$4.00

ASIMOV

EJERCICIOS RESUELTOS

ANALISIS I

(Exactas – Ingenieria).

UNIDAD 10

S10

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

AREA ENTRE CURVAS. ECUACIONES DIFERENCIALES. VOLUMENES DE REVOLUCION. LONGITUD DE ARCO DE CURVA. PROBLEMAS VARIOS.

F

S10
000604

Ezelrengo para T!

PRÁCTICA 10

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

ÁREA ENTRE CURVAS

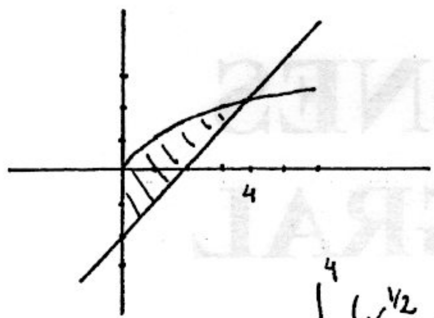
Ej. 1: Calcule el área ...

(a) Veamos donde se intersectan las curvas:

$\sqrt{x} = x-2 \Rightarrow x = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$

$0 = x^2 - 5x + 4 \Rightarrow \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.4}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow$

$\boxed{x_1 = 4}$; $\boxed{x_2 = 1}$ pero notamos que x_2 no satisface la ecuación original $\Rightarrow$ nos quedamos solo con $x_1 = 4$.



Para hallar el área hacemos:

$$\int_0^4 \left[\sqrt{x} - (x-2)\right] dx = \text{Area}$$

$$\int_0^4 (x^{1/2} - x + 2)\, dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Bigg|_0^4 =$$

$$\left(2/3\,(4)^{3/2} - 1/2\,(4)^2 + 2.4 \right) - 0 = 16/3 .$$

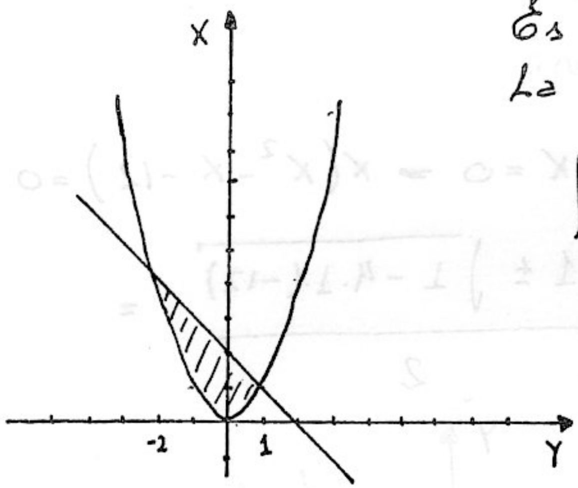
Luego, el área vale 16/3.

Ezelrengo para T!

(b) En realidad resultará más fácil si consideramos que x es una función de y: $x = x(y)$ ⇒ Las funciones son:

$x = y^2$; $x = 2-y$, los puntos de intersección son tales que: $y^2 = 2-y \Rightarrow y^2+y-2=0 \Rightarrow \frac{-1\pm\sqrt{1-4.1.(-2)}}{2} =$

$= \frac{-1\pm 3}{2} \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -2 \end{cases}$



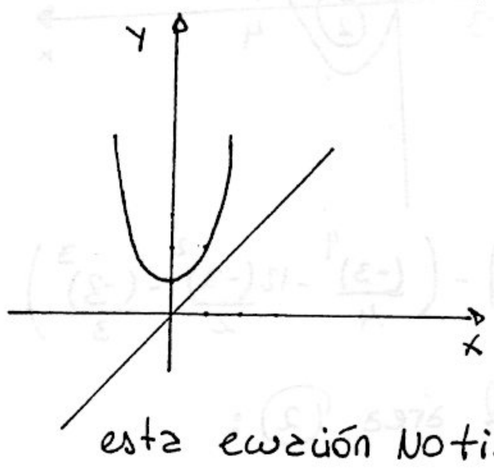
Es como rotar los ejes, el área la podemos calcular como:

$$\int_{-2}^{1} (2-y-y^2)\,dy = \text{Área}$$

$$2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \Big|_{-2}^{1} =$$

$$\left(2 - 1/2 - 1/3\right) - \left(-4 - 4/2 + 8/3\right) = 7/6 + 10/3 = \boxed{9/2}$$

(c)



$x = x^2+1$

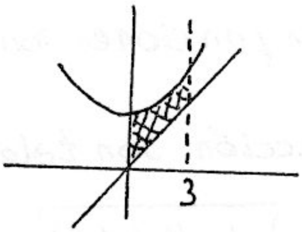
$0 = x^2 - x + 1$

$\frac{1 \pm \sqrt{1-4.1.1}}{2}$ y

esta ecuación NO tiene solución ⇒ no se intersectan

Ezelrengo para T!

Por eso estan las verticales $x=0$ y $x=3$.



$$A = \int_0^3 (x^2+1-x)\,dx = \frac{x^3}{3}+x-\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 =$$

$$\left(\frac{3^3}{3}+3-\frac{3^2}{2}\right)-(0) = 15/2$$

$\Rightarrow \boxed{A = 15/2}$

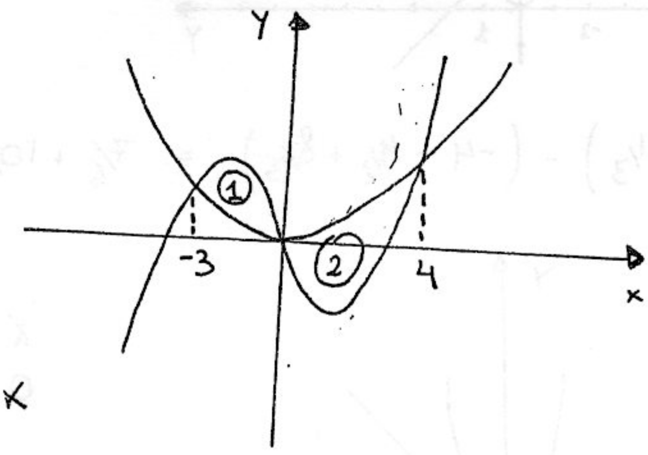
(d) Intersectemos las curvas:

$$x^3-12x = x^2 \Rightarrow x^3-x^2-12x=0 \Rightarrow x(x^2-x-12)=0$$

$$x_1=0 \;;\; x^2-x-12=0 \Rightarrow \frac{+1\pm\sqrt{1-4.1.(-12)}}{2} =$$

$$\frac{1\pm 7}{2} \begin{cases} 4 = x_2 \\ -3 = x_3 \end{cases}$$

Veamos una figura:



tenemos 2 áreas para calcular $\Rightarrow$

$$1 = \int_{-3}^{0} (x^3-12x-x^2)\,dx$$

$$1 = x^4/4 - 12x^2/2 - \frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{0} = (0)-\left(\frac{(-3)^4}{4}-12\frac{(-3)^2}{2}-\frac{(-3)^3}{3}\right)$$

$1 = 99/4$; ahora calculamos el área 2:

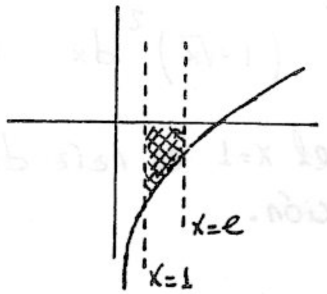
Ezelrengo para T!

$$② = \int_0^4 \left[x^2 - (x^3 - 12x)\right] dx = \int_0^4 (x^2 - x^3 + 12x)\, dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + 12\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = 4^3/3 - 4^4/4 + 6.4^2 = 160/3$$

Luego el área total es: $① + ② = \frac{99}{4} + \frac{160}{3} = \frac{937}{12}$

(e) Las curvas son $y = 0$; $y = \ln x - 2$, dibujemoslas:



$$\Rightarrow A = \int_1^e \left[0 - (\ln x - 2)\right] dx =$$

$$= \int_1^e (-\ln x + 2)\, dx =$$

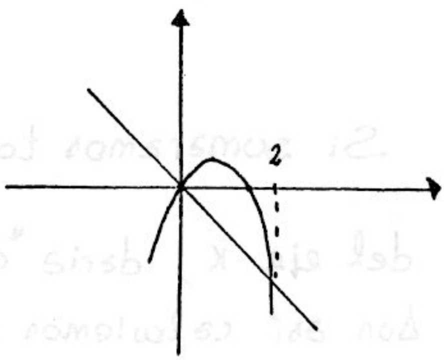
$$= (x - x\ln x + 2x)\Big|_1^e$$

(La primitiva de $-\ln x$ es $x - x\ln x$).

$$= (e - e\ln e + 2e) - (1 - \ln 1 + 2.1) = 2e - 3$$

El área da $2e-3$.

(f)



intersección:

$$-x = x - x^2$$

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$x_2 = 2$$

Ezelrengo para T!

