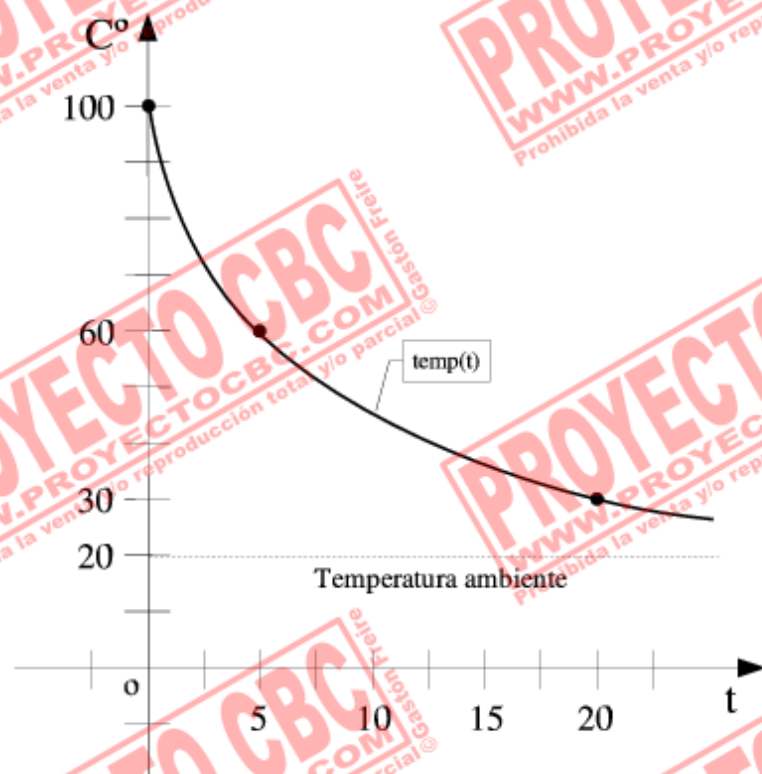


Práctica 1 - Funciones Reales

Ejercicio 1

El objetivo de este ejercicio es mostrar como es que las funciones constituyen una buena herramienta para representar fenómenos. Obviamente el gráfico que presentaremos como solución al problema no es en lo absoluto único. Cualquier gráfico que corresponda a una función decreciente que no corte a la asíntota de la temperatura ambiente sirve.

Figura 2: Temperatura en función del tiempo



Ejercicio 2

(a)

Recordemos que el volumen de una caja se calcula haciendo: *Ancho* · *Alto* · *Profundidad*. Entonces nos queda:

$$V(x) = x(30 - 2x)(40 - 2x)$$

(b)

Aquí hay que tener especial cuidado en hacer una correcta distinción entre lo que es el *dominio natural* o *de definición* de una función, que es el subconjunto de \mathbb{R} mas grande donde la fórmula tiene sentido; y el *dominio* que hace que la función $V(x)$ tome valores coherentes de acuerdo al problema que estamos estudiando.

Por ejemplo, $V(x)$ está definida $\forall x \in \mathbb{R}$, pero si $x \geq 15 \Rightarrow 30 - 2x \leq 0$. Esto no tendría ningún sentido pues $30 - 2x$ representa la profundidad de la caja, y no puede ser negativa. De igual forma se descartan los $x \leq 0$.

Entonces nos queda que el dominio de V está determinado por:

$$\text{Dom}(V) = \begin{cases} 30 - 2x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 15$$

Así: El dominio para V que nos interesa a nosotros es $(0, 15)$.

(c)

En el dibujo de $V(x)$ — que lo pueden observar en la página siguiente — se puede apreciar que la misma se anula en $x = 0$ y en $x = 15$. También se puede apreciar que en las cercanías de $x = 6$ alcanza un máximo. Esto nos indica que si hubiéramos elegido x cercano a 6 habríamos obtenido un volumen máximo para nuestra caja. En realidad se puede determinar con exactitud el x que lo maximiza, pero requiere un estudio mas profundo de la función $V(x)$, el cual por ahora está fuera de nuestro alcance.

x	$y = V(x)$
0	0
3	2448
6	3024
9	2376
12	1152
15	0

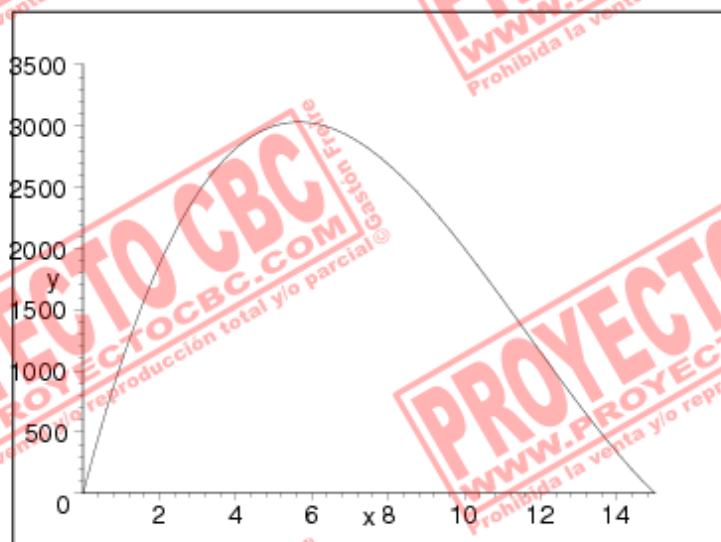


Gráfico de $V(x)$. En él se puede apreciar que dicha función se anula en $x = 0$ y $x = 15$. Además tiene un máximo en las cercanías de $x = 6$.

Ejercicio 3

Podemos representar la base del rectángulo con x y la altura con y . El esquema sería el siguiente:



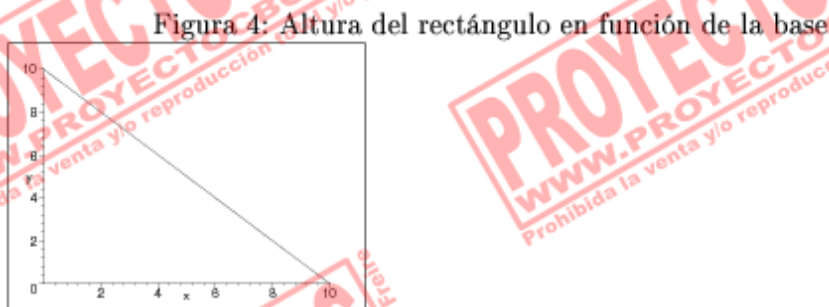
Si pensamos a x e y como la base y la altura del rectángulo, el hecho de tener perímetro 20 nos da la relación $2x + 2y = 20$. La función que las relaciona sería pues:

$$y = 10 - x$$

En cuanto al $\text{Dom}(f)$, basta observar que para valores de x negativos entonces si $y > 10$ ya nos sería imposible mantener al perímetro en 20. Y de la misma forma si $x \geq 10$ entonces debería ser $y \leq 0$ ¡Abs!. Por lo tanto:

$$\text{Dom}(f) = (0, 10)$$

El gráfico de la función que representa la altura del rectángulo en función de la base sería:



Observamos que la relación que hay entre la base y la altura es lineal.

La función es $y = 10 - x$

Ejercicio 4

Figura 5: Triángulo rectángulo isósceles

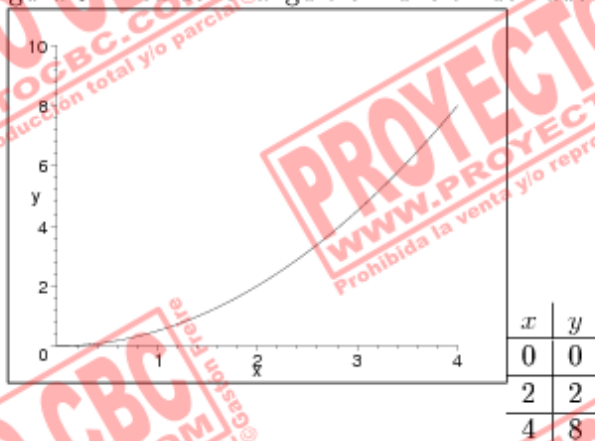


El área de un triángulo isósceles que además es rectángulo estará dada por:

$$A(x) = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{x^2}{2}$$

Y el Dominio de A es $\text{Dom}(A) = (0, +\infty)$.

La función $A(x)$ es una función cuadrática. Podemos realizar una pequeña tabla de valores para luego hacer el gráfico de la misma. Y luego realizar el gráfico de dicha función.

Figura 6: Área del triángulo en función del lado x .

Se puede apreciar que la misma es una función cuadrática.

■

Ejercicio 5

Para determinar si un gráfico puede o no ser el gráfico de una función hay que constatar que un valor arbitrario de x sea cual fuera que elija *no tendrá jamás dos imágenes en el gráfico*; formalmente esto se escribe así:

$$(\forall x \in \mathbb{R})((x, y) \in \text{Gra}(f) \text{ y } (x, y') \in \text{Gra}(f) \Rightarrow y = y')$$

Mas informalmente hay que constatar que ninguna recta vertical *corte al Gra}(f) mas que una vez*.

De esta forma si numeramos los gráficos que se encuentran en la práctica según:

1	2	3
4	5	6

Entonces:

- 1, 2, y 4 podrían ser el gráfico de una función.
- 3, 6 y 7 no podrían ser el gráfico de una función.

Ejercicio 6

(a)

- Es creciente en $(-\infty, 0)$.
- Es decreciente en $(0, +\infty)$.
- Tiene un máximo absoluto en $x = 0$.

(b)

- $\text{Dom}(f) = [-2, 2]$.
- Es creciente en $(-1, 0) \cup (1, 2)$.
- Es decreciente en $(-2, -1) \cup (0, 1)$.
- Tiene un máximo en $x = 0$ cuyo valor máximo es 1.
- Tiene un mínimo en $x = -1$ y otro en $x = 1$ cuyos valores mínimos coinciden y son -1 .

(c)

- Es estrictamente creciente.

(d)

- Es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.
- Es creciente en $(0, 1)$.
- Tiene un máximo en $x = 1$ donde vale 2.
- Tiene un mínimo en $x = 0$ donde vale 0.

Ejercicio 7

Hay muchas posibilidades para el gráfico que se pide. Cada uno puede si lo desea – de hecho sería recomendable – hacer su propio gráfico que refleje la situación. Se presenta aquí una posibilidad:

Figura 7: Gráfico de una función con las características pedidas.



Notese la distinción que se hace entre la palabra *máximo*, que se refiere al punto del eje x donde la función se maximiza; y el término *valor máximo* que se aplica al valor que toma la función en dicho punto, y se mira en el eje y .

Ejercicio 8

Introducción

En este ejercicio y los dos próximos se tratarán FUNCIONES LINEALES, por lo que sería conveniente recordar algunas propiedades de las mismas. Las funciones lineales son las de la forma:

$$f(x) = mx + b$$

El parámetro m se llama PENDIENTE, mientras que el parámetro b se denomina ORDENADA AL ORIGEN. La pendiente tiene que ver con la inclinación de la recta, la ordenada al origen con el valor de $f(0)$ que tiene una interpretación geométrica: Es la altura sobre el eje y por donde pasa la recta cuando atraviesa al mismo.

Es importante tener en cuenta que:

Valores de $m > 0$: Corresponden a rectas crecientes.

Valores de $m < 0$: Corresponden a rectas decrecientes.

Si $m = 0$: La recta será horizontal.

Conocidos dos puntos del gráfico de una función lineal es posible recuperar m y b . Veremos las diferentes formas de hacerlo a medida que resolvamos los distintos ítems del ejercicio, teniendo presentes las consideraciones anteriores.

(a)

(1)

Se nos dice que $(1, 5)$ y $(-3, 2) \in \text{Gra}(f)$. Entonces:

$$\begin{cases} 5 = m \cdot 1 + b \\ 2 = m \cdot (-3) + b \end{cases}$$

Queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas - m y b - muy sencillo de resolver. Observen que por la *pinta* de este sistema lo más conveniente sería *restar* las dos ecuaciones y despejar m .

$$\Rightarrow 3 = 4m \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

Ahora basta reemplazar en alguna ecuación el valor de m para poder despejar b .

$$\Rightarrow 5 = \frac{3}{4} + b \Rightarrow b = \frac{17}{4}$$

Así:

$$f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$$

Observación: Si $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1)) \in \text{Gra}(f)$ con f una función lineal, hay una fórmula para calcular directamente el valor de m . Dicha fórmula es:

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow m = \frac{2 - 5}{-3 - 1} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

y teniendo m pueden despejar b con el procedimiento de antes sin mayor problema.

(2)

Sabemos que $(-1, 3)$ y $(80, 3) \in \text{Gra}(f)$. Entonces:

$$m = \frac{3 - 3}{80 - (-1)} = 0 \Rightarrow b = 3$$

Así: $f(x) = 3$ nos queda una recta *constante*.

