Práctica 3 - Sucesiones

Ejercicio 1

(a)

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad a_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad a_4 = \frac{2}{5} \qquad a_5 = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

(b)

$$b_1 = 1 \quad b_2 = \frac{2}{3^2} \quad b_3 = \frac{2^2}{5^3} \quad b_4 = \frac{2^3}{7^3} \quad b_5 = \frac{2^4}{9^3}$$

(c)

$$c_1 = 1 \quad c_2 = -\frac{1}{4} \qquad c_3 = \frac{1}{6} \quad c_4 = -\frac{1}{24} \qquad c_5 = \frac{1}{120}$$

Recordemos que $(\forall n \in \mathbb{N})$ se define $n!$ como:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Por ejemplo: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

(d)

$$d_1 = \frac{\cos(\pi)}{1} = -1$$
$$d_2 = \frac{\cos(2\pi)}{2} = \frac{1}{2}$$
$$d_3 = \frac{\cos(3\pi)}{3} = -\frac{1}{3}$$
$$d_4 = \frac{\cos(4\pi)}{4} = \frac{1}{4}$$
$$d_5 = \frac{\cos(5\pi)}{5} = -\frac{1}{5}$$

■

Ejercicio 2

(i)

$a_n = n$; $a_{100} = 100$; $a_{200} = 200$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(ii)

$a_n = -\frac{1}{n}$; $a_{100} = -\frac{1}{100}$; $a_{200} = -\frac{1}{200}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(iii)

$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; $a_{100} = -\frac{1}{100}$; $a_{200} = -\frac{1}{200}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(iv)

$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$; $a_{100} = -\frac{1}{2^{100}}$; $a_{200} = -\frac{1}{2^{200}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(v)

$a_n = (-1)^n \cdot n$; $a_{100} = 100$; $a_{200} = -200$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (A SECAS).

Infinito A SECAS es un término que se utiliza para referirse a aquellas sucesiones que divergen a infinito, pero que lo hacen alternando entre números positivos y negativos. Un ejemplo sería:

$$a_n = 1; -10; 100; -1000; 10000; -100000; 1000000; \cdots etc \cdots$$

(vi)

El término general de esta sucesión es complicado de hallar, pero con inventiva sale. Primero necesitamos algo que alterne entre 0 y 1. Eso no es problema pues:

$$b_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$$

sirve. Observen que inteligentemente hemos elegido una expresión que alterne entre 1 y -1; al sumarle 1 logramos que alterne entre 2 y 0; y por ultimo al dividir todo por 2 logramos lo que queríamos.

Ahora necesitamos una sucesión c_n que en los términos *pares* sea igual a $\frac{1}{n}$. Realmente lo que le ocurra a los términos impares de c_n poco nos importa, ya que para armar a_n solo utilizaremos de c_n sus términos pares. Bien puede ser:

$$c_n = \frac{1}{\frac{n}{2}+1} = \frac{2}{n+2}$$

, pues c_n : $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{1}{4}$; $\cdots etc \cdots$. Los términos impares claramente no me importan.

Ahora simplemente armamos a_n como sigue:

$$a_n = b_n \cdot c_n = \frac{1+(-1)^n}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{n+2} = \frac{1+(-1)^n}{n+2}$$

De esta manera, la sucesión que buscamos y lo que nos pide el ejercicio queda así:

$a_n = \frac{1+(-1)^n}{n+2}$; $a_{100} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{51}{\cancel{102}}} = \frac{1}{51}$; $a_{200} =$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(vii)

$a_n = (-1)^{n+1}$; $a_{100} = -1$; $a_{200} = -1$

A diferencia de las otras, esta sucesión no puede ser convergente ya que sus términos alternan entre -1 y 1.

(viii)

$a_n = \frac{n+1}{n}$; $a_{100} = \frac{101}{100}$; $a_{200} = \frac{201}{200}$

La sucesión es convergente, quedando $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(ix)

El término general de esta sucesión es complicado de hallar, pero con inventiva sale. Primero necesitamos una sucesión que en los términos impares nos de la secuencia: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \cdots etc \cdots$. Los términos pares necesitaré que valgan cero. Una posibilidad es:

$$b_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n+1}:\ 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, etc \cdots$$

sirve. Observen que inteligentemente hemos elegido una expresión que alterne entre 1 y -1; al sumarle 1 logramos que alterne entre 2 y 0; y por ultimo al dividir todo por $n+1$ logramos lo que queríamos.

Ahora necesitamos una sucesión c_n que en los términos *pares* nos de la secuencia $1, 2, 3, 4, 5, etc \cdots$ y en los impares valga 0. Bien puede ser:

$$c_n = \frac{(-1)^n + 1}{2} \cdot \frac{n}{2} : \ 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, etc \cdots$$

Observen que si sumamos las dos anteriores obtenemos una que presenta con exactitud las características que nos pide el enunciado.

$$a_n = b_n + c_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^n + 1}{2} \cdot \frac{n}{2}$$

De esta manera, la sucesión que buscamos y lo que nos pide el ejercicio queda así:

$$a_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^n + 1}{2} \cdot \frac{n}{2}$$

$a_{100} = 50$; $a_{200} = 100$

Esta sucesión no resulta ser convergente ya que los términos pares divergen mientras que los impares tienden a 0.

(x)

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2a_1 = 2 \\ a_3 &= 2a_2 = 4 \\ a_4 &= 2a_3 = 8 \\ &\vdots \\ &\text{etc} \end{aligned}$$

La progresión es clara y podemos concluir que:

$$a_n = 2^{n-1} \qquad a_{100} = 2^{99} a_{200} = 2^{199} \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$$

Observamos que esta sucesión tiene límite, solo que no es finito.

■

Ejercicio 3

Nota importante Sería importante que logren convencerse de que *mostrar* simplemente un "n" donde la propiedad que se les pide se verifica no da garantía en lo absoluto de que a partir de ese "n" y en adelante la propiedad se siga verificando. No solo hay que exhibir un "n" sino que hay que justificar por qué a partir de ese "n" la propiedad se verificará.

Además, es bueno aclarar que el enfoque utilizado para resolver los items de este ejercicio no es *casual*. Pretende introducir al alumno dentro de lo que es el cálculo de un límite por definición. Familiarizarse con este método lo llevará a entender mejor la definición de límite. Es altamente recomendable que hagan un esfuerzo por internalizar las ideas involucradas a continuación.

(a)

No solamente tenemos que dar un $n \in \mathbb{N}$tal que $a_n > 10$ ó $a_n > 1000$ sino que debemos dar *certeza* de que a partir de ese "n" y para todo el que sigue, $a_n > 10$ ó $a_n > 1000$. Esto requiere algún tipo de justificación.

Conviene pensar mas en general y averiguar, dado $M > 0 \in \mathbb{R}$, a partir de que n_0 – que dependerá de M– podemos asegurar que $a_n > M \forall n \geq n_0$.

Completando cuadrados en la expresión de a_n se comprueba que

$$a_n = \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{57}{4}$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_n > M \Leftrightarrow \quad & \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 > M + \frac{57}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 > M + \frac{57}{4} \end{aligned}$$

Si suponemos $n \geq 3$ entonces $n - \frac{5}{2} > 0$ de modo que el cuadrado en la ecuación puede pasar como raíz cuadrada sin necesidad de agregar las barras de módulo[13]. Por lo tanto queda:

$$\begin{aligned} a_n > M \Leftrightarrow \quad & n - \frac{5}{2} > \sqrt{M + \frac{57}{4}} \\ \Leftrightarrow \quad & n > \frac{5}{2} + \sqrt{M + \frac{57}{4}} \end{aligned}$$

[13]Observen que en realidad el módulo lo hemos tomado al hacer el pasaje de términos, solo que al ser lo de adentro positivo el resultado de aplicarle módulo es la misma expresión.

Pero entonces hemos demostrado que si suponemos $n \geq 3$, vale:

$$a_n > M \Leftrightarrow n > \frac{5}{2} + \sqrt{M + \frac{57}{4}} \tag{8}$$

Esto nos da un método muy sencillo para elegir el n_0 a partir del cual tengamos *certeza* de que vale lo que se nos pide. Por ejemplo:

Si $M = 10$**:** Tomo $n_0 = \underbrace{\left[\frac{5}{2} + \sqrt{10 + \frac{57}{4}}\right]}_{\text{[x]significa parte entera de x}} + 1 = 8$. Y tendremos absoluta garantía dado (8) de que si $n \geq 8$ entonces $a_n > 10$.

Si $M = 1000$**:** Tomo $n_0 = \underbrace{\left[\frac{5}{2} + \sqrt{1000 + \frac{57}{4}}\right]}_{\text{[x]significa parte entera de x}} + 1 = 35$. Y tendremos absoluta garantía dado (8) de que si $n \geq 35$ entonces $a_n > 1000$.

(b)

Esta sucesión es claramente creciente pues $a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n (\forall n \in \mathbb{N})$.

Observen que en este caso si es cierto que encontrar *algún* n_0 tal que $a_{n_0} > M$ da garantía de que a partir de ese índice la sucesión se mantendrá por arriba de M. Igual, como la cuenta hecha en general no presenta ningún tipo de dificultad la haremos.

$$a_n > M \Leftrightarrow 2^n > M + 100 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(M+100)}{\ln(2)} \tag{9}$$

Si $M = 10$**:** Tomo $n_0 = \underbrace{\left[\frac{\ln(110)}{\ln(2)}\right]}_{\text{[x]significa parte entera de x}} + 1 = 7$. Y tendremos absoluta garantía dado (9) de que si $n \geq 7$ entonces $a_n > 10$.

Si $M = 1000$**:** Tomo $n_0 = \underbrace{\left[\frac{\ln(1100)}{\ln(2)}\right]}_{\text{[x]significa parte entera de x}} + 1 = 11$. Y tendremos absoluta garantía dado (9) de que si $n \geq 11$ entonces $a_n > 1000$.

(c)

Observen que $1,9 \leq a_n \leq 2,1 \Leftrightarrow -0,1 \leq a_n - 2 \leq 0,1$. Pero esto es equivalente a decir que $|a_n - 2| \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{10}$. Cambiemos $\frac{1}{10}$ por ε ya que es obvio que el número $\frac{1}{10}$ está representando a un número *pequeño*, y es mejor hacer las cuentas en general para cualquier número pequeño ε. La ventaja de hacer esto es clara: En el ítem (ii) no nos será necesario repetir innecesariamente las cuentas.

Nos queda:

$$|a_n - 2| \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1 \tag{10}$$

Si $\varepsilon = \frac{1}{10}$**:** Tomo $n_0 = \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)} - 1 = 9$ y vale que $(\forall n \geq 9)\, |a_n - 2| \leq \frac{1}{10}$ o equivalentemente $1,9 \leq a_n \leq 2,1$.

Si $\varepsilon = \frac{1}{1000}$**:** Tomo $n_0 = \frac{1}{\left(\frac{1}{1000}\right)} - 1 = 999$ y vale que $(\forall n \geq 999)\, |a_n - 2| \leq \frac{1}{1000}$ o equivalentemente $1,9999 \leq a_n \leq 2,001$.

(d)

Como $|\sin(n)| \leq 1$ es suficiente con garantizar $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{10}$ o en el otro caso $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{1000}$. En el primer caso tomo $n_0 = 10$ mientras que en el segundo $n_0 = 1000$.

■

Ejercicio 4

Aclaración Antes de empezar hagamos una aclaración acerca de la nomenclatura PCTN, que significa *para casi todo n*. Algunas propiedades no valen para todo $n \in \mathbb{N}$ en una determinada sucesión. De hecho hay propiedades que solo las verifican unos pocos "n", y otras que ninguno. Las propiedades PCTN son aquellas que se verifican, no para todo $n \in \mathbb{N}$, pero si para "casi todos", pues se verifican para todos salvo *a lo sumo* en un número *finito* de índices. Estas propiedades son de especial interés cuando se estudian límites de sucesiones. De hecho, en lo que respecta a las cuestiones de límites, es sumamente importante – y *se recomienda hacerlo* – recordar que el comportamiento de dos sucesiones a_n y b_n es exactamente el mismo si ambas difieren en un número finito de índices solamente. Dicho de otro modo, aprovechando la nomenclatura PCTN, si dos sucesiones son iguales PCTN entonces se comportan igual en términos de límites.

Un ejemplo de propiedad PCTN es el siguiente: Si $a_n = -10 + n$ entonces la propiedad de ser *positiva* es PCTN pues si bien no vale para todo "n", es claro que empieza a valer a partir de n=11. En este sentido uno simplemente escribe: $a_n > 0$ PCTN.

(a)

Es verdadera pues por definición de límite, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \Rightarrow$ para $\varepsilon = \frac{1}{4}$ vale que PCTN $|a_n - 1| < \varepsilon$, o sea que $\exists n_0/$si $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 1| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < a_n - 1 < \frac{1}{4}$. En particular para todo $n \geq n_0$ vale que $a_n > \frac{3}{4}$.

(b)

Verdadera. De hecho en el punto anterior hemos probado algo que incluye a esto.

(c)

Es falsa. Supongamos que $n > 1000$. Veremos que $\forall n > 1000$, $a_n > 1$. En efecto si fuera $a_n < 1$

$$\frac{n+1}{n-1000,2} < 1 \Rightarrow \cancel{n} + 1 < \cancel{n} - 1000,2 \Rightarrow 1 < -1000,2$$

¡¡ABSURDO!!
Por lo tanto $\forall n > 1000 \Rightarrow a_n > 1$.