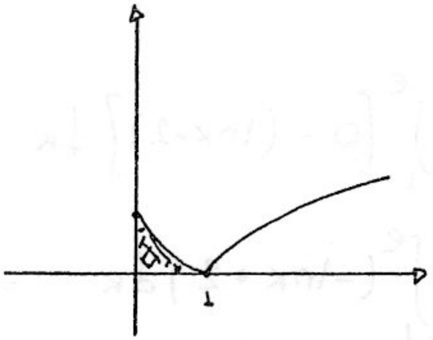
Hacemos la integral de la función superior menos la inferior:

$$A = \int_0^2 \left[(x - x^2) - (-x)\right] dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x)\, dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2\right) - (0) = 4 - 8/3$$

$$\boxed{A = 4/3}$$

(g)



$$A = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2\, dx$$

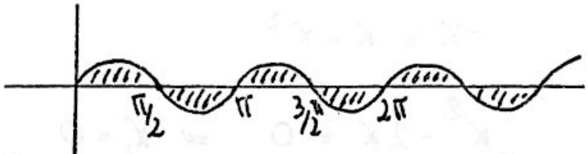
pues el $x=1$ es raíz de la función.

$$A = \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x)\, dx = \int_0^1 \left(1 - 2x^{1/2} + x\right) dx =$$

$$= \left(x - 2\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \left(x - 4/3\, x^{3/2} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(1 - 4/3 + 1/2\right) - (0) = 1/6 \Rightarrow \boxed{A = 1/6}$$

(h)



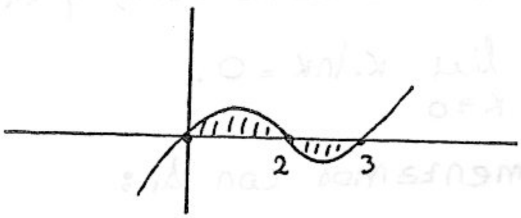
Si sumaramos todas las áreas por encima y por debajo del eje x, daría "cero" debido a la simetría de la función. Aun así calculemos el área de la porción entre $x=0$ y $x=\pi/2$.

$$A = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x)\,dx = -\frac{\cos(2x)}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \left(-\tfrac{1}{2}\right)\cos(2x)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$=\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\cos\pi - \cos 0\right) = \left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-1-1\right) = -\frac{1}{2}\cdot -2 = 1$$

El área de medio ciclo vale 1. La suma con modulos es ∞.

(i)



busquemos las raices:

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$$

$$x\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_1 = 0} \quad ; \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \rightarrow$$

$$\underbrace{x_2 = 2} \; ; \; \underbrace{x_3 = 3}$$

Calculemos el área por encima del eje x:

$$A_1 = \int_0^2 \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{2^4}{4} - 5.\frac{2^3}{3} + 3.2^2 = 4 - \frac{40}{3} + 12 = 8/3$$

Y ahora el area por debajo: (dara negativa. sin el "cero")

$$A_2 = \int_2^3 \Big[\underset{\substack{\downarrow \\ \text{es la función superior}}}{0} - \left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)\Big]\,dx = \int_2^3 \left(-x^3 + 5x^2 - 6x\right)dx$$

$$=\left(-\frac{x^4}{4} + 5\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^3 = \left(-\frac{3^4}{4} + 5.\frac{3^3}{3} - 3.3^2\right) - \left(-\frac{2^4}{4} + 5.\frac{2^3}{3} - 3.2^2\right) =$$

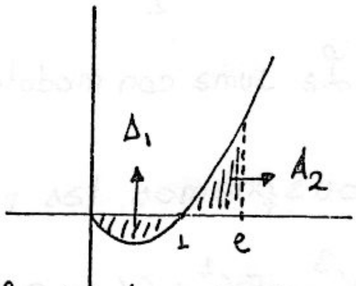
Ezelrengo para T!

$$= \left(-\frac{81}{4} + 45 - 27\right) - \left(-4 + \frac{40}{3} - 12\right) = \frac{71}{4} - \left(-\tfrac{8}{3}\right) = \frac{245}{12}$$

Si sumamos ambas contribuciones $\Rightarrow$

$$A = A_1 + A_2 = \tfrac{8}{3} + \tfrac{245}{12} = \tfrac{277}{12} \;.-$$

(j)



la función $x.\ln x$ tiene al $x=1$ como raíz, y el $\lim\limits_{x\to 0} x.\ln x = 0$.

Quedan delimitadas 2 áreas. Comenzamos con A_1:

$$A_1 = \int_0^1 (0 - x\ln x)\,dx = -\int_0^1 x.\ln x\,dx \quad , \text{ la primitiva la}$$

obtenemos por partes: $\int x.\ln x\,dx \rightarrow x = dv \rightarrow \frac{x^2}{2} = v$

$$\ln x = u \rightarrow \frac{1}{x}\,dx = du$$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}.dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -\int_0^1 x.\ln x\,dx = -\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\Big|_0^1$$, para evaluar en $x=0$

debemos tomar el $\lim\limits_{x\to 0}$, pues el $\ln x$ no está definido en

$$x=0 \Rightarrow A_1 = -\frac{1^2}{2}\left(\ln 1 - \tfrac{1}{2}\right) - \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right) =$$

Ezelrengo para T!

$$A_1 = -\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\right) + \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{4} + \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \tfrac{1}{2}\right)$$

Para calcular el límite (que está indeterminado $0.\infty$)

Usamos L'hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \tfrac{1}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x - 1/2}{\frac{1}{x^2/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x - 1/2}{\frac{2}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-4/x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{(-4)} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{4} = 0$$

finalmente $A_1 = 1/4 + 0 = 1/4$.-

Ahora $A_2 = \int_1^e x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \tfrac{1}{2}\right)\Big|_1^e =$

$$A_2 = \frac{e^2}{2}\left(\ln e - \tfrac{1}{2}\right) - \frac{1^2}{2}\left(\ln 1 - \tfrac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(0 - \tfrac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$$

El área total queda entonces: $\boxed{A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(e^2+1\right)}$

Ej. 2: Determine $c>1$ ...

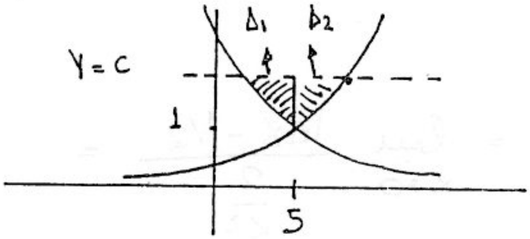
Veamos donde se cruzan las funciones:

$$e^{2(x-5)} = e^{-2(x-5)} \Rightarrow 2(x-5) = -2(x-5) \Rightarrow x-5 = -(x-5) \Rightarrow$$

Ezelrengo para T!

$X-5 = -X+5 \rightarrow 2X = 10 \rightarrow X = 5.$

Veamos ahora un gráfico (las exponenciales estan corridas 5 lugares a derecha)



quedan delimitadas 2 áreas, debido a la simetría de las funciones las podemos considerar iguales $\Rightarrow$ cada una deberá medir $1/2$. Podemos hallar c de modo que $\Delta_2 = 1/2$.

Busquemos la intersección entre las curvas $Y = C$; $Y = e^{2(x-5)}$

$$\Rightarrow e^{2(x-5)} = c \rightarrow 2(x-5) = \ln c \rightarrow$$

$X = \frac{\ln c}{2} + 5$ y ahora el área Δ_2:

$$\Delta_2 = \int_5^{\frac{\ln c}{2}+5} \left(c - e^{2(x-5)} \right) dx = \left(cx - \frac{e^{2(x-5)}}{2} \right) \Bigg|_5^{\frac{\ln c}{2}+5} =$$

$$\left[c\left(\frac{\ln c}{2}+5\right) - \frac{e^{2\left(\frac{\ln c}{2}+5-5\right)}}{2} \right] - \left[c.5 - \frac{e^0}{2} \right] =$$

$$c\left(\frac{\ln c}{2}+5\right) - \frac{c}{2} - 5c + \frac{1}{2} = \cancel{5c} + c\frac{\ln c}{2} - \frac{c}{2} - \cancel{5c} + \frac{1}{2} =$$

$c \cdot \frac{\ln c}{2} - \frac{c}{2} + \frac{1}{2}$ y esta cuenta debe dar $1/2$ $\Rightarrow$

$$\left.\frac{c}{2} \cdot \ln c - \frac{c}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \right\} \frac{c}{2} \ln c - \frac{c}{2} = 0 \rightarrow$$

Ezelrengo para T!

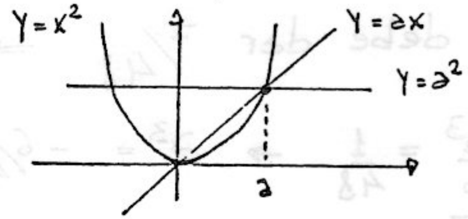
$\frac{c}{2}\left(\ln c - 1\right) = 0 \Rightarrow c = 0$ ó $\ln c - 1 = 0$

$c=0$ ↓ No puede ser pues $c > 1$ (ver enunciado) nos quedamos con $\ln c - 1 = 0 \rightarrow \ln c = 1 \rightarrow$

$\boxed{c = e}$

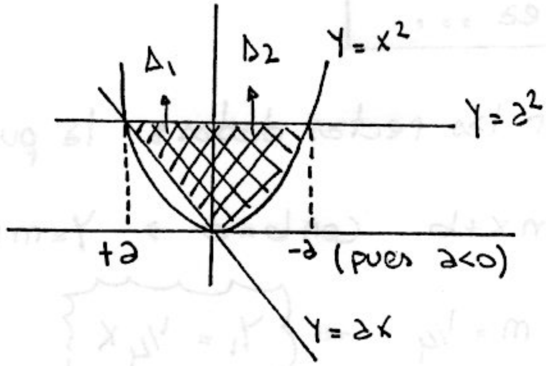
Ej. 3: El área de la región...