(3)

Se nos dice que $(0, 4)$ y $(3, 0) \in \text{Gra}(f)$. Observemos que $f(x) = mx + b \Rightarrow f(0) = b$. Precisamente se nos está dando la información de $f(0)$ pues el hecho de que $(0, 4) \in \text{Gra}(f)$ se traduce en que $f(0) = 4$. Por lo tanto:

$$b = 4$$

Y para m usamos el otro punto:

$$0 = 3m + 4 \Rightarrow m = -\frac{4}{3}$$

Así:

$$f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$$

(4)

Este es medio abstracto. El valor de b queda indeterminado hasta que le asignemos uno, y $f(a) = 0$. Entonces $0 = a \cdot m + b$. Entonces:

$$a \cdot m = b \tag{5}$$

Hay dos casos a considerar:

1. Si $a = 0$: Entonces $b = 0$ y la igualdad dada en la ecuación (5) se cumple siempre. Entonces $f(x) = m \cdot x$ sirve $\forall m \in \mathbb{R}$. Elegimos pues $m = 0$ que es el más sencillo y nos queda que:

$$f(x) = 0 \leftarrow (\text{Recta nula})$$

2. Si $a \neq 0$: Entonces $m = -\frac{b}{a}$. Observen que si tomáramos $b = 0$ entonces sería $m = 0$. Esta elección para b tiene como única ventaja que la ecuación para $f(x)$ nos quedará como en el caso anterior.

Por lo tanto: Podemos elegir en cualquier caso:

$$f(x) = 0$$

y ésta ecuación lineal nos servirá como solución $\forall a \forall b$ fijos $\in \mathbb{R}$.

(b)

(1)

$$f(0) = \frac{17}{4} \leftarrow \text{observen que nos dá el valor de } b$$

(2)

$$f(0) = 3 \leftarrow \text{observen que nos dá el valor de } b$$

(3)

$$f(-2) = -\frac{3}{4} \cdot (-2) + 4 = \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}$$

(c)

(1)	(2)	(3)	(4)
$m = \frac{3}{4}$	$m = 0$	$m = -\frac{4}{3}$	Según la elección para nuestra función: $f(x) = 0 \Rightarrow m = 0$

A continuación presentamos los gráficos de las mismas.

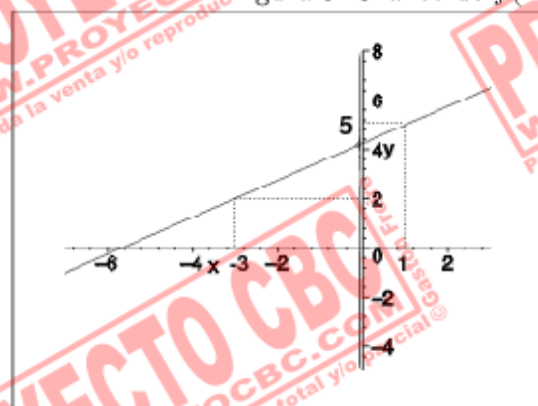
Figura 8: Gráfico de $f(x)$ para el caso (1)Figura 9: Gráfico de $f(x)$ para el caso (2)

Figura 10: Gráfico de $f(x)$ para el caso (3)Figura 11: Gráfico de $f(x)$ para el caso (4)

Ejercicio 9

(a)

$$f(x) = m \cdot x + b = x + b \Rightarrow 3 = 2 + b \Rightarrow b = 1$$

Así: $f(x) = x + 1$.

(b)

Observemos que $b = f(x) - m \cdot x \Rightarrow b = 5 - 0 \cdot 1 = 5 \Rightarrow f(x) = 5$.

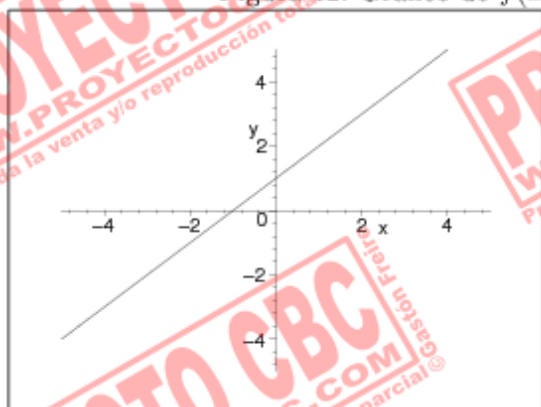
(c)

Como $b = f(x) - m \cdot x = -4 - (-2) \cdot 3 \Rightarrow f(x) = -2x + 2$.

(d)

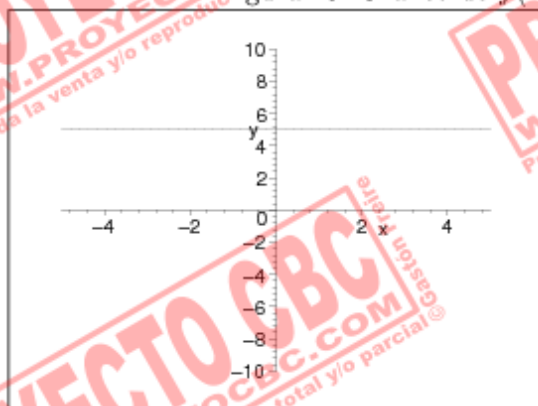
Aquí $f(x) = x + b$. El valor de b queda pues indeterminado.

A continuación se presentan los gráficos de las funciones para los distintos ítems del problema.

Figura 12: Gráfico de $f(x)$ para el caso (a)

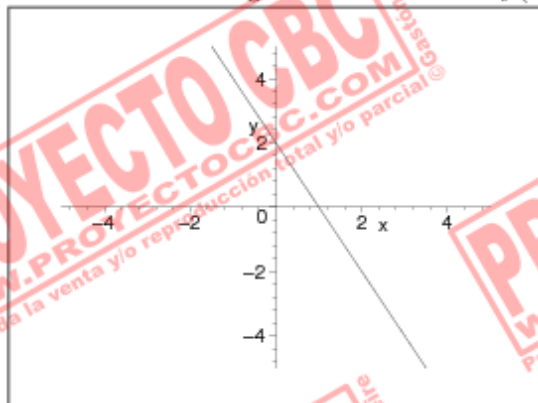
$$y = x + 1$$

La recta se anula en $x = -1$. Observen que como $m > 0$ nos queda una recta creciente.

Figura 13: Gráfico de $f(x)$ para el caso (b)

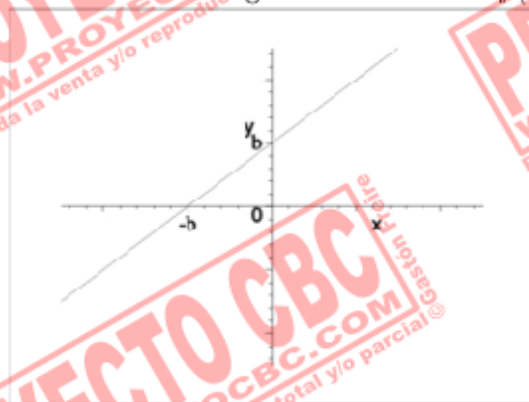
$$f(x) = 5$$

Observen que como $m = 0$ es una recta constante.

Figura 14: Gráfico de $f(x)$ para el caso (c)

$$f(x) = -2x + 2$$

La recta se anula en $x = 1$. Observen que como $m < 0$ nos queda una recta decreciente.

Figura 15: Gráfico de $f(x)$ para el caso (d)

$$f(x) = x + b$$

Observen que para hacer el dibujo hicimos una suposición: Que $b > 0$. Si hubiéramos supuesto que $b \leq 0$ entonces la recta pasaría o bien por el 0 en $x = 0$ o bien por un valor de y negativo.

Ejercicio 10

Sabemos que $g(0) = 32$ y que $g(100) = 212$. Como g es lineal entonces $g(x) = mx + b$. Resulta que el primer dato nos dice que $b = 32$, por lo que

$$m = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}$$

Así:

$$g(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

Para encontrar $h(x)$ podemos pensar ahora que es una función lineal tal que:

$$\begin{aligned} h(32) &= 0 \text{ y } h(212) = 100 \\ \Rightarrow m' &= \frac{100 - 0}{212 - 32} = \frac{9}{5} \\ \Rightarrow b' &= h(x) - m' \cdot x \\ (\text{reemplazo en } x = 32) \Rightarrow b' &= 0 - \frac{5}{9} \cdot 32 = -\frac{160}{9} \\ \Rightarrow h(x) &= \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} \end{aligned}$$

Comprobemos ahora que $g(x)$ y $h(x)$ son mutuamente inversas. La razón de que esto sea así es que $g(x)$ es la función que da la temperatura en grados Fahrenheit conocida la misma en grados Centígrados; y como $h(x)$ realiza la conversión inversa, no queda otra que como funciones, al componerlas nos de la identidad, razón por la cual son mutuamente inversas. Lo comprobaremos igual haciendo la cuenta⁵:

Hagamos pues la comprobación:

$$\begin{aligned} g(h(x)) &= g\left(\frac{5}{9}x - \frac{160}{9}\right) \\ &= \frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}x - \frac{160}{9}\right) + 32 \\ &= x - \frac{160}{5} + 32 \\ &= x - 32 + 32 \\ &= x \end{aligned}$$

⁵Nunca confundan a la función inversa de $f(x)$ con $\frac{1}{f(x)}$, confusión frecuente dado el parecido en la notación utilizada para designar a $f^{-1}(x)$ como función inversa de $f(x)$. Ambas cosas no tienen nada que ver y confundirlas puede ocasionar graves consecuencias en la resolución de un problema.

$$\begin{aligned}h(g(x)) &= h\left(\frac{9}{5}x + 32\right) \\&= \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x + 32\right) - \frac{160}{9} \\&= x + 32 \cdot \frac{5}{9} - \frac{160}{9} \\&= x + 160 - 160 \\&= x\end{aligned}$$

Así: En efecto vale que $g(h(x)) = h(g(x)) = x$, por lo que ambas funciones son mutuamente inversas.

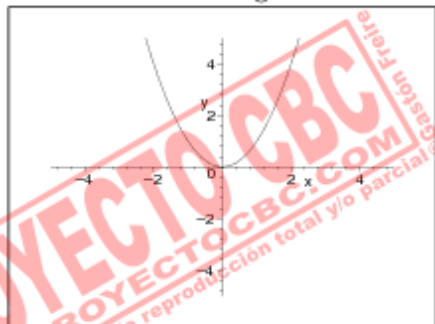
■

$f(x) = ax^2 + bx + c$	(Forma polinomial)
$f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$	(Forma canónica), la que se consigue completando cuadrados.
$f(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$	(Forma factorizada). Requiere que la cuadrática tenga alguna raíz.
$D = b^2 - 4ac$	Discriminante de la parábola: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Si $d > 0 \Rightarrow f$ tiene dos raíces distintas en \mathbb{R}. ▪ Si $d = 0 \Rightarrow f$ tiene una raíz doble. ▪ Si $d < 0 \Rightarrow f$ no tiene raíces en \mathbb{R}.
$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Fórmula para las raíces de $f(x)$.
$x_v = -\frac{b}{2a}$ ó $x_v = \frac{r_1 + r_2}{2}$	(Fórmula para el x -vértice de la parábola) En función de los coeficientes de la misma o de sus raíces, según fuera necesaria.
$y_v = f(x_v)$	El y -vértice se obtiene aplicando $f(x)$ al x -vértice.
$a > 0$	Corresponde a parábolas cóncavas hacia arriba.
$a < 0$	Corresponde a parábolas cóncavas hacia abajo.

Con las herramientas de esta pequeña introducción, los ejercicios siguientes deberían salir sin problema.

(a)

Esta parábola es la más simple que existe. $x_v = 0$, $y_v = f(x_v) = 0^2 = 0$. Además $a = 1 > 0$, entonces es cóncava hacia arriba. El gráfico queda:

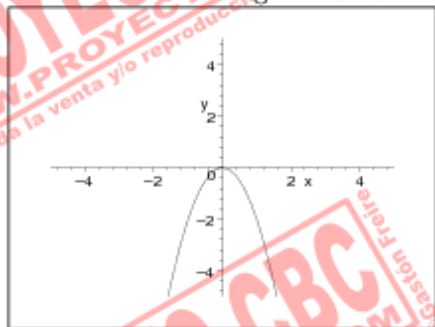
Figura 17: Gráfico para $f(x)$ del Ej.: 11.a

$$x_v = 0 \quad y_v = 0 \quad r_1 = r_2 = 0 \quad \text{Im}(f) = [0, +\infty)$$

Observen que cuando tiene una sola raíz, la parábola está apoyada sobre el vértice y el x_v coincide con la raíz.

(b)

En esta $x_v = 0$; $y_v = f(x_v) = 0$; $a = -1 < 0$, entonces la parábola es cóncava hacia abajo y el gráfico queda:

Figura 18: Gráfico para $f(x)$ del Ej.: 11.b

$$x_v = 0 \quad y_v = 0 \quad a = -1 < 0 \quad \text{Im}(f) = (-\infty, 0]$$

Observen que cuando tiene una sola raíz, la parábola está apoyada sobre el vértice y el x_v coincide con la raíz.

