Introducción

El objetivo de este libro es acercar al alumno del CICLO BÁSICO COMÚN (CBC) un extenso material de estudio hecho con seriedad y profesionalismo, para que pueda servirle de guía para una mejor comprensión de las prácticas.

Se ha tenido especial cuidado en no utilizar en la resolución de los ejercicios más recursos teóricos que los disponibles por el alumno según el cronograma de actividades. Asimismo se pretende ofrecer una presentación del trabajo que utiliza recursos de alta calidad de imprenta, a los efectos de conseguir transmitir las ideas con un máximo de claridad y precisión. Numerosas notas, gráficas y referencias abundarán en el desarrollo.

En la medida de lo posible se ha buscado para cada ejercicio la solución mas simple. En aquellos ejercicios de complejidad superior a la media, que pretenden introducir de forma natural en el alumno ciertas ideas matemáticas muy profundas, encauzándolo para que las descubra por sí sólo, se han elegido *siempre* soluciones válidas que no disfracen al mismo de sencillez, generando en el alumno una falsa sensación de comprensión. A veces es preferible que este último se resigne a no comprender *todo* de momento a que abandone la cuestión satisfecho con una falsa sensación de entendimiento, que no es tal. Generalmente esto último deviene a posteriori en un mal rendimiento en cuanto a calidad justificativa durante el examen, y con ello mayor probabilidad de fracasar.

Uno de los objetivos *primordiales* de la obra es conseguir que el alumno desarrolle su intuición al máximo y aprenda a transformarla en ideas matemáticas válidas, bien justificadas, y útiles para resolver los problemas.

Primer Parcial

Práctica 0 - Preliminares

Ejercicio 1

(a)

Siempre conviene ir resolviendo los parénteis desde adentro hacia afuera.

$$
\begin{aligned}
\cdots =& \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{12} - 2\right) - \frac{1}{4} - \left(-1 - \cancelto{\frac{1}{3}}{\frac{2}{6}} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \\
=& \frac{2}{3} - \left(\frac{\cancel{-6} + 12 + \cancel{6} + 5 - 24}{12}\right) - \left(\frac{-12 - 4 + 3 + 8}{12}\right) \\
=& \frac{2}{3} - \left(-\frac{7}{12}\right) - \frac{1}{4} - \left(-\frac{5}{12}\right) \\
=& \frac{2}{3} + \frac{7}{12} - \frac{1}{4} + \frac{5}{12} \\
=& \frac{8 + 7 - 3 + 5}{12} \\
=& \frac{17}{12}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\cdots &= \frac{2}{5} - 2\cdot\left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{2}{5} - 2\cdot\left(\frac{-5+10-2+3}{10} - \frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{2}{5} - 2\cdot\left(\frac{\cancelto{\frac{6}{3}}{3}}{\cancel{5}} - \frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{2}{5} - \frac{6}{5} + \frac{\cancelto{\frac{2}{4}}{1}}{\cancel{2}}\\
&= -\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\\
&= \frac{-8+5}{10}\\
&= -\frac{3}{10}
\end{aligned}
$$

■

Ejercicio 2

Para resolver correctamente este ejercicio hay que recordar dos propiedades de la exponenciación, a saber:

1. $$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

2. $$(a)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

(a)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{4-3}{6}\right)^2\right)^{-2} &= \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right)^{-2} \\
&= \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{1^2}{6^2}\right)\right)^{-2} \\
&= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right)^{-2} \\
&= \left(\frac{9-1}{36}\right)^{-2} \\
&= \left(\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{9}{\cancel{36}}}\right)^{-2} \\
&= \left(\frac{9}{2}\right)^{2} \\
&= \frac{81}{4}
\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\left(\left(\frac{8-1}{2}\right)^2+\left(\frac{-6-1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(-\frac{7}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{49}{4}+\frac{49}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2\cdot\frac{49}{4}} \\
&= \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{49}{4}} \\
&= \frac{7}{2}\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