Comencemos suponiendo que $a > 0 \rightarrow$ la figura sería:



donde vemos que las 3 curvas NO delimitan un área "bien" definida.

Supongamos ahora que $a < 0 \rightarrow$ la recta tiene pendiente negativa:



Ahora sí las 3 curvas delimitan una región. Esperamos entonces un $a < 0$.

Ezelrengo para T!

$$A = A_1 + A_2 = \int_{+a}^{0} (a^2 - ax)\, dx + \int_{0}^{-a} (a^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \left(a^2 x - a\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{+a}^{0} + \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{-a} =$$

$$= \left(a^2 . 0 - a . \frac{0^2}{2}\right) - \left(a^2(+a) - a\frac{(+a)^2}{2}\right) + \left(a^2(-a) + \frac{a^3}{3}\right) - \left(a^2 . 0 - \frac{0^3}{3}\right) =$$

$$= 0 - \left(a^3 - \frac{a^3}{2}\right) + \left(-a^3 + \frac{a^3}{3}\right) - (0) =$$

$$= -a^3 + \frac{a^3}{2} - a^3 + \frac{a^3}{3} = -2a^3 + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3} = a^3\left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) =$$

$= -7/6\ a^3$ y esta cuenta debe dar $7/48$ $\Rightarrow$

$$-7/6\ a^3 = 7/48 \rightarrow -\frac{a^3}{6} = \frac{1}{48} \rightarrow a^3 = -6/48 = -1/8$$

$a = \sqrt[3]{-1/8} \rightarrow \boxed{a = -1/2}$ que es lo que esperabamos...

Ej. 4: Determine el área ...

Primero vamos a obtener las rectas dadas: la que une el $(0,0)$ y $(2,1/2)$ $\rightarrow$ $Y = mx + b$ con $b = 0 \rightarrow Y = mx$

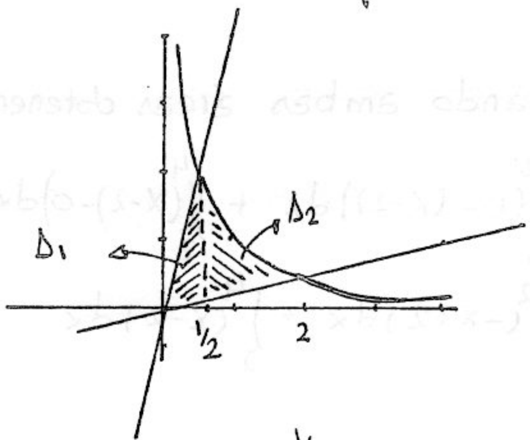
Entonces: $1/2 = m.2 \rightarrow m = 1/4 \Rightarrow \boxed{Y_1 = 1/4\, x}$

Ahora la que une el origen $(0,0)$ con $(1/2, 2)$ $\rightarrow mx + b = Y_2$

Ezelrengo para T!

$b=0 \rightarrow \quad 2 = \frac{1}{2}\cdot m \quad \rightarrow m=4 \quad \rightarrow \boxed{Y_2 = 4X}$

Veamos ahora un esquema de la región:



puntos de intersección:

$1/x = 4x \rightarrow 1 = 4x^2 \rightarrow x = \pm 1/2$

$1/x = 1/4\, x \rightarrow 1 = \frac{1}{4}x^2 \rightarrow x = \pm 2$

Calculemos $\Delta_1 = \int_0^{1/2} (4x - 1/4\, x)\, dx = \left(4\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{1/2} =$

$\Delta_1 = \frac{x^2}{2}(4 - 1/4)\Big|_0^{1/2} = \frac{15}{8}x^2\Big|_0^{1/2} = \frac{15}{8}\cdot\frac{1}{4} - 0 = \frac{15}{32}$.-

Calculemos $\Delta_2 = \int_{1/2}^{2} (1/x - 1/4\, x)\, dx = \int_{1/2}^{2} (x^{-1} - 1/4\, x)\, dx =$

$= \left(\ln x - 1/4\, x^2/2\right)\Big|_{1/2}^{2} = \left(\ln x - x^2/8\right)\Big|_{1/2}^{2} =$

$= (\ln 2 - 4/8) - (\ln 1/2 - 1/32) = \ln 2 - 1/2 - \ln 1/2 + 1/32 =$

$= \ln 2 - \ln 1/2 - 1/2 + 1/32 = \ln\left(\frac{2}{1/2}\right) - 1/2 + 1/32 =$

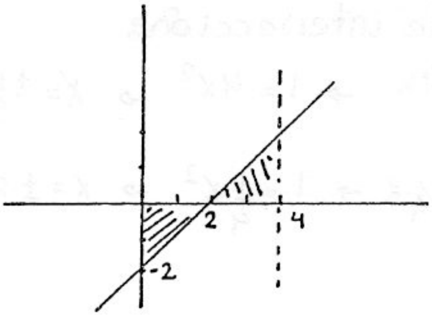
$= \ln 4 - 1/2 + 1/32 \approx 0{,}917$.-

Luego $A = \Delta_1 + \Delta_2 = 15/32 + 0{,}917 \sim 1{,}37$.-

Ezelrengo para T!

Ej. 5: Marque la única ...

Grafiquemos la región:



Sumando ambas áreas obtenemos:

$$A = \int_0^2 (0-(x-2))\,dx + \int_2^4 ((x-2)-0)\,dx$$

$$= \int_0^2 (-x+2)\,dx + \int_2^4 (x-2)\,dx$$

$$\underbrace{A = \int_0^2 (2-x)\,dx + \int_2^4 (x-2)\,dx}$$ de manera que marcamos la 4ª opción.-

---

Ecuaciones diferenciales

Ej. 6: Halle $Y = f(x)$ que ...

En lugar de escribir $f(x)$ y $f'(x)$ escribamos Y y $\frac{dY}{dx}$ respectivamente $\Rightarrow$ $\frac{dY}{dx} + 2xY = 0$, ahora intentemos separar las dependencias en x y en Y:

$$\frac{dY}{dx} = -2xY \Rightarrow \frac{dY}{Y} = -2x\,dx$$ (acá estamos pensando a $Y' = \frac{dY}{dx}$ como un "cociente" de diferenciales)

Ezelrengo para T!

Podemos entonces integrar ambos miembros:

$$\int \frac{dY}{Y} = \int -2x\,dx \Rightarrow \ln Y + C = -\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + C' \Rightarrow$$

podemos juntar ambas constantes de integración en una sola:

$$\ln Y = -x^2 + \underbrace{C' - C}_{K} \Rightarrow \ln Y = -x^2 + K \Rightarrow Y = e^{-x^2+K}$$

$Y = e^{-x^2} \cdot e^{K}$ y como e^K es otra cte, la llamamos k' $\Rightarrow$

$Y(x) = k' \cdot e^{-x^2}$, $f(x) = k' e^{-x^2}$, para determinar

la constante k' usamos la condición inicial: $f(0) = 3$

$\Rightarrow 3 = k' e^{-0^2} \rightarrow 3 = k' \cdot 1 \rightarrow 3 = k'$. Luego:

$$f(x) = 3\,e^{-x^2}.$$

Ej. 78 Encuentre todas las funciones...

Procedamos como en el ejercicio anterior:

$$f'(t) + a\,f(t) = 0 \rightarrow \frac{df}{dt} + af = 0 \rightarrow \frac{df}{dt} = -af \rightarrow$$

$\frac{df}{f} = -a\,dt$ ahora integremos:

$$\int \frac{df}{f} = \int -a\,dt \Rightarrow \ln f + C = -at + C'$$

Ezelrengo para T!

$$\ln f = -at + \underbrace{c' - c}_{k} \rightarrow \ln f = -at + k \rightarrow$$

$$f = e^{-at+k} \rightarrow f(t) = e^{-at} \cdot \underbrace{e^{k}}_{k'} \rightarrow f(t) = k' e^{-at}$$

Como no nos dan condiciones iniciales, estas son todas las funciones que resuelven la ecuación.

$$f(t) = k' e^{-a.t}$$

Como $a > 0$ podemos poner:

$$f(t) = \frac{k}{e^{at}}$$ y si $t \rightarrow \infty$ (estar pensando en que t es el "tiempo") $\Rightarrow f(t) \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$$

$\boxed{\text{Ej. 8: De entre todas las funciones ...}}$

Procemos primero "separando las variables", de hecho este método se llama "separaración de variables".

$$\frac{dy}{dx} \cdot y = x^3 + x \rightarrow dy \cdot y = (x^3 + x)\,dx \Rightarrow$$

$$\int y \cdot dy = \int (x^3 + x)\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} + C = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C'$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \underbrace{C' - C}_{k} \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + k \Rightarrow$$

Ezelrengo para T!

$$\therefore\ y^2 = 2\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + k\right) = \frac{x^4}{2} + x^2 + \underbrace{2k}$$

es otra constante que la seguiremos llamando k.