(c)

Nuevamente $x_v = 0$ pero $y_v = f(0) = -3$. Como además $a = 1 > 0$ entonces la parábola resulta cóncava hacia arriba. Para que el gráfico sea más *fiel* conviene calcular las raíces. No vale la pena usar la fórmula usual ya que las raíces de una parábola ya escrita en la forma canónica se deducen muy fácil, como lo ejemplifica la siguiente cuenta:

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Teniendo x_v , y_v y las raíces el gráfico puede hacerse en forma inmediata:

Figura 19: Gráfico para $f(x)$ del Ej.: 11.c



$$x_v = 0; y_v = -3; r_1 = -\sqrt{3}; r_2 = \sqrt{3}; a = -1 < 0; \text{Im}(f) = [-3, +\infty)$$

Observen como el y_v determina el corrimiento sobre el eje y .

Éste es el único de los items donde la parábola presenta sus dos raíces distintas. Ya anticipamos que para que una parábola tenga dos raíces reales distintas, es condición necesaria y suficiente que:

$$D > 0 \text{ donde } D = b^2 - 4ac$$

El lector podrá comprobar fácilmente que efectivamente en este ejercicio ocurre aquello, mientras que en los anteriores y el que sigue no.

(d)

Nuevamente tenemos la parábola escrita en forma canónica, lo que facilita la determinación de a , x_v , y_v y las raíces. En concreto queda: $a = -1$; $x_v = 5$; $y_v = 0$ y la única raíz doble está en el vértice. El gráfico queda:

Figura 20: Gráfico para $f(x)$ del Ej.: 11.d

$$x_v = 5; y_v = 0; r_1 = r_2 = 0; a = -1; \text{Im}(f) = (-\infty, 0]$$

Observen como el x_v determina el corrimiento sobre el eje x .

Ejercicio 12

En este problema no es necesario hacer ningún dibujo. Todo lo que se nos pide puede deducirse de las fórmulas. A veces es bueno tener en claro cuándo conviene hacer dibujos y cuando no, pues en ciertas circunstancias *no hacer dibujo* hace que el problema se vuelva prácticamente insoluble, mientras que en otras hacerlo sólo nos hacen perder tiempo. Para lograr formarse una correcta intuición para saber cuando dibujar y cuando no, es requisito indispensable practicar mucho, pero eso creo no hacía tanta falta mencionarlo.

(a)

Aquí $a = -2 < 0$, $x_v = 0$; $y_v = 0$; y $r_1 = r_2 = 0$.

- $f(x)$ crece en $(-\infty, x_v) = (-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$ pues es cóncava hacia abajo.
- $f(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, pues es cóncava hacia abajo y $r_1 = r_2 = x_v = 0$.
- Todas las parábolas alcanzan su extremo en $x_v \Rightarrow f(x)$ lo alcanza en $x = 0$.

Observen cómo analizando los distintos componentes de la cuadrática es posible sacar muchas conclusiones, sin necesidad de hacer gráficos. Eso no quiere decir que quien se sienta más cómodo realizando un gráfico de la misma no deba hacerlo, en lo absoluto. Pero hay que reconocer que a veces el tiempo es importante y estar entrenado para ahorrarlo nunca es un mal hábito.

(b)

Claramente $r_1 = 0$; $r_2 = 3$ y $a = -2$. Una manera sumamente útil de calcular x_v cuando se tiene la información sobre las raíces de la parábola es mediante la fórmula:

$$x_v = \frac{r_1 + r_2}{2}, \text{ (el promedio de las dos raíces)}$$

No podemos dejar de mencionar la consistencia de este hecho con el de que una parábola con una única raíz doble tenga la misma sobre el vértice. ¿Cuál es el promedio de dos números iguales? Saquen sus propias conclusiones.

Entonces:

$$x_v = \frac{3}{2}, \text{ e } y_v = f(x_v) = -2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\right) = \frac{9}{2}$$

Por lo tanto:

- $f(x)$ crece en $(-\infty, \frac{3}{2})$ y decrece en $(\frac{3}{2}, +\infty)$.
- $f(x)$ es negativa en $f_- = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$. f_- se llama el *conjunto de negatividad* de f . Y es positiva en $f_+ = (0, 3)$. A este último se lo llama *conjunto de positividad* de f .
- Alcanza su extremo en $x_v = \frac{3}{2}$, el cual resulta un máximo por ser f cóncava hacia abajo.

(c)

Tengamos en cuenta que:

$$f(x) = -2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2$$

Entonces inmediatamente se deduce que:

$$r_1 = 0; r_2 = \frac{1}{2}; a = -2; x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot (-2)} = \frac{1}{4}; y_v = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Por lo tanto:

- $f(x)$ crece en $(-\infty, \frac{1}{4})$ y decrece en $(\frac{1}{4}, +\infty)$.
- $f_- = (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$; $f_+ = (0, \frac{1}{2})$.
- $f(x)$ alcanza su máximo en $x_v = \frac{1}{4}$.

(d)

Tengamos en cuenta que:

$$f(x) = (x + 1)^2 = (x - (-1))^2$$

Entonces inmediatamente se deduce que:

$$r_1 = r_2 = -1; a = 1 > 0; x_v = -1; y_v = 0$$

Por lo tanto:

- $f(x)$ crece en $(-1, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, -1)$ ya que f resulta cóncava hacia arriba por ser $a > 0$.
- $f_+ = \mathbb{R} - \{-1\}$ pues al tener una única raíz en el vértice y ser cóncava hacia arriba, entonces f debe ser positiva salvo en su vértice donde vale 0.
- $f(x)$ alcanza su mínimo en $x = x_v = -1$.

(e)

Ahora lo que se percibe fácilmente y a simple vista a partir de la fórmula son las raíces, siendo $r_1 = -3$, $r_2 = 5$, $a = -20$ y por lo tanto con la fórmula del vértice a partir de las raíces, se tiene que $x_v = \frac{-r_1+r_2}{2} = 1$.

De esta forma concluimos que:

- f crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$.
- $f_+ = (-3, 5)$ y $f_- = (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$.
- f alcanza su máximo en $x = x_v = 1$.

■

Ejercicio 13

Este ejercicio es sumamente sencillo y de hecho no es necesario graficar nada. De todas formas es mas que recomendable para el alumno que recién comienza realizar dibujos para ejercitar la intuición.

- Basta observar en principio que cualquier parábola alcanza su extremo —en este caso un máximo por ser $a = -5 < 0$ y por lo tanto f cóncava hacia abajo— en x_v . Aquí:

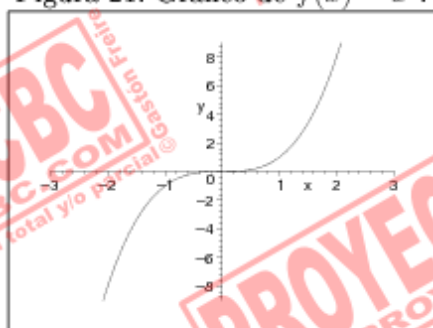
$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \cdot (-5)} = 1$$

Entonces la pelota debe alcanzar su altura máxima al segundo de haber sido arrojada.

- Para terminar, en cuanto a la altura máxima que alcanza la pelota, ésta la da el y_v , que como no es mas que aplicar la función $f(x)$ al x_v , nos queda que $f(x_v) = f(1) = -5 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 5$. O sea alcanza una altura máxima de 5 metros.

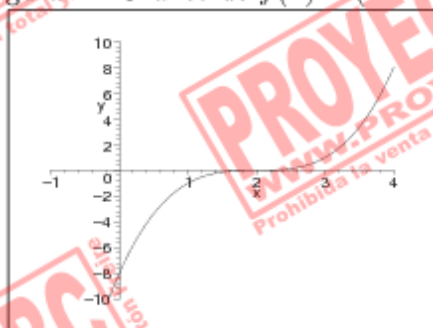
Ejercicio 14

(a)

Figura 21: Gráfico de $f(x) = x^3$.

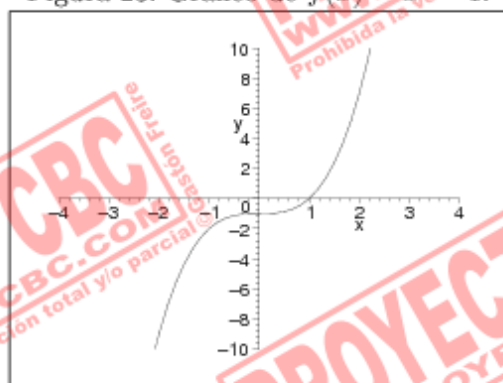
La misma es monótona creciente como puede apreciarse.

(b)

Figura 22: Gráfico de $f(x) = (x - 2)^3$.

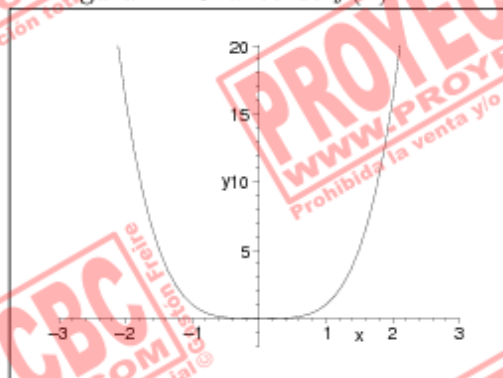
La misma es monótona creciente como puede apreciarse. En concreto es un corrimiento de $f(x) = x^3$ dos unidades a la derecha.

(c)

Figura 23: Gráfico de $f(x) = x^3 - 1$.

La misma es monótona creciente como puede apreciarse. De hecho es un corrimiento de $f(x) = x^3$ una unidad hacia abajo.

(d)

Figura 24: Gráfico de $f(x) = x^4$.

La misma no es monótona como puede apreciarse. ■

Ejercicio 15

Introducción Este ejercicio trata sobre las funciones homográficas, que son las que se obtienen al cocientar dos funciones lineales que no sean una múltiplo de la otra.

Su fórmula general es:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \text{ con } ad - bc \neq 0 \leftarrow (\text{para que no sean múltiplos ambas rectas})$$

La condición $ad - bc \neq 0$ se impone para evitar que la función degenera en una constante. Obsérvese que si $c = 0$ se obtienen las rectas no constantes. Si uno quisiera además de evitar a las rectas constantes en la definición de homográfica, evitar también a las rectas en general, se debería suponer adicionalmente $c \neq 0$. Hechas todas estas suposiciones, el aspecto general de cualquier función homográfica es bastante característico.

Cualquier homografía se puede llevar a la forma:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = A + \frac{B}{x - c}$$

,donde:

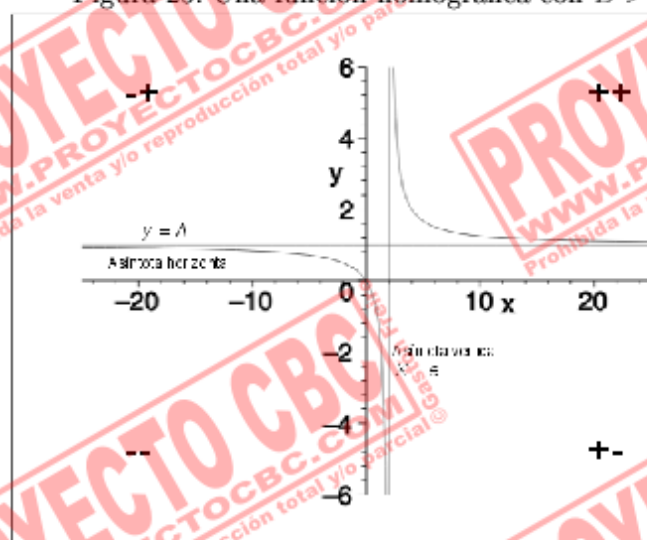
$$\begin{cases} A = \frac{a}{c} \\ c = -\frac{d}{c} \\ B = \frac{bc - ad}{c^2} \end{cases}$$

Para tener una idea de cómo son las homografías en general, observen el gráfico 25 en la página siguiente.

El dibujo corresponde al caso $B > 0$, donde $\text{Gra}(f)$ se encuentra en los cuadrantes “++” y “--” con respecto a las asíntotas de la homografía. Si fuera $b < 0$ se graficaría en “-+” y “+-” con respecto a las mismas. En cuanto al dominio, se tiene que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{c\}$, ya que en $x = c$ se anularía el denominador, y sabemos que la división por cero no tiene sentido.

Una última observación es que al momento de graficar, para decidir en qué cuadrantes hacerlo no hace falta tener presente el signo de B en general, si uno tiene el cuidado de estudiar correctamente las asíntotas horizontal y vertical, que en principio dividen al plano real en cuatro cuadrantes. Si se hizo correctamente esto, es posible determinar los cuadrantes correctos simplemente tomando x_1 a la izquierda de de la asíntota vertical, x_2 a la derecha de la misma, y ubicar en el gráfico por último los puntos: $P = (x_1, f(x_1))$ y $Q = (x_2, f(x_2))$. En los cuadrantes con respecto a las asíntotas donde queden estos puntos es el lugar correcto para graficar la homografía.

