

## Práctica 2 - Números Reales

### Ejercicio 1

Se deja como ejercicio al lector ya que sólo hay que ordenar los numeritos.



## Ejercicio 2

(a)

$$(-1, +\infty)$$

(b)

(c)

$$(-\infty, 2]$$

(d)

$$|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-3, 3)$$

(e)

$$\Leftrightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < 4 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 4)$$

(f)

$$(-3, 3]$$

(g)

$$\Leftrightarrow \left( x > 0 \text{ y } x > \frac{3}{2} \right) \vee \left( x < 0 \text{ y } 2x - 3 < 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left( x > 0 \text{ y } x > \frac{3}{2} \right) \vee \left( x < 0 \text{ y } x < \frac{3}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left( -\frac{3}{2}, +\infty \right) \cup (-\infty, 0)$$

(h)

$$\Leftrightarrow x^2 < 36 \Leftrightarrow |x| < 6 \Leftrightarrow x \in (-6, 6)$$

(i)

$$\Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x < 0 \text{ y } x^2 - 1 > 0)$$

$$\text{ó } (x > 0 \text{ y } x^2 - 1 < 0)$$

$$\Leftrightarrow (x < 0 \text{ y } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)) \text{ ó } (x > 0 \text{ y } x \in (-1, 1))$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1)$$

$$\text{ó } x \in (0, 1)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

$$\cup (-\infty, 0)$$

(j)

Tenemos que analizar dos casos por separado.

Si  $x > 0$ :

No cambia la desigualdad en el último paso pues en este caso  $x > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1$$

Si  $x < 0$ :

cambia la desigualdad en el último paso pues en este caso  $x < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x > 1$$

Como ven el último paso nos da un absurdo en este caso, porque suponemos  $x < 0$  y llegamos a que tendría que ser  $x > 1$ . Por lo tanto este caso no aporta nada a la solución.

Así: Debe ser  $x \in (-3, 3)$ .

(k)

Tenemos que analizar dos casos por separado.

Si  $x > 0$ :

Lo que se hizo es multiplicar ambos lados por  $x$ . Nos da una tautología en este caso.

$$\Leftrightarrow 1 < 4$$

Si  $x < 0$ :

$$\Leftrightarrow 1 > 4$$

Lo que se hizo es multiplicar ambos lados por  $x$ . Como ven aquí nos queda un ¡¡ABS!!

Así: Debe ser  $x \in (0, +\infty)$ .

(l)

$$\Leftrightarrow x \in (-3, 3)$$

(m)

$$\Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5 \Leftrightarrow x \in (-1, 5)$$

(n)

$$\Leftrightarrow -3 < x + 2 < 3 \Leftrightarrow -5 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-5, 1)$$

(ñ)

$$\Leftrightarrow x > 3 \vee x < -3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$$

## Ejercicio 3

(a)

Para hacer este ejercicio hay varios caminos.

**Camino 1:** Pueden hacer un dibujo marcando los dos intervalos. Si la operación es  $\cap$  entonces deben *rayar* lo que se comparta. Si en cambio la operación es  $\cup$  deben quedarse con todo lo dibujado. Creo que el dibujo que presentamos a continuación habla mejor que las palabras:



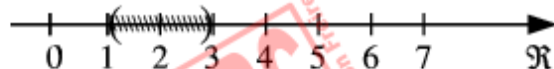
**Camino 2:** Pueden operar *algebraicamente* hasta llegar al resultado y luego dibujar. Es lo que se ha hecho en (b) a continuación.

(b)



(c)

Si observan bien,  $x < 3$  y  $x > 1$  corresponde a  $1 < x < 3 = (1, 3)$ . Entonces  $(-\infty, 3) \cap (1, +\infty) = (1, 3)$ .

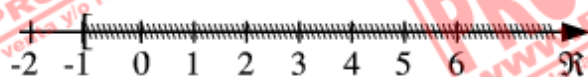


(d)

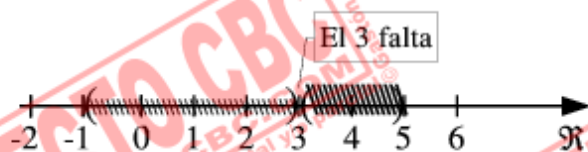
Observemos que de nuevo  $-1 < x < 3$  y  $x \geq 3$  es un imposible. Entonces  $(-1, 3) \cap [3, +\infty) = \emptyset$ .

(e)

Aquí no hay problema pues  $-1 < x < 3$  ó  $x \geq 3 \Leftrightarrow x \in (-1, +\infty)$ .



