Práctica 7 – Parte 2

Optimización

1. Problemas de optimización

Ejemplo 1

Descomponer el número 36 en dos sumandos positivos de modo que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

Si notamos con x a uno de los sumandos en los que se descompone 36, el otro debe ser $36-x$. Como ambos son positivos, se tiene que $x>0$ y $36-x>0$, o sea que $0<x<36$. Queremos hallar el valor de x en el que la función,

$$p(x)=(36-x)\cdot x^2=36x^2-x^3$$

alcanza su valor máximo.

La función p es derivable en $\mathbb{R}$ y por lo tanto, lo es en el intervalo (0;36). Sabemos que los extremos locales de p se encuentran en los x donde $p'(x)=0$.

Calculamos

$$p'(x)=(36x^2-x^3)'=72x-3x^2=3x(24-x).$$

Como

$$p'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x(24-x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \text{ o } x=24$$

y sólo estamos estudiando la función en el intervalo (0;36), el único punto crítico es $x=24$.

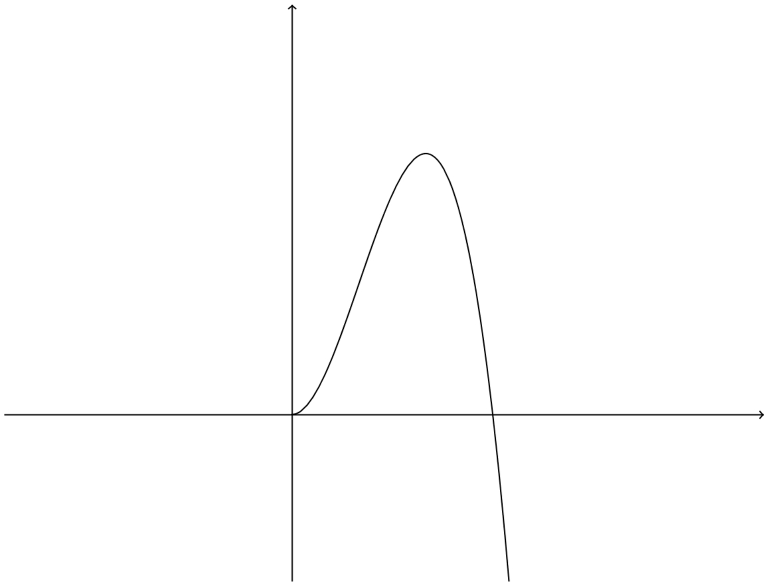
Dado que p' es continua y que tiene un único cero en el intervalo (0;36), por el teorema de Bolzano podemos afirmar que, tanto en (0;24) como en (24;36), el signo de p' es constante.

Por lo dicho anteriormente para conocer el signo de p', basta con calcularlo en un valor particular de cada intervalo.

En (0;24), elegimos $x=1$. Como $p'(1)=3\cdot 1\cdot 23>0$, resulta que $p'(x)>0$ para todo $x\in(0;24)$. Esto implica que p es estrictamente creciente en (0;24].

En (24;36), elegimos $x=25$. Como $p'(25)=3\cdot 25\cdot(-1)<0$, resulta que $p'(x)<0$ para todo $x\in(24;36)$. Esto implica que p es estrictamente decreciente en [24;36).

A partir de esta información acerca del crecimiento y del decrecimiento de p, podemos afirmar que en $x = 24$, p alcanza un máximo local y dicho máximo vale $p(24) = 12 \cdot 24^2 = 6912$. Damos a continuación un gráfico aproximado de la función p.

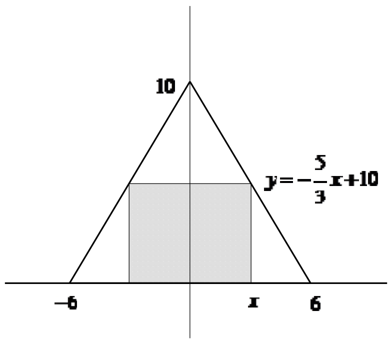


Los dos sumandos en los que hay que dividir 36 son 24 y 12.

