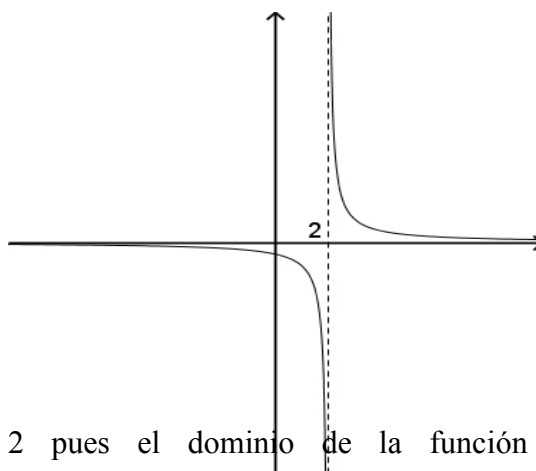


# Continuidad

## 1. Idea de continuidad

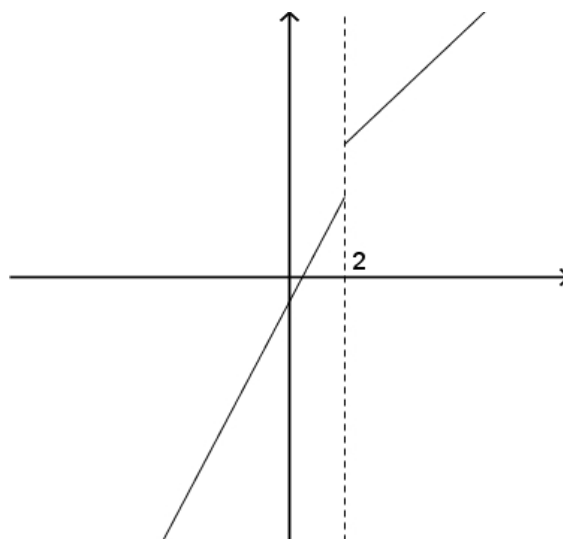
Intuitivamente una función es continua en un punto  $x = a$  si está definida en dicho punto y su gráfico puede dibujarse sin tener que levantar el lápiz del papel. Para visualizar este concepto, consideremos las siguientes funciones reales en  $x = 2$ :

$$f_1(x) = \frac{3}{x-2}$$



La función  $f_1(x) = \frac{3}{x-2}$  no está definida en 2 pues el dominio de la función es  $Dom f(x) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ . Por lo visto al estudiar límite de funciones, sabemos que  $\lim_{x \rightarrow 2} f_1(x) = \infty$  y observamos que al dibujarla hay que levantar el lápiz del papel, con lo cual intuimos que esta función no es continua en  $x = 2$ .

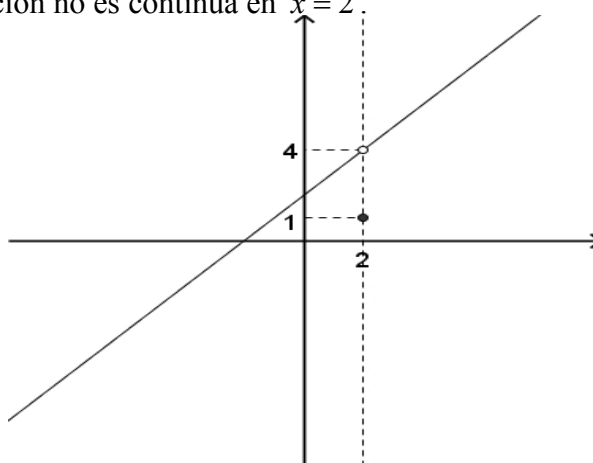
$$f_2(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x > 2 \\ 2x-1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$