■

Ejercicio 3

(a)

$$
\begin{aligned}
\cdots &= \frac{3^{4+7}}{3^{12}} \\
&= \frac{3^{11}}{3^{12}} \\
&= 3^{11-12} \\
&= 3^{-1} \\
&= \left(\frac{3}{1}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\cdots &= \sqrt{\frac{5\cdot \cancel{4}\cdot 10^{-6+2}}{\cancel{8}^{\,2}\cdot 10^{5}}} = \sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{10^{-4}}{10^{5}}} \\
&= \sqrt{\frac{5}{2\cdot 10^{5-(-4)}}} = \sqrt{\frac{5}{2\cdot 10^{9}}} \\
&= \sqrt{\frac{\cancel{5}^{\,1}}{\cancel{10}^{\,2}\cdot 10^{8}}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{10^{8}}} \\
&= \frac{1}{2\cdot 10^{\frac{8}{2}}} = \frac{1}{2\cdot 10^{4}} \\
&= \frac{1}{20000} =
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\cdots &= \left(\sqrt[4]{81}\right)^{3} + \sqrt{\frac{49}{16}} + \left(\sqrt[3]{\frac{64}{27}}\right)^{2} + \left(\sqrt[5]{\frac{1}{32}}\right)^{4} 2^{-6\cdot\frac{2}{3}} + 3^{\frac{7}{2}+\frac{1}{2}} \\
&= 3^{3} + \frac{7}{4} + \left(\frac{4}{3}\right)^{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{4} + 2^{-4} + 3^{4} \\
&= 27 + \frac{7}{4} + \frac{16}{9} + \frac{1}{16} + 81 \\
&= 108 + \frac{16}{9} + \frac{28+1+1}{16} \\
&= 108 + \frac{16}{9} + \frac{\cancel{30}}{\cancel{16}}^{\frac{15}{8}} \\
&= \frac{72\cdot 108 + 16\cdot 8 + 15\cdot 9}{72} \\
&= \frac{8039}{72}
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\cdots &= 25+9+\sqrt[4]{81}+\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}+\sqrt[3]{3^3\cdot 3}\\
&= 34+3-\frac{2}{3}+3\cdot\sqrt[3]{3}\\
&= \frac{37\cdot 3-2}{3}+3\cdot\sqrt[3]{3}\\
&= \frac{109}{3}+3\cdot\sqrt[3]{3}
\end{aligned}
$$

■

Ejercicio 4

(a)

$$-2 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right) = -\cancel{2} \cdot \left(\frac{4-9}{\cancel{6}^{\,3}}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{10}{3}$$

(b)

$$-2 \cdot \frac{2}{3} + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{4}{3} - \frac{3}{2} = \frac{-8-9}{6} = -\frac{17}{6}$$

(c)

$$-2 + \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \left(-\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\right) = -2 - 1 = -3$$

(d)

$$\left(-2 + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{-6+2}{\cancel{3}}\right) \cdot \left(-\frac{\cancel{3}}{2}\right) = \frac{(-4)\cdot(-1)}{2} = 2$$

■

Ejercicio 5

(a)

Aquí se introduce un truco muy importante que nos acompañará en el futuro. Es truco de multiplicar y dividir por la expresión conjugada de una suma de raíces cuadradas. En concreto, si consideramos la expresión $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, entonces la expresión conjugada de la misma será $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Con respecto a esta última, su expresión conjugada es la primera.

Veremos a continuación como es que se le puede sacar provecho a multiplicar y dividir por el conjugado para *limpiar* los radicales de un numerador o denominador, según se prefiera.

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) &= \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2+\cancel{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}-\cancel{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \\
&= \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\frac{n^3+3n^2+n}{n^2+1} &= \frac{\cancel{n}\cdot\left(n^2+3n+1\right)}{\cancel{n}\cdot\left(n+\frac{1}{n}\right)} \\
&= \frac{n^2+3n+1}{n+\frac{1}{n}}
\end{aligned}
$$

Saco factor común "n" tanto en el numerador como en el denominador

■

Ejercicio 6

(a)

$$\begin{aligned} 2x &= -1-1 \\ 2x &= -2 \\ x &= \frac{-2}{2} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} -5x &= -7-2 \\ -5x &= -9 \\ x &= \frac{-9}{-5} \\ x &= \frac{9}{5} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} -6x+1+4 &= 7x-3 \\ -6x-7x &= -3-5 \\ -13x &= -8 \\ x &= \frac{8}{13} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} 9x-3 &= 2\cdot(-2x+4) \\ 9x-3 &= -4x+8 \\ 9x+4x &= 8+3 \\ 13x &= 11 \\ x &= \frac{11}{13} \end{aligned}$$

