

SUCESIONES

Definición: Se llama sucesión numérica a cualquier función $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que asigne a cada número natural n un número real $a(n) = a_n$.

La particularidad de la notación consiste en escribir la variable n como subíndice. Una sucesión puede escribirse en forma desplegada:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Definición: Decimos que la sucesión (a_n) es

a) monótona creciente cuando se cumple: $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

b) monótona decreciente cuando se cumple: $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

c) estrictamente creciente cuando se cumple: $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

d) estrictamente decreciente cuando se cumple: $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

e) acotada si existen números a y b tales que para cualquier n se cumple

$$a \leq a_n \leq b$$

para todo $n = 1, 2, 3, \dots$

Límite finito de sucesiones

Para indicar que los a_n se van acercando a un valor a conforme n va tomando valores cada vez más grandes, escribimos

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \quad \text{o bien} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Decimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ cuando para cada $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$.

Es decir, *la distancia entre cada a_n y a puede hacerse tan pequeña como se quiera, a condición de elegir el subíndice 'n' suficientemente grande.*

Límite infinito de sucesiones

Decimos que $a_n \rightarrow +\infty$ cuando para cada $M > 0$ es posible encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n > M$$

para todo $n \geq n_0$.

Es decir, *el valor de cada a_n puede hacerse tan grande como se quiera, a condición de elegir el subíndice 'n' suficientemente grande.*

Decimos que $a_n \rightarrow -\infty$ cuando $-a_n \rightarrow +\infty$.

Propiedades:

1. Si (a_n) es acotada y $b_n \rightarrow 0$, entonces $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$.

2. Si $a_n \rightarrow a$ y $b_n \rightarrow b$, entonces:

a) $a_n + b_n \rightarrow a + b$

b) $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$

c) $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$, siempre que $b \neq 0$

d) si $a_n \leq c_n \leq b_n$ —a partir de un n_0 — y $a = b$, $c_n \rightarrow a$.

Teorema:

Toda sucesión monótona creciente (o decreciente) y acotada superiormente (o inferiormente) converge.

El número e

La sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

es estrictamente creciente y acotada entre 2 y 3. En consecuencia converge. Su límite se denota por e . Es un número irracional, (base de los logaritmos naturales) sus primeros decimales son: $e = 2,718281828..$

ALGUNOS EJERCICIOS RESUELTOS

1. Analizar el crecimiento de la sucesión definida por: $a_n = \frac{n+1}{n+3}$. ¿Está acotada?

Calculemos algunos términos para poder contestar:

$$a_1 = \frac{2}{4} \quad a_2 = \frac{3}{5} \quad a_3 = \frac{4}{6} \quad a_4 = \frac{5}{7}$$

Si observamos cada término es menor que el anterior. Si bien comparar sólo 4 términos no permite asegurar que sea estrictamente decreciente, esto nos da una idea para plantear la cuenta. Ahora vamos a demostrarlo formalmente.

(a_n) es decreciente sí y sólo si:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1} \iff \frac{n+1}{n+3} > \frac{n+2}{n+4} \iff (n+1)(n+4) > (n+2)(n+3) \iff n^2+5n+4 > n^2+5n+6 \iff 4 > 6$$

y como esta desigualdad es verdadera, la primera también lo es.

Respecto de la acotación por ser decreciente $a_1 \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, además los términos de la sucesión son positivos, o sea $a_n \geq 0$. Por lo tanto la sucesión es acotada.

2. Demostrar por definición que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{3n+5} = \frac{5}{3}$

La idea es encontrar un número natural n_0 a partir del cual la sucesión "est muy cerca" de $\frac{5}{3}$. Vamos a buscarlo:

$$\left| \frac{5n+1}{3n+5} - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{15n+3-15n-25}{3(3n+5)} \right| = \left| \frac{22}{3(3n+5)} \right| = \frac{22}{3(3n+5)}$$

Entonces $\left| \frac{5n+1}{3n+5} - \frac{5}{3} \right| < \varepsilon$ es equivalente a $\frac{22}{3(3n+5)} < \varepsilon$ que es equivalente a

$$\frac{22}{3\varepsilon} < 3n+5 \iff \left(\frac{22}{3\varepsilon} - 5\right) \cdot \frac{1}{3} < n$$

Es decir, que cualquiera que sea el n que cumpla esta última condición, cumple que:

$$\left| \frac{5n+1}{3n+5} - \frac{5}{3} \right| < \varepsilon$$