

Práctica 6 – Parte 2

Regla de L'Hospital

1. Caso cero sobre cero

Veamos tres problemas de límites conocidos:

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$$

Los límites 1. y 2. se resuelven mediante técnicas algebraicas, multiplicar por el conjugado y factorizar los polinomios; en el 3, además, se utiliza que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$, como vimos en el capítulo de límites.

Los tres límites tienen una característica en común. En cada caso, está incluido un cociente y, tanto el numerador como el denominador, tienden a 0 como su límite. No se puede usar, en estos casos, que el límite del cociente es el cociente de los límites porque el límite del denominador es cero, y además, se llega a una indeterminación cero sobre cero.

En el problema 1, si multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador que es $\sqrt{2x+10}+4$, y simplificamos $x-3$, podemos salvar la indeterminación y calcular el límite pedido:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{2x+10}-4)(\sqrt{2x+10}+4)}{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+10-16}{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)} = \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)(\sqrt{2x+10}+4)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{\sqrt{2x+10}+4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

En el problema 2, el numerador es una diferencia de cuadrados y si en el denominador sacamos factor común x , y simplificamos $x-2$, podemos salvar la indeterminación y resolver el problema.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x} = 2.$$

En el problema 3, si multiplicamos el numerador y el denominador por 3, sacamos factor común $\frac{2}{3}$ y utilizamos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{(ax)} = 1$, salvamos la indeterminación y podemos calcular el límite pedido

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin(3x)}{2(3x)} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{(3x)} = \frac{2}{3}.$$

Pero este tipo de indeterminaciones se puede resolver utilizando la Regla de L'Hospital que resulta como consecuencia del Teorema del valor medio de Cauchy.



Teorema. Regla de L'Hospital: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un entorno de a , es decir, en un intervalo alrededor del punto, salvo quizás en el punto a , y con derivadas continuas en dicho entorno, siendo $g'(x) \neq 0$ cerca de a , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y existe el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

entonces el límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Demostración

Supongamos que f y g son continuas en $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, definimos:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{y} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}.$$

F así definida resulta continua en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ que contiene a a , pues $f(x)$ es continua en $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ y como $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = F(a)$, es continua en a .

Los mismos argumentos valen para la función G , con lo cual es continua en $(a-\delta, a+\delta)$.

Por el Teorema del valor medio $\exists x_1$ con $a < x_1 < x$ tal que $\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)}$.

Tomando límite por derecha $x \rightarrow a^+$ “entonces” $x_1 \rightarrow a^+$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

El límite por izquierda es igual, con lo cual, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Volvamos a los 3 problemas y calculemos los límites con esta regla.

Como en los 3 problemas hay un límite donde el numerador y denominador tienden a 0 y las funciones cumplen con las hipótesis del teorema, podemos utilizarlo, derivando ambas funciones y analizando el límite de los cocientes de dichas derivadas.

Calculemos los límites utilizando la regla de L'Hospital:

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+10}-4}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+10}}}{1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{2x+10}} = \frac{1}{4}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2x-2} = 2.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos(3x)}{2} = \frac{3}{2}.$$

La Regla de L'Hospital se puede utilizar para el cálculo de límites de cocientes de funciones donde ambas tienden a cero o infinito siempre y cuando las funciones cumplan con las hipótesis del teorema.



Ejemplo a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{\ln(x-3)}$.



Ejemplo b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(3x)}$.

Al intentar evaluar los límites de los ejemplos **a)** y **b)** donde las funciones del numerador y del denominador tienden a cero obtenemos una indeterminación del tipo cero sobre cero (todas las funciones cumplen con las hipótesis de la regla de L'Hospital).



Ejercicio 1. Calcular el límite del ejemplo a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{\ln(x-3)}$.

Solución

Como las funciones $f(x) = \sqrt{x^2+9}-5$ y $g(x) = \ln(x-3)$ son continuas en un entorno de cero y tienden a 0, al querer evaluar $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{g(x)}$ caemos en un caso de indeterminación cero sobre cero y podemos utilizar la regla de L'Hospital, pues se cumplen las hipótesis.