(e)

$$
\begin{aligned}
(1-x)\cdot 3 &= (1+x)\cdot 2\\
3-3x &= 2+2x\\
-3x-2x &= 2-3\\
-5x &= -1\\
x &= \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

(f)

$$
\begin{aligned}
\frac{2x+3}{2\cdot\cancel{(x-1)}} &= \frac{6x-2}{-3\cancel{(x-1)}}\\
(2x+3)\cdot(-3) &= (6x-2)\cdot 2\\
-6x-9 &= 12x-4\\
-18x &= 5\\
x &= -\frac{5}{18}
\end{aligned}
$$

En el término de la izquierda saco común denominador $2\cdot(x-1)$ y en la derecha factor común "-3" en el denominador. Así puedo cancelar "$(x-1$".

■

Ejercicio 7

Aquí hay que empezar a usar el ingenio, pues estarán de acuerdo conmigo en que a nadie le gustaría calcular $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^4$. Si aun no están del todo de acuerdo los invito a que hagan la prueba de hacer la cuenta. Probablemente luego de un rato se deciden a usar el ingenio en lugar de la *fuerza bruta*[1].

Notarán que si damos un poco de vueltas a la fórmula, la podemos optimizar un poco:

$$x^4 - 10x^2 + 1 = x^2(x^2 - 10) + 1 \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = 5 + 2\sqrt{6} \tag{2}$$

,para $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
x^4 - 10x^2 + 1 = &\quad x^2(x^2 - 10) + 1 \\
= &\quad \left(2\sqrt{6}+5\right)\left(2\sqrt{6}+5-10\right) + 1 \\
= &\quad \left(2\sqrt{6}+5\right)\left(2\sqrt{6}-5\right) + 1 \\
= &\quad \left(2\sqrt{6}\right)^2 - 5^2 + 1 \\
= &\quad 24 - 25 + 1 \\
= &\quad 0
\end{aligned}$$

En la cuenta de mas arriba primero desarrollamos la fórmula en virtud de la ecuación (1), luego reemplazamos en la fórmula el valor de x^2 por lo que vale según la ecuación (2), en el tercer paso notamos la presencia de una *diferencia de cuadrados*[2], por último desarrollamos esa diferencia de cuadrados e hicimos las cuentas.

Como el resultado final nos da cero, concluimos que $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ es una raíz de la ecuación inicial.

■

[1] Es un término muy usado en la jerga computacional y matemática para denotar a un algoritmo o razonamiento que explora todos los casos posibles. Generalmente son los mas costosos en tiempo.

[2] Recuerden que $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$.

Ejercicio 8

Para hacer correctamente este ejercicio conviene refrescar las reglas para operar en $\mathbb{R}$ con desigualdades. Las reglas básicas a tener en cuenta *para hacer este ejercicio* son:

Sean a, b, c en $\mathbb{R}$

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
3. $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$[3]

Nota: Hay que tener especial cuidado al pasar multiplicando o dividiendo una expresión cuando se trabaja con desigualdades ya que si fuera negativa habría que dar vuelta el signo de la desigualdad. Peor aun, si la desigualdad fuera *estricta* y la expresión que estoy pasando pudiera anularse, en el caso de valer 0 no tendría sentido pasarla dividiendo. Recuerden que la *división por cero* es un sin sentido en matemática.

(a)

$$\begin{aligned} 2x \leq 2+1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x \leq 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} -2x \geq 2+1 \quad &\Leftrightarrow \quad -2x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \end{aligned}$$

(c)

$$2x + 6x > 10 - 11 \Leftrightarrow 8x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{8} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{8}, +\infty\right)$$

[3]Noten como al multiplicar por un número negativo, la desigualdad se invierte.

(d)

Aquí el problema es mas delicado. No podemos pasar $2-x$ alegremente para el otro lado multiplicando porque *de antemano* no sabemos si el valor que toma es positivo o negativo. Hay valores de x que harán tal expresión positiva y otros que la harán negativa. Hay dos maneras estándar de resolver este tipo de problemas. Les presentaremos ambas para que elijan la que mas les guste.