Verán enseguida como todo esto se aclara a medida que vayamos resolviendo el ejercicio.

Figura 25: Una función homográfica con $B > 0$ tiene este aspecto.

El dibujo corresponde al caso $B > 0$ que tiene gráfico en los cuadrantes $++$ y $--$. Si fuera $b < 0$ se graficaría en $--$ y $+-$.

En cuanto al dominio de la homográfica se tiene que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{c\}$, ya que en $x = c$ se anularía el denominador, razón por la cual no puede pertenecer al dominio de f .

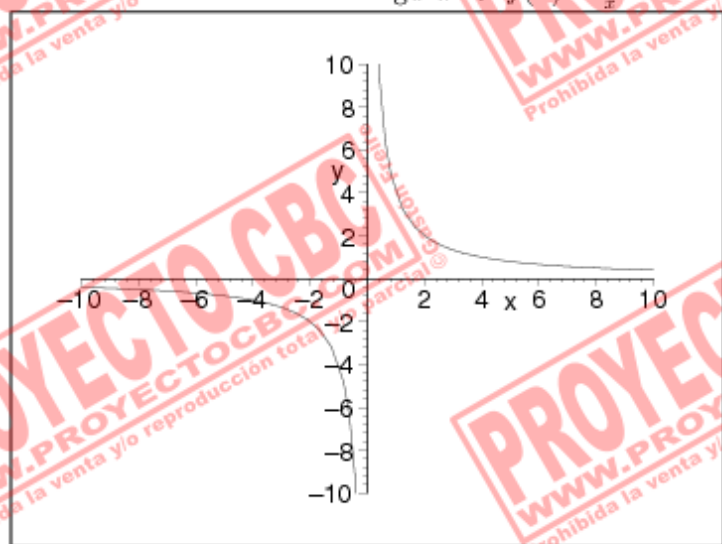
La asíntota vertical tiene ecuación $x = c$.

La asíntota horizontal tiene ecuación $y = A$.

(a)

La asíntota horizontal es la de ecuación $y = 0$, la vertical la tenemos en $x = 0$. Podemos tomar $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, deduciendo que los puntos $P = (1, 4)$ y $Q = (-1, -4)$ pertenecen al $\text{Gra}(f)$. Esto nos muestra que los cuadrantes donde habremos de hacer el gráfico son el “++” y el “--” —siempre con respecto a las asíntotas—, no confundirse con esto.

La homografía nos queda entonces una función decreciente en cualquier subintervalo contenido en su dominio, que es obviamente $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Pero es claro que pese a esto no es monótona decreciente, pues si tomamos cualquier par de puntos $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$ se verifica que $x_1 < x_2$ pero no vale que $f(x_1) < f(x_2)$. Sin embargo esto no contradice nuestra previa observación ya que $(x_1, x_2) \not\subseteq \text{Dom}(f)$.

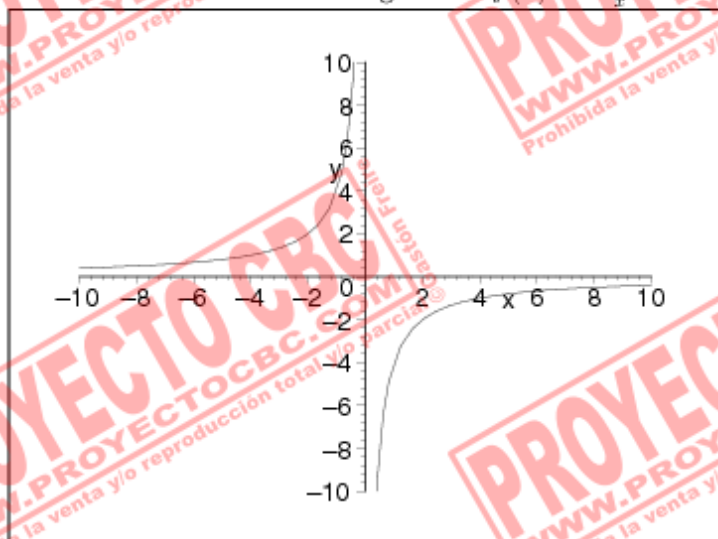
Figura 26: $f(x) = \frac{4}{x}$ 

Los intervalos de decrecimiento de f son $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(b)

La asíntota horizontal es la de ecuación $y = 0$, la vertical la tenemos en $x = 0$. Podemos tomar $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, deduciendo que los puntos $P = (-1, 4)$ y $Q = (1, -4)$ pertenecen al $\text{Gra}(f)$. Esto nos muestra que los cuadrantes donde habremos de hacer el gráfico son el “-+” y el “+-”.

La homografía nos queda entonces una función *creciente en cualquier subintervalo* contenido en su dominio, que es obviamente $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Pero es claro que pese a esto no es monótona creciente, pues si tomamos cualquier par de puntos $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$ se verifica que $x_1 < x_2$ pero no vale que $f(x_1) < f(x_2)$. Sin embargo esto no contradice nuestra previa observación ya que $(x_1, x_2) \not\subseteq \text{Dom}(f)$.

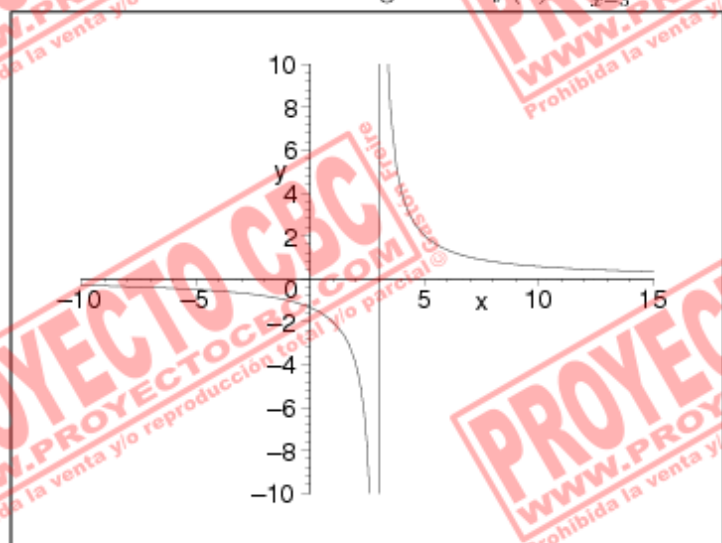
Figura 27: $f(x) = -\frac{4}{x}$ 

Los intervalos de crecimiento de f son $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(c)

La asíntota horizontal es la de ecuación $y = 0$, la vertical la tenemos en 3. Podemos tomar $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$, deduciendo que los puntos $P = (2, -4)$ y $Q = (4, 4)$ pertenecen al $\text{Gra}(f)$. Esto nos muestra que los cuadrantes donde habremos de hacer el gráfico son el “++” y el “--” —siempre con respecto a las asíntotas—, no confundirse con esto.

La homografía nos queda entonces una función *decreciente en cualquier subintervalo* contenido en su dominio, que es obviamente $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$. Pero es claro que pese a esto no es monótona decreciente, pues si tomamos cualquier par de puntos $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$ se verifica que $x_1 < x_2$ pero no vale que $f(x_1) > f(x_2)$. Sin embargo esto no contradice nuestra previa observación ya que $(x_1, x_2) \not\subseteq \text{Dom}(f)$.

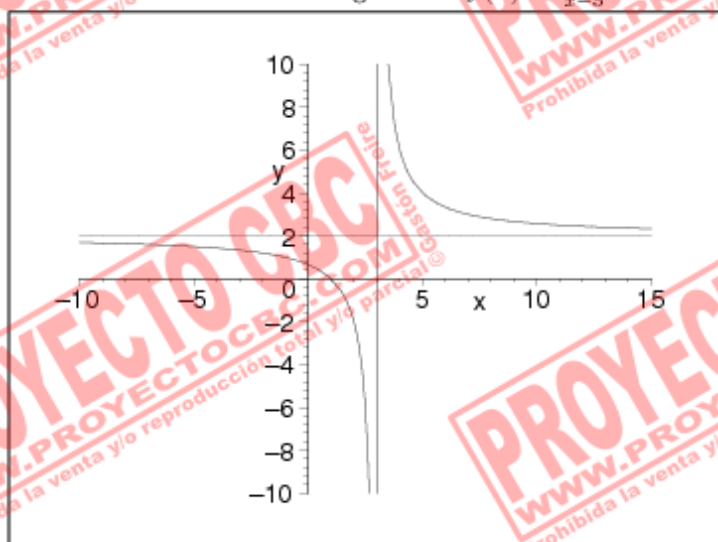
Figura 28: $f(x) = \frac{4}{x-3}$ 

Los intervalos de crecimiento de f son $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

(d)

La asíntota horizontal es la de ecuación $y = 2$ esta vez, la vertical la tenemos en $x = 3$. Podemos tomar $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$, deduciendo que los puntos $P = (1, 0)$ y $Q = (4, 6)$ pertenecen al $\text{Gra}(f)$. Esto nos muestra que los cuadrantes donde habremos de hacer el gráfico son el “++” y el “--” —siempre con respecto a las asíntotas—, no confundirse con esto.

La homografía nos queda entonces una función *decreciente en cualquier subintervalo* contenido en su dominio, que es obviamente $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$. Pero es claro que pese a esto no es monótona decreciente, pues si tomamos cualquier par de puntos $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$ se verifica que $x_1 < x_2$ pero no vale que $f(x_1) > f(x_2)$. Sin embargo esto no contradice nuestra previa observación ya que $(x_1, x_2) \not\subseteq \text{Dom}(f)$.

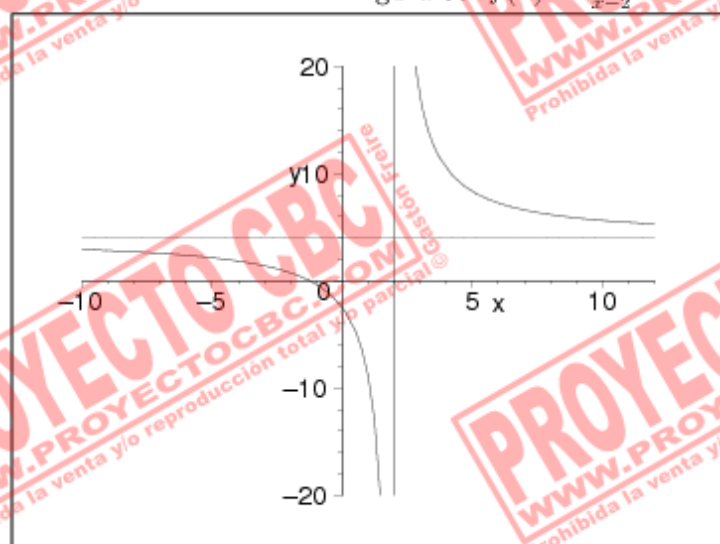
Figura 29: $f(x) = \frac{4}{x-3} + 2$ 

Los intervalos de crecimiento de f son $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

(e)

La asíntota horizontal es la de ecuación $y = 4$ esta vez, la vertical la tenemos en $x = 2$. Podemos tomar $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$, deduciendo que los puntos $P = (1, -1)$ y $Q = (3, 17)$ pertenecen al $\text{Gra}(f)$. Esto nos muestra que los cuadrantes donde habremos de hacer el gráfico son el “++” y el “--” —siempre con respecto a las asíntotas—, no confundirse con esto.

La homografía nos queda entonces una función *decreciente en cualquier subintervalo* contenido en su dominio, que es obviamente $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. Pero es claro que pese a esto no es monótona decreciente, pues si tomamos cualquier par de puntos $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$ se verifica que $x_1 < x_2$ pero no vale que $f(x_1) > f(x_2)$. Sin embargo esto no contradice nuestra previa observación ya que $(x_1, x_2) \not\subseteq \text{Dom}(f)$.

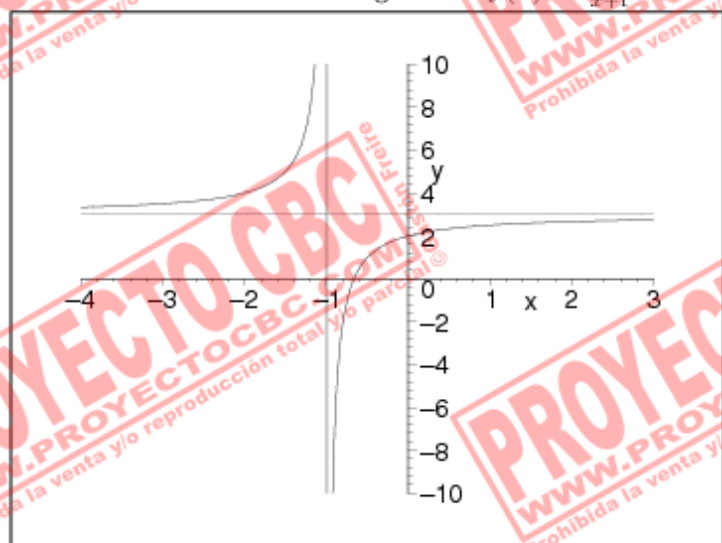
Figura 30: $f(x) = \frac{4x+5}{x-2}$ 

Los intervalos de crecimiento de f son $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

(f)

La asíntota horizontal es la de ecuación $y = 3$, la vertical la tenemos en $x = -1$. Podemos tomar $x_1 = -2$ y $x_2 = 0$, deduciendo que los puntos $P = (-2, 4)$ y $Q = (0, 2)$ pertenecen al $\text{Gra}(f)$. Esto nos muestra que los cuadrantes donde habremos de hacer el gráfico son el “ $-+$ ” y el “ $+ -$ ” — con respecto a las asíntotas.