Para poder resolver el límite, calculamos las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$ o sea

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} \text{ y } g'(x) = \frac{1}{x-3}, \text{ luego hacemos el cociente de ellas, o sea, } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \text{ Esto es}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{\ln(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}}}{\frac{1}{x - 3}} = \frac{4}{5} . \text{ Porque el numerador tiende a } \frac{4}{5} \text{ y el denominador tiende a } 1 .$$

Podemos afirmar que el límite es $\frac{4}{5}$:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{\ln(x - 3)} = \frac{4}{5}$$



Ejercicio 2. Calcular el límite del ejemplo b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(3x)}$.

Solución

Como sabemos que las funciones $\ln(1+x)$ y $\sin(3x)$ son continuas y con derivadas continuas en un entorno de 0, y tienden a 0, utilizamos la Regla de L'Hospital. Para ello, calculamos la derivada de $\ln(1+x)$ y de $\sin(3x)$, o sea:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ y } g'(x) = 3\cos(3x)$$

$$\text{y, al hacer el cociente, obtenemos que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{3\cos(3x)} = \frac{1}{3} .$$

Vemos que el límite es igual a $\frac{1}{3}$ porque el numerador tiende a 1 y el denominador tiende a 3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(3x)} = \frac{1}{3}$$

La misma regla sirve también cuando x tiende a infinito, es decir, que se puede aplicar no solo para los casos en que $x \rightarrow a$ y $x \rightarrow 0$, sino también para el caso que $x \rightarrow \infty$.



Enunciado Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y derivables,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \text{ y existe el límite } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ entonces, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración:

Mediante el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$, cuando $x \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$.

Utilizando la regla de L'Hopital para el caso $t \rightarrow 0$ obtenemos $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} =$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)}$ y simplificando $\left(\frac{-1}{t^2}\right)$ queda $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Con lo que queda

demostrado.



Ejercicio 3. Calcular el límite de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}} - 2}{\frac{3}{x}}$.

Solución

Como las funciones del numerador y denominador son continuas y con derivadas continuas y tienden a 0, aplicamos la regla de L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}} - 2}{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{-3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{3} = \frac{2}{3}.$$

O sea que el límite es $\frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}} - 2}{\frac{3}{x}} = \frac{2}{3}$$



Ejercicio 4. Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{4}{x}}$.

Solución

Como las funciones del numerador y denominador son continuas, con derivadas continuas y tienden ambas a 0 podemos utilizar la regla de L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{-4\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{4}.$$

o sea que el límite es $\frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{4}{x}} = \frac{1}{4}$$

2. Caso infinito sobre infinito



Enunciado Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en un entorno de a alrededor del punto salvo quizás en a , y con derivadas continuas en dicho entorno, siendo $g'(x) \neq 0$ cerca de a , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ y existe el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Demostración:

Tomamos un $x_1 \neq a$, por el Teorema de valor medio existe un x_0 para el cual se cumple

$$(A) \quad \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{para } a < x < x_0 < x_1$$

Por otro lado, sacamos $f(x)$ factor común en el numerador y $g(x)$ en el denominador en el primer miembro obtenemos:

$$(B) \quad \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{1 - f(x_1)/f(x)}{1 - g(x_1)/g(x)} \right)$$

Utilizando la ecuación (B), la ecuación (A) queda así:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{1 - f(x_1)/f(x)}{1 - g(x_1)/g(x)} \right) = \left(\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \right)$$

Al multiplicar ambos miembros por $\frac{1 - (g(x_1)/g(x))}{1 - (f(x_1)/f(x))}$, obtenemos:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - (g(x_1)/g(x)) f'(x_0)}{1 - (f(x_1)/f(x)) g'(x_0)}$$

Supongamos que $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ tiene límite l cuando $x_0 \rightarrow a$, o sea, $\lim_{x_0 \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

Elegimos x_1 suficientemente próximo a a para este cociente y como $1 - (f(x_1)/f(x))$ y $1 - (g(x_1)/g(x))$ tienden a 1, entonces, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ y podemos afirmar que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ que es lo que queríamos demostrar.