1. Se basa en analizar los casos donde $2-x>0$ y $2-x<0$ por separado.

   a) Si $2-x>0$: Esto ocurre $\Leftrightarrow 2>0+x \Leftrightarrow x<2$. De esta manera

   $$\begin{aligned} \frac{2}{2-x} > 4 \Leftrightarrow & 2 > 4(2-x) \\ \Leftrightarrow & \quad 2 > 8-4x \\ \Leftrightarrow & \quad 4x > 8-2 \\ \Leftrightarrow & \quad\quad 4x > 6 \\ \Leftrightarrow & \quad x > \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

   Recordando que dentro de este caso $x<2$, concluimos que

   $$\Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

   b) Si $2-x>0$: Esto ocurre $\Leftrightarrow 2<0+x \Leftrightarrow x>2$. De esta manera

   $$\begin{aligned} \frac{2}{2-x} < 4 \Leftrightarrow & 2 < 4(2-x) \\ \Leftrightarrow & \quad 2 < 8-4x \\ \Leftrightarrow & \quad 4x < 8-2 \\ \Leftrightarrow & \quad\quad 4x < 6 \\ \Leftrightarrow & \quad x < \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

   Recordando que dentro de este caso $x>2$, concluimos

   $$\Rightarrow 2 < x < \frac{3}{2}$$

   Pero esto último es un sin sentido, ya que no puede ser a la vez x mas grande que 2 y mas chico que $1,5$. Por lo tanto se concluye que *este caso* no aporta solución alguna al resultado final.

Luego de haber analizado los casos por separado la solución global será la unión de las soluciones halladas en cada caso. De esta manera se tiene que:

$$\frac{2}{2-x} > 4 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

2. Esta manera de resolver el problema tal vez agrada mas al público en general, y se basa en una idea muy útil, que conviene tener presente. Tan útil es que haremos expresa cita de ella a continuación:

   "Un cociente de dos expresiones, digamos $\frac{A(x)}{B(x)}$ verifica:

   a) $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ si y sólo si ocurre alguna de estas dos posibilidades:

   1) $A(x) > 0$ y $B(x) > 0$
   2) $A(x) < 0$ y $B(x) < 0$

   b) $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ si y sólo si ocurre alguna de estas dos posibilidades:

   1) $A(x) > 0$ y $B(x) < 0$
   2) $A(x) < 0$ y $B(x) > 0$

   La misma regla se aplica para el producto de dos expresiones $A(x) \cdot B(x)$ haciendo la adaptación del caso."

Veamos como se aplican estos principios para resolver el problema que nos ocupa.

En principio conviene darse cuenta que que nuestra desigualdad no está comparada con 0 sino con 4. Tenemos que adaptarla convenientemente como primer paso.

$$\begin{aligned}\frac{2}{2-x} > 4 \Leftrightarrow & \quad \frac{2}{2-x} - 4 > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2-4(2-x)}{2-x} > 0 \\ \Leftrightarrow & \quad \frac{4x-2}{2-x} > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Ahora que ya tenemos la expresión comparada con 0, por una directa aplicación del principio de mas arriba se tiene que:

La primera posibilidad es que:	ó	La segunda posibilidad es que:
$4x-6>0$ y $2-x>0$ $\Leftrightarrow\ 4x>6$ y $x<2$ $\Leftrightarrow\ x>\frac{3}{2}$ y $x<2$ Por lo tanto en este caso $x\in\left(\frac{3}{2},2\right)$		$4x-6<0$ y $2-x<0$ $\Leftrightarrow\ 4x<6$ y $x>2$ $\Leftrightarrow\ x<\frac{3}{2}$ y $x>2$ **¡¡ABSURDO!!** Por lo tanto $\nexists x$ en este caso.