La homografía nos queda entonces una función *creciente en cualquier subintervalo* contenido en su dominio, que es obviamente $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$. Pero es claro que pese a esto no es monótona creciente, pues si tomamos cualquier par de puntos $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$ se verifica que $x_1 < x_2$ pero no vale que $f(x_1) > f(x_2)$. Sin embargo esto no contradice nuestra previa observación ya que $(x_1, x_2) \not\subseteq \text{Dom}(f)$.

Figura 31: $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$ 

Los intervalos de crecimiento de f son $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. ■

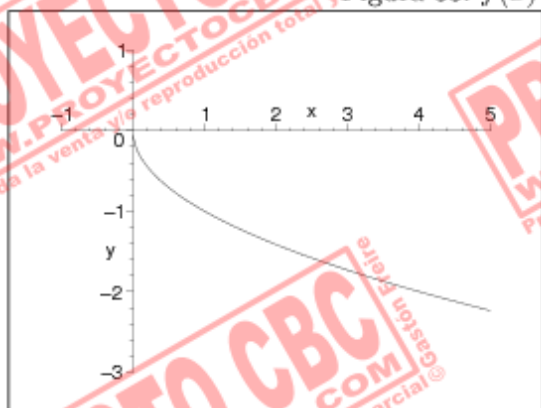
Ejercicio 16

(a)

Figura 32: $f(x) = \sqrt{x}$ 

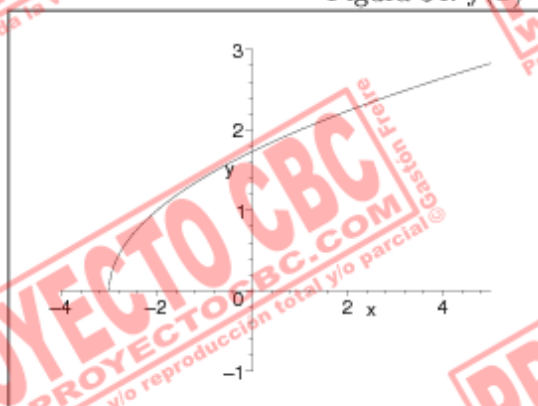
$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \geq 0$. Es una función monótona creciente.

(b)

Figura 33: $f(x) = -\sqrt{x}$ 

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \geq 0$. Es una función monótona decreciente.

(c)

Figura 34: $f(x) = \sqrt{x+3}$ 

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \geq -3$. Es una función monótona creciente.

(d)

Figura 35: $f(x) = |x-2|$ 

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Obviamente no es monótona.

■

Ejercicio 17

(a)

Aquí $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ pues $x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 4 \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \sqrt{x^2 + 4}$ está bien definida.

(b)

Aquí para que lo de adentro de la raíz sea ≥ 0 es necesario que $x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 8$. Entonces $\text{Dom} f = [8, +\infty)$.

(c)

En este caso $x \in \text{Dom} f \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 9 \Leftrightarrow |x| \geq 3$. Pero entonces $\text{Dom} f = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

(d)

La cuenta en este caso es levemente menos trivial ya que $x \in \text{Dom} f \Leftrightarrow x \cdot (x - 1) \geq 0$. Como la expresión que tiene que ser mayor o igual a cero es un producto de dos expresiones, esto ocurrirá si y sólo si ambas tienen el mismo signo. Hay dos posibilidades:

1. $x \geq 0$ y $x - 1 \geq 0$: Con lo que trivialmente se ve que debe ser $x \geq 1$.
2. $x \leq 0$ y $x - 1 \leq 0$: Con lo que nuevamente se aprecia que debe ser $x \leq 0$.

Así: $\text{Dom} f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

Ejercicio 18

(a)

Existe y está bien definida $f \circ f(-1) = f(f(-1)) = f(2 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1)) = f(-3) = 3$.

Aquí también existe y está bien definida $f \circ h(1) = f(h(1)) = f(-4) = 32 - 20 = 12$.

En este caso $\nexists g \circ f(-1)$ pues $f(-1) = -3 \notin \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-3\}$.

Nuevamente existe $h \circ g(2) = h(g(2)) = h\left(\frac{1}{5}\right) = 2 \cdot \frac{1}{5} - 6 = \frac{2-30}{5} = -\frac{28}{5}$.

(b)

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f\left(\frac{1}{x+3}\right) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{x+3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{2}{(x+3)^2} + \frac{5}{x+3} \\ &= \frac{2+5 \cdot (x+3)}{(x+3)^2} \\ &= \frac{5x+17}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

$$g \circ h(x) = \frac{1}{(2x^2+5x)+3} = \frac{1}{2x^2+5x+3}$$

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(x) &= \overset{\text{Calculada arriba}}{(f \circ g)(h(x))} \\ &= \frac{2+5((2x-6)+3)}{((2x-6)+3)^2} \\ &= \frac{10x-13}{(2x-3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ h(x) &= 2(2x-6)^2 + 5(2x-6) \\ &= 2(4x^2 - 24x + 36) + 10x - 30 \\ &= 8x^2 - 38x + 42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f \circ f(x) &= 2(2x^2 + 5x)^2 + 5x \\
 &= 2(4x^4 + 20x^3 + 25x^2) + 5x \\
 &= 8x^4 + 40x^3 + 50x^2 + 5x
 \end{aligned}$$

(c)

Evidentemente $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$, lo que demuestra que la composición de funciones no es una operación conmutativa.

Comentario

Vale la pena aprovechando el espíritu de este ejercicio hacer un comentario con respecto a la *asociatividad* de la composición de funciones. Ya vimos mas arriba que la composición no es en general conmutativa, pero uno podría hacerse la misma pregunta en cuanto a la asociatividad de tal operación. La respuesta en este caso resulta afirmativa, ya que se verifica inmediatamente que:

$$\begin{aligned}
 (f \circ (g \circ h))(x) &= f(g \circ h(x)) \\
 &= f(g(h(x))) \\
 &= (f \circ g)(h(x)) \\
 &= ((f \circ g) \circ h)(x)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrada la asociatividad de la composición de funciones, lo que es un hecho importante ya que a partir de esto quedamos completamente autorizados a prescindir de la utilización de paréntesis para indicar cuál composición se hace primero en una cadena de composiciones. Esto simplifica notablemente la escritura, pues gracias a la propiedad asociativa de la composición, es exactamente lo mismo escribir $f \circ g \circ h \circ t(x)$ que escribir por ejemplo $((f \circ g) \circ h) \circ p(x)$.

Ejercicio 19

(a)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva pues es una función lineal con pendiente $m \neq 0$. Lo que hay que hacer es despejar x como función de y en la fórmula de f para calcular su inversa.

$$\begin{aligned} y = 3x - 5 &\Rightarrow \frac{y + 5}{3} = x \\ &\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{3} \end{aligned}$$

Así: Obtenemos que la inversa de f es a su vez una función lineal, de fórmula⁶:

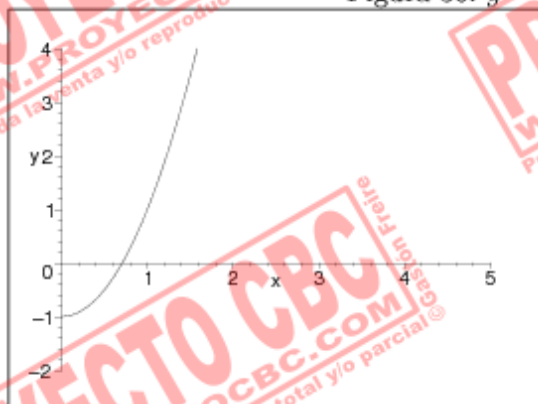
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

(b)

Aquí la condición $x \geq 0$ es importante ya que $f(x) = 2x^2 - 1$ no es biyectiva como función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pero si restringimos el dominio de f y la pensamos como $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq -1}$ entonces sí lo es. Para clarificar esto no hay nada mejor que observar el gráfico de f en el dominio restringido, y comprobar de esta manera su inyectividad⁷.

⁶Es probable que el lector recuerde de la secundaria que la pendiente m' de la recta inversa a una dada de pendiente m se calcula como $m' = \frac{1}{m}$. Observen como aquí se verifica esta fórmula, ya que la recta original tenía pendiente $m=3$, y su inversa resultó tener pendiente $m'=\frac{1}{3}$, que es justo lo que se esperaba.

⁷Recuerden que para que una función pueda tener inversa es necesario que sea inyectiva en el dominio elegido para ella. Si esto no ocurriera, habría algún punto $y_0 \in \text{Im} f$ para el cual no podríamos decidir donde mandar $f^{-1}(y_0)$.

Figura 36: $y = 2x^2 - 1$ 

$\text{Dom } f = [0, +\infty)$; $\text{Im } f = [-1, +\infty)$.

$$y = 2x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{y+1}{2}$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{y+1}{2}}$$

Como $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y+1}{2}}$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

Así:

$$f^{-1} : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \geq 0, f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

(c)

$\text{Dom } f = [-5, +\infty)$. Como $\sqrt{x+5}$ recorre todos los valores entre 0 y $+\infty$ para $x \in [-5, +\infty)$, entonces $\text{Im } f = (-\infty, 3]$. Para calcular la fórmula de la inversa procedemos como siempre, despejando x en función de y en la fórmula de $f(x)$.

$$\begin{aligned}
 y = 3 - \sqrt{x+5} &\Rightarrow \sqrt{x+5} = 3 - y \\
 &\Rightarrow x + 5 = (3 - y)^2 \\
 &\Rightarrow x = (3 - y)^2 - 5 \\
 &\Rightarrow x = y^2 - 6y + 4 \\
 &\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 4
 \end{aligned}$$

Así: $f^{-1} : (-\infty, 3] \leftarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 4$.

(d)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

(e)

Aquí nos restringen el dominio natural de la función f a $\text{Dom } f = [3, +\infty)$. Como $x_v = 3$ y $a = 1 > 0 \Rightarrow$ la parábola es cóncava hacia arriba y x_v resulta un mínimo, cuyo valor es $f(x_v) = -5$. Estamos ahora en condiciones de determinar la $\text{Im}(f)$, dato necesario para calcular su inversa pues nunca hay que olvidar que una función no es sólo su fórmula, sino que además características como su dominio hacen también a una correcta descripción de tal. $\text{Im } f = [-5, +\infty) = \text{Dom}(f^{-1})$. La fórmula para la inversa la calculamos como de costumbre despejando x como función de y en la fórmula de f .

$$\begin{aligned}
 y = x^2 - 6x + 4 &\Rightarrow (x - 3)^2 - 5 \leftarrow \text{Comp. Cuadrados} \\
 &\Rightarrow (x - 3)^2 = y + 5 \\
 &\Rightarrow |x - 3| = \sqrt{y + 5} \\
 \text{Como } x \geq 3 &\Rightarrow |x - 3| = x - 3 \Rightarrow x - 3 = \sqrt{y + 5} \\
 &\Rightarrow x = 3 + \sqrt{y + 5} \\
 &\Rightarrow f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x + 5}
 \end{aligned}$$

Así: $f^{-1} : [-5, +\infty) \Rightarrow \mathbb{R}$, y $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x + 5}$.

(f)

Aquí la función $f(x)$ es exactamente la misma que en (e) con la diferencia que ahora nos restringen de otra manera el dominio. Nos dicen que $\text{Dom } f = (-\infty, 3] \Leftrightarrow x \leq 3$.

