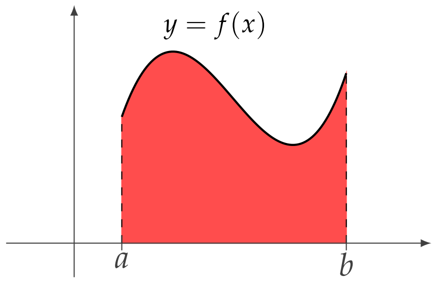
## Práctica 10 - Parte 1

# Área entre curvas

Una de las aplicaciones del cálculo de integrales definidas es el cálculo de áreas de regiones acotadas del plano delimitadas por gráficos de funciones.

## 1. Área entre el gráfico de una función y el eje $x$

Como primer paso, nos interesa calcular el área comprendida entre el gráfico de una función $f$ y el eje $x$ entre $x = a$ y $x = b$, sabiendo que $f$ es integrable en $[a; b]$.
En primer lugar, consideraremos el caso en que el gráfico de $f$ está por arriba del eje $x$.



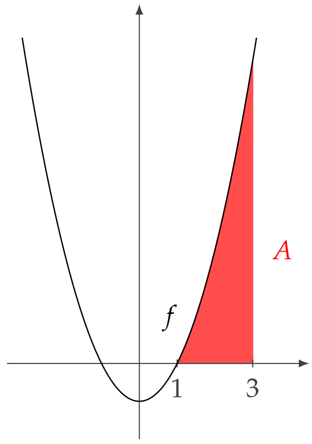

Al introducir la noción de integral vimos que:

Si la función $f$ es positiva o cero en el intervalo $[a; b]$, el área de la región comprendida entre el eje $x$ y el gráfico de la función $f$ entre los límites $a$ y $b$ es

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

**Ejemplo 1.** Calcular el área de la región comprendida entre el eje $x$ y el gráfico de la función $f(x) = x^2 - 1$ entre $x = 1$ y $x = 3$.

El área pedida es la sombreada en el siguiente gráfico:



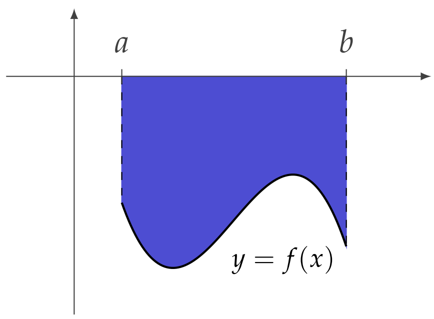

Como la función $f$ es positiva o cero en el intervalo $[1;3]$, el área $A$ está dada por

$$A = \int_1^3 (x^2 - 1)dx.$$

Para calcular la integral, podemos usar la regla de Barrow. Como $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ es una primitiva de $f(x) = x^2 - 1$, tenemos que

$$A = \int_1^3 (x^2 - 1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Big|_1^3 = \left(\frac{1}{3}3^3 - 3\right) - \left(\frac{1}{3}1^3 - 1\right) = 6 - (-\frac{2}{3}) = \boxed{\frac{20}{3}}.$$

El segundo caso que consideraremos es cuando el gráfico de $f$ está por debajo del eje $x$



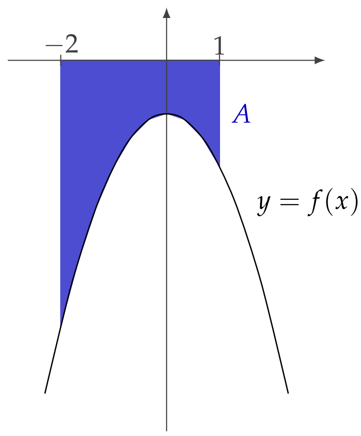

es decir, la función $f$ es negativa o cero en el intervalo $[a;b]$.
En esta situación, la integral definida da el área de la región comprendida entre el eje $x$ y el gráfico de la función $f$ pero con el signo cambiado (es decir, da negativo). Por lo tanto, para calcular el área, bastará con cambiar el signo de la integral.

Si la función $f$ es negativa o cero en el intervalo $[a; b]$, el área de la región comprendida entre el eje $x$ y el gráfico de la función $f$ entre los límites $a$ y $b$ es

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

**Ejemplo 2.** Calcular el área de la región comprendida entre el eje $x$ y el gráfico de la función $f(x) = -x^2 - 1$ entre $x = -2$ y $x = 1$.