$y^2 = \frac{x^4}{2} + x^2 + k$ y ya no podemos obtener una $y = y(x)$ pues no podemos despejar y (si paso el cuadrado como raíz quedaría el módulo de y y no y) Determinamos la constante usando la condicion inicial: $f(1) = 3 \Rightarrow$

$$\frac{1^4}{2} + 1^2 + k = 3^2 \rightarrow \frac{1}{2} + 1 + k = 9 \rightarrow \frac{3}{2} + k = 9 \rightarrow$$

$k = 15/2$. Luego nuestra función queda dada implicitamente en la siguiente forma:

$$\boxed{y^2 = \frac{x^4}{2} + x^2 + \frac{15}{2}}$$

Ej. 9: Encuentre todas las soluciones...

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = x e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = y x e^x \rightarrow \frac{dy}{y} = x e^x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x e^x dx \Rightarrow \ln y + C = \int x e^x dx.$$

la última integral la realizamos por partes:

Ezelrengo para T!

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x (x-1)$$

$$\Rightarrow \ln Y + C = e^x (x-1) + C' \rightarrow \ln Y = e^x (x-1) + K$$

$$Y = e^{e^x (x-1) + K} = \underbrace{e^K}_{K} \cdot e^{e^x (x-1)}$$

finalmente:

$$\boxed{Y(x) = K e^{e^x (x-1)}}$$

Ej. 10: Los átomos de elementos ...

(a) $\frac{dN}{dt} = -kN \rightarrow \frac{dN}{N} = -k\,dt \rightarrow$ integramos:

$$\int \frac{dN}{N} = \int -k\,dt \rightarrow \ln N = -kt + c \rightarrow N = e^{-kt+c}$$

$N(t) = e^{-kt} \cdot \underbrace{e^c}_{C} = C e^{-kt}$. Para hallar C usamos la condición inicial: $N(0) = N_0 \Rightarrow N_0 = C e^{-k \cdot 0} \Rightarrow N_0 = C$.

Luego:

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{-kt}}$$

(b) queremos hallar t / $N(t) = N_0/2$. Entonces:

Ezelrengo para T!

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-kt} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-kt} \rightarrow \ln(1/2) = -kt \rightarrow$$

$$\ln(1) - \ln(2) = -kt \rightarrow 0 - \ln(2) = -kt \rightarrow -\ln(2) = -kt$$

$$\boxed{\frac{\ln(2)}{k} = t}$$

(c) la semivida "t" No varía con el tiempo, es una constante determinada por K (podemos decir que es inversamente proporcional a k) la constante de decaimiento de la sustancia.

Ej. 118 Resuelva la siguiente ecuación...

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{2} Y(100-Y) \Rightarrow \frac{dY}{Y(100-Y)} = \frac{1}{2} dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{dY}{Y(100-Y)} = \int \frac{1}{2} dt \Rightarrow \int \frac{dY}{Y(100-Y)} = \frac{1}{2} t + C \; ;$$

Para resolver la integral en Y usamos el método de fracciones simples:

$$\frac{1}{Y(100-Y)} = \frac{A}{Y} + \frac{B}{100-Y} = \frac{A(100-Y) + BY}{Y(100-Y)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Y(100-Y)} = \frac{A(100-Y) + BY}{Y(100-Y)} \text{ , Como los denominadores}$$

Ezelrengo para T!

son iguales solo falta que los numeradores también lo sean:

$$1 = A(100-Y) + BY = A.100 - AY + BY \Rightarrow$$

$1 = A.100 + (-A+B)Y$ la igualdad se logra si:

$$\left.\begin{array}{l} -A+B=0 \\ A.100=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} A=B \\ A=1/100 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A=1/100 \\ B=1/100 \end{array}$$

Entonces:

$$\frac{1}{Y(-Y+100)} = \frac{1}{100Y} + \frac{1}{100(100-Y)} \Rightarrow$$

$$\int \frac{1.\,dY}{Y(100-Y)} = \int \frac{1}{100Y}\,dY + \int \frac{1}{100(100-Y)}\,dY$$

$$= \frac{1}{100}\int \frac{dY}{Y} + \frac{1}{100}\int \frac{dY}{-(Y-100)}$$

$$= \frac{1}{100}\ln Y - \frac{1}{100}\ln(Y-100)$$

$$= \frac{1}{100}\left(\ln Y - \ln(Y-100)\right)$$

$$= \frac{1}{100}\ln\left(\frac{Y}{Y-100}\right)$$

finalmente llegamos a:

$$\frac{1}{100}\ln\left(\frac{Y}{Y-100}\right) = \frac{1}{2}t + C$$

Ezelrengo para T!

$$\ln\left(\frac{Y}{Y-100}\right) = 100\left(\frac{1}{2}t + c\right) = 50t + \underbrace{100c}_{c}$$

$$\ln\left(\frac{Y}{Y-100}\right) = 50t + c \Rightarrow \frac{Y}{Y-100} = e^{50t+c} = e^{50t}\cdot\underbrace{e^{c}}_{c}$$

$\dfrac{Y}{Y-100} = c\,e^{50t}$; nos falta obtener Y como una función de t (despejar Y)

$$Y = (Y-100)\,c\,e^{50t} = Yc\,e^{50t} - 100c\,e^{50t}$$

$$Y - Yc\,e^{50t} = -100c\,e^{50t} \Rightarrow Y(1-c\,e^{50t}) = -100e^{50t}\cdot c$$

$Y = \dfrac{-100c\,e^{50t}}{1-c\,e^{50t}}$ para terminar usamos la condición inicial $Y(0)=1$ para obtener c:

$$1 = \frac{-100c\,e^{50.0}}{1-c\,e^{50.0}} = \frac{-100c}{1-c} \Rightarrow 1 = \frac{-100c}{1-c}$$

$$1-c = -100c \rightarrow 100c - c = 1 \rightarrow 99c = 1$$

$\rightarrow c = 1/99$

$$\boxed{Y(t) = \frac{-\frac{100}{99}\,e^{50t}}{1-\frac{1}{99}\,e^{50t}}}$$

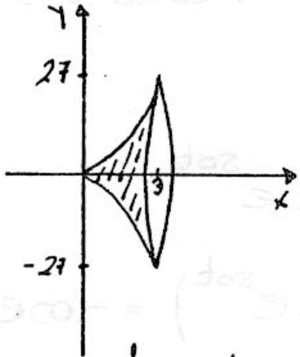
Ezelrengo para T!

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

LONGITUD DE CURVA

Ej. 12: Halle el volumen del sólido ...

Comencemos con un esquema del volumen en cuestión:



La formula que debemos usar es:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

En este caso $a=0$, $b=3$; $f(x) = 3x^2$, entonces

$$V = \pi \int_0^3 (3x^2)^2\,dx = \pi \int_0^3 9x^4\,dx = 9\pi \int_0^3 x^4\,dx =$$

$$= 9\pi \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^3 = 9\pi\left(\frac{3^5}{5} - 0\right) = \frac{9\pi \cdot 3^5}{5} = \frac{2187}{5}\pi$$

Entonces:

$$V = \frac{2187}{5}\pi$$

Ej. 13: Halle el volumen del sólido ...

Podemos prescindir de la figura y pasar directamente al cálculo del volumen. En este caso $a=1$, $b=4$;

Ezelrengo para T!

$f(x) = 1/x \Rightarrow V = \pi \int_1^4 (1/x)^2\,dx = \pi \int_1^4 x^{-2}\,dx$;

$V = \pi \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^4 = -\pi \left.\frac{1}{x}\right|_1^4 = -\pi\left(1/4 - 1\right) = -\pi\cdot(-3/4) \Rightarrow$

$V = 3/4\,\pi$

Ej. 14: Calcule el volumen del sólido ...

(a) Es como el problema anterior: $a=0$; $b=2$; $f=x^3$

$V = \pi \int_0^2 (x^3)^2\,dx = \pi \int_0^2 x^6\,dx = \pi \left.\frac{x^7}{7}\right|_0^2 = \pi\, 2^7/7$

$V = \frac{128}{7}\pi$

(b) Ahora el problema es "muy" distinto. La curva rota alrededor del eje Y $\Rightarrow$ cambia la fórmula a utilizar. Para una figura (curva) rotando alrededor del eje Y la formula es:

$V_Y = 2\pi \int_a^b x.\,f(x).\,dx$, donde a y b son los mismos de siempre. $\Rightarrow a=0$; $b=2$; $f(x) = x^3$ $\rightarrow$

Ezelrengo para T!

$$V = 2\pi \int_0^2 x \cdot x^3 \, dx = 2\pi \int_0^2 x^4 \, dx = 2\pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = 2\pi \frac{2^5}{5}$$

$$V = \frac{64}{5}\pi$$

Ej. 15: Calcule la longitud ...

La fórmula a utilizar ahora es: $L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx$

(a) tenemos que buscar y':

$y = 2x^{5/2} \rightarrow y' = 2 \cdot \frac{5}{2} x^{3/2} = 5x^{3/2}$ Luego:

$$L = \int_0^{11} \sqrt{1 + (5x^{3/2})^2}\, dx = \int_0^{11} \sqrt{1+25x^3}\, dx$$

El cálculo de esta integral excede el nivel de este curso, queda entonces la longitud expresada por el número que representa dicha integral.