De este modo se concluye que:

$$x\in\left(\frac{3}{2},2\right)$$

(e)

El procedimiento detallado para resolver este tipo de ejercicios está explicado con lujo de detalles en la resolución del punto (d) de este mismo ejercicio y la pueden encontrar en la página 15.

$$\begin{aligned}
\frac{2x-1}{x-3}<1 \Leftrightarrow &\quad \frac{2x-1}{x-3}-1<0\\
\Leftrightarrow &\quad \frac{(2x-1)-(x-3)}{x-3}<0\\
\Leftrightarrow &\quad \frac{x+2}{x-3}<0
\end{aligned}$$

Observen como tuvimos que *reacomodar* la desigualdad original para que esté comparada con 0 en lugar 1 y así poder utilizar a continuación las ideas que antes explicamos. En concreto:

$$\frac{x+2}{x-3}<0\Leftrightarrow$$

ó

$$\begin{array}{ll|ll} & x+2<0 \text{ y } x-3>0 & & x+2>0 \text{ y } x-3<0 \\ \Leftrightarrow & x<-2 \text{ y } x>3 & \Leftrightarrow & x>-2 \text{ y } x<3 \\ & \text{¡¡ABS!!} & \Leftrightarrow & x \in (-2,3) \\ \Rightarrow & \nexists x \text{ en este caso.} & & \end{array}$$

Se concluye que x verifica la inecuación inicial si y sólo si $x \in (-2, 3)$.

(f)

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x+1} > 1 \Leftrightarrow & \quad \frac{x-3}{x+1} - 1 > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x-3)-(x+1)}{x+1} > 0 \\ \Leftrightarrow & \quad \frac{-4}{x+1} > 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Noten chicos que en la ecuación (en la página 13) el signo del numerador es negativo, de modo que para que la expresión resulte positiva basta con que:

$$x+1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1)$$

Así: La solución en este caso es que $x \in (-\infty, -1)$.

■

Ejercicio 9

Este ejercicio es muy sencillo. Lo único que hay que hacer es ordenar una serie de números de menor a mayor. Háganlo de la manera que mas les gusta. El resultado final es que:

$$-\frac{5}{2} < -\frac{4}{7} < -\frac{6}{11} < \frac{1}{3} < \frac{3}{2} < \frac{64}{41} < \frac{25}{2} < \frac{38}{3}$$

■

Ejercicio 10

Este es el primer ejercicio donde aparece la *inquietante* palabra *demostrar*. En general los posibles caminos que se pueden tomar para hacer una demostración son diversos, y dependen de la imaginación de cada uno. Las reglas de oro para que una demostración sea correcta pueden ser[4]:

1. Dividir el hilo de la argumentación en pasos.
2. Asegurarse que entre un paso y el que sigue no haya errores en las justificaciones que hagan para pasar del paso en que estaban al que le sigue.
3. Lo que se afirma en el primer paso *debe ser verdadero*.
4. El último paso — o por lo menos alguno de ellos — debe ser la conclusión a la que desean llegar.

Si siguen esta lógica les garantizo por lo menos que sus argumentos van a ser *correctos*. Y con un poco de imaginación: ¡Se llega a buen puerto!

Para ilustrar el método que proponemos haremos la demostración que nos pide este ejercicio.

$$\begin{aligned}
P_1: &\quad \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \leftarrow \text{(pueselcuadradodetodonúmeroespositivo)} \\
P_2: \Rightarrow &\quad a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \leftarrow \text{(desarrollo el cuadrado del paso anterior)} \\
P_3: \Rightarrow &\quad a + b \geq 2\sqrt{ab} \leftarrow \text{(despejo en la desigualdad anterior)} \\
P_4: \Rightarrow &\quad \frac{a+b}{s} \geq \sqrt{ab} \leftarrow \text{Que es lo que quería demostrar.}
\end{aligned}$$

- Si $a = b = 1 \Rightarrow \frac{1+1}{2} = \sqrt{1 \cdot 1}$ y en este caso vale la igualdad.
- Si $a = 1$ y $b = 5 \Rightarrow \frac{1+5}{2} > \sqrt{1 \cdot 5} \Rightarrow$ la desigualdad es estricta.

En realidad en la mayoría de los casos la desigualdad resulta *estricta*. ¡Los desafío a que descubran exactamente los casos donde vale la igualdad!

■

[4] Por lo menos a mi criterio.

