos de f.

Ejercicio 39 ¿Para qué valores de k la ecuación $\sqrt{x-3}e^{-\frac{2}{9}x} = k$ tiene solución en el intervalo $[3, 12]$?

Ejercicio 40 Demostrar que si $0 \leq x \leq 9$ vale que $-128 \leq \sqrt{x}(x^2-80) \leq 3$. ¿Para qué valores de $x \in [0, 9]$ vale la igualdad?.

Ejercicio 41 Sea $f : [-3, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2e^x$. El valor máximo de f en ese intervalo se alcanza en $x =$

☐ -3 ☐ -2 ☐ 0 ☐ 1

Problemas y Complementos

Ejercicio 42 Se quiere ahorrar el máximo de material al hacer un tanque recto de base cuadrada y sin tapa, de manera tal que el volumen sea de $32\ m^3$. Halle las dimensiones del tanque. Haga lo mismo pero ahora con tapa.

Ejercicio 43 Determine las dimensiones de un rectángulo de área $169\ cm^2$ que tengan la diagonal de menor longitud.

Ejercicio 44 Por el punto $(2; 1)$ pasan rectas que determinan triángulos al cortarse con los semiejes positivos. Entre estas rectas, halle la que genera un triángulo de área mínima.

Ejercicio 45 Pruebe que entre todos los números positivos x e y que satisfacen $x^2 + y^2 = 100$, la suma es máxima cuando $x = y$.

Ejercicio 46 Considere el recinto delimitado por el gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$, el eje de las x y la recta $x = 4$. Se inscribe allí un rectángulo de vértices $A = (x; 0)$, $B = (4; 0)$, $C = (4; f(x))$ y $D = (x; f(x))$. Halle el de área máxima. ¿Hay alguno de área mínima?

Ejercicio 47 Considere el gráfico de la función $f(x) = xe^{-x}$, $0 \leq x < +\infty$. De entre todos los triángulos de vértices $(0; 0)$, $(x; 0)$ y $(x; f(x))$ encuentre el de área máxima.

Ejercicio 48 Sea $f(x) = e^{2x+1}\left(x^2 - 7x + \dfrac{1}{2}\right)$. Encuentre todos los puntos para los cuales la pendiente de la recta tangente al gráfico de f resulta mínima.

Ejercicio 49 Para cada $x \in [0,1]$, la recta tangente al gráfico de $f(x) = \sqrt{4-x}$ forma, con los ejes coordenados una triángulo rectángulo. Halle el de menor área. ¿Existe un triángulo de área máxima?

Ejercicio 50 La lata de una gaseosa tiene una capacidad de $354\ cm^3$. Si el costo del material de la tapa es el doble que el del resto de la lata, ¿cómo deben ser las dimensiones de la lata para que el costo del material sea mínimo? (Suponga que la lata es un cilindro).

Ejercicio 51 Sea $f : [-1,8] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$. Pruebe que f no es derivable en $x = 0$ y halle todos los extremos absolutos y locales de f.

Práctica 8: Teorema de Taylor

Ejercicios introductorios

Ejercicio 1 Calcule las siguientes derivadas

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x), \qquad f^{(5)}(x), f^{(70)}(x)$

b) $f(x) = e^x, \qquad f^{(19)}(x), f^{(200)}(x)$

c) $f(x) = e^{kx}, \qquad f^{(20)}(x)$

d) $f(x) = \ln(x+1), \qquad f^{(4)}(x)$

e) $f(x) = 5x^3 + 8x, \qquad f^{(''')}(x), f^{(200)}(x)$

Ejercicio 2 Sea $f(x) = \ln(x+1)$. Encuentre un polinomio $p(x)$ de grado 3 tal que $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p''(0) = f''(0)$ y $p'''(0) = f'''(0)$.

Ejercicio 3 Calcule el polinomio de Taylor de las siguientes funciones hasta el orden indicado en el punto dado.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$	orden	5	$x_0 = 0$
b) $f(x) = \operatorname{sen} x$	orden	4	$x_0 = 0$
c) $f(x) = \operatorname{sen} x$	orden	5	$x_0 = 0$
d) $f(x) = \cos x$	orden	5	$x_0 = 0$
e) $f(x) = \ln x$	orden	4	$x_0 = 1$
f) $f(x) = \sqrt{x}$	orden	3	$x_0 = 4$
g) $f(x) = e^x$	orden	5	$x_0 = 0$
h) $f(x) = (1+x)^6$	orden	6	$x_0 = 0$

Ejercicio 4 Compruebe que el polinomiio de Taylor de orden n de la función $f(x) = e^x$ es $p(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!}$.