Ejemplo Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{2}{x}}$

En este ejemplo, el numerador tiende a menos infinito y el denominador a más infinito, esto da una indeterminación infinito sobre infinito (las funciones del numerador y denominador cumplen con las hipótesis del teorema), podemos utilizar la Regla de L'Hospital.

Solución: Como las funciones del numerador y del denominador son continuas y con derivadas continuas en un entorno de 0, podemos aplicar la regla de L'Hospital, porque cuando $x \rightarrow 0^+$, $\ln(x) \rightarrow -\infty$ y $\frac{2}{x} \rightarrow +\infty$.

Como en los ejercicios anteriores calculamos las derivadas y hacemos el cociente de ellas:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{2}{x}} = 0$$



Ejercicio 5. Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.

Solución. Como las funciones del numerador y del denominador son ambas continuas con derivadas continuas y tienden a infinito, este caso se lo llama infinito sobre infinito y podemos utilizar la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

3. Otros casos

También se puede usar la regla de L'Hospital para los siguientes casos:

1) **Caso cero por infinito**, $0 \cdot \infty$: para este caso transformar 0 por ∞ en ∞ sobre ∞ o en 0 sobre 0.



Ejercicio 6. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0+} x e^{\frac{1}{x}}$

Solución:

Podemos transformar este producto de dos funciones, donde una tiende a cero y la otra a infinito en un cociente de dos funciones que tienden a infinito, escribiendo $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$ obtenemos el cociente

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} . \text{ Ahora estamos en condición de utilizar la regla de L'Hospital.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2} \right)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty .$$

Concluimos que el límite es infinito:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

2) **Caso 1^∞** : este caso de indeterminación es cuando una función que tiende a 1 está elevada a otra que tiende a ∞ , o sea, $f(x)^{g(x)}$ donde $f(x) \rightarrow 1$ y $g(x) \rightarrow \infty$. Para resolverlo aplicamos $\ln(f(x)^{g(x)})$, que por las propiedades del logaritmo es igual a $g(x)\ln(f(x))$, calculamos el límite y después le aplicamos la función inversa, es decir, e^x la función exponencial.



Ejercicio 7. Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

Solución

Como el límite de $x \rightarrow 1$ y el de $\frac{1}{1-x} \rightarrow \infty$ este límite toma la forma indeterminada 1^∞ .

Sea $F(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$ entonces $\ln(F(x)) = \frac{\ln(x)}{1-x}$, este cociente tiende a cero sobre cero y ambas funciones son continuas con derivadas continuas; podemos aplicar la regla de L'Hospital.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$, así que $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(F) = -1$ pero como el logaritmo es una función continua,

$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(F) = \ln \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow 1} F(x)\right) = -1$ acá aplicamos la función exponencial y obtenemos el

límite e^{-1} , o sea, que $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$$

3) **Caso ∞^0** : la indeterminación es cuando una función que tiende a infinito está elevada a otra que tiende a cero $f(x)^{g(x)}$, donde $f(x) \rightarrow \infty$ y $g(x) \rightarrow 0$. Igual que en el caso anterior, aplicamos la función logaritmo, tomamos el límite y después aplicamos la inversa, o sea, la exponencial.



Ejercicio 8. Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} + 1)^{\frac{1}{x}}$

Solución

Como el límite de $e^{2x} + 1 \rightarrow +\infty$ y el límite de $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ este límite toma la forma indeterminada ∞^0 .

Sea $F(x) = (e^{2x} + 1)^{\frac{1}{x}}$ entonces $\ln(F(x)) = \frac{\ln(e^{2x} + 1)}{x}$. Como este cociente tiende a infinito sobre infinito y ambas funciones son continuas con derivadas continuas, podemos aplicar la regla de L'Hospital.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{2x} + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}$. Como obtuvimos otro cociente de funciones que tienden a infinito podemos aplicar la regla nuevamente: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{2x}}{2e^{2x}} = 2$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(F(x)) = 2$

Como dijimos antes esto es igual a $\ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)\right) = 2$, entonces el $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = e^2$, o sea que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} + 1)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

4) **Caso 0^0** : la indeterminación es cuando una función que tiende a cero está elevada a otra que tiende a cero $f(x)^{g(x)}$ donde $f(x) \rightarrow 0$ y $g(x) \rightarrow 0$. Igual que en el caso anterior, aplicamos la función logaritmo, tomamos el límite y después aplicamos la Regla de L'Hospital.