Ejemplo 2

En el triángulo isósceles de base 12 y altura 10, se inscribe un rectángulo tal que dos de sus vértices pertenecen a la base del triángulo y los otros dos pertenecen uno a cada uno de los otros dos lados. Calcular las dimensiones que debe tener el rectángulo para que su área sea máxima.

Graficamos el triángulo con sus vértices en los puntos $(0,10)$, $(-6,0)$ y $(6,0)$.



La ecuación de la recta por $(0,10)$, y $(6,0)$ es $y = -\frac{5}{3}x + 10$.

Por la simetría de la figura, para calcular el área del rectángulo inscrito en el triángulo, alcanza con considerar los valores de $x \in (0;6)$. Así, el área del rectángulo es

$$a(x) = \text{base} \times \text{altura} = 2x \cdot \left(-\frac{5}{3}x + 10\right) = -\frac{10}{3}x^2 + 20x\,.$$

Para que exista un rectángulo en las condiciones del problema, debe ocurrir que $0 < x < 6$. Queremos hallar el valor de x, en el que la función

$$a(x) = -\frac{10}{3}x^2 + 20x\ ,$$

alcanza su valor máximo.
La función a es derivable en $\mathbb{R}$ y por lo tanto, lo es en el intervalo (0;6). Sabemos que los extremos locales de a se encuentran en los x donde $a'(x) = 0$.
Calculamos

$$a'(x) = -\frac{20}{3}x + 20 = 20\left(-\frac{x}{3} + 1\right).$$

Entonces

$$a'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{x}{3} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

Dado que a' es continua en $(0;6)$ y que en dicho intervalo tiene un único cero, utilizamos el teorema de Bolzano y podemos afirmar que $(0;6)$ queda dividido en dos intervalos con signo constante en cada uno de ellos.
Los intervalos para analizar son (0;3) y (3;6) y, por lo dicho anteriormente, para conocer el signo de a', basta con calcularlo en un valor particular de cada intervalo.

En (0;3), elegimos $x = 1$. Como $a'(1) = 20\left(-\frac{1}{3} + 1\right) > 0$, resulta que $a'(x) > 0$ para todo $x \in (0;3)$.

Esto implica que a es estrictamente creciente en (0;3].

En (3;6), elegimos $x = 4$. Como $a'(4) = 20\left(-\frac{4}{3} + 1\right) < 0$, resulta que $a'(x) < 0$ para todo $x \in (3;6)$.

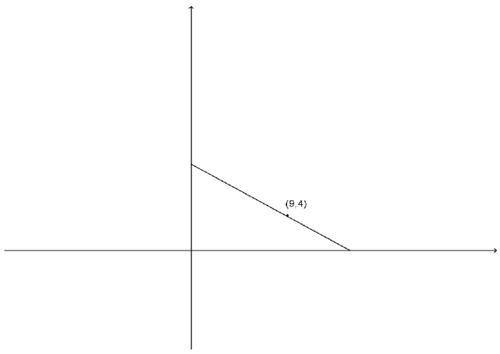
Esto implica que a es estrictamente decreciente en [3;6). Así, en $x = 3$, la función alcanza un máximo local. Las dimensiones del rectángulo de área máxima corresponden $x = 3$ y tenemos que el rectángulo tiene $\boxed{\text{base} = 2 \cdot x = 6}$ y $\boxed{\text{altura} = -\frac{5}{3} \cdot x + 10 = -\frac{5}{3} \cdot 3 + 10 = 5.}$

En este caso, la función $a(x)$ es una cuadrática con coeficiente principal negativo, por lo tanto alcanza su máximo en el vértice.

Ejemplo 3

Se consideran las rectas que pasan por el punto (9,4) y que al cortar a los semiejes positivos determinan triángulos rectángulos.
Entre todas estas rectas, hallar aquella que
(a) genera un triángulo de área mínima;
(b) hace mínima la suma de las longitudes de los catetos.

Sea m la pendiente de una recta que pasa por (9,4). Observemos que para que la recta corte a los semiejes positivos debe ser $m < 0$. Las rectas que estamos considerando pasan por el punto (9,4), luego son de la forma $y = m(x-9)+4$, con $m < 0$.



Estas rectas cortan al eje *x,* cuando $y = 0$, luego, $x = -\frac{4}{m} + 9 = \frac{9m-4}{m}$ y cortan al eje *y* cuando $x = 0$, o sea $y = 4 - 9m$.