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 5 Obtenga el polinomio de Taylor de orden n de las siguientes funciones en $x_0 = 0$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

b) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x$

d) $f(x) = e^{2x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

f) $f(x) = \ln(1+x)$

Ejercicio 6 Sea $q(x) = x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 3x - 2$.

a) Halle los polinomios de Taylor de q en $x_0 = 0$ de orden 1 a 6.

b) Haga lo mismo, sin hacer las cálculos, para

$$p(x) = x^{20} + x^{19} + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Ejercicio 7 Si el polinomio de Taylor de f de orden 5 en $x = 2$ es

$$p(x) = (x-2)^5 + 3(x-2)^4 + 3(x-2)^2 - 8$$

calcule $f^{(4)}(2)$ y $f'''(2)$. ¿Se puede conocer el valor de $f^{(6)}(2)$? ¿Cuánto vale $f^{(6)}(2)$ si el polinomio p es de orden 7?

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 8 Los polinomios de Taylor de orden 4 en $x = 2$ de las funciones f y g son, respectivamente

$p(x) = -2 + 3(x-2) - 3(x-2)^2 + (x-2)^3$ y $q(x) = 5 + 12(x-2)^2 - 7(x-2)^4$

Halle el polinomio de Taylor de orden 2 de $t(x) = f(x)g(x)$ y $s(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ en $x = 2$.

Ejercicio 9 Halle los valores de a y de b de modo que el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = a\ln(1+bx)$ en $x = 0$ sea $p(x) = 2x + \dfrac{3}{2}x^2$.

Ejercicio 10 Determine los valores de a y b para que el polinomio de Taylor de

$$f(x) = \ln(1+x) + ax^2 + bx$$

en $x = 0$ empiece con la potencia de x de exponente lo más grande posible.

Ejercicio 11 La función $f(x) = \sqrt[n]{ax+1}$ tiene como polinomio de Taylor de orden 2 en $x = 0$ a

$$p(x) = 1 + 5x - \frac{75}{2}x^2.$$

Halle los valores de a y de n.

Ejercicio 12 La función f satisface la ecuación $(5x+1)f'(x)+f(x)=1$ y $f(0)=2$. Encuentre el polinomio de Taylor de orden 5 en $x=0$.

Ejercicio 13 Sea $f(x)=\sqrt{ax+1}$ y $p(x)=1+2x+bx^2$. Determine los valores de a y de b para que $p(x)$ sea el polinomio de Taylor de f de orden 2 en $x_0=0$.

Ejercicio 14 Se sabe que la función $f(x)$ cumple $f''(x)=\sqrt{3x^2+5x+a}+7$ y que su polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0=1$ es

$$p(x)=2-7(x-1)+4(x-1)^2.$$

Halle el valor de a y calcule el polinomio de Taylor de f de orden 3 en $x_0=1$.

Ejercicio 15 Sea $f(x)=3+(x+2)e^{ax}$. Halle $a\in\mathbb{R}$ sabiendo que la recta tangente en $(0;f(0))$ tiene ecuación $y=5+10x$. Calcule $p_2(x)$ el polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0=0$ de f.

Ejercicio 16 Sea $g(x)=1-3x+\sqrt{f(x)}$. Si el polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0=0$ de g es $p(x)=2-x+3x^2$, halle el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0=0$.

Ejercicio 17 Sean $f(x)=x^2\ln x+ax+b$ y $p(x)=3+5(x-1)+c(x-1)^2$ su polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0=1$. Halle los valores de a, b y c.

Ejercicio 18 El polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0=0$ de f es $p(x)=-7+9x-6x^2+6x^3$. Halle el polinomio de Taylor de orden 2 de $g(x)=\sqrt{f'(x)}+f(x)$ en $x_0=0$.

Ejercicio 19 Sea $g(x)=2-5x+\sqrt{f(x)}$. Si el polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0=0$ de g es $P(x)=3-2x+4x^2$, hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0=0$.