En el siguiente gráfico aparece sombreada la región en cuestión:

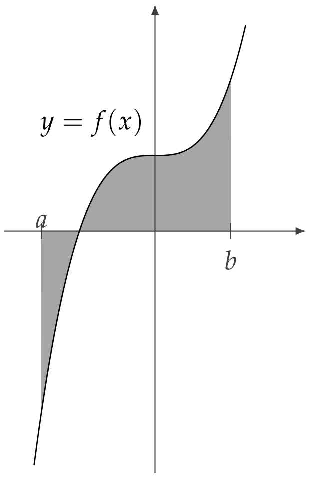



La función $f$ toma valores negativos en todo $\mathbb{R}$, con lo cual el área $A$ buscada es

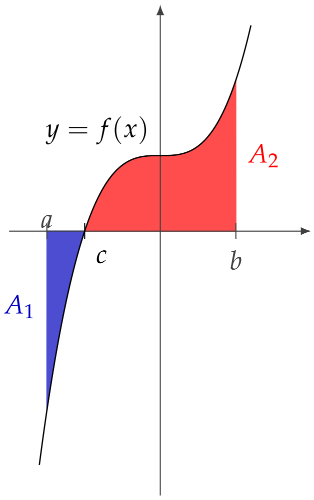
$$A = -\int_{-2}^{1}(-x^2 - 1)dx = \int_{-2}^{1}(x^2 + 1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_{-2}^{1} =$$
$$= \left(\frac{1}{3}1^3 + 1\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + (-2)\right) = \frac{4}{3} + \frac{14}{3} = \boxed{6}.$$

Finalmente, si se quiere calcular el área de la región comprendida entre el gráfico de una función $f$ y el eje $x$ entre $x = a$ y $x = b$ en el caso en que $f$ toma valores positivos y negativos en el intervalo $[a; b]$, se deben estudiar los cambios de signo de la función en el intervalo considerado.

Por ejemplo, para calcular el área de la región sombreada en la figura




podemos descomponerla en dos áreas que ya sabemos calcular: si $c$ es el punto de intersección del gráfico de $f$ con el eje $x$ (es decir, el punto del intervalo $[a; b]$ donde la función vale 0), entonces, como podemos ver en el gráfico, $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a; c]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [c; b]$.




Entonces, podemos calcular el área $A_1$ comprendida entre el gráfico de $f$ y el eje $x$ para $a \leq x \leq c$ y el área $A_2$ comprendida entre el gráfico de $f$ y el eje $x$ para $c \leq x \leq b$, y obtener el área $A$ como la suma de estas dos áreas:

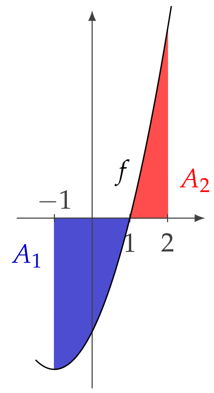
$$A = A_1 + A_2 = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**Ejemplo 3.** Calcular el área de la región comprendida entre el eje $x$ y el gráfico de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ entre $x = -1$ y $x = 2$.

Veamos primero si el gráfico de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ corta al eje $x$ para algún valor $x \in [-1; 2]$. Para esto, buscamos los ceros de $f$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x = 1 \text{ ó } x = -3$$

De estos dos ceros, $1 \in [-1; 2]$ y $-3 \notin [-1; 2]$, con lo cual sólo nos interesa $x = 1$. Hagamos un gráfico aproximado para ver cuál es el área pedida:




Tenemos que $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [-1; 1]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [1; 2]$. Entonces, el área a calcular es

$$A = A_1 + A_2 = -\int_{-1}^{1} (x^2 + 2x - 3)dx + \int_{1}^{2} (x^2 + 2x - 3)dx.$$

Para calcular las integrales definidas en cuestión, usamos la regla de Barrow. Como una primitiva de $f(x) = x^2 + 2x - 3$ es $\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$, obtenemos:

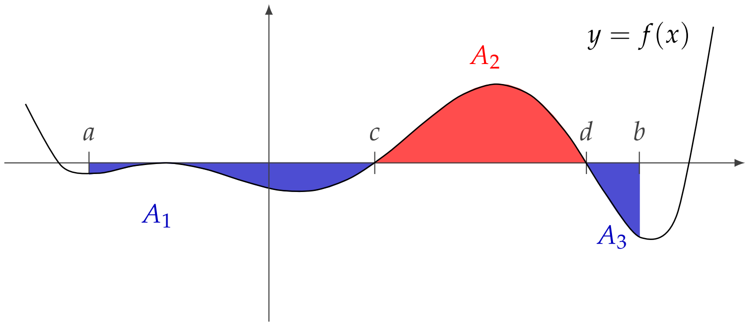
$$A = -\left(\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right)\Big|_{-1}^{1}\right) + \left(\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right)\Big|_{1}^{2}\right) =$$

$$= -\left((\frac{1}{3} + 1 - 3) - (\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1))\right) + \left((\frac{1}{3}2^3 + 2^2 - 3.2) - (\frac{1}{3} + 1 - 3)\right) =$$

$$= -(-\frac{16}{3}) + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{23}{3}}.$$

La misma idea puede usarse en el caso en que la función $f$ tenga varios ceros en el intervalo $[a; b]$, partiéndolo en varios intervalos (delimitados por los extremos del intervalo y los ceros de $f$) de manera que en cada uno de ellos los valores de $f$ sean siempre positivos o cero, o bien, siempre negativos o cero.

Por ejemplo, en la situación del siguiente gráfico

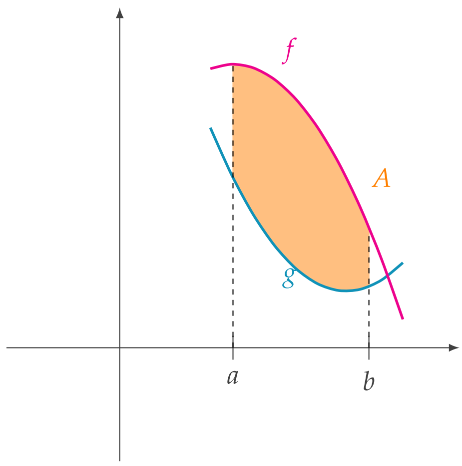



el área de la región comprendida entre el gráfico de $f$ y el eje $x$ para $a \leq x \leq b$ puede obtenerse como la suma de las áreas de las tres regiones sombreadas, delimitadas por ceros de $f$. Cada una estas áreas, a su vez, puede calcularse por medio de una integral con el signo correspondiente:

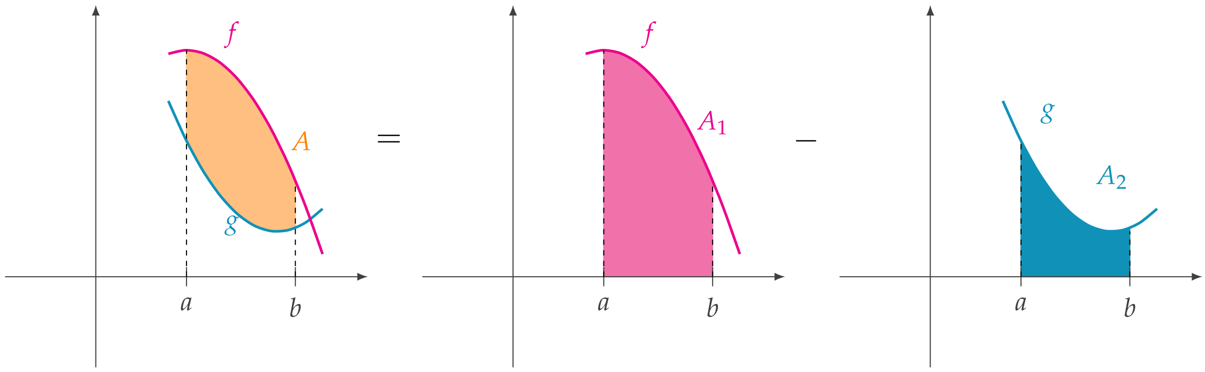
$$A = A_1 + A_2 + A_3 = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)\,dx - \int_d^b f(x)\,dx$$

## 2. Área entre el gráfico de dos funciones

Nos interesa ahora calcular el área de una región comprendida entre los gráficos de dos funciones integrables $f$ y $g$.
Consideremos, en primer lugar, la situación del siguiente gráfico:




Queremos calcular el área comprendida entre los gráficos de $f$ y $g$ para $a \leq x \leq b$. En este caso, $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a; b]$.
Como puede verse en los gráficos siguientes, el área $A$ resulta ser la diferencia entre dos áreas: el área $A_1$ de la región comprendida entre el gráfico de $f$ y el eje $x$ para $a \leq x \leq b$ y el área $A_2$ de la región comprendida entre el gráfico de $g$ y el eje $x$ para $a \leq x \leq b$:




Como $f$ y $g$ toman valores positivos en $[a;b]$, entonces

$$A_1 = \int_a^b f(x)dx \quad \text{y} \quad A_2 = \int_a^b g(x)dx$$

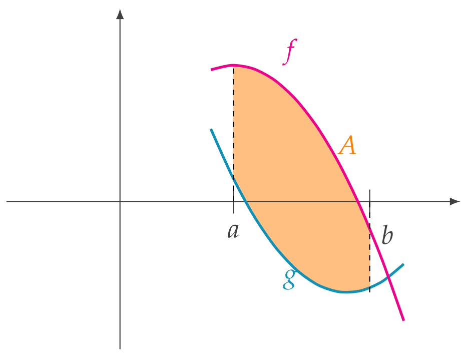
y, por lo tanto, el área $A$ buscada es

$$A = A_1 - A_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

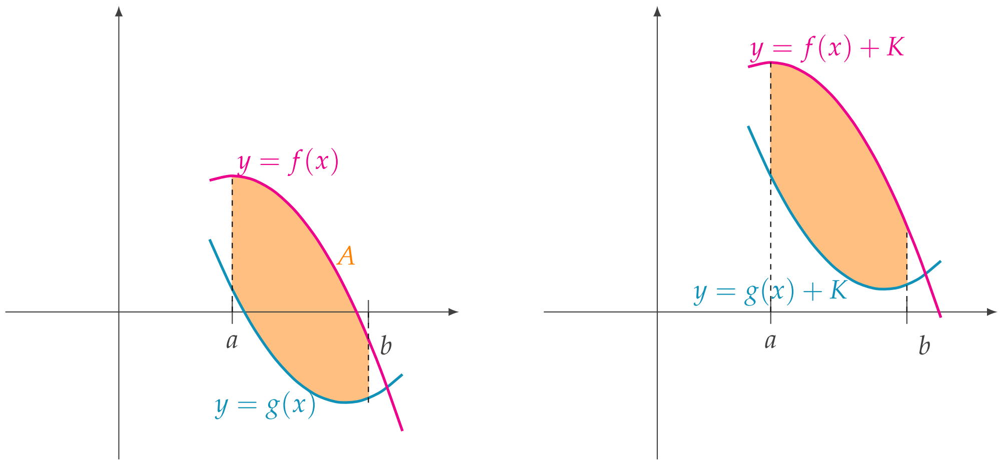
Si las funciones $f$ y $g$ cumplen que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a;b]$, el área de la región comprendida entre los gráficos de $f$ y $g$ para $a \leq x \leq b$ es

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Si bien anteriormente consideramos el caso en que $f$ y $g$ son funciones no negativas en el intervalo $[a;b]$, la fórmula anterior vale siempre que $f$ y $g$ cumplan que $f(x) \geq g(x)$, aunque tomen valores negativos. Para ver esto, consideremos el siguiente gráfico:




En este caso, ambas funciones $f$ y $g$ toman valores positivos y negativos en el intervalo $[a;b]$. Observemos que el área de la región no cambia si la trasladamos (manteniendo su forma y dimensiones). Como la región es acotada, haciendo una traslación en sentido vertical, podemos conseguir que toda la región quede por encima del eje $x$ y, en consecuencia, reducirnos al caso ya analizado. Para hacer esta traslación, basta sumarles la misma constante $K$, suficientemente grande, a $f$ y a $g$, de manera que $g(x) + K \geq 0$ para todo $x \in [a; b]$ y, entonces, $f(x) + K \geq g(x) + K \geq 0$ para todo $x \in [a; b]$. Gráficamente:

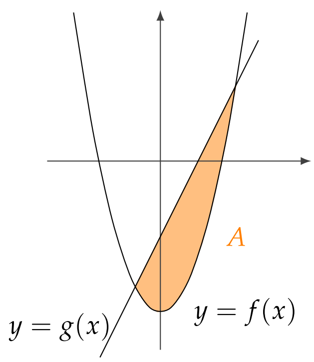



Así, el área de la región es

$$A = \int_a^b ((f(x) + K) - (g(x) + K))\, dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