(d)

Es falsa también. Ver el punto anterior, que abarca a este.

(e)

Es verdadera.

En (a) probamos que $-\frac{1}{4} < a_n - 1 < \frac{1}{4}$ PCTN, con lo que también $\frac{3}{4} < a_n < \frac{5}{4}$ PCTN. Pero esto implica que a_n es acotada.

■

Ejercicio 5

(a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\big(\overbrace{-4n+2-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}^{\longrightarrow -\infty}\big)}{\cancel{n^2}\big(\underbrace{5+\frac{4}{n^2}}_{\to 5}\big)} = -\infty$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\big(\overbrace{n^2-\frac{5}{n}}^{\longrightarrow +\infty}\big)}{\cancel{n}\big(\underbrace{1+\frac{3}{n}}_{\to 1}\big)} = +\infty$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n^3}}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sqrt{\frac{\cancel{n^3}}{n^{\cancel{4}}}}}^{\longrightarrow 0} \cdot \frac{\overbrace{\left(1+\frac{2}{\sqrt{n^3}}\right)}^{\to 1}}{\underbrace{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}_{\to 1}} = 0$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n^2}}}{\cancel{\sqrt{n^2}}} \cdot \frac{\overbrace{\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}}^{\to\sqrt{2}}}{\underbrace{\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}}_{\to\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\big(\overbrace{4+\frac{3}{n^2}}^{\longrightarrow 4}\big)}{\cancel{n^2}\big(\underbrace{3+\frac{4000}{n^2}}_{\to 3}\big)} = \frac{4}{3}$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\cdot(-1)}{\cancel{n}\underbrace{\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1\right)}_{\to 2}} = -\frac{1}{2}$$

(g)

Con un poco de esfuerzo y *buen ojo*, trabajando como en los primeros ejercicios de la guía en donde había que deducir la fórmula para el término general de una sucesión, se puede establecer que:

$$a_n = \begin{cases} \overbrace{\dfrac{n+2}{\left(\frac{n+1}{2}\right)}}^{b_n} & \text{,si n es impar.} \\ \underbrace{\dfrac{2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2^{\frac{n}{2}}+1}}_{c_n} & \text{,si n es par.} \end{cases}$$

A partir de esto podemos estudiar las dos fórmulas por separado para ver que ocurre en cada una de ellas.

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\cdot\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 2$$

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2^{\frac{n}{2}}+1} = \frac{2\cdot\cancel{2^{\frac{n}{2}}}}{\cancel{2^{\frac{n}{2}}}\underbrace{\left(1+\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\right)}_{\to 1}} = 2$$

Hemos pues establecido en concreto que la sucesión $b_n = \frac{n+2}{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, que evaluada en valores de "n" impares nos da los términos *impares* de a_n; y la sucesión $c_n = \frac{2^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2^{\frac{n}{2}}+1}$, que evaluada en valores de "n" *pares* nos da los términos pares de a_n, ambas tienden a 2.

Con esta información ya estamos tentados a concluir que:

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

pues si los términos pares de la sucesión se *acercan* a 2 y los impares también se *acercan* a 2, es razonable pensar que la sucesión original en conjunto tiene el mismo comportamiento.

Esto en realidad es correcto y el alumno no tan desconfiado podría conformarse con este tipo de justificación, pero no puedo dejar de mencionar sin ser tildado de *imprudente* que esto todavía no es del todo una *demostración*, es una *intuición*. Para llegar a demostrar el acierto hay que pulir algunos detalles.

En concreto hay tres preguntas que nos podríamos hacer si fuéramos desconfiados:

1. $\lim_{n\to\infty} b_n = 2 \overset{???}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} b_{2n-1} = 2$

   (pues para armar $a_n$solo se usan los términos impares de b_n y no todos)

2. $\lim_{n\to\infty} c_n = 2 \overset{???}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} c_{2n} = 2$

   (pues para armar a_n solo se usan los términos pares de c_n y no todos)

3. Que los términos *pares* e *impares* por separado de a_n tiendan a 2: ¿Implica necesariamente que a_n también tienda a 2?

Las tres afirmaciones son verdaderas. De hecho guardan estrecha relación con la noción de SUBSUCESIÓN que será estudiada mas adelante. Este ejercicio sirve para motivar en forma *natural* el tema a partir de un ejemplo práctico.

Lo que viene a continuación es una breve demostración de cada uno de los tres interrogantes. Aunque es suficiente por el momento que el alumno haya comprendido el por qué de la necesidad de cuestionarse estas tres cosas que parecen tan naturales, aquellos que hagan el esfuerzo *extra* de intentar comprender la argumentación que sigue, serán seguramente premiados con una mayor comprensión del asunto. No se asusten si aun no están en condiciones de comprender todos los *detalles*, lo importante es que a medida que pase el tiempo puedan volver a releer este tipo de argumentaciones y las encuentren mas familiares.

1. Veremos que si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2 \;\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_{2n-1} = 2$ también.

   Sabemos que por definición de límite, dado $\varepsilon > 0 \,\exists\, n_0 \in \mathbb{N} /$ si $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |b_n - 2| < \varepsilon$. Pero si $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; 2n-1 \geq n$ también $\Rightarrow |b_{2n-1} - 2| < \varepsilon$ también.

   Pero entonces, efectivamente:

   $$\exists \lim_{n\to\infty} b_{2n-1} = 2$$

2. La demostración es análoga que en 1.

3. Supongamos que $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = 2$ y $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 2$. Veremos que entonces también $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

Sea $\varepsilon > 0$:

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}/ \text{ si } n \geq n_0 \Rightarrow |a_{2n-1} - 2| < \varepsilon \tag{11}$$

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}/ \text{ si } n \geq n_1 \Rightarrow |a_{2n} - 2| < \varepsilon \tag{12}$$

Sea $n_2 = (2n_0 - 1) + 2n_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_2 \geq 2n_0 - 1 \\ n_2 \geq 2n_1 \end{cases} \tag{13}$$

Observen que elegí especialmente n_2 de forma tal que ocurra (13) a propósito para poder lograr que si $n \geq n_2$ entonces ocurra exactamente lo que tiene que ocurrir para que entonces $|a_n - 2| < \varepsilon$.

Veámoslo en forma detallada:

Si $n \geq n_2$, hay dos posibilidades para "n"

n par: Entonces debe existir algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$. Usando la ecuación (13) se tiene:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow n = 2k \\ &\Rightarrow k = \frac{n}{2} \geq \frac{n_2}{2} \geq \frac{\cancel{2}n_1}{\cancel{2}} = n_1 \\ &\Rightarrow k \geq n_1 \\ &\Rightarrow |a_{2k} - 2| < \varepsilon \\ (2k = n) &\Rightarrow |a_n - 2| < \varepsilon \end{aligned}$$

n impar: Entonces debe existir algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k - 1$. Usando la ecuación (13) se tiene:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow n = 2k - 1 \\ &\Rightarrow k = \frac{n+1}{2} \geq \frac{(2n_0 - \cancel{1}) + \cancel{1}}{2} \geq \frac{\cancel{2}n_0}{\cancel{2}} = n_0 \\ &\Rightarrow k \geq n_0 \\ &\Rightarrow |a_{2k-1} - 2| < \varepsilon \\ (2k - 1 = n) &\Rightarrow |a_n - 2| < \varepsilon \end{aligned}$$

Así: Hemos visto que $(\forall n \geq n_2)\ |a_n - 2| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

Ahora si podemos decir que el ejercicio se encuentra completo.

En realidad el formalismo presentado mas arriba es muy probable que ustedes solos no lo hubieran podido alcanzar. Lo importante sin embargo sería que solos sí pudieran haber llegado por lo menos al marco intuitivo que antecede a las tres demostraciones. De eso se trata esta materia, de que formen ustedes su intuición. Claro que también durante el proceso es necesario que se vayan acostumbrando a las demostraciones, las cuales les auguro les van a empezar a salir pronto si ponen empeño y dedicación.

(h)

Si observan bien se darán cuenta que el término n-ésimo de la sucesión se obtiene sumando las potencias de $\frac{1}{2}$ desde "0" hasta n. En concreto $a_n = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^n$, donde $r = \frac{1}{2}$. Así expresada a_n no nos sirve de mucho para calcular su límite. Hagamos una cuenta muy interesante, la cual aparecerá nuevamente cuando estudien SERIES.

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^n \\ \underline{-r \cdot a_n} & = & \underline{+r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^n + r^{n+1}} \\ a_n - r \cdot a_n & = & 1 - r^{n+1} \end{array}$$

De esta forma, podemos apreciar que $a_n(1 - r) = 1 - r^{n+1}$. O lo que es lo mismo y nos da expresamente la fórmula para a_n, cosa que nos resultará muy útil:

$$a_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \text{con r } = \frac{1}{2}$$

Reemplazando r por el valor que tiene en la fórmula de a_n y haciendo las cuentas del caso, se obtiene que $a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$. Pero entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{2^n} = 2$$

■

Ejercicio 6

(a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to+\infty}{n^{\cancel{2}}}\,\overset{\to 1}{\left(1-\frac{5}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}}{\cancel{n}\underbrace{\left(1+\frac{3}{n}\right)}_{\to 1}} + \frac{\overset{\to+\infty}{n^{\cancel{2}}}\,\overset{\to 1}{\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}}{\cancel{n}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}} = +\infty$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-5n+7)-(n^2+5)(n+1)}{(n+1)(n+3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\cancel{n^3}-4n^2+2n+7)-(\cancel{n^3}+6n^2+5)}{n^2+4n+3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-10n^2+2n+2}{n^2+4n+3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{n^2}\overset{\to -5}{\left(-5+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}}{\cancel{n^2}\underbrace{\left(1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}_{\to 1}} = -10
\end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overset{\to+\infty}{n}\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}+1\right)}_{\to 2} = +\infty$$

(d)

Este es un típico ejercicio en donde se tiene que salvar la indeterminación multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n-2}-n\right)\cdot \overbrace{\frac{\left(\sqrt{n^2+n-2}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+n-2}+n\right)}}^{\text{mult. y div. por el conj.}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}+n-2-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n-2}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\overbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}^{\to 1}}{\cancel{n}\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}+1\right)}_{\to 2}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3+3}\right)\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3+3}\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3+3}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(\cancel{n^2}+1)-(\cancel{n^2}-n+3)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3+3}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\overbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}^{\to 1}}{\cancel{n}\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}\right)}_{\to 2}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(f)

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}\cdot\underbrace{\left(\frac{2-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n^2}}\right)}_{\to\frac{2}{3}}}+\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\cdot\overbrace{\left(\frac{3-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}\right)}^{\to\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{3}{2}
$$

(g)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot(\cancel{n}+2-\cancel{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\cdot\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}_{\to 2}} = 1
\end{aligned}
$$

(h)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(\cancel{n}+2-\cancel{n})}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sqrt{\frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}}}}^{\to+\infty}\cdot\frac{2}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}_{\to 2}} = +\infty
\end{aligned}
$$

(i)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{n+1}+n\right)}{n+1-n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n}+1\right)}{\cancel{n^2}\left(-1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\left(\sqrt{\underbrace{\left(\frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^{\cancel{2}}}\right)}_{\to 0}}+1\right)}^{\cancel{1}}}{\underbrace{\left(-1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}_{\to -1}} = -1
\end{aligned}
$$

(j)

En este ítem se ha utilizado en el último paso que $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Es un hecho que conviene tener en mente a menudo. La demostración es muy fácil y se las recomiendo hacer.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot((n^2+2)-n)}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot \cancel{n}^{\cancel{2}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\cancel{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\frac{\sqrt{n}}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to+\infty}{(n\cdot\sqrt{n}\cdot)}\overset{\to 1}{\left(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}}{\left(\underset{\to 1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}+\underset{\to 0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)} \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

■

Ejercicio 7

Preámbulo Este ejercicio trata sobre las INDETERMINACIONES en sucesiones. Supongamos que tenemos dos sucesiones a_n y b_n, y con ellas a partir de alguna de las operaciones básicas[14] construimos c_n. Por ejemplo podría ser $c_n = a_n - b_n$. Supongamos que contamos con la información sobre los límites de las dos primeras, digamos que $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ y $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. La pregunta es: ¿Bajo cuáles circunstancias se puede concluir cuál – si existe – será $c := \lim_{n\to\infty} c_n$?

La primera respuesta la hallamos en el álgebra de límites, que nos presenta un abanico de posibilidades donde se puede concluir con éxito sobre la existencia o no y eventual determinación de "c", únicamente conocidos "a" y "b".

Las INDETERMINACIONES son situaciones donde *a priori* es imposible tomar una decisión sobre "c", contando únicamente como datos los valores de "a" y "b".[15] Esto significa que para concluir sobre las cualidades de "c" hay que estudiar características particulares de a_n y b_n. Hay situaciones donde "c" puede valer una cosa y situaciones donde puede valer otra. Aun podría ocurrir que "a" y "b" existan pero no "c".