(b) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{2} \rightarrow y' = x - \frac{1}{2x} \Rightarrow$

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{2x}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2x^2-1}{2x}\right)^2}\, dx$$

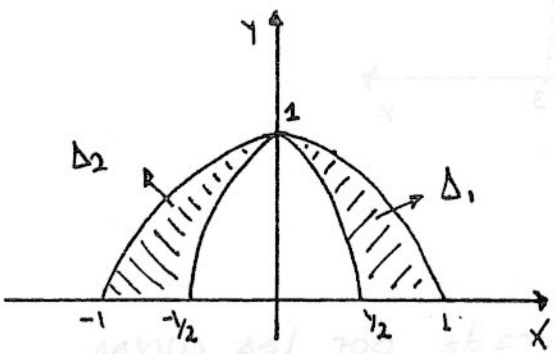
$$= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{4x^4+1-4x^2}{4x^2}}\, dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{1+4x^4}{4x^2}}\, dx$$

Ezelrengo para T!

Nuevamente el cálculo de esta integral es (muy) complicado de modo que: $L = \int_1^2 \sqrt{\dfrac{1+4x^4}{4x^2}}\,dx$.

PROBLEMAS VARIOS

Prob. 1: Encuentre el área...



Debido a la simetría de las funciones podemos calcular el área encerrada por las curvas en el semiplano de las x positivas:

$$\Delta_1 = \int_0^1 (1-x^2)\,dx - \int_0^{1/2} (1-4x^2)\,dx$$

Resto el área encerrada por $1-x^2$ y el eje x del área encerrada por $1-4x^2$ y el eje x.

$$\Delta_1 = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 - \left(x - \frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^{1/2}$$

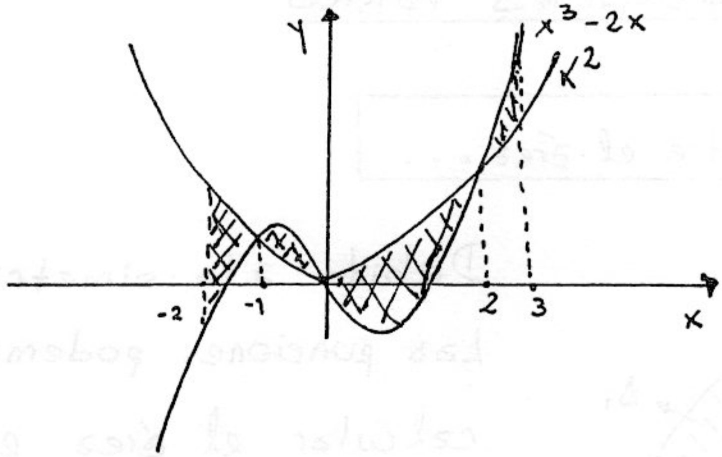
$$= (1 - 1/3) - (0) - \left\{ \left(1/2 - 4/3\,(1/2)^3\right) - (0) \right\}$$

Ezelrengo para T!

$$\Delta_1 = 1 - 1/3 - 1/2 + 4/3 \cdot 1/8 = 1/3$$

Luego $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 1/3 + 1/3 = 2/3$.

Prob. 28 Calcule el área...



Debemos hallar el área encerrada por las curvas entre las verticales $x=-2$ y $x=3$, entonces quedan delimitadas 4 áreas, comencemos el cálculo de izquierda a derecha:

$$\Delta_1 = \int_{-2}^{-1} \left(x^2 - (x^3-2x)\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^2 \Big|_{-2}^{-1} =$$

$$\Delta_1 = \left[\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^4}{4} + (-1)^2\right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^4}{4} + (-2)^2\right] =$$

$$\Delta_1 = \left(-1/3 - 1/4 + 1\right) - \left(-8/3 \cancel{-4} \cancel{+4}\right) = 37/12$$

Ezelrengo para T!

$$\Delta_2 = \int_{-1}^{0} (x^3 - 2x - x^2)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$= (0) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3}\right)$$

$$= -\left(1/4 - 1 + 1/3\right) = 5/12$$

$$\Delta_3 = \int_{0}^{2} (x^2 - x^3 + 2x)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$= \left(2^3/3 - 2^4/4 + 2\right) - 0 = 2/3$$

$$\Delta_4 = \int_{2}^{3} (x^3 - 2x - x^2)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{2}^{3}$$

$$= \left(3^4/4 - 3^2 - 3^3/3\right) - \left(2^4/4 - 2^2 - 2^3/3\right)$$

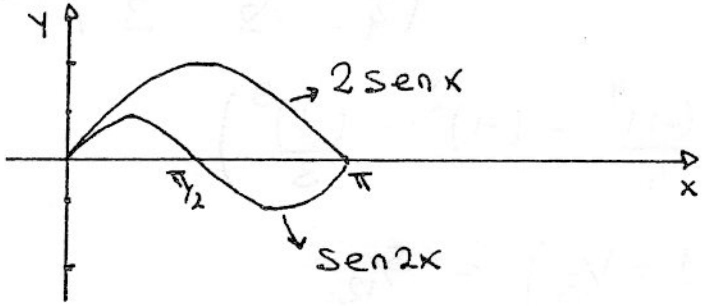
$$= 9/4 + 8/3 = 59/12$$

Sumando todo: $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$

$$\Delta = 37/12 + 5/12 + 2/3 + 59/12$$

$$\boxed{\Delta = 109/12}$$

Prob. 3: Calcule el área ...



El area es facil de calcular:

$$A = \int_0^{\pi} \left(2\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}2x\right)dx = \left(-2\cos x + \frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \left(-2\cos\pi + \frac{\cos 2\pi}{2}\right) - \left(-2\cos 0 + \frac{\cos 2.0}{2}\right)$$

$$= \left(2 + 1/2\right) - \left(-1 + 1/2\right) = 2 + 1/2 + 1 - 1/2 = 3$$

Prob. 4: Para cada n ...

Primero calculemos la integral:

$$a_n = \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} nx\, dx$$, la primitiva la obtenemos

por partes: $U = x \rightarrow du = dx$

$\operatorname{sen} xn . dx = dv \rightarrow -\dfrac{\cos nx}{n} = V$

Ezelrengo para T!

$$a_n = -x\,\frac{\cos xn}{n}\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos nx}{n}\,dx$$

$$= \left(-x\,\frac{\cos nx}{n} + \frac{\operatorname{Sen} nx}{n^2}\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos(n\pi/2)}{n} + \frac{\operatorname{Sen}(n\pi/2)}{n^2}\right) - 0$$

Si n es par $\Rightarrow n = 2K \Rightarrow \cos(2K\pi/2) = \cos(K\pi) = (-1)^K$

$\operatorname{Sen}(2K\pi/2) = \operatorname{Sen}(K\pi) = 0$

Si n es impar $\to n = 2K+1 \to \cos((2k+1)\pi/2) = 0$

$\operatorname{Sen}((2k+1)\pi/2) = (-1)^K$

Luego:

$$a_n = \begin{cases} a_{2k} = -\pi/2 \cdot (-1)^k / 2k \\ a_{2k+1} = (-1)^k / (2k+1)^2 \end{cases}$$

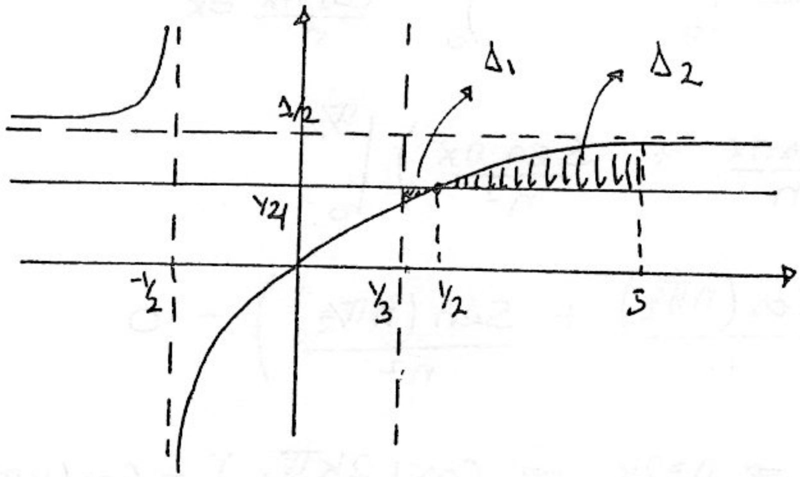
Si tomamos el limite $n \to \infty \Rightarrow$ es como $k \to \infty$

y ambas subsuceciones (pares e impares) tienden a cero (Hay k en denonominadores).

Entonces: $\lim_{n\to\infty} a_n \to 0$

Ezelrengo para T!

Prob. 58 Calcule el área ...



Intersección entre ambas curvas:

$$\frac{x}{2x+1} = \frac{1}{4} \rightarrow 4x = 2x+1 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = 1/2$$

quedan delimitadas Δ_1 y Δ_2 como se ve en la figura.

$$\Delta_1 = \int_{1/3}^{1/2} \left(1/4 - \frac{x}{2x+1} \right) dx$$ primero hallemos

la primitiva:
$$\frac{1}{4} - \frac{x}{2x+1} = \frac{2x+1-4x}{8x+4} = \frac{-2x+1}{8x+4}$$

pasamos esta última a forma canónica:

$$\frac{-2x+1}{8x+4} = \frac{A}{8x+4} + B = \frac{A + B(8x+4)}{8x+4} \Rightarrow$$

$$-2x+1 = A + 8Bx + 4B \Rightarrow \text{igualando:}$$

Ezelrengo para T!