(f)



## Ejercicio 4

Los conjuntos de este ejercicio son *discretos*, es decir no se representan en forma *continua* en la recta real. Valga decir mas específicamente que nuestros conjuntos están formados por *puntitos aislados*.

(a) y (b)



(c)

Cuadro 2: (c)

El conjunto queda:

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \right\}$$

(d)



## Ejercicio 5

Haremos la demostración por el absurdo. Supongamos que  $\sqrt{3}$  fuera un número racional.

$$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{N} \text{ y } \exists q \in \mathbb{N} / \sqrt{3} = \frac{p}{q}$$

,donde  $p$  y  $q$  se han elegido de modo que la fracción  $\frac{p}{q}$  quede expresada en su forma irreducible<sup>10</sup>.

$$\Rightarrow 3 = \frac{p^2}{q^2} \text{ y además } 3 \nmid p \text{ ó } 3 \nmid q \text{ (por ser la fracción irreducible)} \quad (6)$$

Aclaremos que el símbolo “|” significa “divide a” en matemáticas, mientras que el símbolo “ $\nmid$ ” significa “no divide a”, de forma tal que la ecuación 6 dice que 3 puede expresarse como cociente de los cuadrados de dos números naturales  $p$  y  $q$  coprimos, de modo que 3 no divide a  $p$  y a la vez 3 no divide a  $q$ <sup>11</sup>.

Ahora  $p^2 = 3q^2 \Rightarrow 3|p^2 \Rightarrow 3|p$ , pues es claro que si 3 divide al cuadrado de  $p$  entonces también tiene que dividir a  $p$  sin haber sido elevado al cuadrado. ¡Compruébenlo!

Como  $3|p$  y sabemos que alguno de los dos no puede ser divisible por 3:

$$\Rightarrow 3 \nmid q \quad (7)$$

Ahora, como:

$$3|p \Rightarrow p = 3t \text{ para algún } t \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 3q^2 = p^2 = (3t)^2 = 9t^2$$

$$\Rightarrow q^2 = 3t^2$$

$$\Rightarrow 3|q^2$$

$$\Rightarrow 3|q$$

¡ABS! pues el último paso contradice (?? en la página ??).

**Luego:**  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ , como se quería probar. ■

<sup>10</sup>Se dice que una fracción  $\frac{p}{q}$  está expresada en su forma irreducible si  $p$  y  $q$  no comparten ningún factor, lo que se suele expresar diciendo que  $p$  es coprimo con  $q$ . Por ejemplo la fracción  $\frac{3}{5}$  está expresada en forma irreducible, mientras que  $\frac{2}{4}$  no. La forma de expresar a la anterior para que quede irreducible es  $\frac{1}{2}$ . Es claro que simplificando las veces que sea necesario, cualquier fracción puede ser llevada a la forma irreducible.

<sup>11</sup>A medida que se acostumbren a la notación matemática van a empezar a notar las ventajas de utilizar la misma en lugar de escribir sus significados con palabras. Por eso, sería conveniente que se aprendan la TABLA DE SÍMBOLOS que se encuentra ?? en la página ??.

## Ejercicio 6

Aclaremos algo previamente:  $\pi \approx 3,141592 < \pi$ , es una aproximación por *defecto* de  $\pi$ . Las aproximaciones se dicen por *defecto* cuando son mas chicas que el número que se desea aproximar; y se dicen por *exceso* cuando son mas grandes que el número que se desea aproximar.

(a)

$$3,14 < 3,141 < \pi \\ \in \mathbb{Q}$$

(b)

$$\begin{aligned} \pi - 0,001 &= 3,140592 \dots < \pi \\ \pi - 0,001 &= 3,140592 \dots > 3,14 \\ \Rightarrow 3,14 &< \pi - 0,001 < \pi \end{aligned}$$

Nos falta comprobar que  $\pi - 0,001 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . En realidad veremos algo mas general, veremos que si  $x \notin \mathbb{Q}$  entonces  $\forall y \in \mathbb{Q} x - y \notin \mathbb{Q}$ . En efecto, si  $\exists z \in \mathbb{Q}$  tal que  $x - y = z \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow x = y + z \in \mathbb{Q} \text{ ¡¡¡ABS!!!}$$

Entonces, como  $\pi \notin \mathbb{Q}$  y  $0,001 \in \mathbb{Q}$ , debe ser  $\pi - 0,001 \notin \mathbb{Q}$ .