**Ejemplo 4.** Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 3x^2 - 2$ y $g(x) = 2x - 1$.

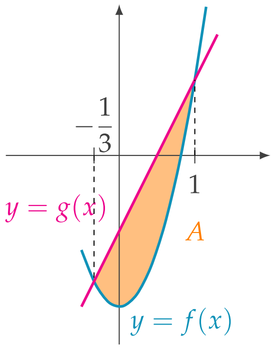
En primer lugar, hagamos un gráfico aproximado de la región cuya área queremos calcular:




La región está limitada por los valores de $x$ correspondientes a los dos puntos en los que se intersecan los gráficos de $f$ y $g$; es decir, los valores de $x$ para los cuales $f(x) = g(x)$. Calculemos estos valores:

$$f(x) = g(x) \iff 3x^2 - 2 = 2x - 1 \iff 3x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x = 1 \text{ ó } x = -\frac{1}{3}.$$

Entonces, los valores de $x$ que delimitan el área son $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 1$. Como podemos observar en el gráfico, $g(x) \geq f(x)$ para todo $x \in [-\frac{1}{3}; 1]$.

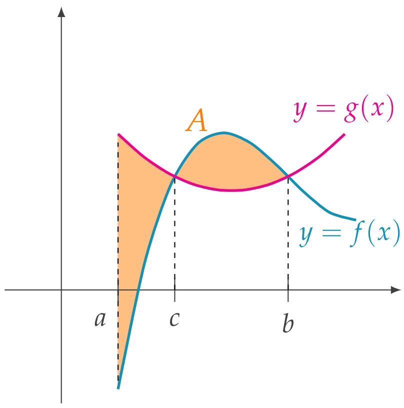



Por lo tanto, el área de la región encerrada entre los gráficos de $f$ y $g$ es

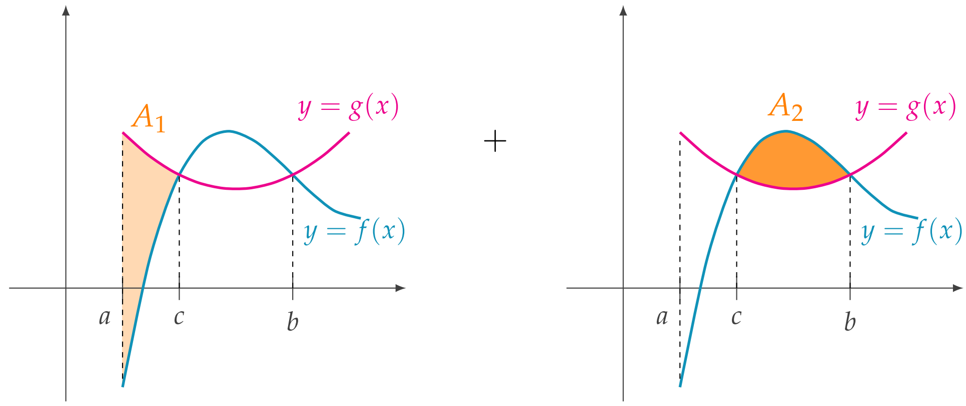
$$A = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(2x - 1 - (3x^2 - 2)\right) dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(-3x^2 + 2x + 1\right) dx = \left(-x^3 + x^2 + x\right) \Big|_{-\frac{1}{3}}^{1} = 1 - \left(-\frac{-5}{27}\right) = \boxed{\frac{32}{27}}$$

Veamos ahora otra situación:




El área $A$ de la región comprendida entre los gráficos de $f$ y $g$ para $a \leq x \leq b$ puede descomponerse como la suma de dos áreas que sabemos calcular:




Como en cada uno de los intervalos $[a;c]$ y $[c;b]$ el gráfico de una de las funciones está siempre arriba del de la otra, usando lo que vimos antes, tenemos que

- $A_1 = \int_a^c (g(x) - f(x))\,dx$, ya que $g(x) \geq f(x)$ para todo $x \in [a;c]$,
- $A_2 = \int_c^b (f(x) - g(x))\,dx$, ya que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [c;b]$,

Por lo tanto,

$$A = \int_a^c (g(x) - f(x))\,dx + \int_c^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