(a) El área del triángulo en función de la pendiente de la recta (*m*) es

$$A(m) = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9m-4}{m} \cdot (4-9m) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{(9m-4)^2}{m}.$$

Calculamos la derivada de la función área respecto de la variable *m.*

$$A'(m) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2(9m-4)\cdot 9 \cdot m - (9m-4)^2}{m^2} \right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{(9m-4)(18m-9m+4)}{m^2} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{(9m-4)(9m+4)}{m^2} \right).$$

Dado que $m \in (-\infty; 0)$, el único valor en el que se anula la derivada es $m = -\frac{4}{9}$.

Como A' es continua, utilizando el teorema de Bolzano podemos afirmar que su único cero divide a $(-\infty; 0)$ en dos intervalos en los que el signo de A' es constante.

Los intervalos para analizar son $\left(-\infty; -\frac{4}{9}\right)$ y $\left(-\frac{4}{9}; 0\right)$, por lo dicho anteriormente para conocer el signo de A', basta con calcularlo en un valor particular de cada intervalo.

En $\left(-\infty; -\frac{4}{9}\right)$, elegimos $m = -1$. Como $A'(-1) = -\frac{1}{2}\frac{(9(-1)-4)(9(-1)+4)}{(-1)^2} < 0$, resulta que $A'(m) < 0$ para todo $m \in \left(-\infty; -\frac{4}{9}\right)$. Esto implica que *a* es estrictamente decreciente en $\left(-\infty; -\frac{4}{9}\right]$.

En $\left(-\frac{4}{9}; 0\right)$ elegimos $m = -\frac{1}{9}$.

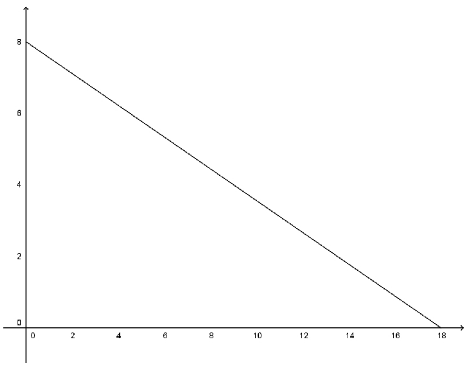
Como $A'\left(-\frac{1}{9}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\left(9\left(-\frac{1}{9}\right)-4\right)\left(9\left(-\frac{1}{9}\right)+4\right)}{\left(-\frac{1}{9}\right)^2}=-\frac{1}{2}\frac{(-1-4)(-1+4)}{\left(-\frac{1}{9}\right)^2}>0$

resulta que $A'(m)>0$ para todo $m\in\left(-\frac{4}{9};0\right)$. Esto implica que A es estrictamente creciente en $\left[-\frac{4}{9};0\right)$.

De esto se deduce que la función área tiene un mínimo local en $m=-\frac{4}{9}$.

Dado que la función área es continua en $(-\infty;0)$, es estrictamente decreciente a la izquierda de $m=-\frac{4}{9}$ y estrictamente creciente a la derecha de $x=-\frac{4}{9}$, concluimos que A tiene un mínimo absoluto en $\boxed{m=-\frac{4}{9}}$ y vale $A\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{-\left(9\left(-\frac{4}{9}\right)-4\right)^2}{2\left(-\frac{4}{9}\right)}\boxed{=72}$.

Es decir que la pendiente de la recta que pasa por (9,4) y hace mínima el área del triángulo es $m=-\frac{4}{9}$, la ecuación de dicha recta es $y=\frac{-4}{9}x+8$.



(b) Se quiere ahora minimizar la suma de las longitudes de los catetos de los triángulos formados por las rectas que pasan por el punto (9,4) y los semiejes positivos. Utilizando los cálculos anteriores, y llamando L a la suma de las longitudes de los catetos en función de la pendiente de la recta, tenemos que

$$L(m)=\left(-\frac{4}{m}+9\right)+(4-9m)=13-\frac{4}{m}-9m\text{, donde } m\in(-\infty;0)\text{.}$$

Calculamos la derivada de L respecto de m

$$L'(m)=\frac{4}{m^2}-9=\frac{4-9m^2}{m^2}\text{,}$$

y buscamos los valores que anulan la derivada

$$L'(m)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4-9m^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad m=\frac{2}{3} \text{ o } m=-\frac{2}{3}.$$

Como $m\in(-\infty;0)$, el único punto crítico es $m=-\frac{2}{3}$.