## Teóricas de Análisis Matemático (28) – Práctica 4 – Continuidad

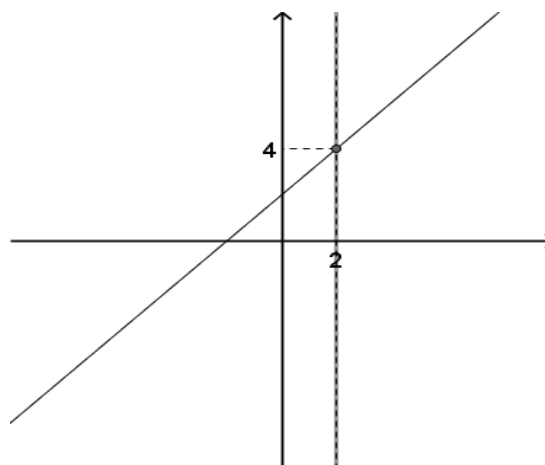
La función  $f_2(x)$  está definida en 2 y  $f_2(2) = 5$ , o sea, el punto  $(2,5)$  está en el gráfico de  $f_2(x)$ , pero para dibujarla hay que levantar el lápiz, la función da un salto. Al aproximarse a 2 por la izquierda, la función se acerca a 3, es decir,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f_2(x) = 3$ ; sin embargo al acercarnos por la derecha se acerca a 5:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f_2(x) = 5$ . Los límites laterales no coinciden, entonces  $\lim_{x \rightarrow 2} f_2(x)$  no existe, sospechamos que la función no es continua en  $x = 2$ .

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$



La función  $f_3(x)$  está definida en 2 y  $f_3(2) = 1$ , es decir, el punto  $(2,1)$  está en el gráfico de la función pero al acercarnos al 2 la función se acerca a 4, es decir,  $\lim_{x \rightarrow 2} f_3(x) = 4$ . El valor de la función no coincide con el límite. Acá, también vemos que la función no es continua.

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$



La función  $f_4(x)$  está definida en 2 y  $f_4(2) = 4$ , o sea, el punto  $(2,4)$  está en el gráfico de la función, y al aproximarse a 2 la función se acerca a 4, es decir,  $\lim_{x \rightarrow 2} f_4(x) = 4$ . Los valores de la función y del límite en  $x = 2$  coinciden. Se puede dibujar la función sin levantar el lápiz del papel.

Conclusión: la función  $f_4(x)$  es continua, las otras no lo son.

Esto nos hace notar que el concepto de *continuidad* está estrechamente ligado al concepto de *límite*. Empecemos definiendo la continuidad de una función en un punto y, después, veremos continuidad en un intervalo y sus consecuencias.



**Definición.** Una función  $f$  es *continua* en  $x = a$ , si :

- 1) Existe  $f(a)$ , es decir,  $a \in \text{Dom}(f)$ .
- 2) Existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$ , es decir,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \in \mathbb{R}$ .
- 3) El límite y el valor de la función coinciden, es decir  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Al volver a los ejemplos, podemos afirmar que  $x = 2$  :

La función  $f_1(x)$  es discontinua porque no cumple la condición 1).

La función  $f_2(x)$  es discontinua porque no cumple la condición 2).

La función  $f_3(x)$  es discontinua porque no cumple la condición 3), esta se conoce como discontinuidad *evitable*.

La función  $f_4(x)$  resulta continua.

## 2. Funciones continuas

Una función es *continua* si lo es en cada punto de su dominio.



**Ejemplo.**  $f(x) = x$  es continua para todo punto de su dominio.  $\text{Dom}f = \mathbb{R}$ .

Una función es continua en un intervalo, si lo es en cada punto de dicho intervalo.



**Ejemplo.**  $g(x) = \sqrt{2x-8}$  definida en el intervalo  $4 \leq x \leq 12$  es continua.

La suma de funciones continuas es continua, así como también, el producto y el cociente donde el denominador es no nulo.



**Ejemplos.**  $h(x) = f(x) + g(x) = x + \sqrt{2x-8}$  para  $x \geq 4$  porque el dominio de  $g(x)$   
 $k(x) = f(x).g(x) = x.\sqrt{2x-8}$  también resulta continua.