Ante una de estas INDETERMINACIONES, es erróneo suponer que el ejercicio debe concluirse con la afirmación de que tal situación constituye una indeterminación. Por el contrario, la idea será estudiar métodos para *salvar* las indeterminaciones y poder concluir con éxito sobre la existencia o no de "c" y en caso de existir calcularlo.

Como se dijo, este ejercicio presenta las indeterminaciones de forma intuitiva para que el alumno pueda formarse una correcta idea de las mismas. En los que siguen se estudiarán los métodos para salvarlas.

[14] Suma, resta, multiplicación, división, exponenciación, etc. . .

[15] Observen que jamás hicimos restricciones sobre si a,b y c son finitos o no, pudiendo ser los mismos infinitos.

(a)

(i)

Consideremos por ejemplo $a_n = b_n = n$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n - b_n = \lim_{n\to\infty} n - n = 0$$

Ahora consideremos $a_n = 2n$ y $b_n = n$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n - b_n = \lim_{n\to\infty} 2n - n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

Como pueden apreciar, el sólo hecho de saber que a_n y b_n tienden a $+\infty$ no nos dice nada sobre el resultado de hacer la resta de ambas.

Por lo tanto, se concluye que: $(+\infty) - (+\infty)$ constituye una INDETERMINACIÓN.

(ii)

Consideremos por ejemplo $a_n = b_n = n$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Ahora consideremos $a_n = n^2$ y $b_n = n$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

Como pueden apreciar, el sólo hecho de saber que a_n y b_n tienden a $+\infty$ no nos dice nada sobre el resultado de hacer el cociente de ambas.

Por lo tanto, se concluye que: $\frac{\infty}{\infty}$ constituye una INDETERMINACIÓN.

(b)

(i)

Consideremos por ejemplo $a_n = b_n = \frac{1}{n}$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Ahora consideremos $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = +\infty$$

Como pueden apreciar, el sólo hecho de saber que a_n y b_n tienden a 0 no nos dice nada sobre el resultado de hacer el cociente de ambas.

Por lo tanto, se concluye que: $\frac{0}{0}$ constituye una INDETERMINACIÓN.

(ii)

Consideremos por ejemplo $a_n = e^{-n}$ y $b_n = \frac{1}{n}$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{-n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Ahora consideremos $a_n = e^{-n}$ y $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{-n}\right)^{\frac{1}{n^2}} = e^{-\frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

Como pueden apreciar, el sólo hecho de saber que a_n y b_n tienden a 0 no nos dice nada sobre el resultado de hacer el cociente de ambas.

Por lo tanto, se concluye que: 0^0 constituye una INDETERMINACIÓN.

(c)

(i)

Consideremos por ejemplo $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = n$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} = 1$$

Ahora consideremos $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = n^2$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{n}} \cdot n^{\cancel{2}} = +\infty$$

Como pueden apreciar, el sólo hecho de saber que a_n tienda a 0 y b_n tienda a ∞ no nos dice nada sobre el resultado de hacer el producto de ambas.

Por lo tanto, se concluye que: $0 \cdot \infty$ constituye una INDETERMINACIÓN.

(ii)

Consideremos por ejemplo $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = e^n$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n^{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(e^n\right)^{\frac{1}{n}} = e^1 = e$$

Ahora consideremos $a_n = \frac{1}{n^2}$ y $b_n = e^n$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n^{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(e^n\right)^{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

Como pueden apreciar, el sólo hecho de saber que a_n tienda a 0 y b_n tienda a ∞ no nos dice nada sobre el resultado de hacer la segunda elevada a la primera.

Por lo tanto, se concluye que: ∞^0 constituye una INDETERMINACIÓN.

■

Ejercicio 8

(a)

Tiende a $+\infty$. Para demostrarlo procedemos como sigue: Puesto a que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

sabemos que P.C.T.N $a_n > 0$. Podemos suponer entonces *s.p.g*[16] que $a_n > 0 \forall n$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} \overset{+\infty}{a_n} \underbrace{\left(1 + \overset{\to 0}{\frac{1}{a_n}} \cdot \underset{\text{acotado}}{b_n}\right)}_{\text{esta expresión } \to 1} = +\infty$$

(b)

La respuesta correcta es $L \geq 0$. La solución mas simple en este caso requiere recordar alguna propiedad sobre el límite de las sucesiones, a saber:

- Propiedad de Conservación del signo: Es un teorema que seguramente vieron en la teórica que afirma que si una sucesión a_n tiene un límite $L < 0$ entonces P.C.T.N debe ser $a_n < 0$.

Intuitivamente esto es muy claro ya que si una sucesión se *aglomera* en las cercanías de un número negativo, es de esperar que al no poder alejarse mucho del mismo a partir de un momento queden todos sus términos negativos. De todas formas en sus respectivas teóricas deben haber seguro trasladado esta *intuición* hacia una correcta demostración.

Bueno, utilizando esto, si L fuera menor, entonces P.C.T.N, sería $a_n < 0$. Y esto es absurdo por hipótesis. Pero entonces como todo número – incluso L – es o bien menor a cero o bien mayor o igual a cero, al no poder ser la primera, debe entonces ser la segunda[17].

[16] En la jerga matemática esta famosa abreviación significa *sin perder generalidad*. Generalmente alude a que como ya se ha explicado como proceder en caso de que falle la suposición, la demostración se hará bajo tales hipótesis.

[17] El alumno atento se habrá dado cuenta que jamás chequeamos que las otras opciones fueran falsas.¿Por qué? Es simple, porque por *defecto* suponemos que los enunciados de los ejercicios no nos mienten, y como en tal se afirma que hay solo una respuesta correcta, la que hallemos verdadera, debe ser tal.

(c)

Tiende a 0, pues:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\left(\frac{1}{b_n}\right)}^{0} \cdot \underset{\to 0}{a_n} = 0$$

(d)

En nuestra opinión, el enunciado debería contener otra hipótesis: La de $a_n > 0 \forall \mathbb{N}$. Piensen por qué y discútanlo con sus compañeros y/o profesores. También es necesario recordar que:

$$a_n^{b_n} =_{\text{DEF}} e^{b_n \ln(a_n)} \tag{14}$$

Así es como en muchos cursos de análisis se define la exponenciación entre dos números cualesquiera. Es muy probable que en el curso en el que están lo hayan hecho de esta manera. Sino, cualquiera haya sido, no tendrán problema en corroborar que la ecuación 14 igualmente resulta cierta.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} e^{\overbrace{\overset{\to+\infty}{b_n} \underset{\to-\infty}{\ln(\overset{\to 0^+}{a_n})}}^{\text{en cjto.}\to-\infty}} = 0$$

Así: La respuesta correcta es que es igual a 0.

∎

Ejercicio 9

A lo largo de este ejercicio, se utilizaran una serie de propiedades que convendría tener aisladas para poder referirnos a ellas mas adelante. En concreto son las siguientes:

1. La propiedad que afirma:

   Para cualquier constante real positiva M, vale que

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = 1$$

   Asumimos que la misma ha sido demostrada o justificada en la teórica.

2. La propiedad que afirma que:

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

   Asumimos que la misma ha sido demostrada o justificada en la teórica.

3. Ésta dice algo mas modesto, pero que en definitiva puede ser pensado como consecuencia de lo anterior:

   Supongamos que a_n es una sucesión de números reales acotada que verifica que existe un número real positivo $\rho > 0$ tal que $0 < \rho < a_n$[18]. Entonces:

   $$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

   Dem: Supongamos que existe $\rho > 0$ y $M > 0$ tales que $\rho < a_n < M$. La existencia de éste último está garantizada por ser a_n acotada. Por una directa aplicación de la Propiedad del Sandwich se tiene que:

   $$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = 1$$

   Con lo que inmediatamente nos queda:

   $$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

[18] Observen que es necesario que nuestra sucesión a_n no pueda acercarse como se le de la gana a 0. Sería importante que piensen por qué. Si leen con atención la demostración de la propiedad, quedará clara la razón.

Ahora que han quedado evidenciadas las propiedades mas importantes que utilizaremos a lo largo de la resolución de este ejercicio, proseguimos con la misma.

(a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}^{\to 0} \cdot \underbrace{\sin(n)}_{\text{acotado}} = 0$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})} \cdot \overbrace{\left(\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right)}^{\text{mult. y div. x el conj.}} \\
&= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{(\cancel{n}+2-\cancel{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\text{acotado}} \cdot \underbrace{\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}}_{\longrightarrow 0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(c)

En este caso a_n no es convergente ya que $(-1)^n$ oscila y $\frac{1}{n}$ tiende a cero. Entonces a_n queda oscilando finitamente entre -1 y 1.[19]

(d)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \textit{ (a secas)}$$

[19] Para demostrar mejor que a_n no tiene límite hay que apelar a la noción de subsucesión ya que se puede ver que $a_{2n} \longrightarrow_{n\to\infty} 1$ y $a_{2n-1} \longrightarrow_{n\to\infty} -1$. Hay un importante resultado que afirma que si existe el límite de a_n y es igual a "L", entonces cualquier subsucesión a_{n_k} de la primera también tiene límite y dicho límite coincide con "L". Para esto tendrán que esperar algunas clases.

(e)

Claramente

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ya que $r^n \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \, \forall |r| < 1, \; r \in \mathbb{R}$.

(f)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} \cdot \Bigg[\underbrace{\left(1 + \overset{\overset{0}{\nearrow}}{\frac{5}{2^n}} \right) \cdot (-1)^n}_{\text{(acotado)}} \Bigg] \\
&= \lim_{n\to\infty} \overbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}^{\overset{0}{\nearrow}} \cdot \Bigg[\underbrace{\left(1 + \overset{\overset{0}{\nearrow}}{\frac{5}{2^n}} \right) \cdot (-1)^n}_{\text{(acotado)}} \Bigg] \\
&= 0
\end{aligned}$$

(g)

Claramente

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

ya que $r^n \longrightarrow_{n\to\infty} +\infty \, \forall r > 1, \; r \in \mathbb{R}$.

(h)

Claramente

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ya que $r^n \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \, \forall |r| < 1, \; r \in \mathbb{R}$.

(i)

Recuerden que $2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{4^n}\left[\overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}^{\longrightarrow 0} + 4 + \overbrace{\left(\frac{2}{4^n}\right)}^{\longrightarrow 0}\right]}{\cancel{4^n}\left[1 + \underbrace{\left(\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}}\right)^n}_{\to 0}\right]} = 4$$

(j)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt[n]{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sqrt[n]{n}}^{\longrightarrow 1} \cdot \overbrace{\sqrt[n]{n}}^{\longrightarrow 1} \cdot \overbrace{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^2}}}^{\longrightarrow 1} = 1$$

(k)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\cancel{n^3}\cdot\left(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^2}\cdot\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sqrt[n]{n}}^{\longrightarrow 1} \cdot \overbrace{\sqrt[n]{\frac{\left(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}}}^{\longrightarrow 1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(l)

Lo de adentro tiende a $\frac{5}{3}$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

(m)

Lo de adentro tiende a $\frac{1}{5}$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

(n)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n+1\right)}\\ &= \lim_{n\to\infty} 5\underbrace{\sqrt[n]{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}}_{\longrightarrow 1}\\ &= 5\end{aligned}$$

(o)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n]{n^4+1}\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n]{n^4\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\right)^4\cdot\underbrace{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n^4}}}_{\to 1}\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= 1\end{aligned}$$

(p)

Observemos que $(1+(-1)^n)^n$es una sucesión que vale 0 si n es impar y que vale 2^n si n es par. De aquí que:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{,si n es impar.}\\ \frac{2^n}{n} & \text{,si n es par.}\end{cases}$$

Este ejercicio saldría de una manera *simple y elegante*, casi sin trabajo alguno si estuviéramos autorizados a utilizar una serie de herramientas con las que aun todavía *no contamos*. Dicho sea de paso, las herramientas son:

- El Criterio de D'Alembert.
- El Criterio de las Subsucesiones de una sucesión convergente.

Con el primero estableceríamos que $\frac{2^n}{n}$ es divergente. A partir del segundo, concluiríamos que a_n no puede tener límite ya que $a_{2n-1} \equiv 0$ y por lo tanto $a_{2n-1} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, pero $a_{2n} \longrightarrow_{n\to\infty} +\infty$.

Y eso hubiera sido todo, dejamos como *importante* ejercicio para el lector escribir bien en detalle este argumento cuando haya llegado a ver los resultados antes mencionados.

Pero desgraciadamente aun no contamos con tan importante material teórico. De hecho este ejercicio está puesto en este lugar de la práctica a sabiendas de que el alumno carece por el momento de herramientas tan sofisticadas, y pretende actuar como una interesante introducción intuitiva a la noción de *subsucesión* de una sucesión dada.

Para ser coherentes con el estado de la teórica al momento, hemos elegido presentar una solución al ejercicio que sea *formalmente correcta*, pero utilizando sólo piezas teóricas que estén a nuestra disposición ahora. Sería muy importante que el lector haga un gran esfuerzo por comprender las ideas involucradas en lo que sigue, ya que las mismas son de vital importancia para comprender realmente los teoremas que verán en la teórica en muy poco tiempo.

La información está presentada de tal forma que las ideas se van desmenuzando desde lo mas grueso hasta lo mas fino, de modo que para entender el hilo argumentativo no es necesario una comprensión global de todos los detalles. Basta con que comprendan las ideas principales, y poco a poco irán comprendiendo los detalles a medida que se vayan acostumbrando a este nuevo y tan distinto lenguaje que es el de la matemática.