Ejercicio 20 El polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0=0$ de $f(x)=\cos(3x+\pi)$ es $p(x)=$

☐ $-1-\frac{9}{2}x^2$ ☐ $-1-3x+\frac{9}{2}x^2$ ☐ $-1+\frac{9}{2}x^2$ ☐ $-x+\frac{3}{2}x^2$

Ejercicio 21 Sea $p(x)=1-x+2x^2$ el polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0=0$ de f. Si $g(x)=f^2(x)$ entonces $g''(0)=$

☐ 20 ☐ 2 ☐ 6 ☐ 10

Problemas y Complementos

Ejercicio 22 Sea $f(x) = \ln(1+x)$ y sea $p(x)$ su polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$. Demuestre (usando el Teorema generalizado del Valor Medio (teorema de Cauchy)) que $\dfrac{f(x)-p(x)}{x^4} = \dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}$ para algún valor de c entre 0 y x.

Ejercicio 23 Escriba la expresión del resto en cada caso:

a) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + R_4(x)$

b) $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + R_5(x)$

c) $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + R_6(x)$

Ejercicio 24 Para la función $f(x) = \cos x$

a) Obtenga el polinomio de Taylor de orden 4 $p_4(x)$ en $x_0 = 0$.

b) Escriba la expresión de $R_4\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) Pruebe que $\left|R_4\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| \leq \dfrac{1}{2^5 5!} < 0,0003$

Ejercicio 25 Se quiere aproximar $\sqrt[3]{e}$:

a) Pruebe que el polinomio de Taylor de orden 5 en $x = 0$ de $f(x) = e^x$ lo consigue con un error menor que $\dfrac{1}{174960}$.

b) ¿De qué orden hay que tomar al polinomio de Taylor de la misma función para que el error sea menor que 10^{-8}? (use que $e < 3$).

Ejercicio 26 Utilice el polinomio de Taylor de orden 4 en $x_0 = 0$ de $f(x) = \operatorname{sen} x$ para aproximar el valor de $\operatorname{sen}(0,25)$ y dé una cota para el error que se comete al tomar esta aproximación.

Ejercicio 27 Sea $f(x) = x \ln x$.

a) Halle el polinomio de Taylor p de orden 3 de f en $x = 1$. Escriba la expresión del resto.

b) Estime, acotando el resto, el error que se comete al calcular $f(1,5)$ por medio de $p(1,5)$.

Ejercicio 28 ¿Cuántos términos es suficiente tomar en el desarrollo de Taylor en $x = 0$ de $f(x) = e^x$ para obtener un polinomio que aproxime a dicha función en todo el intervalo $[-1, 1]$ con un error menor que 10^{-4} ? Use el polinomio hallado para encontrar las primeras tres cifras decimales del número e.

Ejercicio 29 Sea $f(x) = \ln(1 + x)$. ¿De qué orden hay que tomar el polinomio de Taylor en $x = 0$ para poder calcular $\ln(1,15)$ con un error que no supere a $0,001$?

Ejercicio 30 Halle un intervalo que contenga a $x = 0$ tal que la diferencia entre

a) $\cos x$ y $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ sea menor que $5{,}10^{-5}$.

b) $\operatorname{sen} x$ y x sea menor que 10^{-3}.

Ejercicio 31 Sea $f(x) = 1 + 3x + \operatorname{sen} x$. Escriba $p(x)$, el polinomio de Taylor de f de orden 4 en $x = 0$ y calcule, estimando el resto, el error que se comete al calcular $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ con $p\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

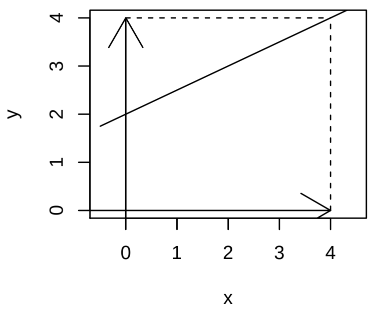
Ejercicio 32 Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 en $x = 0$ de $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$. Estime el error que se comete al calcular los valores de la función por medio del polinomio hallado cuando $-\dfrac{1}{2} \leq x < 1$.

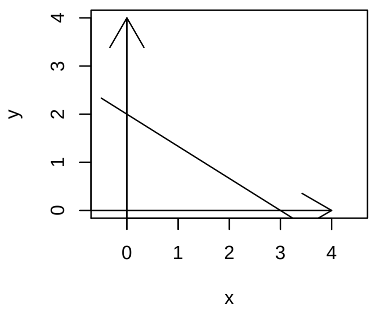
Práctica 9: Integrales

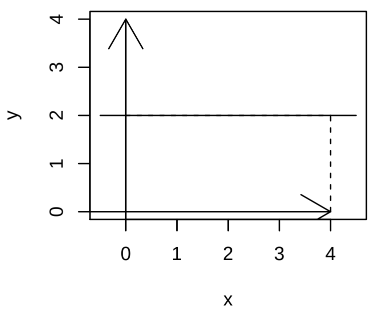
PRIMERA PARTE: TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Ejercicios introductorios

Ejercicio 1 Halle, en cada caso, la función área bajo la curva entre 0 y x. Compruebe que $A^{'}(x) = f(x)$.