Como la función  $f(x) = x$  es continua y una función polinómica es una combinación de productos y sumas de estas, todas las funciones polinómicas son continuas.



**Ejemplo.**  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$  es una función polinómica, por lo cual es continua.

Las funciones  $\sin(x), \cos(x), e^x$  y  $\ln(x)$  son continuas en su dominio.

A las funciones que no son continuas, se las llama **discontinuas**. Hay discontinuidades como las del ejemplo  $f_1(x) = \frac{3}{x-2}$  donde no se puede redefinir la función y no se puede evitar pero otras si son evitables.

## 2.1 Discontinuidades evitables

La función  $f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}$  no está definida en  $x=5$  (se anula el denominador).

Con esto alcanza (condición 2) de la definición) para decir que  $f$  no es continua en ese punto (es decir,  $f(x)$  es *discontinua* en  $x=5$ ).

Sin embargo:

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3} = \lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x+4}+3) = 6$$

(La situación es similar a  $f_3(x)$ , ver su gráfico)

Como existe el límite de la función en  $x=5$  y es igual a 6, “redefinimos” la función  $f$  “agregando” de esta manera el valor del límite en  $x=5$  (obtenemos una función continua).

La nueva función  $g(x)$  definida así:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3} & \text{si } -4 \leq x, x \neq 5 \\ 6 & \text{si } x = 5 \end{cases} \quad \text{es continua en } x=5.$$



**Ejercicio 1.** Decidir si  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$  es continua en  $x = 2$ .

*Solución*

Para ver si la función es continua, debemos calcular el límite en  $x = 2$ , reemplazando  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$  y simplificando  $x - 2$ , obtenemos  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$ .

Como el límite coincide con el valor de la función en el punto, podemos afirmar que  $f(x)$  es continua en  $x = 2$ .



**Ejercicio 2.** Decidir si  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{3x - 3} & \text{si } x > 1 \\ \frac{x}{6} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$  es continua en  $x = 1$ .

*Solución*

Para ver si la función es continua debemos calcular el límite en  $x = 1$ , pero como es una función partida debemos calcular los límites laterales en  $x = 1$ .

Calculemos  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ , por la definición de la función, esto es igual a  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{6} = \frac{1}{6}$ .

Calculemos  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ , por la definición de la función, esto es igual a  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{3x - 3}$ .

Para calcular este límite, multiplicamos y dividimos por el conjugado de  $\sqrt{x} - 1$  o sea,  $\sqrt{x} + 1$ , el producto da  $x - 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{3(x - 1)} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$  y queda así  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{3(x - 1)\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{6}$ .

Entonces como los límites laterales coinciden, decimos que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{6}$  y coincide con el valor de la función en el punto. Podemos afirmar que  $f(x)$  es continua en  $x = 1$ .



**Ejercicio 3.** Decidir si  $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(3x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ x + 3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$  es continua en  $x = 0$ .

*Solución*

Para ver si la función es continua, debemos calcular el límite en  $x = 0$  y ver si coincide con el valor de la función en dicho punto.

Al ser una función partida, tenemos que calcular los límites laterales y ver que coinciden.

$$\text{Calculemos } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(3x)}{x} .$$

Recordemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(ax)}{ax} = 1$  , lo utilizamos para calcular este límite, y al multiplicar

$$\text{numerador y denominador por 3 queda } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\text{sen}(3x)}{3x} = 3 .$$

$$\text{Luego, calculemos } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 3 = 3 .$$

Como  $f(0) = 3$  y como los límites laterales coinciden con el valor de la función, podemos afirmar que la función  $f(x)$  es continua en  $x = 0$ .



**Ejercicio 4.** Hallar  $a$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4} & \text{si } x > 9 \\ 3a^2 & \text{si } x \leq 9 \end{cases}$

sea continua en  $x = 9$ .

*Solución*

Por la condición 3), es necesario que  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = f(9) = 3a^2$  .