Contamos con el siguiente teorema:

Si a_n tiene un límite finito $L \in \mathbb{R}$ entonces a_n debe ser acotada.

El camino propuesto para demostrar que $a_n$carece de límite se basa en probar los siguientes items:

1. a_n no tiende a infinito.

2. a_n no es acotada.

Afirmamos que probar estas dos cosas implicarían automáticamente que a_n no puede tener límite, ya que si lo tuviera sería o bien finito o bien infinito. Y si infinito no es, no quedaría otra que fuera finito, lo que tampoco podría ser pues sino sería acotada.

1. Veamos que a_n no tiende a $+\infty$.

Lo veremos por el absurdo utilizando la definición de límite infinito.

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Rightarrow (\forall M > 0)\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M$$

Pero para $M = 1$ que es uno de los posibles que podríamos elegir, $\nexists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > 1$ ya que o bien sería $a_{n_0} = 0$ o bien sería $a_{n_0+1} = 0$, ya que alguno de estos dos tiene que ser impar, y a_n vale 0 en los términos impares.**¡¡ABSURDO!!**

Así:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq +\infty$$

2. Veamos que a_n no puede ser acotada.

   Bastaría con probar que la sucesión $b_n = \frac{2^n}{n} \longrightarrow +\infty$, pues entonces los términos pares de a_n divergerían y por lo tanto la misma no podría ser acotada.

   Pero para ver esto, necesitamos de dos resultados tan simples como importantes:

   - El primero afirma que:

     $$\text{Si } \exists \lim_{n\to\infty} b_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = L \text{ también.}$$

     Esto es mas que creíble, pues:

     - b_n: b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, ...etc...
     - b_{n+1}: b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, ...etc...

     Observen que ambas sucesiones solo difieren en el primer término, de modo que si una de ellas es convergente a un cierto límite, la otra debe no solo también converger, sino que al mismo límite también.

   - El segundo afirma que toda sucesión creciente, o bien tienen un límite finito "L" $\in \mathbb{R}$ o bien diverge a $+\infty$. Sobre este resultado no ahondaremos mas, ya que lo tienen que haber visto con seguridad en la teórica, probablemente como el TEOREMA DE LAS SUCESIONES MONÓTONAS.

Veamos pues que b_n es creciente. Tenemos que ver que $b_{n+1} \geq b_n (\forall n \in \mathbb{N})$:

$$\begin{aligned} b_{n+1} \geq b_n \Leftrightarrow & \frac{2^{n+1}}{n+1} \geq \frac{2^n}{n} \\ \Leftrightarrow & 2 \geq \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Pero aquello último es cierto $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces en efecto b_n resulta creciente. Pero entonces podemos afirmar como nos autoriza el segundo resultado de mas arriba que: O bien b_n diverge o bien b_n tiene un límite finito.

Veamos para concluir que b_n no puede tener un límite finito $L \in \mathbb{R}$. Si esto fuera así, entonces utilizando el primer resultado sería:

$$L = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \overset{\overset{L}{\uparrow}}{\overset{=b_n}{\left(\frac{2^n}{n}\right)}} \cdot \overset{\to 1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)} = 2L$$

Pero entonces $L = 2L \Leftrightarrow L = 0$. Pero esto último es **¡¡ABSURDO!!** pues b_n es creciente y ya su primer término vale $b_1 = 2$, con lo que es imposible que b_n tienda a cero.

Así:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

De esta manera, a_n no puede ser acotada.

(q)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{11}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

(r)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(s)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{8}{11}$$

(t)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 9^n + \cos(n)}{2\cdot 9^n + \sin(n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{9^n}}{\cancel{9^n}} \cdot \left(\frac{3 + \overbrace{\frac{\cos(n)}{9^n}}^{\to 0}}{2 + \underbrace{\frac{\sin(n)}{9^n}}_{\to 0}} \right) \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

■

Ejercicio 10

Aclaración A lo largo de los items de este ejercicio, numerosas veces será necesario calcular el límite de la expresión b_n que queda como exponente una vez que llevamos la original a la típica forma de:

$$\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\underset{\uparrow \infty}{\dots}}\right)^{\overset{\infty}{\uparrow}\,\dots}}_{\uparrow e}\right)^{b_n}$$

Como en general esta operación es muy elemental ya que queda un límite muy sencillo ahí arriba, omitiremos en la mayoría de los casos el cálculo por separado de dicho límite, simplemente indicando mediante el correspondiente diagrama de flechas hacia dónde tiende tal expresión. Si el alumno lo desea puede efectuar él mismo por separado el cálculo de dicho límite.

Tengan en cuenta que si bien aquí no lo haremos, eso no quiere decir que ustedes no deban hacerlo, ya sea cuando practican o durante un examen. Recuerden que tienen que justificar *todas* sus afirmaciones, inclusive aquella.

(a)

Aquí tenemos una indeterminación de la forma 1^∞. En general un truco que funciona la mayoría de las veces para salvarla es sumar y restar uno en la expresión de adentro. Se procede como sigue:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n+1}{3n-5}-1\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\cancel{3n}+1-\cancel{3n}+5}{3n-5}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\left(\frac{3n-5}{6}\right)}\right)^{\frac{3n-5}{6}}}_{\to e}\right)^{\overbrace{\frac{6}{3n-5}\cdot n}^{\uparrow 2}} \\
&= e^2
\end{aligned}$$

(b)

En este caso no se trata de una indeterminación de la forma 1^∞. Hay que tener mucho cuidado con este tipo de trampas, ya que es común en medio de tanto ejercicio de límites de la forma 1^∞ que aparezca *descolgado* uno que no lo es. Recuerden que el truco de sumar y restar uno requiere como paso inicial *comprobar* que estamos en presencia de una indeterminación de la forma 1^∞, caso contrario se encara de forma distinta. Por ejemplo aquí: Es un límite de la forma:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{+\infty} \longrightarrow_{n\to\infty} +\infty$$

Y la conclusión es inmediata, no requiere mas que mencionar lo de arriba.

(c)

Sumamos y restamos 1 como en (a) en la página anterior y queda:[20]

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3n+1}\right)^{2n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\left(\frac{3n+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{3n+1}{-3}}}_{\to e}\right)^{\overbrace{\frac{3n+1}{-3}\cdot n}^{\to -2}} \\
&= e^{-2}
\end{aligned}$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{\to e}\right)^{\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}} = e^0 = 1$$

[20] Ver ítem (a) en la página anterior que está resuelto con mas lujo de detalles a modo ejemplificador del método.

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{17}\right)}\right)^{\frac{n}{17}}}_{\to e}\right)^{\overbrace{17}^{0}} = e^{17}$$

(f)

Aquí la base tiende a $+\infty$— **¡¡No a 1!!** —, y el exponente también. Pero entonces:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

(g)

Nuevamente sumamos y restamos 1 como en (a) en la página 154. Si revisan el mencionado ítem podrán ver el proceso menos abreviado, con lujo de detalle a modo de presentación del método en general. Queda:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+6}{3n^2-5}\right)^{\frac{n^2+2}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\underbrace{\left(\frac{3n^2-5}{2n+6}\right)}_{\longrightarrow+\infty}}\right)^{\frac{3n^2-5}{2n+6}}}_{\longrightarrow e}\right]^{\underbrace{\left(\frac{2n+6}{3n^2-5}\right)\cdot\left(\frac{n^2+2}{2n+1}\right)}_{\substack{\longrightarrow\frac{1}{3}\\ \text{(comprobarlo)}}}} = e^{\frac{1}{3}}$$

(h)

Recuerden que si $\overset{\neq 0}{a_n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$.
También observen que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{n} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}\cdot\underbrace{\sin(n)}_{\text{acotado}} = 0$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{\sin(n)}{n^2}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{\sin(n)}{n^2}\right)}}}_{\longrightarrow e}\right]^{\underbrace{\frac{\sin(n)}{n^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{n}}_{\longrightarrow 0}} = e^0 = 1$$

(i)

En este ejercicio hay que usar la conocida identidad trigonométrica que afirma que $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}} &= \lim_{n\to\infty} \left\{\left[1 - \left(1 - \cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]^{\frac{1}{-\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}}\right\}^{-1} \\
&= \left\{\underbrace{\left[1 - \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{-\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}}}_{\longrightarrow e}\right\}^{-1} \\
&= e^{-1}
\end{aligned}
$$

(j)

Llamemos $b_n = \frac{Cos(n)}{5n^3+1}$. Es claro que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. También es claro que $b_n \neq 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}$. Tengamos también en cuenta que:

$$
\lim_{n\to\infty} b_n(2n^2+3) = \lim_{n\to\infty} \cos(n)\cdot\overbrace{\left(\frac{2n^2+3}{5n^3+1}\right)}^{0} = 0
$$

Pero entonces:

$$
\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{(1+b_n)^{\frac{1}{b_n}}}_{\longrightarrow e}\right]^{\underbrace{b_n\cdot(2n^2+3)}_{\to 0}}
$$

$$
\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1
$$

■

Ejercicio 11

(a)

Usamos el CRITERIO DE D'ALEMBERT.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{n} = \overbrace{\frac{n+1}{n}}^{\to 1}\cdot\frac{2^{n+1}}{2\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

Entonces, por el CRITERIO DE D'ALEMBERT:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(b)

En este caso nos será mas útil el CRITERIO DE CAUCHY:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 2 - \overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0} = 2 > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

(c)

En este conviene usar el CRITERIO DE D'ALEMBERT, que es bueno particularmente para lidiar con factoriales.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n2^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{n+1}{n+1}\cdot\frac{n!}{n!}\cdot\frac{2^n}{2^n}\right)}_{\text{simplifico}}\cdot\frac{2}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\overbrace{\frac{2}{n}}^{\to 0}\\ &= 0 < 1\end{aligned}$$

Entonces, por el CRITERIO DE D'ALEMBERT:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(d)

Anticipo a los lectores que este límite es mas trabajoso que los tres anteriores. Hay dos caminos para resolverlo. El primero utiliza una herramienta teórica bastante *fuerte*, pero a consecuencia de ello la resolución queda muy corta y elegante. El segundo en cambio utiliza una idea mucho mas elemental, pero el desarrollo de la misma es mas complicado[21].

1. Como anticipamos, en esta resolución haremos uso del siguiente teorema:

   D'ALEMBERT IMPLICA CAUCHY: Si

   $$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = m \text{ y } l = m$$

   Utilizando este resultado, el ejercicio sale de la siguiente manera simple y elegante:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cancel{!}}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} n+1 = +\infty > 1$$
   $$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{D'Alembert}\Rightarrow\text{CAUCHY}} \quad \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

2. Para los que no vieron aquel resultado, la resolución como anticipamos es un tanto mas elaborada. Veamos los pasos que hay que seguir. Son dos:

   a) Ver que[22]

   $$(\forall r > 0 \in \mathbb{R}), \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0 \tag{15}$$

   Lo veremos por D'ALEMBERT. Sea r > 0:

   $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{r^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{r^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+1} \\ &= 0 < 1\end{aligned}$$

[21] Los que vieron en la teórica el teorema de D'ALEMBERT IMPLICA CAUCHY, pueden quedarse con la primera demostración tranquilos. Los que no han visto este resultado tendrán que resignarse y digerir la segunda idea.

[22] Los que en la teórica tienen demostrado el resultado de la ecuación 15 pueden omitir esta parte.

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0 \, (\forall r > 0 \in \mathbb{R})$$

b) Concluir el argumento utilizando lo anterior: Sea $r > 0 \in \mathbb{R}$ cualquiera. Por definición de límite sabemos que:

$$\text{para } \varepsilon = 1 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, \text{t.q.} \, \forall \, n \geq n_0 \Rightarrow \frac{r^n}{n!} < 1$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq n_0) \, n! > r^n \Rightarrow (\forall n \geq n_0) \, \sqrt[n]{n!} > r$$

Así:$(\forall r > 0) \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \, \text{t.q. si} \, n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{n!} > r$. Pero si prestan atención se darán cuenta que hemos probado *por definición de límite* que:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

(e)

Observen que:

$$a_n \geq \frac{n!}{3^n + 3^n} = \frac{n!}{2 \cdot 3^n}$$

Llamemos a esta última expresión b_n, si vemos que diverge a $+\infty$ entonces a_n también. Lo podemos hacer usando el CRITERIO DE D'ALEMBERT.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} &\geq \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cancel{!}}{\cancel{2} \cdot 3^{n+\cancel{1}}} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3^n}}{\cancel{n!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3} \\
&= +\infty > 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = +\infty > 1$$

Entonces por el Criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$$

Y como a_n era mas grande que b_n, entonces a_n también diverge a $+\infty$.

(f)

Conviene usar D'ALEMBERT pues hay factoriales.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2(n+1)+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+3}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4 \cdot \cancel{2^{2n+1}}}{(2n+2)(2n+1) \cdot \cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{2^{2n+1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}
$$

Pero entonces, por el CRITERIO DE D'ALEMBERT:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(g)

Usamos el CRITERIO DE CAUCHY en este caso.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{2}{n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(h)

Aquí usamos D'ALEMBERT:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\nearrow 0}{1}}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\overset{\nearrow 1}{2}} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}
$$

Pero entonces a_n tiende a cero.