Utilizando el teorema de Bolzano, analizamos el signo de L' en los intervalos $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$ y en $\left(-\frac{2}{3};0\right)$ evaluando en un punto en cada caso.

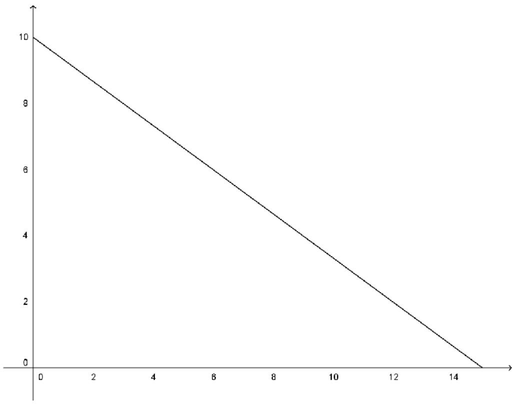
En $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$, elegimos $m=-1$. Como $L'(1)=\frac{4-9\cdot 1^2}{1^2}=-5<0$, resulta que $L'(m)<0$ para todo $m\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$. Esto implica que L es estrictamente decreciente en $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]$.

En $\left(-\frac{2}{3};0\right)$ elegimos $m=-\frac{1}{3}$. Como $L'\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4-9\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=27>0$, tenemos que $L'(m)>0$ para todo $m\in\left(-\frac{2}{3};0\right)$. Así, resulta que L es estrictamente creciente en $\left[-\frac{2}{3};0\right)$.

De esto se deduce que la función L tiene un mínimo local en $m=-\frac{2}{3}$.

Dado que es continua en $(-\infty;0)$, L resulta estrictamente decreciente a la izquierda de $m=-\frac{2}{3}$ y estrictamente creciente a la derecha de $m=-\frac{2}{3}$, por lo cual concluimos que tiene un mínimo absoluto en $\boxed{m=-\frac{2}{3}}$ y vale $L\left(-\frac{2}{3}\right)=13-\frac{4}{\left(-\frac{2}{3}\right)}-9\left(-\frac{2}{3}\right)=25$ y corresponde al triángulo que corta el eje x en $\boxed{x=15}$ y al eje y en $\boxed{y=10}$.

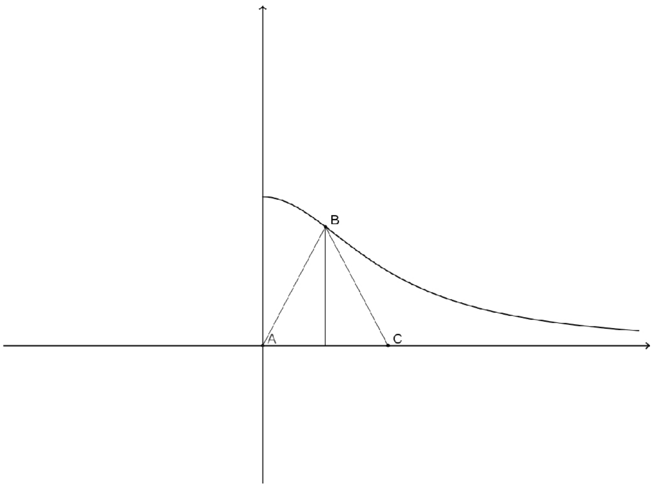
Es decir que, la pendiente de la recta que hace mínima la suma de las longitudes de los catetos es $m=-\frac{2}{3}$, la ecuación de dicha recta es $y=\frac{-2}{3}x+10$.



Ejemplo 4

Sea $f:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$. Se consideran los triángulos de vértices $A=(0,0)$, $B=(x,f(x))$ y $C=(2x,0)$. Hallar las dimensiones del triángulo de mayor área.

Hacemos un gráfico aproximado de f y de un triángulo.