Evaluamos el límite lateral de la función en  $x = 9$ , o sea,  $\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4}$

multiplicando por los conjugados del numerador y del denominador obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4} \left( \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}} \right) \left( \frac{\sqrt{x+7}+4}{\sqrt{x+7}+4} \right)$$

y como  $(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x+3}) = x-9$  y  $(\sqrt{x+7}-4)(\sqrt{x+7}+4) = x-9$

$$\text{obtenemos } \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{(x-9) \left( \frac{\sqrt{x+7}+4}{\sqrt{x+3}} \right)}{(x-9)} = \lim_{x \rightarrow 9} \left( \frac{\sqrt{x+7}+4}{\sqrt{x+3}} \right) = \frac{4}{3} .$$

Para que  $f$  sea continua, el límite debe coincidir con el valor de la función que es  $3a^2$ , es decir que

$$\frac{4}{3} = 3a^2, \text{ por lo tanto, } a^2 = \frac{4}{9}, \text{ o sea, } |a| = \frac{2}{3} .$$

La función resulta continua para  $a = \frac{2}{3}, a = -\frac{2}{3}$ .



Pueden resolver los ejercicios 11 y 12 de la Práctica 4.

## 2.2 Propiedades de las funciones continuas

Como consecuencia directa de la definición, las funciones continuas tienen las siguientes propiedades:



**Conservación de signo.** Si una función  $f$  es continua en  $x = a$  y  $f(a) > 0$ , entonces,  $f$  permanece positiva “cerca de  $a$ ” (o negativa si  $f(a) < 0$ ).

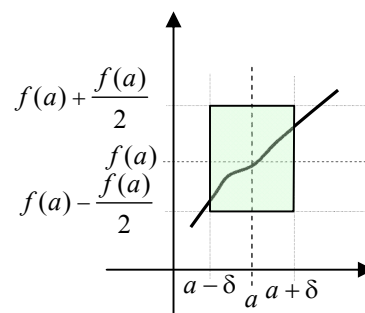


**Acotación en un entorno.** Si una función  $f$  es continua en  $x = a$ , entonces,  $f(x)$  está acotada superior e inferiormente “cerca de  $a$ ” (ver gráfico).

*Demostración:*

En la definición de límite de una función en un punto, como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , si  $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$ , mirar “fijo” el gráfico, se obtienen los dos resultados:

- 1)  $f(x) > 0$  si  $a - \delta < x < a + \delta$ .
- 2)  $f(x)$  está acotada en  $a - \delta < x < a + \delta$ .



Pueden realizar el **ejercicio** 14 de la Práctica 4 omitiendo el ejercicio 13.



**Teorema de Bolzano.** Si  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, tal que  $f(a) < 0$  y  $f(b) > 0$  (o al revés) entonces existe  $c \in (a; b)$  tal que  $f(c) = 0$

*Demostración :*

Consideremos el conjunto

$$A = \{ x \in [a, b] : f(x) < 0 \} \text{ (en el gráfico es el pintado de rojo).}$$

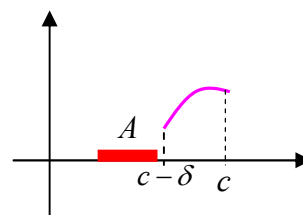
Observemos que  $A$  está acotado ( $A \subset [a; b]$ ),  $A \neq \emptyset$  ( $a \in A$ )

Entonces, existe el supremo  $A = c$ , probaremos que  $f(c) = 0$ .

Para ello, descartamos las otras dos posibilidades.

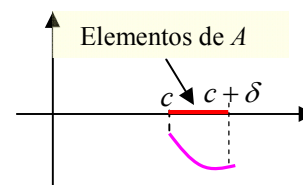
Si fuera  $f(c) > 0$ :

Entonces  $a < c \leq b$ . Por la conservación del signo,  $f(x) > 0$  en  $(c - \delta; c]$  para algún  $\delta$  suficientemente chico. Luego, el conjunto  $A$  está “a la izquierda” de  $c - \delta$ . En otras palabras,  $c - \delta$  es una cota superior (menor que  $c$ ) del conjunto  $A$ . Pero esto contradice que  $c$  es la menor de las cotas superiores de  $A$ .