Por el mismo argumento que en el ítem anterior vale que $\text{Im} f = [-5, +\infty)$.
Y la fórmula para la inversa se calcula con el mismo procedimiento:

$$y = x^2 - 6x + 4 \Rightarrow (x-3)^2 - 5 \leftarrow \text{Comp. Cuadrados}$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = y + 5$$

$$\Rightarrow |x-3| = \sqrt{y+5}$$

$$\text{Como } x \leq 3 \Rightarrow |x-3| = -(x-3) \leq 0 \Rightarrow x-3 = -\sqrt{y+5}$$

$$\Rightarrow x = 3 - \sqrt{y+5}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+5}$$

$$\text{Así: } f^{-1}: [-5, +\infty) \Rightarrow \mathbb{R}, \text{ y } f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+5}.$$

■

Ejercicio 20

La igualdad la debemos probar para todo $x > 0$. Observemos que

$$(\forall x > 0) \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

Teniendo en cuenta esto:

$$\frac{x}{\sqrt{x}} \stackrel{x > 0}{=} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x^2}{x}} = \sqrt{x}$$

Con esta ayuda el ejercicio sale sin complicaciones.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + 1}}{\frac{1}{x} + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}{\frac{1}{x} + 1} \\ &= \frac{1 + \sqrt{x}}{\frac{x+1}{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 1}{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{x}{x+1} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{x+1} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x}} \cdot f(x) \\ &= \sqrt{x} \cdot f(x) \end{aligned}$$

Así:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x} \cdot f(x)$$

Ejercicio 21

(a)

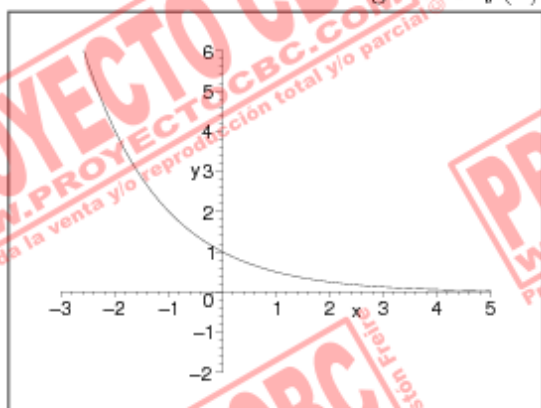
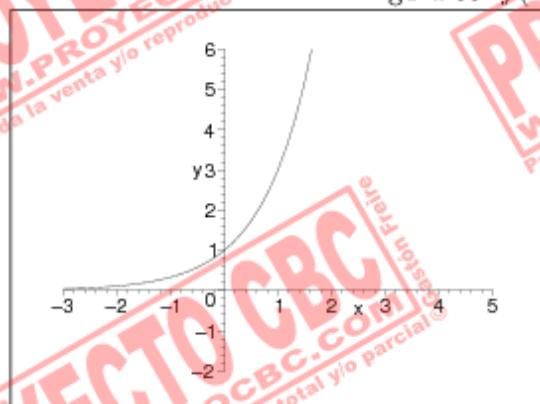
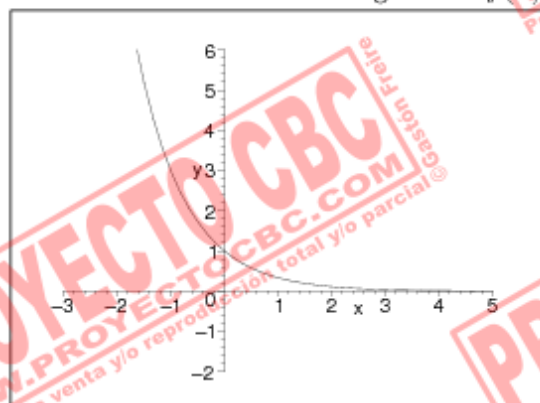
Figura 37: $f(x) = 2^x$  f es monótona creciente; $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $\text{Im } f = \mathbb{R} > 0$ Figura 38: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  f es monótona decreciente; $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $\text{Im } f = \mathbb{R} > 0$

Figura 39: $f(x) = 3^x$ 

f es monótona creciente; $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $\text{Im } f = \mathbb{R} > 0$

Figura 40: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 

f es monótona decreciente; $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $\text{Im } f = \mathbb{R} > 0$

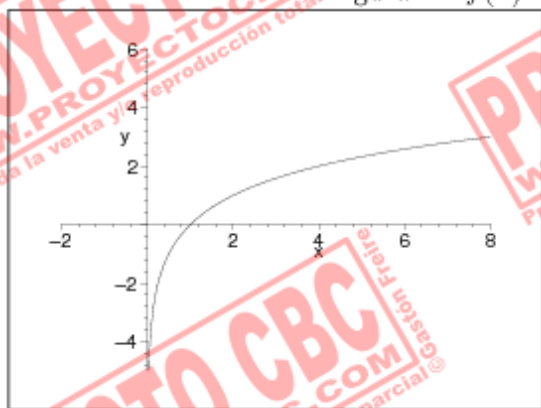
Ejercicio 22

Para empezar, sabemos que $\forall r > 0, r \neq 1 \in \mathbb{R}$ la función $r^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ resulta biyectiva y por lo tanto tiene inversa a la que llamaremos $\log_r(x) : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$.

Para graficarlas basta observar que si el par ordenado $(x, y) \in \text{Gra}(r^x) \Rightarrow (y, x) \in \text{Gra}(\log_r(x))$.

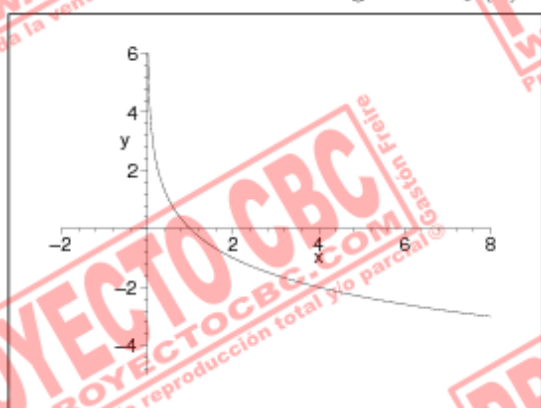
(a); (b) y (c)

Figura 41: $f(x) = \log_2(x)$

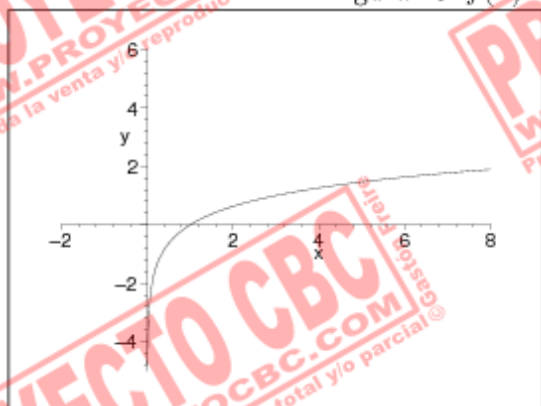


f es monótona creciente; $\text{Dom } f = \mathbb{R}_{>0}$; $\text{Im } f = \mathbb{R}$

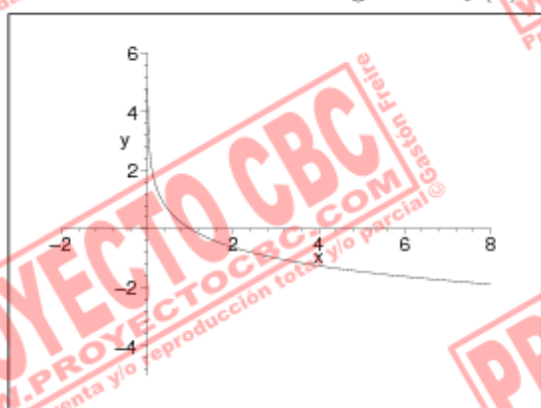
Figura 42: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$



f es monótona decreciente; $\text{Dom } f = \mathbb{R}_{>0}$; $\text{Im } f = \mathbb{R}$

Figura 43: $f(x) = \log_3(x)$ 

f es monótona creciente; $\text{Dom } f = \mathbb{R}_{>0}$; $\text{Im } f = \mathbb{R}$

Figura 44: $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$ 

f es monótona decreciente; $\text{Dom } f = \mathbb{R}_{>0}$; $\text{Im } f = \mathbb{R}$

Observen como en los gráficos se aprecia el hecho de que:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x) = -\log_2(x)$$

Y además:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x) = -\log_3(x)$$

Esto se nota en que los gráficos quedan simétricos con respecto al eje x . Multiplicar por -1 se traslada al gráfico como la aplicación de una simetría con respecto al eje de las abscisas.

■

Ejercicio 23

(a)

Como $\text{Dom}(\ln(x)) = \mathbb{R}_{>0}$ tendríamos que determinar los valores de x que hacen que lo de adentro del logaritmo quede estrictamente positivo. Esto ocurre:

$$\Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Así:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>0}$$

Para determinar $x/f(x) = 1$ hay que plantear⁸:

$$2x = e \Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$$

(b)

En este caso el $\text{Dom} f$ está determinado por $\{x : 3x^2 + 2x > 0\}$. Es decir el conjunto de positividad de la anterior parábola.

Como $a > 0$ y por ende la parábola resulta cóncava hacia arriba, entonces:

$$3x^2 + 2x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, r_1) \cup (r_2, +\infty)$$

$$3x^2 + 2x = 3x \left(x - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) \Rightarrow r_1 = -\frac{2}{3} \text{ y } r_2 = 0$$

Así:

$$\text{Dom}(f) = \left(-\infty, -\frac{2}{3} \right) \cup (0, +\infty)$$

⁸Obs: "e" es la base del logaritmo neperiano "ln" que es aproximadamente 2,7182.

Por último

$$\begin{aligned}f(x) = 1 &\Leftrightarrow 3x^2 + 2x = e \\&\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - e = 0 \\&\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12e}}{6} \\&\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 + 3e}}{6} \\&\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 3e}}{3}\end{aligned}$$

Así:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 3e}}{3}$$

■

Ejercicio 24

(a)

$f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva, $y = \ln(2x) \Rightarrow e^y = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}e^y$. Por lo tanto:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \text{ es } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}e^x$$

(b)

Aquí $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ pero hay que tener cuidado ya que f no es inyectiva en este dominio. En efecto $f(1) = \ln(5) = f(-1)$.

Para poder definirle una inversa a f hay que hacer una *elección* de la restricción de dominio que vamos a considerar.

Elijamos por ejemplo $\text{Dom}(f) := [0, +\infty)$. Sobre este dominio $x^2 + 4$ es inyectiva. Como $\ln(x)$ es a su vez inyectiva y la composición de funciones preserva la inyectividad, entonces $f(x)$ nos queda inyectiva en $[0, +\infty)$. Y

$$\text{Im}(f) = [\ln(4), +\infty)$$

Calculemos ahora la fórmula para la inversa:""

$$\begin{aligned} y = \ln(x^2 + 4) &\Rightarrow e^y = x^2 + 4 \\ &\Rightarrow x^2 = e^y - 4 \\ &\Rightarrow |x| = \sqrt{e^y - 4} \end{aligned}$$

$$\text{Como } x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x = \sqrt{e^y - 4}$$

Así:

$$f^{-1} : [\ln(4), +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \text{ y } f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 4}$$

Obs: En este tipo de ejercicios no basta con llegar a la fórmula de $f^{-1}(x)$. Hay que *restringir* de ser necesario el $\text{Dom}(f)$ para que la misma resulte inyectiva, también hay que calcular su imagen para esa restricción de dominio, la cual es necesaria pues $\text{Im}f = \text{Dom}f^{-1}$. y recién a lo último preocuparse por la fórmula de la función inversa. Hacer esto último sin lo anterior hace que el problema esté MAL.

(c)

$\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Nuevamente no resulta inyectiva en todo su dominio, razón por la cual restringiremos el mismo a $\text{Dom}(f) = (1, +\infty)$. En cuanto a la $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

$$y = \ln(x^2 - 1) \Rightarrow e^y + 1 = x^2$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{e^y + 1}$$

$$\text{Como } x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x = \sqrt{e^y + 1}$$

Así:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (1, +\infty) \text{ y } f^{-1}(x) = \sqrt{e^x + 1}$$

(d)

Aquí $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\text{Im}(f) = [6, +\infty)$.

$$y = 2\sqrt{x} + 5 \Rightarrow y - 5 = 2\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{\ln(y - 5)}{\ln(2)}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{\ln(y - 5)}{\ln(2)}\right)^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{\ln^2(y - 5)}{\ln^2(2)}$$

Así:

$$f^{-1} : [6, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ y } f^{-1}(x) = \frac{\ln^2(x - 5)}{\ln^2(2)}$$

¡OBS!: ¿Se dan cuenta que para decidir cuál es el $\text{Dom}(f^{-1})$ no basta con calcular la fórmula de $f^{-1}(x)$ y determinar su dominio natural? Según este último, $\text{Dom}(f^{-1}) = (5, +\infty)$. Nada más errado ya que con este dominio $f^{-1}(x)$ no sería inyectiva, lo cual constituye una contradicción. La moraleja de esto es que cuando una función no es *naturalmente inversible* y sin embargo se nos pide hallar su inversa, hay que tomar a priori una decisión sobre cuál será la restricción que nos interesa de dominio para f antes de hablar de calcularle su inversa.