Ejercicio 9. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

Solución

Como $x \rightarrow 0^+$ es un caso de indeterminación de la forma 0^0 . Aplicamos la función logaritmo y obtenemos $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$ se transformó en un límite caso 1), que es un producto de dos funciones donde una tiende a cero y la otra a infinito, o sea, $0 \cdot \infty$. Hay que convertirlo en un caso infinito sobre infinito. Para eso escribimos $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$ y obtenemos $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. Este es un caso de

infinito sobre infinito y las funciones son continuas con derivadas continuas; podemos aplicar la

regla de L'Hospital:
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$$

al simplificar x y acomodar, queda $\lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$, o sea que el límite es $e^0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$



Ejercicio 10. Dada la función $f(x) = \frac{\sin(3x-12)}{\sqrt{x^2+9}-5}$ si $x \neq 4$, $f(4) = a$ hallar a para que resulte continua en $x = 4$.

Solución

Para ver que f es continua en $x = 4$ el límite de la función cuando $x \rightarrow 4$ debe coincidir con el valor de la función en dicho punto, o sea, con $f(4)$.

Calculemos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(3x-12)}{\sqrt{x^2+9}-5} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 \cos(3x-12)}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}} = \frac{3}{\frac{8}{10}} = \frac{15}{4},$$

Este límite debe coincidir con $f(4) = a$, entonces, $f(4) = \frac{15}{4}$ y, por lo tanto, $a = \frac{15}{4}$:

$$a = \frac{15}{4}$$



Ejercicio 11. Hallar todos los a para que la función $f(x) = \frac{1 - \cos(3x)}{e^{2x} - 2x - 1}$ para $0 < x \leq \pi$ y $f(0) = a^2$ sea continua.

Solución

Para ver que f es continua en $x = 0$ el límite de la función cuando $x \rightarrow 0$ debe coincidir con el valor de la función en dicho punto, o sea, con $f(0)$.

Calculemos el límite de $f(x)$: como las funciones del numerador y del denominador ambas son continuas con derivadas continuas y tienden a 0 aplicamos la Regla de L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(3x)}{e^{2x} - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \sin(3x)}{2e^{2x} - 2}, \text{ como obtuvimos otro cociente de funciones que tienden a } 0$$

$$\text{aplicamos nuevamente la regla } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \sin(3x)}{2e^{2x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9 \cos(3x)}{4e^{2x}} = \frac{9}{4}. \text{ Este límite debe ser igual a}$$

$$f(0) = a^2, \text{ luego } a^2 = \frac{9}{4} \text{ con lo que } |a| = \frac{3}{2}, \text{ o sea, } a = -\frac{3}{2} \text{ o } a = \frac{3}{2}:$$

$$a = -\frac{3}{2} \text{ o } a = \frac{3}{2}$$



Ejercicio 12. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y con dos derivadas continuas y tales que

$$f(3) = 2, f'(3) = 2 \text{ y } f''(3) = 4. \text{ Se define } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ como } g(x) = \begin{cases} \frac{f(3x) - 2}{3x - 3} & \text{si } x > 1 \\ 6x - 4 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}.$$

Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ y $g'(1)$, explicando las propiedades que se utilizan en cada caso.

Solución

Como $g(x)$ es una función partida para poder calcular el $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ debemos calcular los límites laterales $\lim_{x \rightarrow 1+} g(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 1-} g(x)$ porque $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} g(x)$.