$-2 = 8B \rightarrow \underbrace{B = -1/4}$ y $1 = A + 4B = A + 4(-1/4)$

$1 = A - 1 \rightarrow \underbrace{A = 2}$ la primitiva es:

$$\int \left(\frac{2}{8x+4} + -1/4 \right) dx = 2 \int \frac{1\, dx}{4(2x+1)} - x/4 =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2x+1} - x/4 = \frac{1}{4} \ln(2x+1) - \frac{x}{4} \Rightarrow$$

$$A_1 = \int_{1/3}^{1/2} \left(1/4 - \frac{x}{2x+1} \right) dx = \left[\frac{1}{4} \ln(2x+1) - \frac{x}{4} \right] \Big|_{1/3}^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{4} \ln(2) - \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{4} \ln(5/3) - \frac{1}{12} \right) = 3{,}91 \,.\, 10^{-3}$$

Ahora calculemos $A_2 = \int_{1/2}^{5} \left(\frac{x}{2x+1} - \frac{1}{4} \right) dx =$

$$A_2 = \int_{5}^{1/2} \left(1/4 - \frac{x}{2x+1} \right) dx$$

Saque factor común un (-) y lo use para intercambiar los limites.

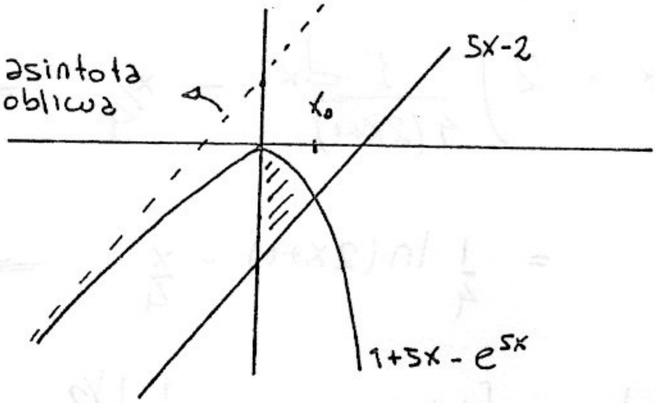
$$= \left[1/4 \ln(2x+1) - x/4 \right]_{5}^{1/2}$$

$$= \left(1/4 \ln(2) - 1/8 \right) - \left(1/4 \ln(11) - 5/4 \right) = 0{,}699$$

Ezelrengo para T!

finalmente $\Delta_1 = 3,41 \cdot 10^{-3}$; $\Delta_2 = 0,644 \Rightarrow \Delta_2 > \Delta_1$

$\boxed{\text{Prob. 6: Calcule el área ...}}$



La intersección es: $1+5x-e^{5x} = 5x-2 \Rightarrow$

$1-e^{5x} = -2 \rightarrow 3 = e^{5x} \rightarrow \ln 3 = 5x \rightarrow \frac{\ln 3}{5} = x_0$

Para obtener la gráfica de la curva $y = 1+5x-e^{5x}$ notamos que $x=0$ es raiz.

$y' = 5-5e^{5x} \Rightarrow$ los extremos salen si $5-5e^{5x} = 0 \rightarrow$
$1 = e^{5x} \rightarrow x=0$. Para saber si es un máximo ó mínimo:

$y'' = -25e^{5x}$ y es siempre $< 0 \Rightarrow x=0$ es un máximo.

Por último veamos sus límites:

$\lim_{x\to+\infty} 1+5x-e^{5x} = -\infty$ pues la exponencial le gana a la recta. $\lim_{x\to-\infty} 1+5x-e^{5x} \sim 1+5x$ pues la exponencial

Ezelrengo para T!

decae rápidamente a cero ⇒ la recta $1+5x$ se convierte en una asíntota oblicua.

Para obtener el área integramos desde $x=0$ hasta $x=\frac{\ln 3}{5}$ ⇒

$$A = \int_0^{\frac{\ln 3}{5}} \left[(1+5x-e^{5x}) - (5x-2) \right] dx =$$

$$= \int (1+\cancel{5x}-e^{5x}-\cancel{5x}+2)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\ln 3}{5}} (3-e^{5x})\, dx = 3x - \frac{e^{5x}}{5} \Big|_0^{\frac{\ln 3}{5}}$$

$$A = \left(3 \cdot \frac{\ln 3}{5} - \frac{e^{5 \cdot \frac{\ln 3}{5}}}{5} \right) - \left(0 - \frac{e^0}{5} \right)$$

$$= \left(\tfrac{3}{5}\ln 3 - \frac{e^{\ln 3}}{5} \right) + \tfrac{1}{5} = \tfrac{3}{5}\ln 3 - \tfrac{3}{5} + \tfrac{1}{5}$$

$$= \tfrac{3}{5}\ln 3 - \tfrac{2}{5} = \tfrac{1}{5}(3\ln 3 - 2)$$

$$A = \tfrac{1}{5}(3\ln 3 - 2)$$

Prob. 7: Considere la función...

Ezelrengo para T!

(a) $f(x) = x\sqrt{3-2x}$ $\rightarrow$ para hallar el dominio pedimos que $3-2x \geqslant 0 \rightarrow 3 \geqslant 2x \rightarrow 3/2 \geqslant x \rightarrow x \leq 3/2$

Luego: Dom: $x \in (-\infty, 3/2]$. Veamos ahora $f'(x)$:

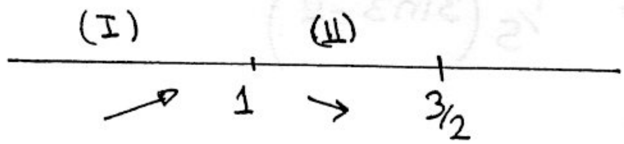
$$f'(x) = \sqrt{3-2x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3-2x}} \cdot (-2)$$

$$f'(x) = \sqrt{3-2x} - \frac{x}{\sqrt{3-2x}}$$

. Buscamos puntos críticos $\Rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow \sqrt{3-2x} - \dfrac{x}{\sqrt{3-2x}} = 0 \rightarrow$

$$\sqrt{3-2x} = \frac{x}{\sqrt{3-2x}} \rightarrow \left(\sqrt{3-2x}\right)^2 = x \rightarrow$$

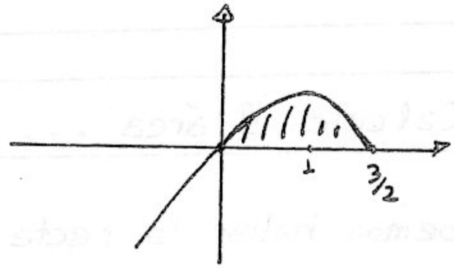
$3-2x = x \rightarrow 3 = 3x \rightarrow \boxed{x=1}$. Ahora hacemos Bolzano con $f'(x)$.



Zona I: $f'(0) = \sqrt{3} > 0 \rightarrow$ crece
Zona II: $f'(1{,}2) = -0{,}77 < 0 \rightarrow$ decrece
Luego $x=1$ es un máximo
Notemos que $x=0$ es raíz y también $x = 3/2 \rightarrow$

Ezelrengo para T!

(b) Con todos los datos anteriores podemos obtener la gráfica de $f(x)$:



El área que buscamos es:

$$A = \int_0^{3/2} x\sqrt{3-2x}\,dx$$ para obtener la primitiva

sustituimos $3-2x = u^2 \rightarrow \frac{3-u^2}{2} = x$

$\rightarrow -\frac{2}{2}u\,du = dx$

$$\int \frac{3-u^2}{2} \cdot \sqrt{u^2} \cdot (-u\,du) =$$

$$\int \frac{3-u^2}{2} \cdot u \cdot (-u\,du) = -\frac{1}{2}\int (3u^2-u^4)\,du =$$

$= -\frac{1}{2}\left(3\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right)$ y ahora retornante a x:

$$= -\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{3-2x}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\sqrt{3-2x}\right)^5\right)$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{3-2x}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\sqrt{3-2x}\right)^5\right)\Big|_0^{3/2}$$

$$A = \left[-\frac{1}{2}\left((\sqrt{0})^3 - \frac{1}{5}(\sqrt{0})^5\right)\right] - \left[-\frac{1}{2}\left((\sqrt{3})^3 - \frac{1}{5}(\sqrt{3})^5\right)\right]$$

Ezelrengo para T!

$$A = -\left[-\tfrac{1}{2}\left((\sqrt{3})^3 - \tfrac{1}{5}(\sqrt{3})^5 \right)\right] = \tfrac{1}{2}\left(5{,}2 - 3{,}12 \right) = 1{,}04.$$

Prob. 8: Calcule el área ...

Primero debemos hallar la recta tangente, la ecuación de esta es: $Y_T = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$f(x_0) = f(-1) = -1 + 1 = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 1 \rightarrow f'(-1) = 3 - 1 = 2 \rightarrow Y_T = 2(x - (-1)) + 0$

$\boxed{Y_T = 2x + 2}$.