Si fuera  $f(c) < 0$ :

Entonces  $a \leq c < b$ . Por la conservación del signo,  $f(x) < 0$  en  $[c; c + \delta)$ . Por lo tanto el intervalo  $(c; c + \delta) \subset A$ . Es decir, hay elementos de  $A$  “a la derecha” de  $c$ . Pero, esto contradice que  $c$  es cota superior de  $A$ .



Luego  $f(c) = 0$ .



**Ejercicio 5.** Dada la ecuación  $x^3 - 4x + 1 = 0$  demostrar que tiene una solución en el intervalo  $[0; 1]$ .

*Solució:*

La función  $f(x) = x^3 - 4x + 1$  es continua.

Además,  $f(0) = 1 > 0$  y  $f(1) = 1 - 4 + 1 = -2 < 0$ .

El Teorema de Bolzano asegura que existe  $c \in (0;1)$  tal que  $f(c) = 0$ .

Es decir, en el intervalo  $(0,1)$  tenemos una solución de  $x^3 - 4x + 1 = 0$ .



**Ejercicio 6.** Hallar el conjunto de positividad de la función  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ .

*Solución*

La función  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$  es continua.

Al sacar factor  $x$  común  $f(x) = x(x^2 - x - 2)$  y resolver la cuadrática, obtenemos **todos** los ceros de  $f(x) = x(x+1)(x-2)$  que son  $x = 0, x = -1, x = 2$ .

El teorema de Bolzano nos asegura que: entre 2 ceros de la función ella se mantiene toda positiva o toda negativa con lo que basta estudiar el signo de  $f$  en los intervalos

$$(-\infty; -1), (-1; 0), (0; 2), (2; +\infty)$$

Como  $f(-2) = -8 < 0$  entonces  $f < 0$  en el intervalo  $(-\infty; -1)$ .

Como  $f(-0,5) = \frac{5}{8} > 0$  entonces  $f > 0$  en el intervalo  $(-1; 0)$ .

Como  $f(1) = -2 < 0$  entonces  $f < 0$  en el intervalo  $(0; 2)$ .

Como  $f(3) = 12 > 0$  entonces  $f > 0$  en el intervalo  $(2; +\infty)$ .

$f(-2)$	$f(-0,5)$	$f(1)$	$f(3)$
negativo	positivo	negativo	positivo

Luego, el conjunto de positividad de  $f$  es  $A = \{x / f(x) > 0\} = (-1; 0) \cup (2; +\infty)$ .



**Ejercicio 7.** Demostrar que la ecuación  $x^2 = \sqrt{x+1}$  tiene una solución en el intervalo  $(1;2)$ .

*Solución*

Llamemos  $f(x) = x^2 - \sqrt{x+1}$ . Es fácil ver que la función  $f$  es continua en el intervalo  $[1;2]$ .

Al evaluar la función en los extremos del intervalo, obtenemos que  $f(1) = -1 < 0$  y que

$$f(2) = 4 - \sqrt{3} > 0.$$

El teorema de Bolzano nos asegura que hay un punto  $c \in (1;2)$  donde  $f(c)=0$ , con lo cual  $x^2 - \sqrt{x+1} = 0$  para algún  $x \in (1;2)$ , es decir, la ecuación  $x^2 = \sqrt{x+1}$  tiene una solución en el intervalo  $(1,2)$ .



**Ejercicio 8.** Hallar en forma aproximada, con un decimal exacto, una solución de la ecuación:

$$x^5 + 5x^2 - 2 = 0$$

*Solución*

Consideremos la función  $f(x) = x^5 + 5x^2 - 2$ , que es continua.

Además  $f(0) = -2 < 0$  y  $f(1) = 1 + 5 - 2 = 4 > 0$ .