(i)

Usamos D'Alembert nuevamente:[23]

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n+1!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{e^{-1}}\right)^{\overbrace{\frac{n}{n+1}}^{1}} \\
&= e^{-1} < 1
\end{aligned}
$$

Entonces, por el Criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

[23] Recuerden que $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$. No es "e" como muchos confunden.

(j)

Usaremos el Criterio de D'Alembert.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4 4^{\cancel{n+1}}\cancel{(n+1)!}}{(n+1)^{n+\cancel{1}}}\cdot\frac{n^n}{n^4\cancel{4^n}\cancel{n!}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)^4}{(n+1)^n}\cdot\frac{n^n}{n^4} = \lim_{n\to\infty} 4\left(\frac{n}{n+1}\right)^4\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty} 4\left(1+\frac{1}{n}\right)^4\cdot\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 4\left(1+\frac{1}{n}\right)^4\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty} 4\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4}_{\to 1}\cdot\left(\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{e^{-1}}\right)^{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1}}\\
&= 4e^{-1} > 1
\end{aligned}
$$

Así: Por el Criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

■

Ejercicio 12

(a)

Por una aplicación directa de la propiedad del Sandwich, como las sucesiones de los extremos ambas tienden a 2, entonces

$$\exists \lim_{n\to\infty} 5 - 2a_n = 2$$

Podemos ahora aplicar álgebra de límites para *despejar*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

(b)

Usemos D'ALEMBERT con la *expresión* de la derecha, a la que llamaremos b_n

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{2(n+1)+1}} \cdot \frac{n^{2n+1}}{2^n n!} \\
&= \frac{2\cdot 2^n}{2^n} \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)} \cdot \frac{n!}{n!} \cdot \frac{n^{2n+1}}{(n+1)^{2n+1}} \cdot \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n+1} \\
&= \overbrace{\frac{2}{n+1}}^{\to 0} \cdot \left(\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e^{-1}}\right)^{\overbrace{\frac{2n+1}{n+1}}^{\to 2}} \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

Como el cociente de D'Alembert tiende a 0 y ciertamente 0 es menor que 1, entonces se puede concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Pero entonces, la expresión de la derecha tiende a 0 y como $0 < a_n < b_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, se concluye por la PROPIEDAD DEL SANDWICH que:

$$\lim_{n\to\infty} 3a_n + 2 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{2}{3}$$

(c)

Usando el CRITERIO DE LA RAÍZ N-ÉSIMA DE CAUCHY se ve que el término de la derecha diverge, pues si llamamos b_n a la mencionada expresión, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$$

¿Qué podemos decir de a_n? Es claro que si:

$$\underbrace{\frac{1}{a_n}}_{a_n>0\,\forall n} > b_n \Rightarrow a_n < \frac{1}{b_n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$$

Entonces, por la PROPIEDAD DEL SANDWICH vale que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(d)

Claramente la expresión de la derecha tiende a $+\infty$. Entonces aplicando álgebra de límites:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

■

Ejercicio 13

Los términos de las subsucesiones quedan:
a_{2n}: 3,7,5,1,3,7,5,1,3,7,5,1,...
a_{4n}: 7,1,7,1,7,1,7,1,7,1,7,1,...
a_{8n-3}: 7,7,7,7,7,7,7,7,7,...
En cuanto a las subsucesiones convergentes podríamos tomar:
$a_{8n-3} \equiv 7$
$a_{8n-5} \equiv 5$

■

Ejercicio 14

La propiedad fundamental que se utiliza en este ejercicio como argumento para determinar que una sucesión dada a_n carece de límite es la que dice:

> Si $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L$, ya sea finito o infinito, entonces $\forall$ subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vale que $\exists \lim_{n\to\infty} a_{n_k} = L$.

De esta forma, para determinar que $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$ basta con exhibir dos subsucesiones de a_n que tengan límites distintos[24]. Sin esto, para hacerlo habría que *negar* la definición de existencia de límite para a_n, que en términos matemáticos implicaría la necesidad de probar que:

$$((\forall L \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)) / (\forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n_1 \geq n_0 \text{ t.q. } |a_{n_1} - L| \geq \varepsilon)$$

Estamos de acuerdo que intentar probar lo de arriba resultará impracticable en la mayoría de los casos.

(a)

$$a_{3n} = 0 \,\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{3n} = 0$$

$$a_{3n+1} = 1 \,\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{3n+1} = 1$$

Ambos límites resultan distintos.
Así: $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$

(b)

$$a_{2n} = \sin(n\pi) = 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$$

$$a_{4n+1} = \sin\left(\frac{(4n+1)\,\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \,\forall\, n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{4n+1} = 1$$

Ambos límites resultan distintos.
Así: $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$

[24] El alumno crítico habrá observado que hablamos de exhibir un par de subsucesiones con límites distintos para demostrar que una sucesión dada no tiene límite. Hay que recalcar que habría que justificar previamente la existencia de tal par de subsucesiones, pero esa es una cuestión teórica que suponemos demostrada en clase.

(c)

$$a_{4n} = \overset{=1}{\cos(4n\pi)} + \overset{=0}{\sin(2n\pi)} = 1\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{4n} = 1$$

$$\begin{aligned}
a_{4n+1} &= \cos\left((4n+1)\,\pi\right) + \sin\left(\frac{(4n+1)\,\pi}{2}\right) \\
&= \cos(4n\pi + \pi) + \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos(pi) + sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 1 = 0\ (\forall\, n \in \mathbb{N}) \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{4n+1} = 0
\end{aligned}$$

Ambos límites resultan distintos.
Así: $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$

(d)

Aquí podemos usar la subsucesión de términos pares e impares, que valga decirlo es la mas típica. Por alguna razón son las que mas fácil vienen a la mente, sin embargo es bueno tener en cuenta que no siempre serán de utilidad para demostrar que la sucesión original no tiene límite. Muy frecuentemente hay que considerar otras. Sobre cómo darse cuenta cual conviene considerar, la mejor forma es ir escribiendo términos de la sucesión original y darse cuenta *a ojo* cual puede llegar a servir, ya que muy rápidamente el ojo *detecta* la subsecuencia que tiene límite[25].

$$a_{2n} = \left(\overset{=-1\forall n}{(-1)^{\overset{\text{impar}}{6n+1}}}\right) + 4 = 3\ (\forall\, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 3$$

$$a_{2n-1} = \left(\overset{=1\forall n}{(-1)^{\underset{impar}{3(2n-1)+1}}}\right) - 4 = 3\ (\forall\, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = -3$$

Ambos límites resultan distintos.
Así: $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$

[25] ADVERTENCIA: Si prueban sin seguir ninguna lógica lo mas probable es que hagan una infinidad de cuentas inútiles. Recuerden que en matemática primero hay que tener ideas, y luego desarrollarlas, no a la inversa.

(e)

Nuevamente las subsucesiones de términos pares e impares sirve.
Como $\cos(2n\pi) = 1\ (\forall\, n \in \mathbb{N})$ y $\cos((2n-1)\pi) = -1\ (\forall\, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow$

$$a_{2n} = \frac{6n+1}{10n-2}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$$

$$a_{2n-1} = -\frac{3(2n-1)+1}{5(2n-1)-2} = -\frac{(6n-2)}{(10n-7)}\ (\forall\, n \in \mathbb{N})$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = 1$$

Ambos límites resultan distintos.
Así: $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$

(f)

Aquí necesitamos considerar la subsucesión de a_n cuyos índices son múltiplos de 5, es decir a_{5n}, y otra cuyos índices no lo sean. Como los números de la forma *5n+1* jamás serán divisibles por 5 $\Rightarrow$podemos tomar a_{5n+1}.

$$a_{5n} = \sqrt[5n]{5n} \longrightarrow_{n\to\infty} 1$$

$$a_{5n+1} = 2 + \frac{1}{5n+1} \longrightarrow_{n\to\infty} 2$$

Ambos límites resultan distintos.
Así: $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$

(g)

Aquí las subsucesiones de los términos pares e impares nos vuelven a servir. Observen que:

$$\begin{cases} \cos(2n\pi) = 1\ (\forall\, n \in \mathbb{N}) \\ \cos((2n-1)\pi) = \cos(2n\pi - \pi) = -1\ (\forall\, n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

$$a_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \longrightarrow_{n\to\infty} e$$

$$a_{2n-1} = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} \longrightarrow_{n\to\infty} e^{-1}$$

Ambos límites resultan distintos.
Así: $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$

(h)

Aquí hay que usar una subsucesión con índices múltiplos de ocho y otra con índices que no lo sean, digamos: a_{8n} y a_{8n+2}, pues:

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{8n\pi}{4}\right) = \sin(2n\pi) = 0\,(\forall\, n \in \mathbb{N}) \\ \sin\left(\frac{8(n+2)\pi}{4}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1\,(\forall\, n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Entonces:

$$a_{8n} = e^0 = 1 \longrightarrow_{n\to\infty} 1$$
$$a_{8n+2} = e^1 = e \longrightarrow_{n\to\infty} e$$

Ambos límites resultan distintos.
Así: $\nexists \lim_{n\to\infty} a_n$

$\blacksquare$

Ejercicio 15

Usando el conocido teorema de las subsucesiones, el cual afirma que si $\exists L = \lim_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow$cualquier subsucesión a_{n_k} de la primera tiene el mismo límite "L", es inmediato que: Si llamamos "b_n" a las sucesiones planteadas en los distintos items:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L - L = 0$$

(c)

Como $L > 0$ la situación no constituye una indeterminación y:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

■

Ejercicio 16

(a)

Como $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$. Entonces a_n resulta estrictamente creciente.

(b)

Tenemos que probar que una determinada propiedad vale $(\forall n \in \mathbb{N})$. Un principio sumamente útil para este tipo de cosas es el llamado PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA. Se se nos da una propiedad *P(n)* que versa sobre los números naturales, y se quiere saber si *P(n)* es verdadera $(\forall n \in \mathbb{N})$, el PRINCIPIO DE INDUCCIÓN nos dice que si probamos:

- Que P(1) es verdadera.
- Toda vez que *P(n)* es verdadera, entonces *P(n+1)* es también verdadera.

Entonces *P(n)* resulta verdadera $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Ilustraremos como funciona este PRINCIPIO DE INDUCCIÓN utilizándolo para resolver este ejercicio.

P(n) será: $a_n = 2^{n-1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

- *P(1)* vale: Pues $a_1 = 1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1$.
- Paso Inductivo: Supongamos que $a_n = 2^{n-1}$[26]. Tenemos que probar que también vale que $a_{n+1} = 2^n$.
  Pero
  $$a_{n+1} = 2a_n = 2(2^{n-1}) = 2^{(n-1)+1} = 2^n$$
  [27]

ASÍ: Por el PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA podemos asegurar que *P(n)* es verdadera $(\forall n \in \mathbb{N})$, o sea que: $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n = 2^{n-1}$.

■

[26] Observen que no estamos suponiendo que la propiedad P vale para todo n, sino que sólo lo estamos haciendo para un determinado valor de n.

[27] En el primer paso usamos la definición de la recursión. En el segundo paso se ha usado la Hipótesis inductiva.

Ejercicio 17

(a)

Nuevamente nos encontramos en situación de tener que probar que una propiedad vale para todo número natural "n". Como la propiedad versa sobre los términos de una sucesión a_n definida por recurrencia, a menudo este hecho nos fuerza, *de una u otra manera*, a tener que usar un razonamiento *inductivo*. Ya sea ir generando numerosos términos de a_n y *ver* que la propiedad se va *trasladando* del término anterior al siguiente; o bien aplicando conscientemente el PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA[28].

Para ilustrar un poco la idea:

$$0 < a_1 = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow 0 < a_1 < 1$$

$$0 < a_2 = \frac{1}{2}a_1(1 - a_1) = \frac{1}{6}\frac{2}{3} = \frac{1}{9} < 1 \Rightarrow 0 < a_2 < 1$$

$$0 < a_3 = \frac{1}{2}a_2(1 - a_2) = \frac{1}{18}\frac{8}{9} = \frac{4}{81} < 1 \Rightarrow 0 < a_3 < 1$$

$$\vdots$$

ETC ...

Y uno empieza a tener *fe* en que esto sigue pasando y la propiedad de estar entre 0 y 1 se sigue *trasladando* entre los términos de a_n.

Lo que está ocurriendo es comparable con lo que ocurre con las fichas alineadas de un domino, en las que uno sabe que *si empuja la primera*, y además tiene la *certeza* de que: Si cae una determinada ficha ⇒también tiene que caer la inmediata que le sigue; entonces puede concluirse razonablemente que tienen que haber caído todas la fichas.

De esto se trata justamente el PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA:

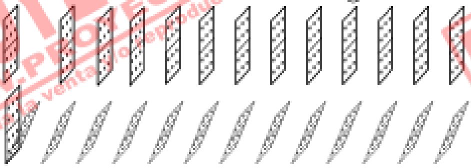
- Asegurar que la propiedad vale para n=1[29].
- Probar que *si la propiedad vale para n⇒ debe valer para n+1*[30].

[28] Ver ejercicio anterior.