Ejercicio 2 Se sabe que las funciones f y g son integrables y que

a) $\displaystyle\int_{-3}^{4} (3f(x) - 4g(x))\,dx = 23,\ \int_{-3}^{4} g(x)\,dx = 7.$ Calcule $\displaystyle\int_{-3}^{4} f(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{1}^{2} 2\,f(x)\ dx = 5,\ \int_{1}^{2} g(x)\ dx = 7.$ Calcule $\displaystyle\int_{1}^{2} (f(x) + 2g(x))\,dx$

Ejercicio 3 Calcule las derivadas de las siguientes funciones

a) $\displaystyle A(x) = \int_{1}^{x} e^{-t^2} dt$

b) $\displaystyle B(x) = \int_{0}^{2x} \frac{\operatorname{sen} u}{1+u}\ du$

c) $\displaystyle C(x) = \int_{0}^{\sqrt{x}} \sqrt{1+t^2}\ dt$

d) $\displaystyle D(x) = \int_{0}^{\operatorname{sen}(x)} \frac{y}{2+y^3}\ dy$

e) $\displaystyle E(x) = \int_{0}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\ dt$

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 4 Sabiendo que

a) la función continua f satisface $\displaystyle\int_0^x f(t)\ dt = x^2(1+x)$, calcule $f(2)$.

b) la función continua g satisface $\displaystyle\int_0^{x^2} g(t)\ dt = x^2(1+x),\ x>0$, calcule $g(2)$.

Ejercicio 5 Calcule las siguientes integrales usando la Regla de Barrow y las propiedades de linealidad de la integral.

a) $\displaystyle\int_0^3 3(x-2)\ dx$

b) $\displaystyle\int_{-2}^2 \left(x^3+2x\right) dx$

c) $\displaystyle\int_\pi^{5\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx$

d) $\displaystyle\int_0^{64} \left(2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\ dx$

Ejercicio 6 Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, compruebe las siguientes igualdades y calcule, en cada una de ellas, el valor de K.

a) $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{3t+5}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+5}+K$

b) $\displaystyle\int_0^x \frac{\cos t}{2\operatorname{sen} t+3}\ dt = \frac{1}{2}\ln\left(|3+2\operatorname{sen} x|\right)+K$

Ejercicio 7 Halle en cada caso, una función $f(x)$ que satisfaga

a) $f'(x)=2$

b) $f'(x)=x$

c) $f'(x)=\operatorname{sen}(x)$

d) $f'(x)=\cos(x)$

e) $f'(x)=e^x$

f) $f'(x)=x^5$

g) $f'(x)=x+x^3$

h) $f'(x)=3x+\dfrac{4}{x}$

Ejercicio 8 Encuentre en cada caso, una función $G(x)$ que satisface

a) $G'(x)=6x+1,\ G(1)=3$

b) $G''(x)=6x,\ G'(1)=3,\ G(0)=1$

c) $G'''(x)=x+\operatorname{sen}(x),\ G''(0)=G'(0)=G(0)=5$

Ejercicio 9 Calcule las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int 4x^6dx$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x-1)\ dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\left(3x+\sqrt{x}\right) dx$

d) $\displaystyle\int \frac{7dx}{\cos^2 x}$

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 10 Encuentre el polinomio de Taylor de orden 3 en $x=0$ de

$$f(x)=\int_0^x (1+t)^3 \ln(1+t)\ dt.$$

Ejercicio 11 Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ derivable tal que para cada $x\in(0,+\infty)$ se verifica que

$$(2x^2+3x)f(x)=e^{-x+1}+\int_1^{2x^2-x} f(t)\ dt$$

Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0=1$.

Ejercicio 12 Halle una función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ derivable que satisfaga la ecuación integral

$$xf(x)=x^3+1+\int_1^x f(t)\ dt,\ \ f(1)=\frac{1}{2}$$

Ejercicio 13 Halle una función continua g tal que

$$1+\int_0^{\ln x} g(e^t)\ dt = x^2+\ln(x),\ \ x>0.$$

Ejercicio 14 Si $\displaystyle\int_0^{2x} f(t)dt = x^2+k$ con f continua, halle k y $f(x)$.