(e)

f es inyectiva. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y la $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

$$y = e^{x+3} \Rightarrow \ln(y) = x + 3$$

$$\Rightarrow x = \ln(y) - 3$$

Así:

$$f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ y } f^{-1}(x) = \ln(x) \leftarrow 3$$

(f)

Aquí primero nos aclaran que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow f$ es inyectiva y $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{>1}$

$$\begin{aligned} y = e^{x^2} &\Rightarrow x^2 = \ln(y) \\ (x > 0) &\Rightarrow x = \sqrt{\ln(y)} \end{aligned}$$

Así:

$$f^{-1} : \mathbb{R}_{>1} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \text{ y } f^{-1}(x) = \sqrt{\ln(x)}$$

■

Ejercicio 25

(a)

Recordemos que $\sin(x - \pi) = -\sin(x)$.

(b)

Tiene período 2π no π .

(c)

Recordemos que $\cos(2x + \pi) = -\cos(2x)$.

(d)

Observemos que $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.

Los gráficos quedan así: (Observen que todas estas funciones son periódicas y acotadas por 1 en módulo)

Figura 45: $f(x) = \sin(x - \pi)$ 

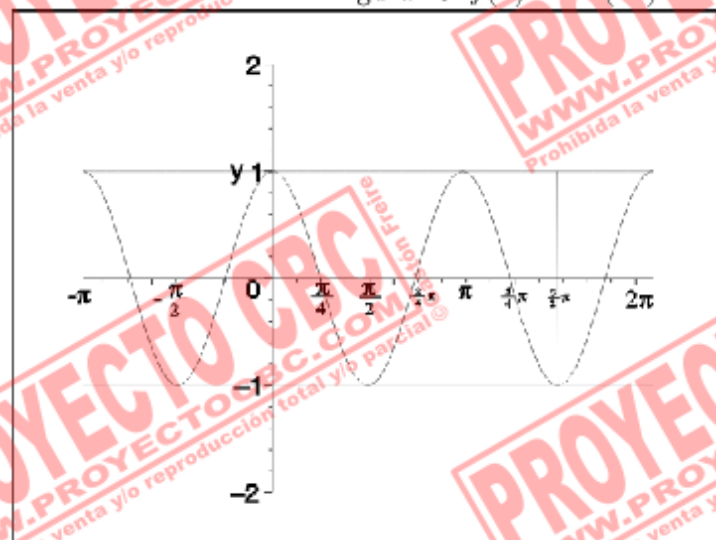
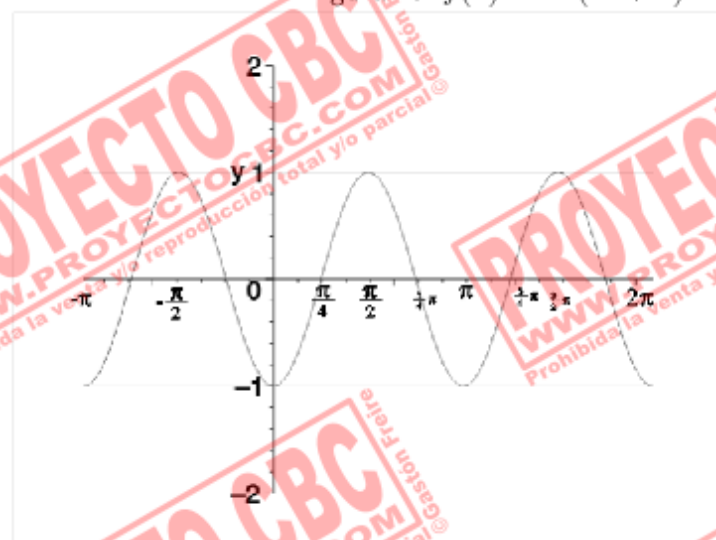
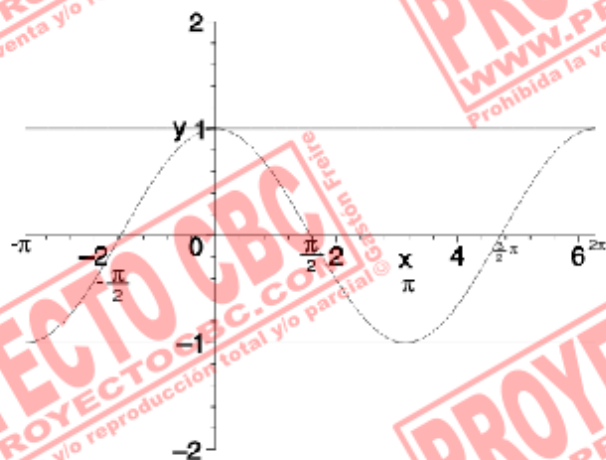
Figura 46: $f(x) = \cos(2x)$ Figura 47: $f(x) = \cos(2x + \pi)$ 

Figura 48: $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ 

Ejercicio 26

(a)

Como $\sin(x)$ es una función periódica de período $2\pi \Rightarrow$ para encontrar todas las soluciones de: $\sin(x) = \frac{1}{2}$ basta encontrar aquellas que pertenecen al intervalo $[0, 2\pi)$ —llamemos a este conjunto $S_{[0,2\pi)}$ — y la solución general de la primera ecuación podrá expresarse como:

$$S = \{x_0 + 2k\pi : x_0 \in S_{[0,2\pi)} \text{ y } k \in \mathbb{Z}\}$$

Veamos en la práctica como se hace:

Si nos restringimos al intervalo $[0, 2\pi)$,

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ó } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

Pero entonces:

$$S_{[0,2\pi)} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \right\}$$

De forma tal que:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(b)

Aquí no existe solución alguna pues $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\cos(x)| \leq 1$.

(c)

Las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son $x = 0$ y $x = \pi$. Pero entonces la solución general es:

$$S = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

(d)

Vale para todo $x \in \mathbb{R}$. De hecho es lo que afirma el TEOREMA DE PITÁGORAS⁹.

⁹En un triángulo rectángulo la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

(e)

Esta igualdad vale para todo $x \in \mathbb{R}$. De todas formas no es trivial verlo. De hecho las identidades trigonométricas utilizadas para demostrar este acierto son bastante profundas, y no se deducen con facilidad. Les recuerdo qué identidades son éstas:

1. $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ ← (esta es la que usaremos aquí)
2. $\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$
3. $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
4. $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$

Usando la primera identidad, la identidad planteada en el ejercicio se demuestra como sigue:

$$\begin{aligned}\sin(x + x) &= \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) \\ &= 2\sin(x)\cos(x)\end{aligned}$$

Así: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

(f)

Vale para todo $x \in \mathbb{R}$. Usaremos la identidad trigonométrica: $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.

$$\begin{aligned}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos(x)\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(x)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x) - \sin(x))\end{aligned}$$

Así:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x) - \sin(x)) \forall x \in \mathbb{R}$$

■

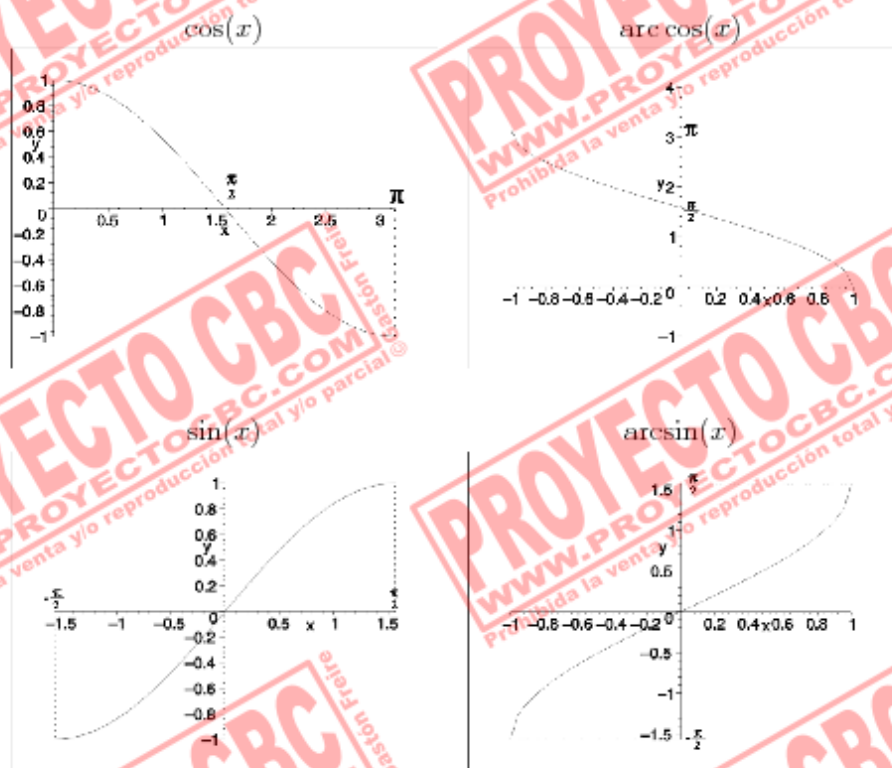
Ejercicio 27

Para que $\cos(x)$ quede inversible hay que elegir una restricción apropiada para su dominio. La más usual es considerar que $\text{Dom}(\cos(x)) = [0, \pi]$. En cuanto al $\sin(x)$ se suele tomar $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Con estas restricciones ambas resultan inversibles. Las funciones inversas se denotan por:

$$\arccos(x) : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$$\arcsin(x) : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Comparemos los gráficos de las primeras con sus respectivas inversas:



(a)

$$\Leftrightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(b)

$$\Leftrightarrow x = \cos(\pi) = -1$$

(c)

Observemos que $(\forall x \in [-1, 1]) \arccos(x) \geq 0$. Utilizado el hecho de que $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, y teniendo en cuenta que $\sin(\arcsin(x)) = x$ por ser funciones mutuamente inversas y el hecho de que $\sin^2(x) = (\sin(x))^2$ pues lo primero no es mas que una abreviación de lo segundo, entonces:

$$\begin{aligned} \cos(\arccos(x)) &= \sqrt{\cos^2(\arcsin(x))} \\ &= \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} \\ &= \sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2} \\ &= \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Así:

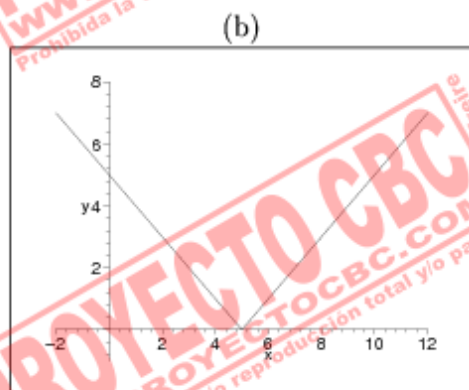
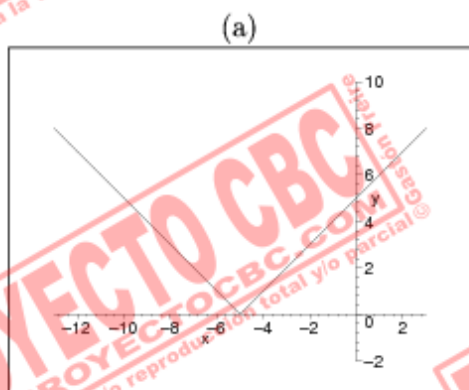
$$(\forall x \in \text{Dom}(\arcsin(x))) \text{ es } \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

Esta importante identidad será utilizada en el futuro cuando se estudie la derivabilidad de las funciones inversas de las trigonométricas. Conviendría que lo tengan presente.