Ejercicio 11

Aquí se presenta el problema de decidir cuando una relación vale o no en general. Para mostrar que no vale en general basta con exhibir lo que se llama un *contraejemplo*, es decir un par de números que no verifiquen la relación. Pero si uno intuye que la relación sí vale en general no basta con mostrar algunos números donde la misma valga, hay que hacer una demostración. Si el conjunto de números sobre los que versa la relación es infinito, no importa que la hayan comprobado para miles y miles de ellos, siempre existe la posibilidad de que en alguno falle. Por eso la importancia de hacer una demostración.

(a)

En este caso no vale en general: $x = 1$ e $y = 1 \Rightarrow (1+1)^2 \neq 1^2 + 1^2$ pues $4 \neq 2$. Noten como mostrar un contraejemplo suele ser fácil.

(b)

Aquí tampoco vale en general $x = 1$ e $y = 1 \Rightarrow \sqrt{1+1} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1}$ pues $\sqrt{2} \neq 2$.

(c)

Nuevamente es falso: $-1 > -2$ pero $(-1)^2 < (-2)^2$.

(d)

Falso: $\frac{1}{1+1} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$ pues $\frac{1}{2} \neq 2$.

(e)

Falso: $0^2 \not> 0$ pues $0^2 = 0$.

(f)

Falso: Lo mismo que en el anterior, $0^2 \not> 0$ pues $0^2 = 0$.

(g)

Aquí si vale en general pues $\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 \geq 0$.

(h)

Falso: $(-1)^3 = -1 < 0$.

(i)

Falso: $2^0 \ngtr 1$ pues $2^0 = 1$.

(j)

Esta es cierta. Para demostrarla hay que recordar dos cosas:

1. $$10^{\log(x)} = x$$

2. $$10^{a \cdot b} = \left(10^a\right)^b$$

$$\log\left(x^2\right) = 2\log(x) \Leftrightarrow 10^{\log\left(x^2\right)} = 10^{2\log(x)} = \left(10^{\log(x)}\right)^2 = x \Leftrightarrow x^2 = x^2$$

Noten como en esta demostración usamos que la función 10^x es inyectiva. En general para esta práctica basta que recuerden las cosas del secundario.

(k)

Esta es verdadera como consecuencia de como se construye la función exponencial de base $r > 0$, aunque para hacer una demostración de este hecho es necesario recorrer bastante teoría, incluyendo una definición razonable de lo que es la función exponencial de base $r > 0$.

Lo que se pretende aquí es que *refresquen* las propiedades del secundario. Ya en la práctica 1 estarán en condiciones de visualizar mejor esta función elemental.

(l)

Esta jamás puede valer en general ya que por ejemplo la expresión $\log\left(x + 10^2\right)$ tiene sentido para $x = 0$ mientras que $2 + \log(x)$ sólo lo tiene para $x > 0$.

■

Ejercicio 12

Para hacer este problema hay que recordar algunas propiedades del logaritmo:

1. $$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

2. $$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

3. $$\log\left(a^b\right) = b \cdot \log(a)$$

4. $$10^{\log(x)} = x$$

(a)

$$\begin{aligned}
&\log\left(4^{x-2}\right) = \log(1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(x-2)\log(4) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &x - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &x = 2
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\log\left(2^{5x-3}\right) = \log\left(\frac{1}{8}\right) = \log(1) - \log(8) = -\log(8) \\
\Leftrightarrow\ &(5x-3)\cdot\log(2) = -\log(2^3) = -3\cdot\log(2) \\
\Leftrightarrow\ &(5x-3)\cancel{\log(2)} = -3\cancel{\log(2)} \\
\Leftrightarrow\ &5x = 0 \\
\Leftrightarrow\ &x = 0
\end{aligned}$$

(c)

$$10^{\log(x+7)} = 10^{100} \Leftrightarrow x + 7 = 10^{100} \Leftrightarrow x = 10^{100} - 7$$

(d)

$$
\begin{aligned}
&10^{\log\left(x^2-3x+1\right)=10^0=1}\\
\Leftrightarrow\ & x^2-3x+\cancel{1}=\cancel{1}\\
\Leftrightarrow\ & x(x-3)=0\\
\Leftrightarrow\ & x=0 \text{ o } x=3
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