Problemas y Complementos

Ejercicio 15 Considere las funciones

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 3 & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

a) La función f no es continua ¿lo es $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$?

b) La función g no es derivable ¿lo es $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt$?

SEGUNDA PARTE: MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 16 Usando el método de sustitución, calcule las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int (3x+1)^2\ dx$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x+5}$

c) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{\sqrt{5x^3+2}}\ dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}\ dx$

e) $\displaystyle\int e^{-3x}\ dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 x\, e^{2x^2}\ dx$

g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\cos^2(x)\, dx$

h) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\ dx$

i) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^4(x)}\ dx$

j) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\ dx$

k) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\ dx$

l) $\displaystyle\int a^{5x} dx$

m) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\cos(x))\operatorname{sen}(x)\ dx$

n) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\ dx$

o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt[4]{5-2x^2}}\ dx$

p) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\ dt$

q) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$

r) $\displaystyle\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$

s) $\displaystyle\int \sqrt{(3x+5)^7}\,dx$

t) $\displaystyle\int (x-1)\sqrt{x^2-2x}\,dx$

u) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

v) $\displaystyle\int_2^3 \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$

w) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}}\,dx$

y) $\displaystyle\int x^3 e^{x^4+1}\,dx$

z) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos x)^3}\operatorname{sen} x\,dx$

Ejercicio 17 Aplique el método de integración por partes para calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^e \ln x dx$

c) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x dx$

d) $\displaystyle\int xe^x dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}dx$

f) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^3\cos x dx$

g) $\displaystyle\int x^3e^{2x}dx$

h) $\displaystyle\int e^x\operatorname{sen} x dx$

i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 18 Si llamamos $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx$ pruebe la fórmula de reducción

$$I_n = e - nI_{n-1}$$

Ejercicio 19 La función f tiene derivada continua y cumple

$$\int_{-\pi}^{\pi/2} f(x)\operatorname{sen}(x)\,dx = 4 \text{ y } f(-\pi) = 3.$$

Calcule $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/2} f'(x)\cos(x)\,dx$

Ejercicio 20 La función f satisface $f(x) = 5xf'(x)$. Si $\int_0^2 f(t)\ dt = 12$, calcule $f(2)$.

Ejercicio 21 Encuentre una primitiva F de la función $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{4+e^{3x}}$ que satisfaga $F(0) = -3\ln(4)$

Ejercicio 22 Halle una función $f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ con derivada continua que satisfaga la ecuación integral

$$f(x) = 3\text{sen}^2(x) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} f'(t)\cos^2(t)\ dt$$

Ejercicio 23 Si f es una función continua tal que $\int_1^8 f(\sqrt[3]{x})dx = 9$, entonces $\int_1^2 t^2 f(t)dt$

Marque la única respuesta correcta.

☐ $= 9$ ☐ $= 27$

☐ $= 3$ ☐ no alcanzan los datos

Ejercicio 24 Marque con una cruz la única respuesta correcta. Dada la función continua f, ponemos $A = \int_2^3 f(x)dx$ y $B = \int_8^{11} f(\frac{t-2}{3})dt$, entonces es cierto que

☐ $A = 3B$ ☐ $3A = B$

☐ $A = B$ ☐ Ninguna de las anteriores

Problemas y Complementos

Ejercicio 25 Calcule las siguientes integrales usando el método de fracciones simples

a) $\int \dfrac{4}{(x-1)(x-2)}\ dx$

b) $\int \dfrac{2x+1}{x^2-4}\ dx$

c) $\int \dfrac{x^3+2x}{x^2-1}\ dx$

Ejercicio 26 Considere la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\ln x}{3x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Calcule $\displaystyle\int_{e^{-3}}^{1} f(x)dx$

b) Determine el valor de $k > 0$ para el cual $\displaystyle\int_{e^{-3}}^{k} f(x)dx = 35.$

Ejercicio 27 Calcule $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sqrt{x+1}dx$ de dos maneras :

a) Usando el método de integración por partes.

b) Haciendo la sustitución $t = \sqrt{x+1}$.