■

## Ejercicio 7

(A)

**Nota** Este es uno de esos ejercicios que requieren poner a funcionar la maquinaria del axioma del supremo. No se asusten al echar un vistazo a lo que sigue, al principio cuesta trabajo acostumbrarse al tipo de argumentación que haremos a continuación, pero es fundamental para comprender bien estas cuestiones. Traten que la *intuición* los guíe hacia el camino de la *demonstración*. Es absolutamente fundamental tener la visión sencilla de lo que está pasando, pero también es igualmente importante que sepan trasladar esa intuición al marco de las demostraciones, sino es lo mismo que nada.

Observemos que  $n \geq 1 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1$  es cota superior de  $A$ . Como  $1 \in A \Rightarrow$  automáticamente  $1 = \max(A) = \sup(A)$ . Notemos que el  $\sup(A)$  coincide con el  $\max(A)$  debido a que 1 es un elemento de  $A$ .

Además  $\forall n \in \mathbb{N}$ , si  $n > 0 \Rightarrow \frac{1}{n} > 0$  ya que el inverso multiplicativo de cualquier número positivo es a su vez un número positivo. Pero entonces 0 es una cota inferior para  $A$ .

En realidad  $0 = \inf(A)$ , pero establecer esto es un poco más delicado. Si bien *intuitivamente* esto es algo muy visible ya que uno *ve* que a medida que toma valores de  $n$  grandes, entonces  $\frac{1}{n}$  se va haciendo cada vez más pequeño, lo que se pretende es que se haga una demostración de este hecho, utilizando las importantes nociones que se introducen en esta práctica.

Veamos como se hace esto:

Tenemos que demostrar que  $0 = \inf(A)$ . Según la definición de ínfimo que seguramente habrán visto en clase y sus equivalencias, esto se hace probando que  $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A / 0 \leq a < 0 + \varepsilon$ . Como  $a$  es un elemento de  $A$  entonces tiene que ser de la forma  $a = \frac{1}{n}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Veamos un dibujo para clarificar la idea, observen la figura ( 52).

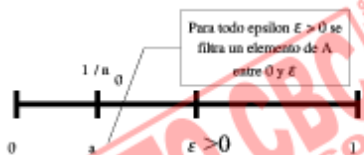


Figura 52:

Para  $\frac{1}{\varepsilon} > 0$  por ARQUIMEDIANIDAD  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ . Pero entonces basta tomar  $a = \frac{1}{n_0} \in A$  para que se verifique  $0 \leq a < 0 + \varepsilon$ .

(B)

Veamos primero que  $\frac{1}{2}$  es cota inferior.

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow n+1 \leq 2n \Leftrightarrow n \geq 1$$

Como esto último es cierto, entonces efectivamente  $\frac{1}{2}$  es cota superior de  $B$ . Como  $\frac{1}{2} \in B$  entonces también es un mínimo. Observemos que al ser *mínimo* también es un ínfimo. Lo que no vale en general es que ser ínfimo implica ser mínimo, como el alumno podrá comprobar pensando por ejemplo en un intervalo abierto acotado.

Veamos ahora que 1 es cota superior de  $B$ .

$$1 \geq \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow n+1 \geq n$$

Y esto último es trivialmente cierto — cualquier número natural es mas chico del que le sigue.

Nos resta ver que  $1 = \sup(B)$ .

Quiero ver que  $\forall \varepsilon > 0 \exists b \in B / 1 - \varepsilon < b \leq 1$ . Pueden consultar la figura ( 53) para ver la idea.

Figura 53:

Para todo  $\varepsilon > 0$  se filtra un elemento de  $B$  entre  $(1-\varepsilon)$  y  $\varepsilon$



$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} &= \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \\ &\Leftrightarrow -\varepsilon < -\frac{1}{n+1} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{n+1} \\ &\Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Así: Basta tomar  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$  — que existe por arquimedianidad de  $\mathbb{R}$ —, hacemos  $b = \frac{n_0}{n_0+1}$  y valdrá automáticamente que  $1 - \varepsilon < b$ , con lo que hemos probado que  $1 = \sup(B)$ .

Es fácil ver que  $1 \notin B$  pues:

$$1 \in B \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} / 1 = \frac{n}{n+1} \Leftrightarrow n+1 = n \Leftrightarrow 0 = 1 \quad \text{¡¡¡ABS!!!}$$

Por lo tanto, 1 no es máximo de  $B$ .