Calculemos el límite a izquierda, o sea, cuando $x \rightarrow 1^-$ con valores menores que 1

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} 6x - 4 = 2$$

Veamos a qué tiende el límite por derecha, o sea, cuando $x \rightarrow 1^+$ con valores mayores a 1

$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(3x) - 2}{3x - 3}$, como el numerador y denominador son funciones continuas y tienden a cero, se puede resolver usando la regla de L'Hospital, derivamos ambas funciones y calculamos el límite de las derivadas cuando $x \rightarrow 1$, o sea, $f'(3x) \rightarrow f'(3) = 2$ entonces $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(3x) - 2}{3x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f'(3x)}{3} = 2$

Como ambos límites coinciden entonces podemos afirmar que el límite es igual a 2, o sea $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$.

Para calcular $g'(1)$ tomamos el límite del cociente incremental en $x = 1$ para $h \rightarrow 0+$ y $h \rightarrow 0-$

Calculando el límite por izquierda, obtenemos $\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{6(1+h) - 4 - 2}{h} = 6$, como ambos límites coinciden decimos que $g'(1) = 6$.

Calculando el límite por derecha, o sea, para valores de $h \rightarrow 0+$ obtenemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\frac{f(3(1+h)) - 2}{3(1+h) - 3} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(3+3h) - 2}{(3+3h-3)h} - \frac{2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(3+3h) - 2 - 6h}{(3h)h}$$

Como este límite es un caso cero sobre cero, usaremos la Regla de L'Hospital, con lo que el límite queda $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{3f'(3+3h) - 6}{6h}$.

Caemos nuevamente en un caso cero sobre cero porque cuando $h \rightarrow 0^+$, $f'(3+3h) \rightarrow 2$.

Luego aplicando una vez más la Regla de L'Hospital obtenemos:

$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3f'(3+3h)-6}{6h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{9f''(3+3h)}{6} = 6$, porque cuando $h \rightarrow 0^+$ $9f''(3+3h) \rightarrow 36$ y el denominador es 6.

Podemos afirmar que ambos límites coinciden, o sea, $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = 6$ y que la derivada de $g(x)$ en $x=1$ es $g'(1) = 6$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 \text{ y } g'(1) = 6$$



Ejercicio 13. Hallar a y b para que $f(x)$ resulte continua y derivable en $x=0$ y calcular

$$f'(0) \text{ si } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{4x} - \cos(3x)}{2x} & \text{si } x > 0 \\ a + bx & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Solución

Para que la función resulte continua el valor de la función en el punto $f(0) = a$ debe coincidir con el límite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Para averiguar a qué tiende este límite, debemos calcular los límites laterales y ver que coinciden.

Calculemos el límite $x \rightarrow 0^-$, o sea, para valores menores que 0: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a + bx = a$

Y para valores mayores que 0, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x} - \cos(3x)}{2x}$ es un caso cero sobre cero (las funciones del numerador y denominador cumplen con las hipótesis de la Regla de L'Hospital).

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x} - \cos(3x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4e^{4x} + 3\sin(3x)}{2} = 2$, y para que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x} - \cos(3x)}{2x} = f(0) = a$ debe ser $a = 2$.

Calculemos mediante el estudio de cocientes incrementales $f'(0)$.

Primero calculamos el cociente incremental cuando $h \rightarrow 0^+$, o sea, con valores mayores a cero:

$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\frac{e^{4h} - \cos(3h)}{2h} - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{e^{4h} - \cos(3h) - 4h}{2h^2}$, tiende a cero sobre cero (las funciones del numerador y denominador cumplen con las hipótesis de la Regla de L'Hospital).

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{e^{4h} - \cos(3h) - 4h}{2h^2} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{4e^{4h} + 3\sin(3h) - 4}{4h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{16e^{4h} + 9\cos(3h)}{4} = \frac{25}{4}$$

Calculamos el cociente incremental cuando $h \rightarrow 0-$, es decir, con valores menores a cero:

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(2+bh) - 2}{h} = b.$$

Para que el límite exista los límites laterales del cociente incremental deben coincidir, entonces

$$b = \frac{25}{4} \text{ y } f'(0) = \frac{25}{4}, \quad \boxed{a = 2 \text{ y } f'(0) = \frac{25}{4} = b}.$$