**Ejemplo 5.** Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x^2$ para $0 \leq x \leq 2$.

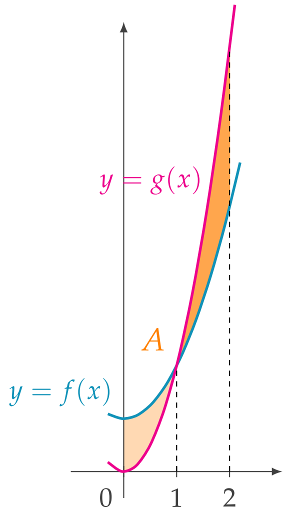
Primero veamos si los gráficos de las funciones se intersecan en algún punto con abscisa tal que $0 \leq x \leq 2$:

$$f(x) = g(x) \iff x^2 + 1 = 2x^2 \iff -x^2 + 1 = 0 \iff x = -1 \text{ ó } x = 1.$$

Como la región está dada por los valores de $x$ entre 0 y 2, el valor que nos interesa es $x = 1$. Veamos ahora cómo se comportan los gráficos de $f$ y $g$ en cada uno de los intervalos $[0;1)$ y $(1;2]$, es decir, si $f(x) > g(x)$ o $f(x) < g(x)$. Dado que $f$ y $g$ son continuas, como consecuencia del Teorema de Bolzano, podemos determinar esto simplemente evaluándolas en un punto de cada intervalo:

| $x$ | $[0;1)$ | $1$ | $(1;2]$ |
|---|---|---|---|
| $f$<br>$g$ | $f(0) = 1$<br>$g(0) = 0$ | $f(1) = 2$<br>$g(1) = 2$ | $f(2) = 5$<br>$g(2) = 8$ |
| luego | $f > g$ | | $f < g$ |

El siguiente gráfico resume la situación:




Luego, el área pedida es

$$A = \int_0^1 \left(-x^2+1\right) dx + \int_1^2 \left(x^2-1\right) dx.$$

Calculando primitivas y usando la regla de Barrow, obtenemos que

$$A = \left(-\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{2}{3} - 0\right) + \left(\frac{2}{3} - (-\frac{2}{3})\right) = \boxed{2}.$$

Para calcular en general el área de la región comprendida entre los gráficos de dos funciones $f$ y $g$ integrables para $a \leq x \leq b$ (ya sea que los gráficos se intersequen o no) la idea es la misma: *subdividir la región en regiones más chicas en cada una de las cuales el gráfico de una de las funciones esté siempre por arriba del de la otra y sumar las áreas de estas regiones*. Esto conduce a la siguiente fórmula para el cálculo del área:

El área de la región comprendida entre los gráficos de $f$ y $g$ para $a \leq x \leq b$ es

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

En la práctica trabajaremos con funciones continuas en $[a;b]$. Para subdividir la región de la manera indicada podemos proceder de la siguiente forma: en primer lugar, buscamos los valores de $x$ para los cuales $f(x) = g(x)$. Para cada par de valores $c$ y $d$ consecutivos entre los obtenidos, nos fijamos cuál de las funciones es mayor en el intervalo $(c;d)$ y, con esta

información, calculamos el área de la región comprendida entre los gráficos de $f$ y $g$ para $c \leq x \leq d$. Una vez calculada el área para cada intervalo, el área total se obtiene sumando las áreas obtenidas.
Observamos que determinar si $f > g$ o $f < g$ es equivalente a ver si $f - g > 0$ o $f - g < 0$. Entonces, si $f$ y $g$ son funciones continuas en un intervalo $(c; d)$ en el cual sus gráficos no se intersecan (es decir, $f(x) - g(x) \neq 0$ para todo $x \in (c; d)$), por el corolario del Teorema de Bolzano, para ver cuál de ellas es mayor en todo el intervalo, basta comparar los valores que toman en un punto cualquiera de $(c; d)$.

## 3. Ejercicios resueltos

**Ejercicio 1.** Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 4x^3$ y $g(x) = 4x$.

*Solución*
Primero calculamos los valores de $x$ donde los gráficos de las funciones se cortan:

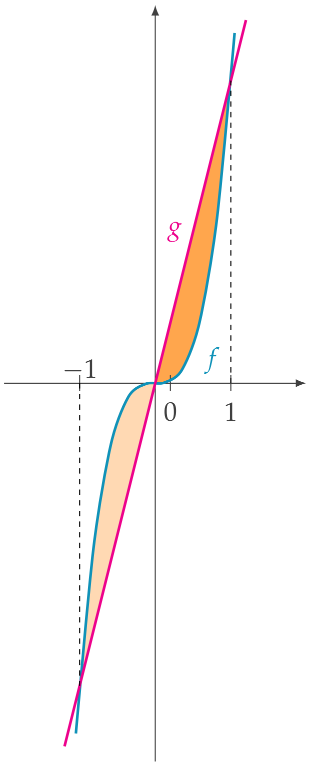
$$f(x) = g(x) \iff 4x^3 = 4x \iff 4x^3 - 4x = 0$$

$$\iff 4x(x^2 - 1) = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = 1 \text{ ó } x = -1.$$