Sea $a(x)$ el área del triángulo *ABC*. Es decir

$$a(x)=\frac{\text{base}\times\text{altura}}{2}=\frac{2x\cdot f(x)}{2}=x\cdot\frac{1}{x^2+4}=\frac{x}{x^2+4}.$$

Calculamos la derivada de la función área

$$a'(x)=\frac{(x^2+4)-x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2}.$$

Entonces

$$a'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-x)(2+x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ o } x = -2 .$$

Dado que $x \in [0;+\infty)$, el único valor en el que se anula la derivada es $x = 2$.

Como a' es continua en $(0;+\infty)$, utilizando el teorema de Bolzano, podemos afirmar que su único cero divide a $(0;+\infty)$ en dos intervalos en los que el signo de a' es constante.

Los intervalos para analizar son $(0;2)$ y $(2;+\infty)$, por lo dicho anteriormente, para conocer el signo de a', basta con calcularlo en un valor particular de cada intervalo.

En $(0;2)$, elegimos $x=1$. Como $a'(1) = \dfrac{(2-1)(2+1)}{(1^2+4)^2} > 0$, resulta que $a'(x) > 0$ para todo $x \in (0;2)$.

Esto implica que a es estrictamente creciente en $(0;2]$. En $(2;+\infty)$ elegimos $x=3$. Como $a'(3) = \dfrac{(2-3)(2+3)}{(3^2+4)^2} < 0$, resulta que $a'(x) < 0$ para todo $x \in (2;+\infty)$. Esto implica que m es estrictamente decreciente en $[2;+\infty)$.

De esto se deduce que la función área tiene un máximo local en $x = 2$.

Dado que a es continua en $[0;+\infty)$, es estrictamente creciente a la izquierda de $x=2$ y estrictamente decreciente a la derecha de $x=2$, concluimos que a tiene un máximo absoluto en $x=2$ y vale $a(2) = \dfrac{2}{2^2+2} = \dfrac{1}{4}$.

Los vértices del triángulo de mayor área son $\boxed{A = (0,0),\ B = (2,\tfrac{1}{8}) \text{ y } C = (4,0).}$

Resolver los problemas 1 a 7 de la Práctica 7

Ejemplo 5

Sea $f:(0;+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 8x^2 - \dfrac{1}{x}$. Hallar el punto del gráfico de f en el que la pendiente de la recta tangente es mínima.

Llamemos $m(x)$ a la función que a cada punto del gráfico de f le asigna la pendiente de su recta tangente. Sabemos que esta función es $f'(x)$. Es decir que

$$m(x) = f'(x) = 16x + \frac{1}{x^2}.$$

Queremos hallar el valor de $x \in (0;+\infty)$ en el que la función m alcanza su mínimo absoluto.

Para hallar los puntos críticos, calculamos la derivada.

$$m'(x) = 16 - \frac{2}{x^3} = \frac{16x^3 - 2}{x^3} = \frac{2(8x^3 - 1)}{x^3}$$

Como

$$m'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow 8x^3 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

El único punto crítico es $x{=}\frac{1}{2}$.

Dado que m' es continua en $(0;+\infty)$, por el teorema de Bolzano, podemos afirmar que su único cero divide a $(0;+\infty)$ en dos intervalos y en cada uno de ellos el signo de m' es constante.

Los intervalos para analizar son $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, por lo dicho anteriormente, para conocer el signo de m', basta con calcularlo en un valor particular de cada intervalo.

En $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, elegimos $x = \frac{1}{4}$. Como $m'(\frac{1}{4}) = \dfrac{2\left(\frac{8}{4^3} - 1\right)}{\frac{1}{4^3}} = \dfrac{2\left(\frac{1}{8} - 1\right)}{\frac{1}{4^3}} < 0$, resulta que $m'(x) < 0$ para todo $x \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$. Esto implica que *m* es estrictamente decreciente en $\left(0;\frac{1}{2}\right]$. En $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ elegimos $x = 1$. Como $m'(1) = \frac{2(8-1)}{1^3} > 0$, resulta que $m'(x) > 0$ para todo $x \in \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Esto implica que *m* es estrictamente creciente en $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