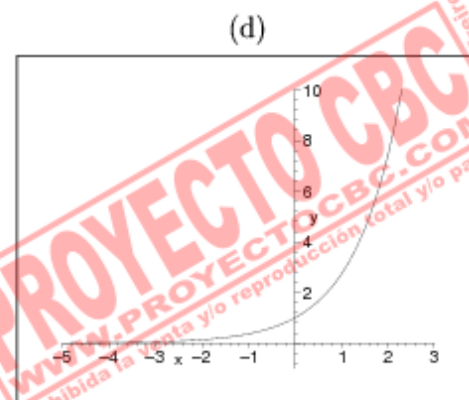
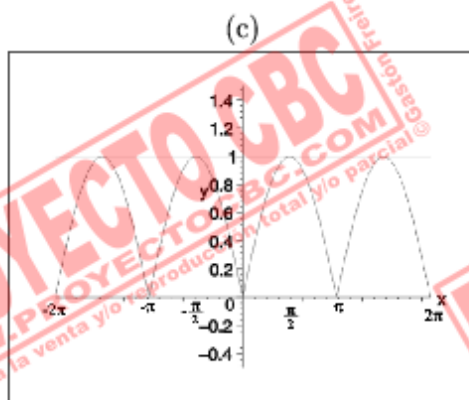
■

Ejercicio 28

(a) y (b)

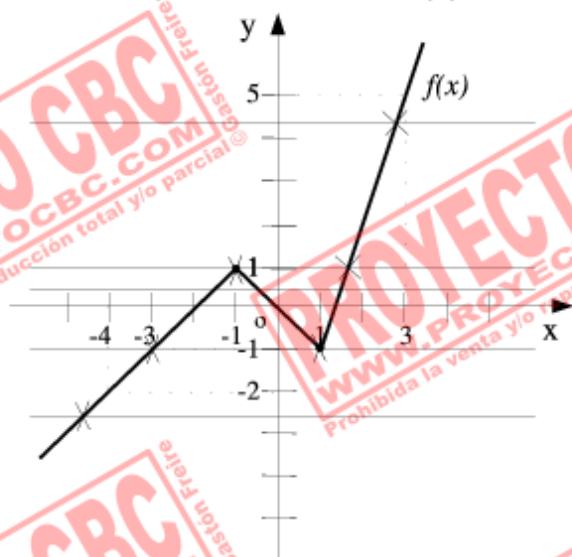


(c) y (d)



Ejercicio 29

(a)

Figura 49: Gráfico de $f(x)$ 

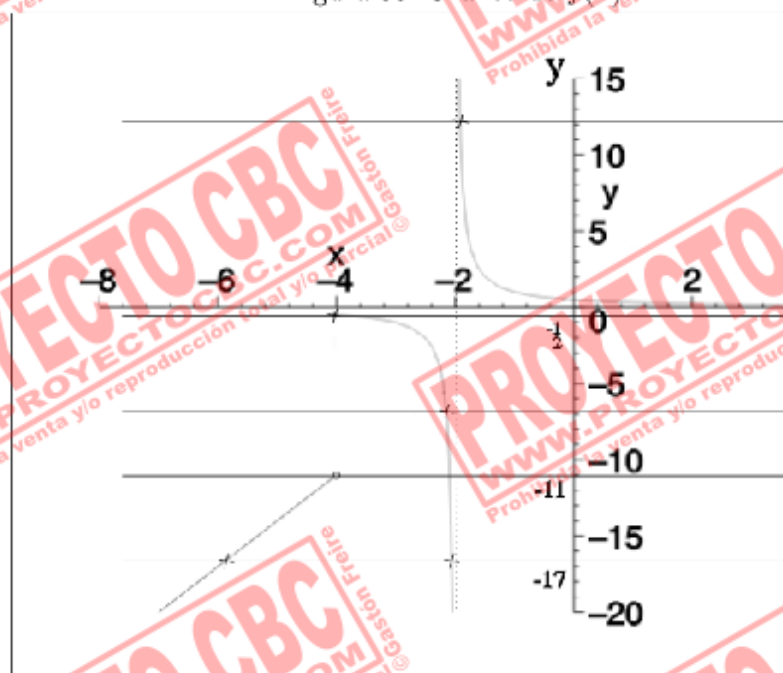
Para $x = -3$ debemos utilizar la fórmula correspondiente a $x \leq -1$ (es decir la de más arriba); para $x = 1$ la central; y para $x = 4$ la de más abajo. Luego:

$$f(-3) = -3 + 2 = -1 \quad f(1) = -1 \quad f(4) = 3 \cdot 4 - 4 = 8$$

La función $y = f(x)$ tiene solución única para aquellos valores de y donde la recta horizontal que pasa por $(0, y)$ corta una única vez al gráfico de $f(x)$. Entonces $y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Comentario: Esta metodología para determinar cuántas soluciones tiene una determinada ecuación, así como también para qué valores de y tiene solución única, etc... hay que tenerla bien presente, pues mas adelante cuando lleguen a los ejercicios de estudio de funciones, volverán a aparecer este tipo de problemas, pero presentados con funciones que no serán tan triviales como las que aquí aparecieron.

(b)

Figura 50: Gráfico de $f(x)$ 

Para evaluar $f(x)$ en $x = -3$; $x = 1$ y $x = 4$ debemos utilizar la fórmula de más abajo, pues es la correspondiente a $x \geq -4$. Luego:

$$f(-3) = \frac{1}{-3+2} = -1 \quad f(1) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \quad f(4) = \frac{1}{4+2} = \frac{1}{6}$$

La función $y = f(x)$ tiene solución única para aquellos valores de y donde la recta horizontal que pasa por $(0, y)$ corta una única vez al gráfico de $f(x)$. Vemos claramente que debe ser $y \in [-11, -\frac{1}{2}] \cup (0, +\infty)$.

Comentario Esta metodología para determinar cuántas soluciones tiene una determinada ecuación, así como también para qué valores de y tiene solución única, etc... hay que tenerla bien presente, pues mas adelante cuando lleguen a los ejercicios de estudio de funciones, volverán a aparecer este tipo de problemas, pero presentados con funciones que no serán tan triviales como las que aquí aparecieron.

■

Ejercicio 30

Llamemos x a la cantidad de pesos que posee un individuo determinado. Es claro que si $0 \leq x \leq 100,000$, entonces no pagará ningún impuesto.

La cantidad de pesos por encima de 100,000 se mide haciendo " $x - 100,000$ " y la por encima de "200,000" haciendo " $x - 200,000$ ".

La función $f(x)$ que nos da el impuesto que debe pagar esta persona hay que definirla por partes:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{si } 0 \leq x \leq 100000 \\ \frac{x-100000}{1000} \cdot \frac{1}{2} & ,\text{si } 100000 < x \leq 200000 \\ 50 + \frac{x-200000}{1000} & ,\text{si } x > 200000 \end{cases}$$

El término "50" en la tercer ecuación de la fórmula para $f(x)$ corresponde al impuesto que deberá pagar nuestra persona por sus primeros 200000 pesos, que no es el mismo que lo que paga por aquel que excede los 200000. No haber tenido esto en cuenta sería un error.

Volviendo al problema, es claro que nuestra persona posee una riqueza superior a los \$200000 pues de lo contrario pagaría menos de \$50 de impuesto. Por lo tanto la cuenta que da \$530 debe haber sido hecha con la tercer fórmula.

Pero entonces:

$$\begin{aligned} 50 + \frac{x-200000}{1000} &= 530 \\ \Leftrightarrow x-200000 &= 1000 \cdot 480 \\ \Leftrightarrow x &= 200000 + 480000 \\ \Leftrightarrow x &= 680000 \end{aligned}$$

Así: La persona posee una riqueza de \$680000. ■

Problema 1

En cuanto a la determinación de $f(x)$ el problema no presenta dificultad alguna ya que f es lineal y pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(2, 0)$.

$$\Rightarrow m = \frac{2 - 0}{-1 - 2} = -\frac{2}{3} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x + b$$

$$\Rightarrow 0 = f(2) = -\frac{4}{3} + b \Rightarrow b = \frac{4}{3}$$

Así:

$$f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

En cuanto a $g(x)$, sabemos que una de sus raíces es 2 y otra es -2 .

$$\Rightarrow g(x) = a \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$$

Y como $g(-1) = 2$:

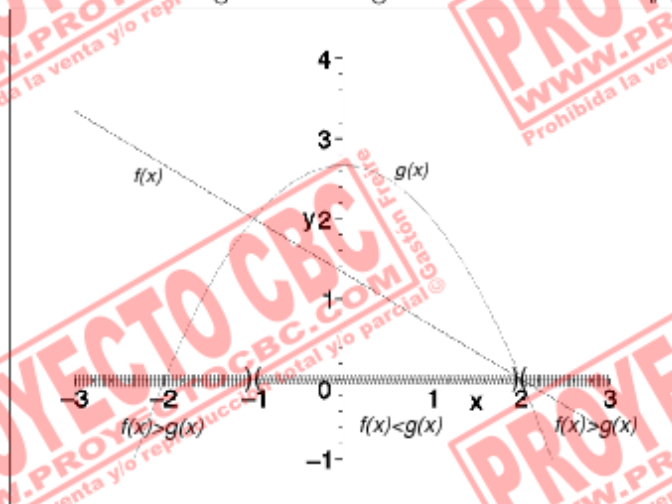
$$\Rightarrow 2 = a(-3)(1) = -3a \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

Así:

$$g(x) = -\frac{2}{3} \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$$

Para decidir sobre los $x/f(x) > g(x)$ basta observar que como $a < 0 \Rightarrow g$ es cóncava hacia abajo y por lo tanto f la debe cortar en dos puntos según se puede ver en la figura 51:

Figura 51: Diagrama de cómo corta $f(x)$ a $g(x)$



En el esquema se puede apreciar claramente que:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

■

Problema 2

(a)

Recordemos que por diferencia de cuadrados, las siguientes expresiones son equivalentes:

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

Utilizaremos este hecho a continuación:

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= (\cosh(x) - \sinh(x)) (\cosh(x) + \sinh(x)) \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{2e^x}{2} \right) \\ &= e^x \cdot e^{-x} \\ &= e^{x+(-x)} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Así: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

(b)

Hagamos la demostración por el absurdo. Supongamos que los gráficos se cortan en algún punto $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cosh(x) &= \sinh(x) \\ \Rightarrow \cosh^2(x) &= \sinh^2(x) \\ \Rightarrow \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 0 \end{aligned}$$

Pero ya vimos que $\forall x \in \mathbb{R} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, por lo que el resultado arribado mas arriba constituye un ¡ABSURDO!.

Luego: Sus gráficos no se cortan. ■

Problema 3

(a)

La función que nos dará el peso total del cántaro según la cantidad de agua que contenga será lineal. El $\text{Dom}(f) = [0, 20]$ que son las posibles cantidades de agua que puede contener.

La ordenada al origen de esta recta corresponde al peso del cántaro vacío, ya que es el valor de la función $f(x)$ cuando $x = 0$. Por lo tanto:

$$b = 2,55 \leftarrow (\text{medida en kilogramos})$$

Sabemos que el peso del cántaro lleno será de $20Kg + 2,55Kg$ valores que corresponden al peso del cántaro vacío con mas el peso de los 20 litros de agua que contiene. Pero entonces se verifica que:

$$2,55 + 20 = m \cdot 20 + 2,55 \Rightarrow m = 1$$

Así:

$$f(x) = x + 2,55 \text{ y } \text{Dom}(f) = [0, 20]$$

(b)

En el ítem anterior cada litro de agua pesaba $1Kg$. Ahora tenemos mercurio razón por la cual el peso de un litro del mismo no será más de $1Kg$. Afortunadamente se nos dice que $3Kg$ del mismo pesan $40,8Kg$. De esta forma podemos deducir que:

$$1Kg \text{ de mercurio } \xrightarrow{\text{pesa}} \frac{40,8}{3} Kg = 13,6Kg$$

Nuestra fórmula quedará entonces: $f(x) = 13,6x + 2,55$

(c)

Digamos que el punto de intersección fuera x_0 . El significado del mismo alude a que para ese volumen de líquida contenido —agua en el primer cántaro, mercurio en el segundo— ambos cántaros pesan lo mismo. Si pensamos un poco acerca de dicho punto, hay muchas razones para aludir a que no puede ser otro que $x_0 = 0$, es decir cuando los dos recipientes se encuentran vacíos. Aquí les presento algunas:

- Ya que el peso específico de ambos líquidos no es el mismo, a igual volumen *no nulo* de ambos se deben tener pesos distintos. (Esta razón es mas al estilo físico).

- Como ambas funciones son lineales de pendientes *distintas*, sabemos que existe un único punto de intersección para ambas. Al ser $x = 0$ uno de estos puntos, debe ser el único posible. (Esta razón es mas al estilo matemático).

(d)

Absolutamente falso. Para refutar la afirmación exhibamos un contraejemplo, para lo cual utilizaremos la fórmula que obtuvimos en el punto (a).

En efecto:

$$\begin{cases} f(1) = 3,55Kg \\ f(2) = 4,55Kg \end{cases} \quad \text{¡¡Y } 4,55 \neq 2 \cdot 3,55!!$$

El absurdo proviene de suponer la hipótesis planteada en el ejercicio, por lo cual la misma no se puede sostener.

■

Problema 4

En este ejercicio al igual que en muchos otros usaremos un hecho que el alumno medio debería conocer. Y aquel que descubra que no lo sabe puede ser éste un buen momento para internalizar la propiedad. Nos referimos a lo siguiente:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Es decir que es lo mismo dividir dos fracciones que multiplicar la primera por la *segunda dada vuelta*.

$$\begin{aligned} \frac{f(n+1)}{f(n)} &= \frac{2^{3(n+1)}}{4(n+1)+1} \cdot \frac{4n+1}{2^{3n}} \\ &= \frac{2^{3n+3}}{4n+5} \cdot \frac{4n+1}{2^{3n}} \\ &= \frac{8(4n+1)}{4n+5} \\ &= 8 \left(\frac{4n+1}{4n+5} \right) \end{aligned}$$

Así:

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = 8 \left(\frac{4n+1}{4n+5} \right)$$

▪ n=1:

$$\frac{f(2)}{f(1)} = 8 \cdot \frac{5}{9} = \frac{40}{9}$$

▪ n=2:

$$\frac{f(3)}{f(2)} = 8 \cdot \frac{9}{13} = \frac{72}{13}$$

▪ n=3:

$$\frac{f(4)}{f(3)} = 8 \cdot \frac{13}{17} = \frac{104}{17}$$

▪ n=4:

$$\frac{f(5)}{f(4)} = 8 \cdot \frac{17}{21} = \frac{136}{21}$$

▪ n=5:

$$\frac{f(6)}{f(5)} = 8 \cdot \frac{21}{25} = \frac{168}{25}$$

■