[29] Es decir en la analogía con el Domino, que la primera ficha cae

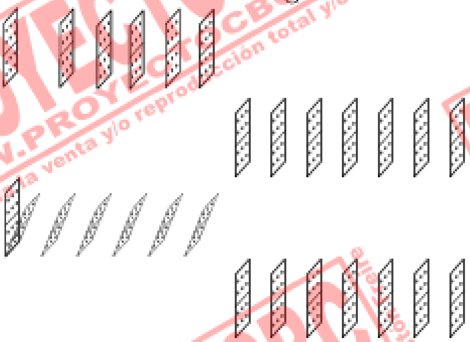
[30] Es decir en la analogía con el Domino, que si cae una determinada ficha, entonces debe caer la inmediata que le sigue.

Figura 56: Efecto Dominó



Se aprecia en la figura el efecto dominó. Su analogía con el PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA es clara. Observen como es importante, además de haber empujado la primera ficha, tener la certeza de que: "Si una ficha determinada cae, entonces la que sigue también debe caer".

Figura 57: Efecto Dominó truncado



Observen aquí que si bien la primera ficha cae y empuja a la segunda, y así sucesivamente hasta la sexta, el proceso se corta pues la sexta no puede empujar a la séptima debido a que esta última no se encuentra en la misma recta que la anterior.

Como pueden apreciar en la figura 56, el hecho de saber que la primera ficha cae, en conjunción al de saber que están alineadas y por eso si cae una cualquiera deben entonces caer las inmediatas sucesoras, hace que concluyamos que todas las fichas del DOMINÓ deben haber caído al terminar el proceso.

Quiero recalcar la importancia en el procedimiento inductivo de saber que: "Si cae una determinada ficha, entonces debe caer la inmediata sucesora". Esto parece trivial en principio, pues al imaginarnos el efecto dominó lo hacemos pensando en que todas las fichas están alineadas.

Variando un poco el esquema presentado en la figura 57, y comprueben ustedes mismos lo que pasaría:

Queda claro que en el esquema presentado en la figura 57 que allí si bien la primera ficha cae y empuja a la segunda, y así sucesivamente hasta la sexta, el proceso se corta pues la sexta no puede empujar a la séptima debido a que esta última no se encuentra sobre la misma recta que la anterior. En este esquema de efecto dominó, el primer paso de la inducción se verifica, pero el salto inductivo falla para $n = 6$, pues de suponer que la sexta ficha cae, nos es imposible demostrar que entonces la séptima debe caer, sencillamente porque no cae.

Teniendo en cuenta todo lo mencionado anteriormente, observen que aunque hubiéramos explorado 1000 términos de a_n y comprobado que están entre 0 y 1, nada obsta que en algún momento eso pueda dejar de pasar. Por eso cuanto mas rápido comprendan la idea del PRINCIPIO DE INDUCCIÓN, mas rápido les van a empezar a salir los ejercicios de recurrencia.[31]

Probemos que $0 < a_n < 1 \forall n \in \mathbb{N}$.

- Veamos que la propiedad vale para n=1$a_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < a_1 < 1$
- Supongamos como *Hipótesis Inductiva* que $0 < a_n < 1$, y tenemos que probar que $\Rightarrow 0 < a_{n+1} < 1$.
  Pero, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n(1 - a_n)$.
- Como $0 < a_n < 1$,
  $$\Rightarrow \frac{1}{2} < a_n < \frac{1}{2} \tag{16}$$
  Como además $-1 < -a_n < 1 \Rightarrow 0 < 1 - a_n < 2$,
  $$\Rightarrow 0 < 1 - a_n < 2 \tag{17}$$
  Sumando las desigualdades 16 y 17, se obtiene:
  $$0 < \frac{1}{2}a_n(1 - a_n) = a_{n+1} < 1$$
  Pero entonces efectivamente pudimos probar que si $0 < a_n < 1$, entonces $0 < a_{n+1} < 1$.
  Así: $(\forall n \in \mathbb{N})\, 0 < a_n < 1$.

[31] Aclaremos que en algunos casos se puede "zafar" de tener que usar razonamientos inductivos. Cuando se puede lo evitaremos. Pero cuando no haya otra opción lo tendremos que usar. Recuerden que para comprender los aspectos *sutiles* de los razonamientos y tan importantes para realizar justificaciones *que se les piden* en el examen es necesario animarse a hacer las cosas de la manera correcta, que por cierto, requiere un poco mas de esfuerzo.

(b)

Este sale fácil. Como $0 < a_n < 1 \Rightarrow$multiplicando por -1 y dando vuelta las desigualdades queda $-1 < a_n < 0 \Rightarrow$sumando 1 en todos los términos nos da que $0 < 1 - a_n < 1 \forall n \in \mathbb{N}$.

Pero:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}(1 - a_n) < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}$$

ASÍ:a_n es decreciente y acotada inferiormente por 0. Entonces, por el teorema de las sucesiones monótonas:

$$\exists L = \lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ y } L \geq 0$$

(c)

Ahora que sabemos que $\exists L = \lim_{n\to\infty} a_n =$ y $L \geq 0$, para calcular efectivamente cuál es dicho límite "L" hay un método muy sencillo, que utiliza el famoso e importante principio de que toda subsucesión de una que tiene límite a su vez tiene límite y ambos límites coinciden. Se procede así:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} (a_n)^{\to L} (1 - a_n)^{\to 1-L} = \frac{1}{2} L(1 - L)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L = \frac{1}{2}L(1 - L) \quad &\Leftrightarrow \quad 2L = L - L^2 \\ &\Leftrightarrow \quad L + L^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad L(L + 1) = 0 \end{aligned}$$

Pero entonces L=0 ó L=-1. El segundo lo descartamos pues $L \geq 0$. Entonces debe ser:

$$L = 0$$

¡¡ATENCIÓN!!: Hacer esto sin demostrar previamente que $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$ no es prueba alguna de que "L" existe y es tal. A lo sumo prueba que *de existir* tiene que ser uno de esos posibles valores. Resolver el ejercicio es hacer esto pero además lo anterior. No lo olviden. [32]

■

[32] Este ejercicio se ha resuelto con lujo de detalles porque ilustra los 3 pasos característicos para encarar un ejercicio de recurrencia: Acotarla; Analizar monotonía para concluir la existencia de límite; y finalizar calculando y determinando tal límite en caso de que exista.

Ejercicio 18

(a)

Como siempre, un buen punto de partida es estudiar si a_n es acotada. Veamos sus términos:

$$a_1 = 1; a_2 = \sqrt{(3)} \leq 2; a_3 = \sqrt{\sqrt{3}+2} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

A simple vista pareciera que $1 \leq a_n < 2 \forall n \in \mathbb{N}$. Ahora tenemos que justificar esta intuición vía una demostración. Podemos hacerla por Inducción.

- $1 \leq a_1 < 2$ claramente pues $a_1 = 1$.
- Supongamos como Hipótesis Inductiva que $1 \leq a_n < 2$.

  $$\Rightarrow_{(\text{sumo}2)} 3 \ \ \leq \ \ a_n + 2 < 4 \Rightarrow_{(\text{aplico}\sqrt{})} 1 < \sqrt{3} \leq \sqrt{a_n+2} < \sqrt{4} = 2$$

  Como $a_{n+1} = \sqrt{a_n+2} \Rightarrow \sqrt{3} < a_n \leq 2 \forall n \in \mathbb{N}$. De esta manera hemos probado que $a_n$es acotada.
- Ahora podemos probar que a_n es creciente.

  $a_{n+1} = \sqrt{a_n+2} >_{(\text{pues}\,2>a_n)} \sqrt{a_n+a_n} = \sqrt{2a_n} >_{(\text{pues}\,2>a_n)} \sqrt{a_na_n} = \sqrt{a_n^2} = a_n$ [33]
- Como $a_n$es entonces creciente y acotada superiormente por 2, se concluye que:

  $$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L \,\text{con}\, 1 \leq L \leq 2$$
- Ahora resta deducir quién es "L". Como siempre hay que usar que toda subsucesión de a_n tiene el mismo límite "L"[34], con lo que $a_{n+1} \to_{n\to\infty} L$.

  $$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n+2} = \sqrt{L+2}$$

  $$\Rightarrow L^2 = L+2 \Leftrightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Leftrightarrow L = 2 \ L = -1$$

  El último claramente no puede ser posible ya que $1 \leq L < 2$.
- Así:

  $$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

[33] Observen que usamos fuertemente que $2 > a_n$.

[34] Por si no lo recuerdan, hay un conocido teorema de sucesiones que dice: "Si a_n es una sucesión acotada superiormente y monótona creciente $\Rightarrow$tiene límite.

(b)

Curiosamente si calculan los primeros términos de a_n verán que: $a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2}; a_3 = \frac{1}{3}; a_4 = \frac{1}{4}$. Uno estaría tentado a arriesgar que $a_n = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$ [35]. Nuevamente habría que demostrar este acierto. Y adivinen como: *Inducción.*

1. $a_1 = 1 = \frac{1}{1}$
2. Supongamos como Hipótesis Inductiva que $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow$

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{a_n}} =_{H.I} \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1+n} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Así:

$$a_n = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(c)

Calculemos los primeros términos de a_n. Quedan: $a_1 = 1; a_2 = \sqrt{3}; a_3 = \sqrt{3\sqrt{3}} < \sqrt{9} = 3$. Inmediatamente se nos ocurre arriesgar que $(\forall n \in \mathbb{N})\, 1 \leq a_n < 3$. Lo demostraremos por inducción:

- $a_1 = 1 \Rightarrow 1 \leq a_1 < 3$
- Supongamos como Hipótesis Inductiva que $1 \leq a_n < 3$.

  $$\Rightarrow_{(\mathbf{Mult.x3})} 3 \leq 3a_n < 9 \Rightarrow_{(\mathbf{Tomo}\sqrt{})} 1 < \sqrt{3} \leq \sqrt{3a_n} < \sqrt{9} = 3 \Rightarrow 1 < a_{n+1} < 3$$

  Así: $(\forall n \in \mathbb{N})\, 1 \leq a_n < 3$
- Veamos ahora que $a_n$es creciente.

  $$a_{n+1} = \sqrt{3a_n} > \sqrt{a_n a_n} = \sqrt{a_n^2} = a_n \Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

  Así: Como $a_n$resulta creciente y acotada superiormente por $3 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = L$ con $1 < l \leq 3$.

---

[35] Para los que todavía no estén familiarizados con la notación matemática, la fórmula rara significa: para todo n,a_n es igual a $\frac{1}{n}$

- Por último, veamos quién es dicho límite L.

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3a_n} = \sqrt{3L}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{3L} \Rightarrow L^2 = 3L \Leftrightarrow L(L-3) = 0 \Leftrightarrow (L=0)(L=3)$$

El primero no puede ser pues $1 < L \leq 3$, así:$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

(d)

Lo primero que habría que observar es que la sugerencia que nos dan está relacionada con el ejercicio 10 de la práctica cero en la página 20, lugar en donde podrán encontrar una demostración de este hecho si desean observarla.

Como todo ejercicio de recurrencia, los pasos a seguir para resolverlo son típicos: Estudiar primero si la sucesión es o no acotada; analizar la monotonía de la misma; y por último con la información anterior tomar una decisión sobre la existencia de límite. En caso afirmativo se debe proceder a calcularlo.

- Veamos que $(\forall n \geq 2 \in \mathbb{N})\,(a_n > 2)$, por lo que a_n resultará acotada inferiormente.
  Lo demostraremos por inducción en n.
  - Veamos que la propiedad vale para $n = 2$:
  $$a_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{1}\right) = \frac{5}{2} \geq 2$$
  - Supongamos como hipótesis inductiva que $a_n \geq 2$. Queremos ver que entonces también vale que $a_{n+1} \geq 2$
  Pero tengamos en cuenta que usando la sugerencia del ejercicio:
  $$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right) = \frac{a_n + \left(\frac{4}{a_n}\right)}{2} \geq \sqrt{\cancel{a_n} \cdot \left(\frac{4}{\cancel{a_n}}\right)} = \sqrt{4} = 2$$
  entonces $a_{n+1} \geq 2$.

  Luego: Para todo $n \geq 2$ vale efectivamente que $a_n \geq 2$.

- Veamos ahora que a_n es estrictamente decreciente *a partir de* $n = 2$."
  Antes que nada observemos que
  $$\forall n \geq 2 \in \mathbb{N}\, a_n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4}{a_n^2} \leq 1 \Rightarrow 1 + \frac{4}{a_n^2} \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{4}{a_n}\right)}{a_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{a_n^2}\right) \leq \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = 1$$

Luego: $\forall n \geq 2 \in \mathbb{N}\, a_{n+1} \leq a_n$, con lo que a_n resulta decreciente a partir de $n = 2$.

Así: Como a_n es decreciente a partir de $n = 2$ y acotada inferiormente, por el Teorema de las Sucesiones Monótonas:

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L \geq 2$$

- Resta ahora para finalizar determinar el valor de L. Para esto debemos utilizar el Teorema de las Subsucesiones, que por si no lo recuerdan decía que toda subsucesión de una subsucesión convergente es a su vez convergente, y converge al mismo límite de la sucesión original. Apelando a este resultado, vemos que también $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = L$. Pero entonces:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\overset{\to L}{a_n} + \frac{4}{\underset{\to L}{a_n}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(L + \frac{4}{L}\right)$$

, con lo que

$$\begin{aligned} 2L &= L + \frac{4}{L} \\ L &= \frac{4}{L} \\ L^2 &= 4 \leftarrow \text{como } L \geq 0 \\ L &= 2 \end{aligned}$$

Así: Hemos determinado que:

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

■

Comentario al problema El alumno poco curioso y emprendedor puede dar por terminado el ejercicio en el párrafo anterior. El alumno que desee incursionar un poco mas profundamente en el problema encontrará muy interesante el comentario expuesto a continuación.