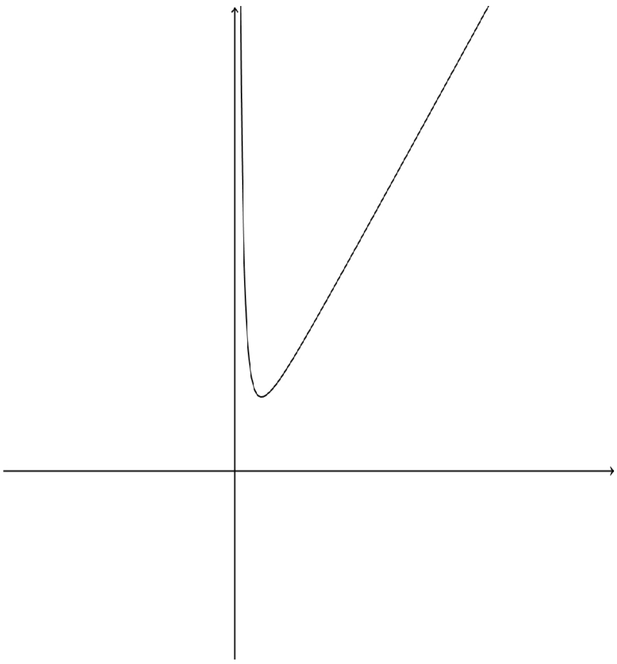
En resumen tenemos

x	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$
	$m'(\frac{1}{4}) < 0$		$m'(1) > 0$
$m'(x)$	$-$	0	$+$
$m(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Por lo tanto *m* alcanza un mínimo local en $x{=}\frac{1}{2}$.

Además, $\lim_{x \to 0^+} m(x) = 16x + \frac{1}{x^2} = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} m(x) = 16x + \frac{1}{x^2} = +\infty$, de donde el mínimo local es absoluto y podemos afirmar que la pendiente de la recta tangente al gráfico de *f* es mínima para $\boxed{x = \frac{1}{2}}$ y vale $\boxed{m(\frac{1}{2}) = \frac{16}{2} + 4 = 12}$.

A continuación damos un gráfico aproximado de *m* para $x \in (0; +\infty)$.



Ejemplo 6

Sea $f(x) = x - 3x^{\frac{1}{3}}$. Hallar los valores máximos y mínimos que alcanza la función *f* en el intervalo $[-2; \frac{1}{2}]$.

Por ser la función *f* continua en el intervalo cerrado $[-2; \frac{1}{2}]$, sabemos que alcanza, en dicho intervalo, un valor máximo y un valor mínimo.

Calculamos la derivada

$$f'(x) = 1 - x^{\frac{-2}{3}} = 1 - \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \quad \text{para } x \neq 0$$

y observamos que f no es derivable en $x = 0$.

Por otra parte,

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ o } x = -1 .$$

Así, los posibles valores de $x \in [-2; \frac{1}{2}]$ en los que f puede alcanzar un máximo o un mínimo son

los extremos del intervalo: $x = -2$ y $x = \frac{1}{2}$,

los $x \in [-2; \frac{1}{2}]$ tales que $f'(x) = 0$: $x = -1$,

y los $x \in [-2; \frac{1}{2}]$ donde f no es derivable: $x = 0$.

Calculamos el valor de f en cada uno de estos puntos

$$f(-2) = -2 - 3(-2)^{\frac{1}{3}} \simeq 1,779$$

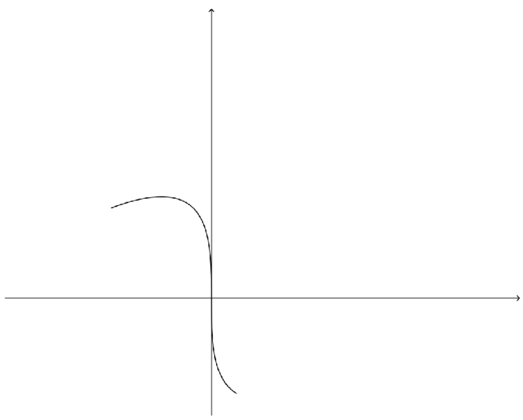
$$f(-1) = -1 - 3 \cdot (-1)^{\frac{1}{3}} = -1 + 3 = 2$$

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \simeq -1,881 .$$

Al comparar estos valores, podemos afirmar que $f(-1) = 2$, es el valor máximo de f y $f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -1,881$ es el valor mínimo. Los puntos donde se alcanzan son $\boxed{x = -1}$ (donde se anula la derivada) y $\boxed{x = \frac{1}{2}}$ (un extremo del intervalo).