Esto nos dice que el área encerrada entre los gráficos de $f$ y $g$ se encuentra entre $x = -1$ y $x = 1$ y que, además, los gráficos también se cortan en $x = 0$.
Ahora, para cada uno de los intervalos con extremos en dos valores consecutivos entre los hallados, determinamos si $f(x) > g(x)$ o $f(x) < g(x)$ para todo $x$ del intervalo:

| $x$ | $-1$ | $(-1; 0)$ | $0$ | $(0; 1)$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-4$ | $f(-0,5) = -0,5$ | $0$ | $f(0,5) = 0,5$ | $4$ |
| $g$ | $-4$ | $g(-0,5) = -2$ | $0$ | $g(0,5) = 2$ | $4$ |
| luego | | $f > g$ | | $f < g$ | |

Podemos hacer ahora un gráfico aproximado de la situación:




Entonces, el área de la región encerrada entre los gráficos de $f$ y $g$ resulta ser

$$A = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{1} (g(x) - f(x))\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(4x^3 - 4x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(4x - 4x^3\right) dx =$$

$$= (x^4 - 2x^2)\Big|_{-1}^{0} + (2x^2 - x^4)\Big|_{0}^{1} = (0 - (-1)) + (-1 - 0) = \boxed{2}.$$

□

En muchos casos, no es sencillo graficar las funciones para darse una idea del área a determinar, pero sin embargo, siguiendo el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, podemos realizar los cálculos:

**Ejercicio 2.** Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de las funciones $f(x) = (x^3 + 2x)e^{x^4 - 4x^3 + 4x^2}$ y $g(x) = 3x^2 e^{x^4 - 4x^3 + 4x^2}$.

*Solución*

Comenzamos buscando los valores de $x$ correspondientes a los puntos de intersección de los gráficos:

$$f(x) = g(x) \iff (x^3 + 2x)e^{x^4-4x^3+4x^2} = 3x^2 e^{x^4-4x^3+4x^2} \iff$$

$$\iff (x^3 + 2x)e^{x^4-4x^3+4x^2} - 3x^2 e^{x^4-4x^3+4x^2} = 0 \iff (x^3 - 3x^2 + 2x)e^{x^4-4x^3+4x^2} = 0$$

$$\iff x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \iff x = 0 \text{ ó } x = 1 \text{ ó } x = 2$$

Entonces la región cuya área queremos calcular tiene dos partes: una comprendida entre $x = 0$ y $x = 1$ y la otra, entre $x = 1$ y $x = 2$. Para calcular el área de cada una de las dos partes, determinamos si $f > g$ o $f < g$ en los intervalos correspondientes:

| $x$ | 0 | $(0;1)$ | 1 | $(1;2)$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 0 | $f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{8}e^{\frac{9}{16}}$ | $3e$ | $f(\frac{3}{2}) = \frac{51}{8}e^{\frac{9}{16}}$ | 12 |
| $g$ | 0 | $g(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}e^{\frac{9}{16}}$ | $3e$ | $g(\frac{3}{2}) = \frac{27}{2}e^{\frac{9}{16}}$ | 12 |
| luego | | $f > g$ | | $f < g$ | |

En consecuencia, el área de la región encerrada entre los gráficos de $f$ y $g$ es

$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx + \int_1^2 (g(x) - f(x))\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left((x^3 - 3x^2 + 2x)e^{x^4-4x^3+4x^2}\right) dx + \int_1^2 \left((-x^2 + 3x^2 - 2x)e^{x^4-4x^3+4x^2}\right) dx$$

Para terminar el cálculo, buscamos una primitiva de la función $(x^3 - 3x^2 + 2x)e^{x^4-4x^3+4x^2}$ y aplicamos la regla de Barrow

$$\int (x^3 - 3x^2 + 2x)e^{x^4-4x^3+4x^2}\,dx \underset{\downarrow}{=} \frac{1}{4}\int e^u\,du =$$

$$\begin{aligned} u &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 \\ du &= (4x^3 - 12x^2 + 8x)dx \\ &= 4(x^3 - 3x^2 + 2x)dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}e^u + K = \frac{1}{4}e^{x^4-4x^3+4x^2} + K$$