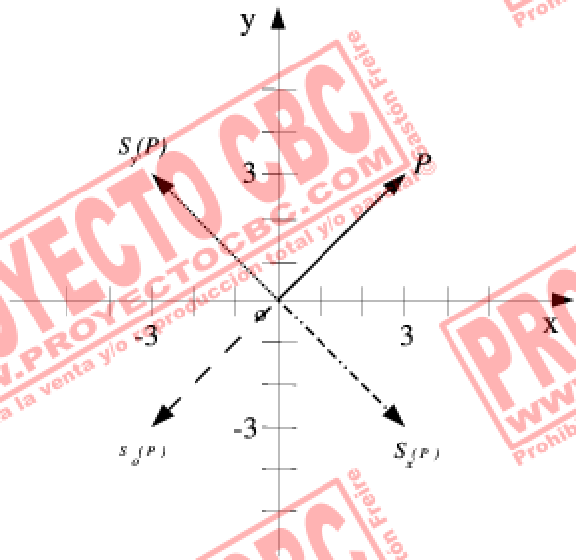
Ejercicio 13

Para hacer este ejercicio hay que recordar que si $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces la simetría con respecto al eje x de P se obtiene *invirtiendo* el signo a la coordenada y de P; para la simetría con respecto al eje y se *invierte* el signo de la coordenada x de P; y para la simetría con respecto al origen $o = (0, 0)$ se deben invertir ambas. Es decir:

$$\begin{cases} S_y(P) = (-x, y) \\ S_x(P) = (x, -y) \\ S_o(P) = (-x, -y) \end{cases}$$

Por una cuestión de claridad no representaremos en el dibujo a continuación todos los puntos. La idea es hacer lo mismo con los demás. Resolveremos el caso $P = (1, 3)$ y les dejamos a ustedes el resto.

Figura 1: Simetrías de P.

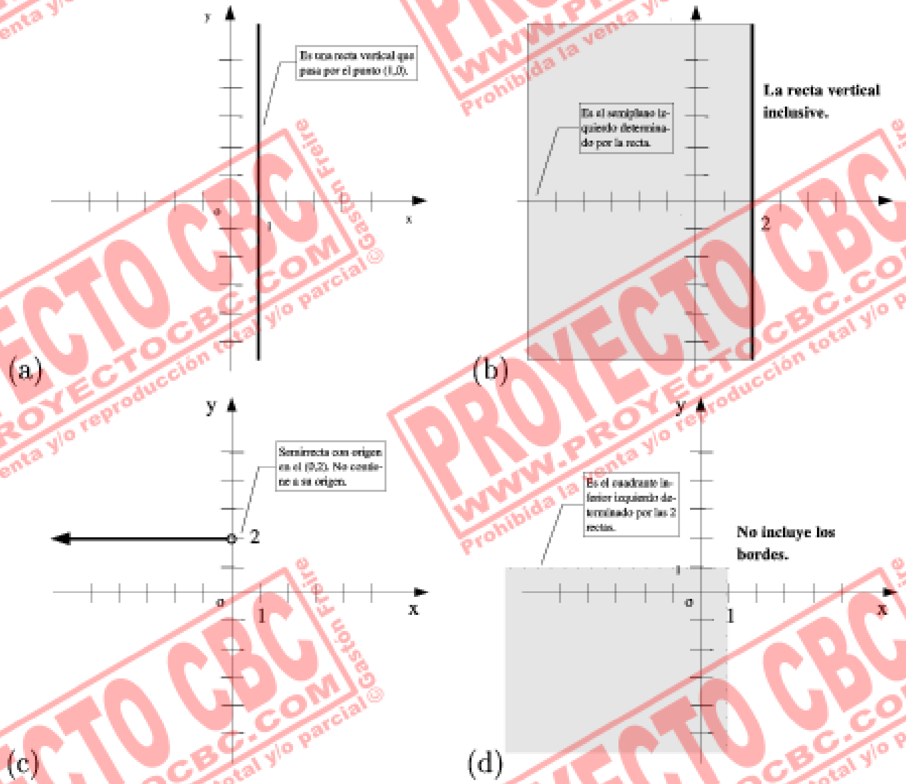


Podemos apreciar las distintas simetrías de P.

■

Ejercicio 14

Las regiones corresponden con las representadas en los gráficos que siguen.



■