El teorema de Bolzano asegura que existe  $c \in (0;1)$  tal que  $f(c) = 0$ . Es decir, en el intervalo  $(0;1)$  tenemos una solución de  $x^5 + 5x^2 - 2 = 0$ . En consecuencia, la parte entera de  $c$  es 0 (porque está entre 0 y 1). Para encontrar el primer decimal, estudiamos el signo de  $f(0,1); f(0,2)$ ... etc. hasta  $f(0,8)$  y vemos en qué intervalo cambia de signo. Haciendo esto se obtiene

$f(0,1)$	$f(0,2)$	$f(0,3)$	$f(0,4)$	$f(0,5)$	$f(0,6)$	$f(0,7)$	$f(0,8)$
negativo	negativo	negativo	negativo	negativo	negativo	positivo	positivo

Usamos el teorema de Bolzano en el intervalo  $[0,6;0,7]$ . En este intervalo, la función  $f$  pasa de negativo a positivo, entonces existe un  $c$  en ese intervalo tal que  $f(c) = 0$ . Por estar allí, se tiene que  $c \approx 0,6$ ...

El teorema de Bolzano es un teorema de existencia. Vemos en este ejemplo, que con solo saber que existe, tenemos una “receta” (*algoritmo*) que permite encontrar la solución con la precisión que se quiera.

El teorema de Bolzano se generaliza fácilmente al teorema de valores intermedios.



**Teorema de los valores intermedios.** Sea  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, si  $y$  es un número comprendido entre  $f(a)$  y  $f(b)$  entonces existe  $c \in (a;b)$  tal que  $f(c) = y$ .

Para ilustrar la potencia de este resultado, planteamos un curioso problema.



**Problema.** Un automovilista sale de la ciudad A a las 12 hs y llega a la ciudad B a las 16 hs tardando exactamente 4 horas en recorrer los 400 kilómetros que separa una ciudad de la otra. En esas cuatro horas se pudo haber detenido un rato, ir muy despacio o ir muy rápido.

Demostrar que, cualquiera haya sido el caso, existe un intervalo de una hora comprendida entre las 12 hs y las 16 hs donde recorrió exactamente 100 kilómetros.

*Solución*

Llamemos  $f(t)$  a la cantidad de kilómetros que lleva recorridos a la hora  $t$ . Así  $f(12)=0$  y  $f(16)=400$ . Asumimos que la función  $f$  es continua.

Consideremos, ahora, la función continua  $g(t) = f(t+1) - f(t)$  definida para  $12 \leq t \leq 15$ . La función  $g$  mide la cantidad de kilómetros recorridos entre la hora  $t$  y la hora  $t+1$ . Para resolver el problema, bastaría saber que existe un instante  $t_0 \in (12,15)$  tal que  $g(t_0)=100$ . Veamos que el Teorema de los Valores Intermedios puede venir en nuestra ayuda. Se tiene que

$$g(12) = f(13) - f(12)$$

$$g(13) = f(14) - f(13)$$

$$g(14) = f(15) - f(14)$$

$$g(15) = f(16) - f(15)$$

Si se suman estos cuatro números, se obtiene:

$$g(12) + g(13) + g(14) + g(15) = f(16) - f(12) = 400$$

En consecuencia los cuatro números no pueden ser todos menores que 100 porque, si así fuera, su suma no llegaría a 400. De la misma manera, no pueden ser todos mayores que 100 porque, en tal caso, su suma sería mayor que 400. Entonces alguno de los cuatro tiene que ser menor o igual que 100 y algún otro tiene que ser mayor o igual que 100. (por ejemplo  $g(13) \leq 100$  y  $g(15) \geq 100$  o cualquier otro).

El teorema de los valores intermedios nos asegura que entre esos dos instantes (entre las 13 hs y las 15 hs) hay un instante  $t_0$  tal que  $g(t_0)=100$ .

No sabemos cuál es ese instante, pero sí sabemos que existe tal instante.



Se pueden resolver los ejercicios 15 a 19 de la Práctica 4.