Sería una picardía dar por terminado este problema sin mencionar un hecho sumamente importante que tiene que ver con el mismo. Se trata de que en realidad la recurrencia planteada para a_n está íntimamente relacionada con un algoritmo para calcular la raíz cuadrada positiva de un cierto número $r \geq 1 \in \mathbb{R}$. Les comentaremos como funciona este algoritmo.

Sea $r \geq 1 \in \mathbb{R}$ y definamos por recurrencia la sucesión b_n como sigue[36]:

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{r}{b_n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Lo que se afirma es que la sucesión b_n es acotada inferiormente por 1, que además es estrictamente decreciente para todo $n \geq 2$; que por lo tanto tiene límite L; y lo mas sorprendente de todo que dicho límite es $L = \sqrt{r}$. Es un hecho remarcable que la velocidad de convergencia a dicho límite de b_n es lo que se denomina *cuadrática*, que quiere decir que si b_n aproxima a $\sqrt{r}$ con una cantidad "d" de dígitos, entonces b_{n+1} tendrá "$2d$" dígitos correctos. Si lo piensan un instante se darán cuenta de lo sorprendentemente bueno que es este algoritmo. Y si lo piensan otro rato se darán también cuenta de que los pasos para demostrar esto son idénticos a los que hicimos arriba, solo que cambiando las ocurrencias del número "4" por "r", y algunos pequeños detalles.

Realmente es un ejercicio muy útil para el alumno que recién comienza tratar de *copiar* la idea de una demostración para hacer otra, siguiendo sus pasos. Les encargo a ustedes el ejercicio de tomar la demostración anterior y adaptarla para probar que b_n tiene límite $\sqrt{r}$. Es un ejercicio sumamente fácil ya que consiste solo en ir leyendo la demostración y cambiar los detalles. No obstante, como imagino que quien lo realice querrá corroborar si está bien o no, a continuación les presento la solución, la cual recomiendo fuertemente sólo lean una vez que hayan hecho el ejercicio por ustedes mismos.

- Veamos que $(\forall n \geq 2 \in \mathbb{N})\,(b_n \geq \sqrt{r})$, por lo que b_n resultará acotada inferiormente.
  Lo demostraremos por inducción en n.

- Veamos que la propiedad vale para [37]$n = 2$:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r}{1}\right) = \frac{r+1}{2} \geq \sqrt{r \cdot 1}$$

[36] El algoritmo se llama Método de Newton para aproximar raíces de funciones.

[37] Noten que en este paso estamos utilizando la sugerencia del problema para inferir que $\frac{r+1}{2} \geq \sqrt{r \cdot 1}$

- Supongamos como hipótesis inductiva que $b_n \geq \sqrt{r}$. Queremos ver que entonces también vale que $b_{n+1} \geq \sqrt{r}$
  Pero tengamos en cuenta que usando la sugerencia del ejercicio:

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{r}{b_n}\right) = \frac{b_n + \left(\frac{r}{b_n}\right)}{2} \geq \sqrt{\cancel{b_n} \cdot \left(\frac{r}{\cancel{b_n}}\right)} = \sqrt{r}$$

entonces $b_{n+1} \geq \sqrt{r}$.

Luego: Para todo $n \geq 2$ vale efectivamente que $b_n \geq \sqrt{r}$.

- Veamos ahora que b_n es estrictamente decreciente *a partir de* $n = 2$.
  Antes que nada observemos que

$$\forall n \geq 2 \in \mathbb{N}\, b_n \geq \sqrt{r} \Rightarrow \frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{\sqrt{r}} \Rightarrow \frac{1}{b_n^2} \leq \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{r}{b_n^2} \leq 1 \Rightarrow 1+\frac{r}{b_n^2} \leq r+1$$

$$\Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{2}\left(b_n + \frac{r}{b_n}\right)}{b_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r}{b_n^2}\right) \leq \frac{\overset{\geq 1}{r} + 1}{2} \geq \frac{2}{2} = 1$$

Luego: $\forall n \geq 2 \in \mathbb{N}\, b_{n+1} \leq b_n$, con lo que b_n resulta decreciente a partir de $n = 2$.

Así: Como b_n es decreciente a partir de $n = 2$ y acotada inferiormente, por el Teorema de las Sucesiones Monótonas:

$$\exists \lim_{n\to\infty} b_n = L \geq \sqrt{r}$$

- Resta ahora para finalizar determinar el valor de L. Para esto debemos utilizar el Teorema de las Subsucesiones, que por si no lo recuerdan decía que toda subsucesión de una subsucesión convergente es a su vez convergente, y converge al mismo límite de la sucesión original. Apelando a este resultado, vemos que también $\exists \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = L$. Pero entonces:

$$L = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\overset{\to L}{b_n} + \frac{r}{\underset{\to L}{b_n}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(L + \frac{r}{L}\right)$$

, con lo que

$$\begin{aligned} 2L &= L + \frac{r}{L} \\ L &= \frac{r}{L} \\ L^2 &= r \leftarrow \text{como } L \geq 0 \\ L &= \sqrt{r} \end{aligned}$$

Así: Hemos determinado que:

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{r}$$

■

Problema 1

(a)

Nótese que como el numerador de la expresión de abajo es menor que su denominador para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\frac{2n+1}{5n} < 1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Pero entonces, $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b)

Se puede asegurar entonces la existencia de límite para a_n pues la misma es decreciente y acotada inferiormente por cero. Lo primero ya lo vimos en el punto anterior. Para justificar bien lo segundo habría que hacer una demostración por inducción, como sigue:

- $n = 1$: $a_1 = 5 > 0$.
- Supongamos como H.I. que $a_n > 0$. Entonces $a_{n+1} = \overset{>0 \text{ x H.I.}}{a_n} \cdot \left(\overset{>0}{\frac{2n+1}{5n}}\right) > 0$.

Habiendo justificado lo de arriba, por el Teorema de las sucesiones Monótonas, se concluye que a_n debe tener límite finito $L \geq 0$.

(c)

En cuanto al valor de dicho límite hay que usar el Teorema de las Subsucesiones, como se vino haciendo en los ejercicios de recurrencia una y otra vez.

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \overset{\to L}{a_n} \cdot \overset{\to \frac{2}{5}}{\left(\frac{2n+1}{5n}\right)} = \frac{2}{5}L$$

Pero entonces no queda otra que $L = 0$.

(d)

Utilizaremos el Criterio de D'Alembert para decidir esta cuestión. Observen que no hay forma de saber lo que pasa con b_n dado que en principio la situación para la misma constituye una indeterminación de la forma $\infty \cdot 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot a_{n+1}}{n^2 \cdot a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\overset{\to 1}{\frac{(n+1)^2}{n^2}}\right) \cdot \left(\overset{\to \frac{2}{5}}{\frac{2n+1}{5n}}\right) = \frac{2}{5} < 1$$

Por el Criterio de D'Alembert concluimos que:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

■

Problema 2

Antes de empezar a hacer cuentas específicas, sería conveniente recordar un poco como se calculan porcentajes de ciertas magnitudes. Si un capital $c_1 = 1000$ y queremos *incrementarlo* en un $10\,\%$, la cuenta que hay que hacer es:

$$c_2 = c_1 + \frac{c_1 \cdot \cancel{10}}{10\cancel{0}} = c_1 + c_1 \cdot \frac{1}{10} = c_1\left(1 + \frac{1}{10}\right) = c_1 \cdot \frac{11}{10}$$

Pero esto nos muestra que si queremos *incrementar* una magnitud cualquiera K en un $10\,\%$ basta con multiplicarla por el factor $\frac{11}{10}$. Este hecho no sólo sirve para un incremento del $10\,\%$. Si quisiéramos *incrementar* K en un $x\,\%$ bastaría con multiplicarla por $1 + \frac{x}{100}$. Si en lugar de incrementar la magnitud se deseara *decrementarla*, el procedimiento sería el mismo pero restando en lugar de sumar, es decir multiplicar K por $1 - \frac{x}{100}$.

Hecha esta aclaración podemos empezar a mirar un poco como quedan los términos de c_n.

$$\begin{array}{rcl}
c_1 = & 1000 & \to \text{Capital inicial} \\
c_2 = & 1000 \cdot \left(\frac{11}{10}\right) & \to \text{Le agregamos al anterior un } 10\,\% \\
c_3 = & 1000 \cdot \left(\frac{11}{10}\right) \cdot \left(\frac{9}{10}\right) & \to \text{Le quitamos al anterior un } 10\,\% \\
c_4 = & 1000 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right) & \to \text{Le agregamos al anterior un } 10\,\% \\
c_5 = & 1000 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 & \to \text{Le quitamos al anterior un } 10\,\% \\
c_6 = & 1000 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 & \to \text{Le agregamos al anterior un } 10\,\% \\
c_7 = & 1000 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3 & \to \text{Le quitamos al anterior un } 10\,\% \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{etc} & \text{etc} & \text{etc} \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Se puede apreciar claramente en el desarrollo de mas arriba que según sean pares o impares, los términos de a_n adquieren una forma característica. Podemos pues escribir la fórmula para a_n discriminando entre los índices pares e impares.

$$c_n = \begin{cases} 1000 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si n es impar} \\ 1000 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \left(\frac{11}{10}\right) & \text{si n es par} \end{cases} \tag{18}$$

(b)

De la fórmula 19 en la página siguiente que nos da el término general de c_n, se deduce inmediatamente reemplazando n por $2n$ o bien n por $2n-1$ que:

$$c_{2n-1} = 1000 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^{n-1}$$

$$c_{2n} = 1000 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{11}{10}\right)$$

Como $\frac{99}{100} = 0,99 < 1$ entonces podemos asegurar que las subsucesiones de los términos pares e impares de c_n a saber c_{2n} y c_{2n-1} ambas convergen a cero. Apelamos ahora al teorema que dice:

> "Sea c_n una sucesión de números reales. Si $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_{2n} = L$ y $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_{2n-1} = L$, entonces también $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$."[38]

Y por lo tanto se concluye que:

$$\exists \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

(c)

Observen el punto anterior. No sólo hemos probado la existencia del límite de c_n sino que además hemos concluido que dicho límite L tiene que valer 0, razón por la cual este punto queda resuelto.

(d)

Utilizando el mismo procedimiento que en (a), podemos calcular los primeros términos de $c_n$para el caso pertinente a este ítem. Como quitar un $9\,\%$ al capital equivale a multiplicarlo por $1 - \frac{9}{100} = \frac{91}{100}$, dichos términos quedarían así:

[38] Pueden encontrar una demostración con todo detalle de esta proposición para el caso de L finito en el ejercicio 5 ítem g de esta misma práctica. Consulten 3 en la página 133. De todas formas el teorema sigue siendo válido para L infinito. Un buen ejercicio para ustedes sería adaptar la demostración del caso finito para el caso infinito. Sugiero que la intenten.

$$
\begin{array}{lcl}
c_1 = & 1000 & \rightarrow \text{Capital inicial} \\
c_2 = & 1000 \cdot \left(\frac{11}{10}\right) & \rightarrow \text{Le agregamos al anterior un } 10\,\% \\
c_3 = & 1000 \cdot \left(\frac{11}{10}\right) \cdot \left(\frac{91}{100}\right) & \rightarrow \text{Le quitamos al anterior un } 9\,\% \\
c_4 = & 1000 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{91}{100}\right) & \rightarrow \text{Le agregamos al anterior un } 10\,\% \\
c_5 = & 1000 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{91}{100}\right)^2 & \rightarrow \text{Le quitamos al anterior un } 9\,\% \\
c_6 = & 1000 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{91}{100}\right)^2 & \rightarrow \text{Le agregamos al anterior un } 10\,\% \\
c_7 = & 1000 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{91}{100}\right)^3 & \rightarrow \text{Le quitamos al anterior un } 9\,\% \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{etc} & \text{etc} & \text{etc} \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Y la fórmula general para c_n sería:

$$
c_n = \begin{cases} 1000 \cdot \left(\frac{1001}{1000}\right)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si n es impar} \\ 1000 \cdot \left(\frac{1001}{1000}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \left(\frac{11}{10}\right) & \text{si n es par} \end{cases} \tag{19}
$$

Concluimos entonces que:

$$
c_{2n-1} = 1000 \cdot \left(\frac{1001}{1000}\right)^{n-1}
$$

$$
c_{2n} = 1000 \cdot \left(\frac{1001}{1000}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{11}{10}\right)
$$

Como $\frac{1001}{1000} = 1,001 > 1$ entonces podemos asegurar que las subsucesiones de los términos pares e impares de c_n a saber c_{2n} y c_{2n-1} ambas divergen a $+\infty$. Apelando al mismo teorema del punto (a) podemos concluir que en este caso:

$$
\exists \lim_{n\to\infty} c_n = +\infty
$$

■

Problema 3

(a)

Para probar que una determinada sucesión a_n es decreciente, hay que mostrar que $a_{n+1} < a_n \, \forall n \in \mathbb{N}$. Para realizar esto es muy conveniente analizar el Cociente de Dálembert $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ de la sucesión original. Pues si logramos probar que dicho cociente es menor que 1, entonces el problema queda resuelto. Claro que un requisito fundamental para plantear el mismo es poder asegurar que PCTN a_n no se anula, ya que sino estaríamos dividiendo por cero. En el caso de nuestra sucesión no hay problema pues es claro que no se anula jamás.