**Así:**  $B$  tiene un ínfimo que es a la vez un mínimo, pero su supremo no es un máximo.

(C)

$$\inf(C) = 0 \leftarrow \text{no es mínimo pues } 0 \notin C$$

$$\sup(C) = 7 \leftarrow \text{no es máximo pues } 7 \notin C$$

(D)

No es acotado superiormente. Si lo es inferiormente. De hecho  $1 = \inf(\mathbb{N}) = \min(\mathbb{N})$ .

(E)

Veamos que 0 es cota inferior de  $E$ , pues entonces como  $0 \in E$  sería  $0 = \min(E)$ .

Sin embargo  $E$  no es acotado superiormente.

$$n - \frac{1}{n^2} \geq n - 1 > M \quad \forall n > M - 1$$

**Así:** dado  $M > 0$  basta tomar  $n = [M] + 1$  para que  $n - \frac{1}{n^2} > M$ . Entonces  $E$  no resulta acotado superiormente.

(F)

Es un conjunto finito. Su  $\min(F) = 1$  y  $\max(F) = 4$ .

(G)

Observen que:

$$G = \left\{ 6 - \frac{1}{10^n} : n \in \mathbb{N}_* \right\}$$

$$10^n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{10^n} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{10^n} \geq -1 \Rightarrow 6 - \frac{1}{10^n} \geq 5$$

Así: 5 es cota inferior de  $G$  y  $5 \in G$ , con lo que  $5 = \min(G)$ .Como  $6 - \frac{1}{10^n} \leq 6 \Rightarrow 6$  es cota superior de  $G$ . Veamos ahora que en realidad es el supremo.Dado  $\varepsilon > 0$ : Existe por arquimedianidad  $n \in \mathbb{N} / n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Entonces es inmediato que  $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ . Como

$$\forall n \in \mathbb{N} \ 10^n > n \Rightarrow$$

 $\Rightarrow$ 

$$\frac{1}{10^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\exists n \in \mathbb{N} / \frac{1}{10^n} < \varepsilon (\forall \varepsilon > 0)$$

 $\Rightarrow$ 

$$-\frac{1}{10^n} > -\varepsilon (\forall \varepsilon > 0)$$

 $\Rightarrow$ 

$$6 - \frac{1}{10^n} > 6 - \varepsilon (\forall \varepsilon > 0)$$

 $\Leftrightarrow$ 

$$6 = \sup(G) (\forall \varepsilon > 0)$$

(H)

 $H = (1, 3)$ . Se procede como en (C). Ver en la página 110.

(I)

 $I = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ . No es acotado ni superiormente ni inferiormente. ■

**Ejercicio 8**

Ver la resolución del ejercicio (7), punto (B) en la página 110. Ahí está todo hecho con lujo de detalles.

En realidad está mas completo, ya que se demostró que  $\sup(B)=1$ .

## Ejercicio 9

(a)

$$\frac{2n-1}{n+2} \leq 2 \Leftrightarrow 2n-1 \leq 2n+4 \Leftrightarrow -1 \leq -4$$

Como la proposición que está al final de la cadena de si y sólo si es verdadera, entonces todas las proposiciones en la cadena resultan también verdaderas. En particular la primera.

Así: 2 es cota superior de P.

(b)

Tengamos presente que  $1,99 = 2 - \varepsilon$  con  $\varepsilon = 0,01$ .

$$\begin{aligned} 1,99 < p = \frac{2n-1}{n+2} &\Leftrightarrow & 2 - \varepsilon < \frac{2n-1}{n+2} \\ &\Leftrightarrow & 2n+4 - \varepsilon(n+2) < 2n-1 \\ &\Leftrightarrow & -\varepsilon(n+2) < -5 \\ &\Leftrightarrow & \varepsilon(n+2) > 5 \\ &\Leftrightarrow & n+2 > \frac{5}{\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow & n > \frac{5}{\varepsilon} - 2 \end{aligned}$$

Observen que el camino elegido a simple vista parece *rebuscado*, pero tiene la ventaja de que no nos ata al 1,99. Para cualquier número  $t < 2$  que yo escriba como  $t = 2 - \varepsilon$ , siempre teniendo en mente que para nosotros  $\varepsilon > 0$  será un número *pequeño*, ya sabemos que cualquier:  $n > \frac{5}{\varepsilon} - 2$  sirve para que el número  $p = \frac{2n-1}{n+2}$  sea mayor que  $t$ .

Entonces una *buena*, por no decir *óptima* elección de “ $p$ ” sería por ejemplo<sup>12</sup>:

$$n = \left[ \frac{5}{\varepsilon} \right]$$

Veamos como se usa esto para responder las preguntas del ejercicio.

$$1,99 = 2 - 0,01 \Rightarrow \text{tomo } n = \frac{5}{0,01} = 500$$

<sup>12</sup>En este caso los corchetes significan “Parte entera de lo que está adentro”.