Práctica 10: Aplicaciones de la Integral

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 1 Calcule el área de la región comprendida entre los gráficos de las siguientes curvas:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$, $x = 0$.

b) $f(x) = x$, $g(x) = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 3$.

c) $f(x) = x^3 - 12x$, $g(x) = x^2$.

d) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$, eje x.

e) $f(x) = -x$, $g(x) = x - x^2$.

f) $f(x) = \left(1 - \sqrt{x}\right)^2$, eje x , eje y.

g) $f(x) = \operatorname{sen} x$, eje x , $x = 0$, $x = 2\pi$.

h) $f(x) = x^2 - 4$, eje x.

i) $f(x) = x^3$, eje y , $y = 27$.

j) $f(x) = e^x$, $y = \ln 5$, eje y.

k) $f(x) = \ln x$,eje x, $x = \dfrac{1}{e}$, $x = e$.

Ejercicio 2 Determine $c > 1$ de modo que el área de la región limitada por el gráfico de $f(x) = e^{2(x-5)}$ y $g(x) = e^{-2(x-5)}$ y la recta de ecuación $y = c$ sea igual a 1.

Ejercicio 3 El área de la región limitada por los rectas $y = ax$, $y = a^2$ y el gráfico de $f(x) = x^2$ es igual a $\dfrac{7}{48}$. Calcule el valor de a.

Ejercicio 4 Determine el área de la región limitada por el gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ y las dos rectas que unen el origen de coordenadas con los puntos del gráfico $\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$, respectivamente.

Ejercicio 5 Calcule el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x - 5\right)$ para $11 \leq x \leq 16$.

Ejercicio 6 Calcule el área de la región limitada por el eje de las x y por los gráficos de $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = 1 - 4x^2$.

Ejercicio 7 Halle el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ y $g(x) = \dfrac{x}{x+7}$.

Ejercicio 8 Calcule el área de la región encerrada entre el gráfico de $f(x) = x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-4)$ y el eje x.

Ejercicio 9 Calcule el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = 4x+5-e^{3x}$ y de $g(x) = 4x-3$ para $0 \leq x \leq \ln 6$.

Ejercicio 10 Calcule el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = xe^{2x}$ y $g(x) = xe^{x+3}$.

Ejercicio 11 Calcule el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de $f(x) = (x^2-5)\ln x$ para $e^{-1} \leq x \leq e$.

Ejercicio 12 Halle el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = \dfrac{9}{x} + \dfrac{9}{10-x}$ y la recta $y = 10$.

Ejercicio 13 Calcule el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 3x\ln x$ y $g(x) = (x+8)\ln x$.

Ejercicio 14 Encuentre las funciones que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $(3+\sqrt{x})(f(x)+2)^2 f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $f(4) = 1$

b) $f'(x) + 2xf(x) = 0$, $f(0) = 3$

c) $f'(x) = (x^2e^x - \operatorname{sen} x)f^2(x)$, $f(0) = 4$

d) $(1+x^2)f'(x) = 8xf(x)$, $f(0) = 3$

e) $f'(x) = 7x^5(3+f(x))$, $f(1) = -2$

f) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = xe^x$, $f(0) = 4$

Ejercicio 15 Halle f derivable que satisface

$$(3+f'(x))e^{2-x} = (x-6)(3x+f(x))^2 \text{ con } f(2) = 0.$$

Ejercicio 16 Sea f una función positiva con derivada continua que satisface

$$(x^3+x^2)f(x) = 2\int_0^x tf(t)\,dt \quad , \quad f(0) = 5$$

Halle $f(x)$ para $x > 0$.

Ejercicio 17 Halle la función f derivable tal que para $x > 0$ vale

$$f'(x)\sqrt{x} = \left(3x + e^{(2\sqrt{x}-6)}\right) f(x) \text{ y } f(9) = 1.$$

Ejercicio 18 Halle f verificando:

$$f''(x) = 9\sqrt{x} + \cos(\pi x) \text{ y } f(1) = f'(1) = 0.$$

Ejercicio 19 Halle $f \neq 0$ que satisfaga $f^2(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\frac{\operatorname{sen}(t)}{4+\cos(t)}\, dt.$

Ejercicio 20 Encuentre una función continua f tal que

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\, dt.$$

Ejercicio 21 Para cada n natural se define $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(nx)\, dx.$ Calcule a_n.

Ejercicio 22 Halle una función f que satisfaga $e^{-3x^2} f'(x) = x\sqrt{f(x)}$, $f(0) = 4$.