Tomando $K = 0$,

$$A = \left(\frac{1}{4}e^{x^4-4x^3+4x^2}\right)\Big|_0^1 + \left(-\frac{1}{4}e^{x^4-4x^3+4x^2}\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{1}{4}e - \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e\right) = \boxed{\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}}.$$

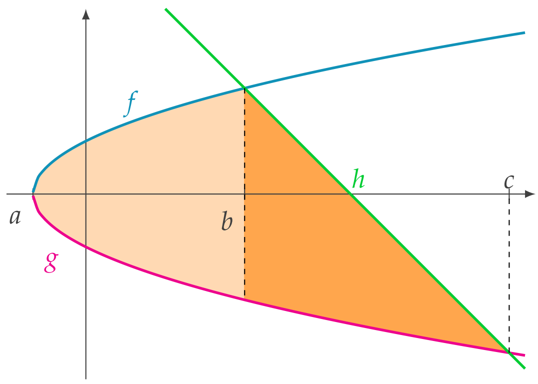
□

Con las herramientas vistas, podemos calcular también áreas de regiones delimitadas por gráficos de funciones en otras situaciones.

**Ejercicio 3.** Calcular el área de la región delimitada por los gráficos de $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = -\sqrt{x+1}$ y $h(x) = -x+5$.

*Solución*

Comencemos haciendo un gráfico para entender la situación:




Observando la figura, para calcular el área buscada, podemos partirla en dos áreas que sabemos calcular: el área comprendida entre los gráficos de $f$ y $g$, desde la abscisa $a$ del punto en que éstos se cortan hasta la abscisa $b$ donde $f$ y $h$ valen lo mismo, y el área comprendida entre los gráficos de $g$ y $h$, desde $b$ hasta la abscisa $c$ del punto donde se cortan sus gráficos. Busquemos entonces los valores de $a$, $b$ y $c$.

El valor $a$ es la abscisa del punto donde se cortan los gráficos de $f$ y $g$:

$$f(x) = g(x) \iff \sqrt{x+1} = -\sqrt{x+1} \iff 2\sqrt{x+1} = 0 \iff x = -1.$$

El valor $b$ es la abscisa del punto donde se cortan los gráficos de $f$ y $h$:

$$f(x) = h(x) \iff \sqrt{x+1} = -x+5 \iff x+1 = (-x+5)^2 \text{ y } -x+5 \geq 0 \iff$$

$$\iff x+1 = x^2 - 10x + 25 \text{ y } x \leq 5 \iff x^2 - 11x + 24 = 0 \text{ y } x \leq 5 \iff$$

$$\iff (x = 3 \text{ o } x = 8) \text{ y } x \leq 5 \iff x = 3.$$

El valor $c$ es la abscisa del punto donde se cortan los gráficos de $g$ y $h$:

$$g(x) = h(x) \iff -x+5 = -\sqrt{x+1} \iff (-x+5)^2 = x+1 \text{ y } -x+5 \leq 0 \iff$$

$$x^2 - 10x + 25 = x+1 \text{ y } x \geq 5 \iff x^2 - 11x + 24 = 0 \text{ y } x \geq 5 \iff$$

$$\iff (x = 3 \text{ o } x = 8) \text{ y } x \geq 5 \iff x = 8.$$

Con todo esto, tenemos que el área buscada es

$$A = \int_{-1}^{3} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{3}^{8} (h(x) - g(x))\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{3} \left(\sqrt{x+1} - (-\sqrt{x+1})\right) dx + \int_{3}^{8} \left(-x + 5 - (-\sqrt{x+1})\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{3} 2\sqrt{x+1}\, dx + \int_{3}^{8} \left(-x + 5 + \sqrt{x+1}\right)\, dx$$

Calculando las primitivas correspondientes (¡queda como ejercicio para el lector!) y aplicando la regla de Barrow tenemos que

$$A = \left(\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{-1}^{3} + \left(-\frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{3}^{8} = \left(\frac{32}{3} - 0\right) + \left(26 - \frac{95}{6}\right) = \boxed{\frac{125}{6}}.$$

$\square$

Con lo visto aquí, se pueden resolver los ejercicios 1 a 5 de la Práctica 10.

Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), *Área entre curvas, Teóricas de Análisis Matemático (28).*