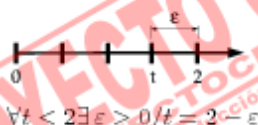
Vemos haciendo la cuenta que  $\frac{2 \cdot 500 - 1}{500 + 1} = \frac{999}{501} \approx 1,990039 > 1,99$ .

Si comprendieron esto están un paso mas cerca de entender el concepto de SUPREMO e ÍNFINO.

(c)

Aprovechando el trabajo hecho en el ejercicio (b) en la página anterior, como  $t < 2 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 / t = 2 - \varepsilon$ . Ver dibujo (54).

Figura 54:



En el punto anterior vimos que si tomo:

$$n = \left[ \frac{5}{\varepsilon} \right]$$

entonces vale que:

$$p = \frac{2n - 1}{n + 2} > t$$

■

## Ejercicio 10

$$\text{Si } n = 1001 \rightarrow \frac{1}{n} = 0,000999 < 0,001$$

$$\text{Si } x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \text{ también.}$$

Por arquimedianidad de  $\mathbb{R}$  sabemos que:

$$\exists n \in \mathbb{N} / n > \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{n} < x$$

,que es lo que se quería demostrar.

■

## Ejercicio 11

Para este ejercicio hay que tener muy presente que  $A \subseteq B$ . Es decir que  $\forall a \in A, a \in B$ .

Si  $c \in \mathbb{R}$  es cota inferior de  $B \Rightarrow c \leq b \forall b \in B \Rightarrow c \leq a \forall a \in A$ , (pues  $a \in B$  también). Pero entonces  $c$  es cota inferior de  $A$ .

Por lo tanto:

$$\{\text{Cotas para } A\} \supseteq \{\text{Cotas para } B\}$$

$$\Rightarrow \inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$$

Veamos un ejemplo donde  $\sup(A) = \sup(B)$  :

$$A = (1, 2) \text{ y } B = (0, 2)$$

Veamos un ejemplo donde  $\sup(A) < \sup(B)$ :

$$A = (1, 2) \text{ y } B = (0, 3)$$

■

## Ejercicio 12

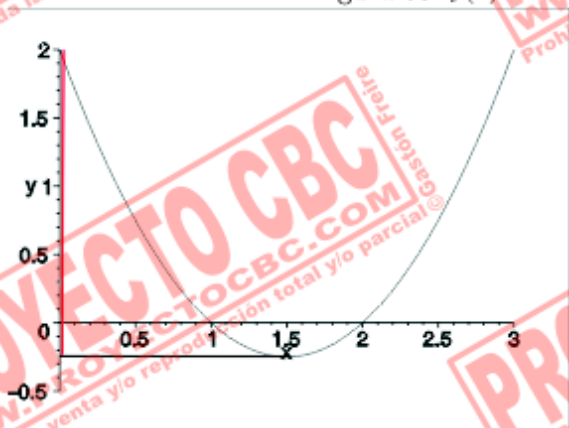
(a)

En este caso  $A$  es el conjunto de negatividad de la parábola. Como  $a = 1 > 0 \Rightarrow$  la parábola es cóncava hacia arriba y su conjunto de negatividad es  $(r_1, r_2)$ , donde  $r_1$  y  $r_2$  son las raíces de la misma.

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2) \Rightarrow r_1 = 1 \text{ y } r_2 = 2$$

Así:  $A = (1, 2)$ ,  $\inf(A) = 1$  y  $\sup(A) = 2$  Claramente  $A$  no tiene máximo ni mínimo.

(b)

Figura 55:  $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$ 

$f(x)$  tiene un mínimo en  $x = \frac{3}{2}$  cuyo valor mínimo es  $f(\frac{3}{2}) = -0,25$ ;  $f(0) = 2$ . Remarcado en el eje Y está señalado el conjunto  $B$ .

En el gráfico ( 55) se encuentra una representación gráfica del conjunto  $B$ . En ella se puede apreciar que si  $x \in (0, 2) \rightarrow y \in (-0,25, 2)$ .

Así:  $B = (-0,25, 2)$ ,  $\inf(B) = -0,25$  y  $\sup(B) = 2$ . Claramente  $B$  no tiene máximo ni mínimo.

(c)

$C$  es la imagen de la parábola de la figura 55.

Así:  $C = [-0,25, +\infty]$ ,  $\inf(C) = \min(C) = -0,25$ .

■