Ejercicio 23 Marque la única respuesta correcta: el área de la región del plano limitada por $y = x - 2$, $x = 4$, el eje x y el eje y se obtiene calculando:

☐ $\displaystyle\int_0^4 (x-2)\, dx$ ☐ $\displaystyle\int_0^4 (2-x)\, dx$

☐ $\displaystyle\int_0^2 (x-2)\, dx + \int_2^4 (2-x)\, dx$ ☐ $\displaystyle\int_0^2 (2-x)\, dx + \int_2^4 (x-2)\, dx$

Ejercicio 24 Marque la única respuesta correcta.
El área de la región comprendida entre la recta $y = -2x + 6$ y el gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ se obtiene calculando

☐ $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^2 (f(x)+2x-6)dx$ ☐ $= \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^2 (-f(x)-2x+6)dx$

☐ $\displaystyle\int_0^4 (-2x+6-f(x))dx$ ☐ $\displaystyle\int_0^4 (f(x)+2x-6)dx$

Problemas y Complementos

Ejercicio 25 La temperatura de un cuerpo que se enfría, cambia a una tasa que es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente. Así, si $C(t)$ es la temperatura del cuerpo en el tiempo t y a es la temperatura ambiente (a la que supondremos constante) se tiene

$$C'(t) = -k(C(t) - a)$$

en donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad.

a) Halle todas las soluciones de la ecuación en términos de k, a y la temperatura inicial $C(0) = C_0$.

b) Pruebe que $C(t) \to a$ cuando $t \to +\infty$.

c) Si un cuerpo inicialmente está a $26°$ y una hora después está a $24°$, ¿cuál es la constante de proporcionalidad si la temperatura ambiente es de $22°$?.

Fórmulas útiles:

$$\text{Volumen del sólido de revolución} \;=\; \pi \int_a^b f^2(x)\; dx$$

$$\text{Longitud de arco} \;=\; \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\; dx$$

Ejercicio 26 Halle el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje x la parábola $y = 3x^2$, con $0 \le x \le 3$.

Ejercicio 27 Halle el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje x el gráfico de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, con $1 \le x \le 4$.

Ejercicio 28 Calcule la longitud del arco de las siguientes curvas:

a) $y = 2x^{\frac{3}{2}}$, $0 \le x \le 11$

b) $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}$, $1 \le x \le 2$

Práctica 11: Series

Ejercicios introductorios

Ejercicio 1 Escriba el término general de las siguientes series

a) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-...$

b) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{31}+...$

c) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+...$

d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+..$

En los casos que la serie sea geométrica o telescópica, escriba la expresión de las sumas parciales y calcule la suma de la serie.

Ejercicio 2 Calcule la suma de las siguientes series, en caso de que sean convergentes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+4^{n+1}}{5^n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}-1}{4^{n+1}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$

e) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$

f) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$

Ejercicio 3 Calcule el valor de $a>0$ para que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+2^n}{a^n}=\frac{35}{12}$.

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 4 Decida si cada una de las siguientes series es convergente o divergente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{4n^4+5n-1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\operatorname{sen}^3(n)}{2^n+n^2}$

i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)!}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}}{n^2+n+1}$

Ejercicio 5 Use el criterio integral de Cauchy para estudiar la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$

Ejercicio 6 Use el criterio de la raíz o del cociente, según convenga, para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1000)^n}{n!}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \frac{1}{2}\right)^{n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n 2}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

Ejercicio 7 Determine la convergencia o divergencia de las series que siguen. En caso de convergencia, decida si ésta es absoluta o condicional.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+1)}{n^3+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + 5n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^{n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}$

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 8 Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales cada una de las siguientes series es convergente. Indique para qué valores la convergencia es absoluta y para qué valores la convergencia es condicional.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{x^{2n}}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2} x^{2n+1}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{3n+1}}{n^5}$

Ejercicio 9 Halle el radio de convergencia de las series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+3}$

Ejercicio 10 En cada una de las siguientes series, encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales es convergente. Indique para qué valores la convergencia es absoluta y para qué valores la convergencia es condicional.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{2n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{2n}}{2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{3^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n^2}\right) x^n$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{n^2+1} x^{2n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) x^{2n+1}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-2)^n$

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) x^n$

j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{n^2 \ln n}$

k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$

Ejercicio 11 ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a)^n}{n}(x-2)^n$ tiene radio de convergencia igual a 2?

Ejercicio 12 Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4^n(3x-1)^n$ es convergente. Para los valores hallados, encuentre la suma de la serie.

Ejercicio 13 Halle los valores de $p > 0$ tales que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{\sqrt{n^7+1}}$ es convergente.