Para hallar los puntos de intersección entre Y_T y $f(x)$ igualamos ambas funciones.

$x^3 - x = 2x + 2 \rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$ y esta ecuación tiene como raiz al $x = -1$ (verificalo) $\rightarrow$ factoreamos por "Rufini".

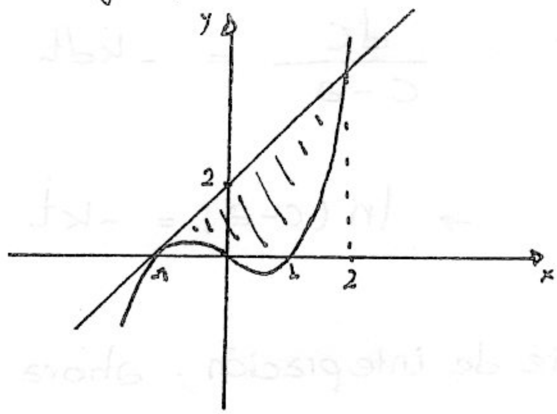
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.(-2)}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

Los únicos encuentros son en $x = -1$ y $x = 2$ (el -1 salio 2 veces).

Ezelrengo para T!

Realicemos un gráfico:



El area la calculamos como:

$$A = \int_{-1}^{2} \left[(2x+2) - (x^3 - x) \right] dx = \int_{-1}^{2} (2x + 2 - x^3 + x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x + 2)\, dx = \left(-\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^4}{4} + \frac{3.2^2}{2} + 2.2 \right) - \left(-\frac{(-1)^4}{4} + \frac{3(-1)^2}{2} + 2(-1) \right) =$$

$$= (-4 + 6 + 4) - (-1/4 + 3/2 - 2) = 6 - (-3/4)$$

$$A = 27/4$$

Prob. 9: La temperatura de un ...

(a) La condición inicial es que $C(0) = C_0$, a pesar de que no conozcamos C_0.

Ezelrengo para T!

La ecuación es de variables separables:

$$\frac{dc}{dt} = -k(c-a) \rightarrow \frac{dc}{c-a} = -k\,dt \rightarrow$$

$$\int \frac{dc}{c-a} = \int -k\,dt \rightarrow \ln(c-a) = -kt + \alpha$$

siendo α la constante de integración; ahora despejamos c:

$$\ln(c-a) = -kt + \alpha \Rightarrow c-a = e^{-kt+\alpha} = e^{-kt}\cdot \underset{\alpha}{\underset{\downarrow}{e^{\alpha}}}$$

(al valor constante e^{α} lo seguimos llamando α)

$$C(t) = a + \alpha e^{-kt}$$, buscamos α con $C(0) = C_0 \Rightarrow$

$$C(0) = a + \alpha e^{-k.0} \rightarrow C_0 = a + \alpha \rightarrow \underline{\alpha = C_0 - a}$$

$$\boxed{C(t) = a + (C_0 - a)e^{-kt}}$$

(b) Buscamos el $\lim\limits_{t\to\infty} C(t) = \lim\limits_{t\to\infty} a + (C_0-a)e^{-kt} =$

$$\lim_{t\to\infty}\left(a + \frac{C_0-a}{e^{kt}}\right) = a + \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{C_0-a}{e^{kt}}}_{0}$$ pues $k > 0$

Entonces: $\boxed{\lim\limits_{t\to\infty} C(t) = a}$ siendo a la temperatura

Ezelrengo para T!

ambiente, entonces cuando $t \to \infty$ (Ha pasado "mucho" tiempo) el cuerpo entra en equilibrio con la temperatura ambiente.

(c) $C_0 = 26°c$, $C(1) = 24°c$; $a = 22°c$ entonces:

$$24° = 22° + (26° - 22°)\, e^{-k \cdot 1h}$$

$$2° = 4°\, e^{-k1} \quad \to \quad \frac{1}{2} = e^{-k} \quad \Rightarrow \ln(1/2) = -k \cdot 1h$$

$$-0{,}69 = -k \cdot 1h \quad \Rightarrow \boxed{k = 0{,}69\ 1/h}$$

Prob. 108 Halle la longitud...

Sabemos que $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}\, dx$ y en este caso $f(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 - 1}\, dt \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow$

$[f'(x)]^2 = x^2 - 1$ y reemplazamos en la integral.

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + x^2 - 1}\, dx = \int_1^3 \sqrt{x^2}\, dx = \int_1^3 |x|\, dx$$

pero en el intervalo $[1, 3]$, $|x| = x \Rightarrow$

Ezelrengo para T!

$$L = \int_1^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

Prob. 11: Considere la curva $y = e^{-x}$... ...

La formula del volumen del solido de revolución alrededor del eje x era:

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx$$; en este caso la integral que tenemos que calcular es:

$$V_n = \int_0^n (e^{-x})^2\,dx = \int_0^n e^{-2x}\,dx = -\frac{e^{-2x}}{2}\Big|_0^n =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2n} - e^{-2.0}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{-2n} - 1\right) \rightarrow$$

$$V_n = -\frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{1}{2}$$; ahora queremos hallar el limite

cuando $n \to \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2n} + \frac{1}{2}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\cdot\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{1}{e^{2n}}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Luego $\boxed{\lim_{n\to\infty} V_n = 1/2}$

Prob. 12: Encuentre una función ...

Ezelrengo para T!

Queremos descubrir una función $f(x)$ tal que:

$f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$, esto es lo que se llama una ecuación "integral", para resolverla vamos a "derivar" ambos miembros y obtener una ecuación "diferencial".

$$(f(x))' = \left(1 + \frac{1}{x}\cdot\int_1^x f(x)dt\right)'$$

$$f'(x) = 0 + \left(\frac{1}{x}\right)'\int_1^x f(t)dt + \frac{1}{x}\left(\int_1^x f(t)dt\right)'$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)dt + \frac{1}{x}f(x)$$

↓ uso la definición de f.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)dt + \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt\right)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)dt + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)dt$$

El 1º y 3º termino del 2º miembro de la ecuación se simplifican ⇒ queda: $\left\{ f'(x) = \frac{1}{x} \right\}$ ⇒ una función tal que su derivada sea $1/x$ es el $\ln x + C$ ⇒

$f(x) = \ln x + C$, para descubrir C tenemos la siguiente identidad: $\ln x + C = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$ valida

Ezelrengo para T!

para todo x (No es otra cosa que igualar la f que encontramos con la que nos dan). Como es valida para todo x lo es en particular para $x = 1 \Rightarrow$

$$\ln 1 + c = 1 + \frac{1}{1}\underbrace{\int_1^1 f(t)dt}_{0}$$

0 (por eso elegi $x=1$)

pues si $F(t)$ es una primitiva de $f(t) \Rightarrow$

$$\int_1^1 f(t)dt = F(t)\Big|_1^1 = F(1) - F(1) = 0$$

$\Rightarrow \ln 1 + c = 1 \Rightarrow 0 + c = 1 \Rightarrow \underline{c = 1}$

finalmente: $\boxed{f(x) = \ln x + 1}$

Prob. 13: Resuelva la ecuación...

Reescribimos la ecuación como: $x \cdot \frac{dy}{dx} + (1-x)y = 0 \Rightarrow$

$x \frac{dy}{dx} = (x-1)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{(x-1)}{x}dx$ y ahora integro:

$\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{x-1}{x}\right)dx \Rightarrow \ln y + k = \int (1 - 1/x)dx \Rightarrow$

$\ln y + k = x - \ln x + C \Rightarrow \ln y = x - \ln x + \underbrace{C - k}_{C'} \Rightarrow$

$\ln y = x - \ln x + C' \Rightarrow y = e^{x - \ln x + C'}$; separando:

Ezelrengo para T!

$$\rightarrow Y(x) = e^x \cdot e^{-\ln x} \cdot \underbrace{e^{c'}}_{C} = Ce^x \cdot e^{\ln x^{-1}} = Ce^x \cdot x^{-1}$$

$Y(x) = C\,\dfrac{e^x}{x}$; para hallar C usamos que: $Y(0) = 2$

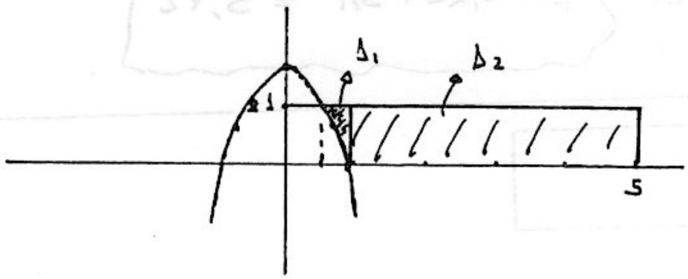
$2 = C \cdot \dfrac{e^0}{0}$ $\Big\}$ "$\Delta C \Delta$" vemos que x no puede ser "cero" $\Rightarrow$

esta mal elejida la condición inicial. Se debería elejir

(Por ejemplo) $Y(1) = 2 \Rightarrow 2 = C \cdot \dfrac{e^1}{1} \Rightarrow 2 = C \cdot e \rightarrow C = 2/e$

Con lo cual $\boxed{Y(x) = \dfrac{2}{e}\,\dfrac{e^x}{x}}$.