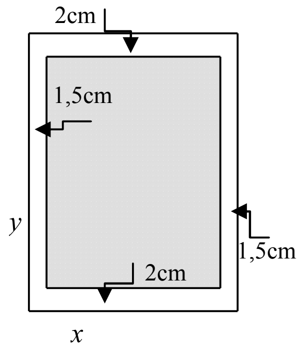
Presentamos un gráfico aproximado de esta función.



Ejemplo 7

Una editorial producirá un libro con las siguientes condiciones: en cada página el texto impreso estará contenido en un rectángulo de 300 cm^2, los márgenes superior e inferior deberán tener 2 cm de altura y los laterales 1,5 cm de ancho. Hallar las dimensiones de una página para que el consumo de papel sea mínimo.

Sean x e y las dimensiones de una hoja del libro. Se quiere que la superficie de cada hoja sea la menor posible, es decir, que $S = x \cdot y$ sea mínima.



Además, el área de la región impresa debe medir 300 cm^2. Pero la región impresa es un rectángulo de base $(x - 2 \cdot 1{,}5) = (x - 3)$ y altura $(y - 2 - 2) = (y - 4)$, entonces debe ser $(x-3)(y-4) = 300$. Para que esto tenga sentido debe ser $x > 3$ e $y > 4$.
Al despejar y de esta igualdad obtenemos que

$$y = \frac{300}{x-3} + 4 = \frac{4x + 288}{x-3}.$$

Tenemos entonces que la función que queremos minimizar es

$$S = x \cdot y = x \cdot \frac{4x+288}{x-3} = \frac{4x^2 + 288x}{x-3} \quad \text{para } x > 3.$$

Calculamos su derivada

$$S'(x) = \frac{(8x+288)(x-3) - (4x^2+288x)}{(x-3)^2} = \frac{8x^2 + 288x - 24x - 864 - 4x^2 - 288x}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{4x^2 - 24x - 864}{(x-3)^2} = \frac{4(x^2 - 6x - 216)}{(x-3)^2} = \frac{4(x-18)(x+12)}{(x-3)^2}.$$

Luego,

$$S'(x) = 0 \iff (x-18)(x+12) = 0 \iff x = 18 \text{ o } x = -12.$$

Por las condiciones del problema sabemos que $x > 3$, por lo tanto el único punto crítico es $x = 18$.

Como S' es continua en $(3;+\infty)$, utilizando el teorema de Bolzano, podemos afirmar que su único cero divide a $(3;+\infty)$ en dos intervalos en los que el signo de S' es constante.

Los intervalos para analizar son $(3;18)$ y $(18;+\infty)$, por lo dicho anteriormente, para conocer el signo de S', basta con calcularlo en un valor particular de cada intervalo.

En el intervalo $(3;18)$, elegimos $x=4$.

Como $S'(4)=\dfrac{4(4-18)(4+12)}{(4-3)^2}<0$, resulta que $S'(x)<0$ para todo $x\in(3;18)$. Esto implica que S es estrictamente decreciente en $(3;18)$.

En $(18;+\infty)$ elegimos $x=19$. Como $S'(19)=\dfrac{4(19-18)(19+12)}{(19-3)^2}>0$, resulta que $S'(x)>0$ para todo $x\in(18;+\infty)$. Esto implica que m es estrictamente creciente en $(18;+\infty)$.

De esto se deduce que la función S tiene un mínimo local en $x=18$.

Dado que S es continua en $(3;+\infty)$, es estrictamente decreciente a la izquierda de $x=18$ y estrictamente creciente a la derecha de $x=18$, por lo que concluimos que S tiene un mínimo absoluto en $x=18$.

Las dimensiones de la página para la que el consumo de papel es mínimo son: $\boxed{x=18}$ y $\boxed{y=\dfrac{300}{18-3}+4=24}$.

Están en condiciones de terminar la Práctica 7.