Ejercicio 14 Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales las siguientes series son convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)^2}{8^n}(x-3)^{3n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n)^n} x^{3n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(3n+4)(5^n+1)}(3x-6)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}(x-5)^n}{(n+1)(n+4)}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{7^n}(x-3)^{n+1}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)}{\sqrt{9^n+1}}(x-7)^n$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^n\sqrt{n^2+3}}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(x-5)^n}{3^n\sqrt{n}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x+2)^{n+1}}{3^n}$

Ejercicio 15 Halle el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{n^2} (x-7)^n$$

.

Ejercicio 16 Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-4)^n}{a^n\sqrt{2n+1}}$ hallar $a > 0$ para que el radio de convergencia sea igual a 2. Para el valor de a hallado, encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie es convergente.

Ejercicio 17 La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^p}$ con $p > 0$ converge para
Marque la única respuesta correcta

☐ todo $p > 0$ ☐ $0 < p < 1$ y diverge si $p \geq 1$

☐ ningún $p > 0$ ☐ $p \geq 1$ y diverge si $0 < p < 1$

Ejercicio 18 Sean las series $A = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^3+1}}$ y $B = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$.
Entonces

☐ A y B convergen ☐ A diverge y $B converge$

☐ A converge y B diverge ☐ A y B divergen

Problemas y Complementos

Ejercicio 19 A partir de la identidad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, deduzca las siguientes fórmulas:

a) $1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2n} + ... = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$

b) $x + x^3 + x^5 + ... + x^{2n+1} + ... = \frac{x}{1-x^2}$, $|x| < 1$

c) $1-x+x^2-x^3+x^4+...+(-1)^n x^n+... = \frac{1}{1+x}$, $|x| < 1$

d) $1 + 2x + 4x^2 + ... + 2^n x^n + ... = \frac{1}{1-2x}$, $|x| < \frac{1}{2}$

Ejercicio 20 Sea $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^3} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$. Pruebe que la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ es absolutamente convergente.

Análisis Matemático Ciencias Exactas e Ingeniería (66)

Unidad I: Números reales. Funciones

Números reales. Propiedades básicas. Representación sobre la recta. Supremo e ínfimo. Funciones. Definición. Funciones reales. Dominio e imagen. Gráfico. Funciones elementales, algebraicas y trascendentes. Composición. Función inversa. Representación de curvas en forma paramétrica.

Unidad II: Sucesiones

Sucesiones. Noción de límite. Propiedades. Sucesiones monótonas. El número e. Otros límites especiales. Introducción a las series numéricas.

Unidad III: Límite y continuidad

Noción de límite funcional. Cálculo de límites. Álgebra de límites. Límites laterales. Límites infinitos y en infinito. Asíntotas.

Continuidad. Propiedades. Funciones continuas en intervalos cerrados. Aplicaciones al cálculo de ceros de funciones. Ejemplos de métodos numéricos elementales.

Unidad IV: Derivadas

Noción de recta tangente a una curva. Velocidad. Definición de derivada. Derivada de funciones elementales. Reglas de derivación. Regla de la cadena. El Teorema del Valor Medio y sus aplicaciones. Regla de L′Hospital. Aproximación lineal. Diferencial.

Estudio de funciones: crecimiento, decrecimiento, extremos, concavidad, convexidad, puntos de inflexión. Trazado de curvas. Problemas de máximos y mínimos.

Polinomio de Taylor y de Mac Laurin. Aproximación de funciones. Estudio del error.

Aplicaciones al cálculo de ceros de funciones: método de Newton-Raphson.

Unidad V: Integrales

Particiones. Integral superior e inferior. Integral definida. Propiedades. Cálculo aproximado de integrales.

El Teorema Fundamental del Cálculo. Regla de Barrow. Cálculo de primitivas. Los métodos de sustitución y de integración por partes.

Aplicaciones al cálculo de áreas, volúmenes de revolución y longitud de curvas.

Bibliografía

- Análisis Matemático. Exactas - Ingeniería. Fascículos 1 a 4. Varios.
  CCC - Educando. 2015.
- Cálculo Diferencial e Integral. F. Ayres y E. Mendelson. Schaum. 1991.
- Cálculo Diferencial e Integral. N. Piskunov. UTEHA. 1991.
- Cálculo Superior. M. Spiegel. Schaum. 1996.
- Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Vol I. Courant. Limusa. 1994.
- Matemáticas I. Miguel de Guzmán y José Colera. ANAYA. 1989.