Prob. 14: El rectángulo de vértices...



Las raices de la parabola son: $-x^2 + \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow$

$\frac{5}{3} = x^2 \rightarrow \pm\sqrt{5/3} = x \rightarrow \underline{x = \pm\sqrt{5/3}}$

Y la intersección de la parabola con la curva $Y = 1$ se obtiene como:

$-x^2 + 5/3 = 1 \rightarrow 5/3 - 1 = x^2 \rightarrow 2/3 = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2/3}$

para calcular A_1 hacemos: $\displaystyle\int_{\sqrt{2/3}}^{\sqrt{5/3}} \left[1 - (-x^2 + 5/3)\right] dx$; evaluamos

Ezelrengo para T!

la integral entre la intersección y la raíz:

$$A_1 = \int_{\sqrt{2/3}}^{\sqrt{5/3}} (1 + x^2 - 5/3)\,dx = \int_{\sqrt{2/3}}^{\sqrt{5/3}} (-2/3 + x^2)\,dx =$$

$$= -2/3\,x + \frac{x^3}{3}\Bigg|_{\sqrt{2/3}}^{\sqrt{5/3}} = \left(-2/3\sqrt{5/3} + \frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{5/3}\right)^3\right) -$$

$$- \left(-2/3\sqrt{2/3} + 1/3\left(\sqrt{2/3}\right)^3\right) \cong (-0{,}86 + 0{,}72) - (-0{,}54 + 0{,}18)$$

$$= (-0{,}14) - (-0{,}36) = -0{,}14 + 0{,}36 = 0{,}22.$$

Para hallar A_2 que es un rectángulo con altura 1 y base $(5 - \sqrt{5/3})$ hacemos: $A_2 = (5 - \sqrt{5/3}).1 \approx 3{,}7$.

Luego el area total es: $\boxed{A \cong 0{,}22 + 3{,}7 \cong 3{,}92}$.

Prob. 15:
Halle el área ...

Examinemos donde $f(x)$ alcanza su máximo absoluto:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow 1 = x$$

para confirmar que es un máximo buscamos $f''(x)$:

$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) - 1e^{-x} = e^{-x}(-1 + x - 1) = e^{-x}(x-2)$$

$\Rightarrow f''(1) = e^{-1}(1-2) = -e^{-1} = -1/e < 0 \Rightarrow$ corresponde a un máximo.

Ezelrengo para T!

El área entonces a calcular se halla entre las rectas $x=0$ y $x=1$. En este intervalo $f(x)$ es positiva $\Rightarrow$

$$A=\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$$; La primitiva la obtenemos por partes

$$\left.\begin{array}{l} u=x \rightarrow du=dx \\ dv=e^{-x} \rightarrow v=-e^{-x} \end{array}\right\} \int x e^{-x}dx = -xe^{-x}+\int e^{-x}dx$$

$$= -xe^{-x}-e^{-x} = -e^{-x}(x+1)$$

$$\Rightarrow A = -e^{-x}(x+1)\Big|_0^1 = -e^{-1}(1+1)-\left(-e^{-0}(0+1)\right) =$$

$$= -\frac{2}{e}+1 = 1-2/e > 0$$

Luego $\boxed{A = 1-2/e}$

$\boxed{\text{Prob. 16: Calcule el área...}}$

Busquemos primero la recta tangente a la curva que pasa por el origen.

$$Y_T = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \rightarrow \begin{array}{l} f(x)=\ln x \\ f'(x)=1/x \end{array}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x_0)=\ln x_0 \\ f'(x_0)=1/x_0 \end{array}\right\}$$ $Y_T = 1/x_0\,(x-x_0)+\ln x_0$, para descubrir quien es x_0 usamos el dato que Y_T

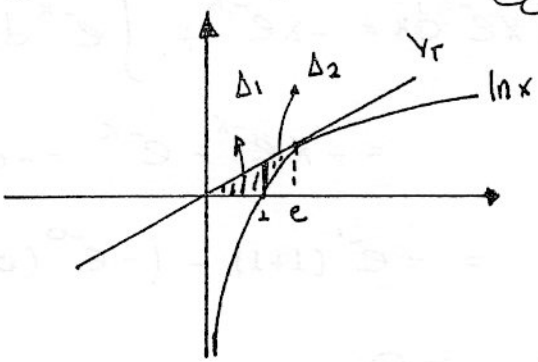
Ezelrengo para T!

pasa por el origen: $\Rightarrow\ 0 = \frac{1}{x_0}(0-x_0) + \ln x_0 \ \rightarrow$

$0 = \frac{1}{x_0}(-x_0) + \ln x_0 \ \rightarrow \ 0 = -1 + \ln x_0 \ \rightarrow \ 1 = \ln x_0 \ \rightarrow$

$\boxed{x_0 = e} \Rightarrow$ la curva tangente queda: $y_T = \frac{1}{e}(x-e)+1$

$y_T = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}\cdot e + 1 = \frac{1}{e}x \ \rightarrow \ \boxed{y_T = \frac{1}{e}x}$



La intersección la encontramos como: $\ln x = \frac{1}{e}x$

que se verifica para $x = e$.

Para hallar $\Delta_1 = \int_0^1 \frac{x}{e}\,dx = \left.\frac{x^2}{2e}\right|_0^1 = \frac{1}{2e}$.

y ahora $\Delta_2 = \int_1^e \left(\frac{x}{e} - \ln x\right)dx = \left.\frac{x^2}{2e}\right|_1^e - \int_1^e \ln x\,dx$

$= \left.\frac{x^2}{2e}\right|_1^e - \left.(-x + x\ln x)\right|_1^e$ pues $\int \ln x\,dx = -x + x\ln x$

$= \frac{e^2}{2e} - \frac{1}{2e} - \left\{-e + e\ln e - (-1 + \ln 1)\right\}$

$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} + e - e\ln e + (-1) + \cancel{\ln 1}$

$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} + e - e + (-1) = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} - 1$

Ezelrengo para T!

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{1}{2e} + \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} - 1 = \overbrace{\left(-\frac{1}{2e} + \frac{1}{2e}\right)}^{0} + e/2 - 1$$

Prob. 17 : Un sólido de revolución ...

El volumen es entonces una función de a "$V(a) = a^2+a$"

para calcular $V(a)$ se realizo la siguiente integral:

$V(a) = \pi \int_0^a f^2(x)\,dx$, podemos obtener $V'(a)$ de ambas ex-

preciones: $V'(a) = (a^2+a)' = \left(\pi \int_0^a f^2(x)\,dx\right)'$

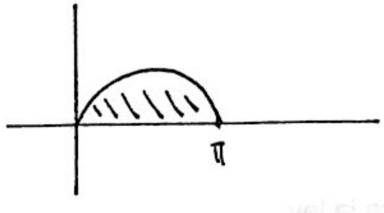
$$V'(a) = 2a+1 = \pi\, f^2(a) \Rightarrow f^2(a) = \frac{2a+1}{\pi} \rightarrow$$

$|f(a)| = \sqrt{\frac{2a+1}{\pi}}$ y como f es positiva $\Rightarrow$

$f(a) = \sqrt{\frac{2a+1}{\pi}}$ para cada a $\Rightarrow$ $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{\pi}}$

Prob. 18 : Halle el valor de ...

El area comprendida entre 0 y π es:



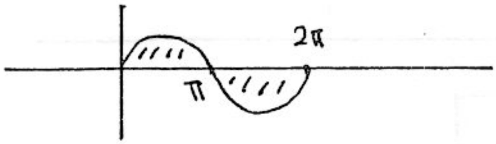
$$\Delta = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x \Big|_0^\pi$$

$$= -\left(\cos\pi - \cos 0\right)$$

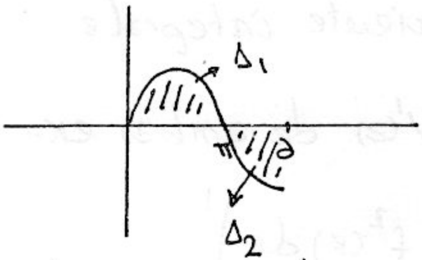
$$= -(-1-1) = 2$$

Ezelrengo para T!

El área entre 0 y 2π será el doble: 4



Como el área nuestra vale $5/2$ (esta entre 2 y 4), entonces el valor a debe pertenecer al intervalo $(\pi, 2\pi)$



$$A = A_1 + A_2$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$5/2 = 2 + A_2$$

$$y \quad A_2 = \left| \int_{\pi}^{a} \operatorname{Sen} x \, dx \right| = + \operatorname{Cos} x \Big|_{\pi}^{a} = - \operatorname{Cos} x \Big|_{a}^{\pi}$$

$$= - \operatorname{Cos} \pi + \operatorname{Cos} a = +1 + \operatorname{Cos} a$$

Entonces $5/2 = 2 + 1 + \operatorname{Cos} a \rightarrow 5/2 = 3 + \operatorname{Cos} a \rightarrow$

$-\operatorname{Cos} a = 3 - 5/2 = +1/2 \rightarrow \operatorname{Cos} a = -1/2 \rightarrow a = \frac{2}{3}\pi$

FIN TP10

© De desarrollo y soluciones.
Queda hecho el depósito que marca la ley.
Prohibida su reproducción total o parcial.

Ezelrengo para T!