Hagamos para simplificar la notación $r := 0,95 < 1$. Entonces:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cdot \cancel{r^{n+1}}}{n \cdot \cancel{r^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot r = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot r$$

Y como

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot r &< 1 \\
\Leftrightarrow 1+\frac{1}{n} &< \frac{1}{r} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{n} &< \frac{1}{r} - 1 = \frac{\overbrace{1-r}^{>0 \text{ pues } 0<r<1}}{r} \\
\Leftrightarrow n &> \frac{r}{1-r}
\end{aligned}$$

, se concluye que toda vez que $n > \frac{r}{1-r}$ se podrá asegurar que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

Como $\frac{r}{1-r} = \frac{0,95}{0,05} = 19$, entonces se tendrá certeza de que:

$$\text{Si } n \geq 20 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$$

Hemos probado pues que a_n es decreciente a partir de $n = 20$. Con lo que a_n resulta decreciente PCTN.

(b)

Observen que probar que a_n tiene límite y especificar cuál es bien podría hacerse con el Criterio de D'Alembert o Cauchy. Sin embargo habiéndonos tomado tanto trabajo en el punto anterior para probar que a_n es decreciente PCTN no es conveniente recurrir a dichos criterios. Usemos mas vale el punto (a).

Lo que sabemos seguro es que como a_n es acotada inferiormente por 0 y dado que a_n es decreciente PCTN, debe entonces $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \geq 0$. Notemos que si fuera $L > 0$ entonces:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to L}{a_{n+1}}}{\underset{\to L}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\overset{\to 1}{\frac{n+1}{n}}\right) \cdot r = r < 1 \text{ ¡ABS!}$$

Por lo tanto no puede ser que $L > 0$, con lo que no queda otra que $L = 0$.

■

Problema 4

Llamemos a_n a la sucesión en cuestión.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5n+b}{n^2}\right)^{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{5n+b}}\right)^{\frac{n^2}{5n+b}}}_{\longrightarrow e}\Bigg]^{\overbrace{\left(\frac{5n+b}{\cancel{n^2}}\cdot\cancel{n^2}\right)}^{\longrightarrow+\infty}} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Como $+\infty$ no depende de b alguno, el problema queda demostrado.

$\blacksquare$

Problema 5

(a)

$$a_n = \frac{3}{\sqrt{n^2+1}} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$$

(b)

Luego de contemplar los términos de a_n el tiempo necesario, llegamos a la conclusión de que la fórmula general para b_n la podemos expresar en forma partida, según n sea impar ó n sea par.

$$b_n = \begin{cases} \frac{\frac{n+1}{2}+1}{\frac{n+1}{2}} = 1 + \frac{2}{n+1} & \text{,si n es impar} \\ \frac{1}{1+\frac{2}{n+1}} & \text{,si n es par} \end{cases}$$

Pero entonces las subsucesiones de términos pares e impares para b_n quedan:

$$b_{2n-1} = 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow_{n\to\infty} 1$$

$$b_{2n} = \frac{1}{1+\frac{2}{2n+1}} \longrightarrow_{n\to\infty} 1$$

Es hora de citar a un conveniente teorema:

"Sea b_n una sucesión de números reales. Si $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_{2n} = L$ y $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_{2n-1} = L$, entonces también $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$."[39]

Y por lo tanto se concluye que:

$$\exists \lim_{n\to\infty} b_n = 1$$

[39]Pueden encontrar una demostración con todo detalle de esta proposición para el caso de L finito en el ejercicio 5 ítem g de esta misma práctica. Consulten 3 en la página 133. De todas formas el teorema sigue siendo válido para L infinito. Un buen ejercicio para ustedes sería adaptar la demostración del caso finito para el caso infinito. Sugiero que la intenten.

(c)

El análisis de este ítem se hace de forma casi idéntica al del punto anterior. Sólo cambia de signo la fórmula en los términos impares, quedando:

$$c_n = \begin{cases} \frac{\frac{n+1}{2}+1}{\frac{n+1}{2}} = 1 + \frac{2}{n+1} & \text{,si n es impar} \\ -\frac{1}{1+\frac{2}{n+1}} & \text{,si n es par} \end{cases}$$

Por lo tanto los términos pares e impares para b_n quedan:

$$c_{2n-1} = 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow_{n\to\infty} 1$$

$$c_{2n} = -\frac{1}{1+\frac{2}{2n+1}} \longrightarrow_{n\to\infty} -1$$

Apelamos ahora al Teorema de las Subsucesiones, que dice:

> "Si c_n es una sucesión convergente con límite L, entonces *cualquier subsucesión de* c_n es a su vez convergente, y converge al mismo límite L"

Como en nuestro caso tenemos que las subsucesiones de los términos pares e impares de c_n convergen a límites diferentes, entonces la original no puede converger.

■

Problema 6

(a)

Observemos primero que $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, razón por la cual no hay ningún problema de que la misma aparezca en el denominador de alguna expresión. Además como a_n es creciente sabemos con seguridad que $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Lo único que no hay que perder de vista es que dicho límite no necesariamente es *finito*. Podría ser $+\infty$. Pero entonces:

$$M = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3a_n}{2a_n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{a_n}\cdot 3}{\cancel{a_n}\cdot\left(2+\frac{1}{\underbrace{a_n}_{\to L}}\right)} = \begin{cases} \frac{3}{2+\frac{1}{L}} & \text{si } L \in \mathbb{R} \\ \frac{3}{2} & \text{si } L = +\infty \end{cases}$$

(b)

Observemos que si $L \in \mathbb{R} \Rightarrow M < \frac{3}{2}$, pues el denominador en la expresión de M es mas grande que 2. Pero entonces como en el caso $L = +\infty$ M vale justo $\frac{3}{2}$, debe ser este último el valor mas grande posible para M.

■

Problema 7

La mejor táctica para atacar este problema es analizar el límite de las dos expresiones del sumando por separado.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\cdot 3}{\cancel{n}\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)} = 3$$

Para la segunda expresión utilizaremos la Propiedad del Sandwich, que afirma:

"Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ y sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, entonces $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = L$".

Previamente necesitamos analizar el límite de una sucesión que luego utilizaremos. Sea

$$a_n = \frac{n^5}{6^n}$$

Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Lo podemos ver sin complicación alguna utilizando el Criterio de Cauchy. En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^5}}{\sqrt[\cancel{n}]{6^{\cancel{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\right)^5}{6} = \frac{1}{6} < 1$$

Entonces apelando al mencionado criterio se deduce que:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{6^n} = 0$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left|\frac{(-1)^n \cdot n^5 + \cos(n)}{2-6^n}\right| \\
&= \frac{|(-1)^n \cdot n^5 + \cos(n)|}{|2-6^n|} \\
&\leq \frac{n^5 + \overbrace{|\cos(n)|}^{\leq 1}}{6^n - 2} \leftarrow \text{(Desigualdad Triangular)} \\
&\leq \frac{n^5+1}{6^n-2} \\
&\leq \underbrace{\frac{n^5}{6^n}}_{\to 0} \cdot \overbrace{\left(\frac{1+\overbrace{\left(\frac{1}{n^5}\right)}^{\to 0}}{1-\underbrace{\left(\frac{2}{6^n}\right)}_{\to 0}}\right)}^{\longrightarrow 1} \longrightarrow_{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Habrán notado que en el segundo paso de esta acotación se utilizó fuertemente la desigualdad triangular, que dice:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}: \ |a+b| \leq |a| + |b|$$

Esta desigualdad es sumamente importante ya que se utiliza *todo el tiempo* en análisis para acotar expresiones. Sería más que importante que la recordaran.

Pero entonces:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^5 + \cos(n)}{2-6^n} = 0$$

Para finalizar como el primer sumando de la expresión original tiende a 3 y el segundo tiende a 0, se concluye que:

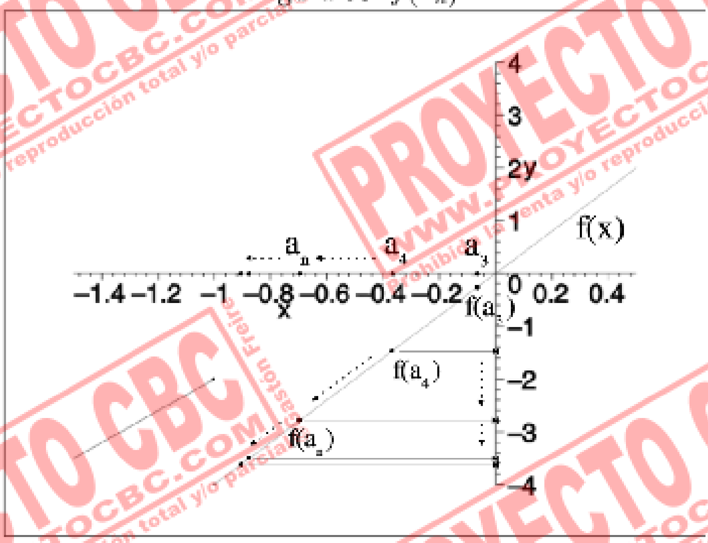
$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} + \frac{(-1)^n \cdot n^5 + \cos(n)}{2-6^n} = 3$$

■

Problema 8

Este ejercicio es muy importante a nivel teórico porque les hará tomar contacto en forma natural y casi sin darse cuenta con la noción de CONTINUIDAD DE FUNCIONES. De hecho si es encarado correctamente llegarán por sí solos a dar con una pieza teórica clave, o por lo menos con uno de los hechos que la motiva u origina. Antes de comentarles dicha idea sería aconsejable hacer un gráfico de la situación, que dirá más que muchas palabras:

Figura 58: $f(a_n)$



La sucesión $f(a_n)$ es la formada por las imágenes de los puntos de a_n vía la función f. Hay que tener especial cuidado cuando se está trabajando con una función partida y una sucesión que justo tiende al punto donde f se parte, pues para determinar en qué fórmula evaluar a_n para obtener la imagen por f de sus puntos es necesario saber de qué lado caen los mismos. Como los puntos se acercan a -1 por la derecha en el eje de las abscisas, entonces las imágenes se acercarán a -4 en el eje de las ordenadas como se aprecia en el gráfico.

Es claro viendo el gráfico que como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1^{+}$[40] entonces los puntos de la sucesión se acercan a -1 por la derecha. Como la fórmula que rige $f(x)$ en este caso es la dada por $4x$, entonces las imágenes de los puntos de a_n vía la función $f(x)$, a saber $f(a_n)$ se acercarán a -4.

[40] El signo $+$ como superíndice indica que nos estamos acercando a -1 por la derecha. Un signo $-$ hubiera indicado acercamiento por la izquierda.

El desarrollo de la solución puede hacerse sin graficar nada, pues directamente podríamos haber hecho:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\underbrace{a_n}_{\to -1^+}\right) = \lim_{n\to\infty} 4\cdot\left(\underbrace{\overbrace{-2+\sqrt[n]{n+4}}^{-1}}_{\to -1}\right) = -4$$

Y esto habría terminado el ejercicio.

Sin embargo una solución de este tipo nos negaría la posibilidad de hacerles un interesante comentario. Si observan la figura de mas arriba notarán que el trazo de $f(x)$ presenta un *salto* en $x=-1$. A las funciones que les sucede esto se las llama en análisis *funciones discontinuas*. La idea en el marco mas intuitivo de función continua es aquella cuyo trazo puede ser realizado sin levantar el lápiz. Vemos que no es el caso de nuestra f. Lo sorprendente es que hay una vinculación estrecha entre la noción de FUNCIÓN CONTINUA y el hecho de poder asegurar lo siguiente:

> "No importa con qué sucesión a_n yo me acerque a un determinado punto x del Dominio de f ni de que forma ésta lo haga, la nueva sucesión $b_n = f(a_n)$ —las imágenes de a_n por f— debe acercarse al valor $f(x)$."
>
> Otra forma de escribir lo de arriba dicho con más simbología:
>
> $$\forall x \in \mathrm{Dom}(f), \forall a_n / \lim_{n\to\infty} a_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(x)$$
>
> En esto último se aprecia como la f *puede salir fuera* del límite.

Lo cierto es que la noción de ser FUNCIÓN CONTINUA es *equivalente* a lo que dice cualquiera de las afirmaciones precedentes. O sea que dichas afirmaciones constituyen una de las posibles formas matemáticas de decir: "No he levantado el lápiz cuando realicé el trazo del gráfico de $f(x)$". Y si observan atentamente el dibujo ocurre que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = -4$, pero $f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = -2$, ambos distintos.

Pues la moraleja de este ejercicio debe ser que el lenguaje de las sucesiones nos será de suma utilidad cuando sea el momento de estudiar funciones, pudiendo describir a partir de las primeras muchas cualidades importantes de tales con todo rigor matemático.

■

Problema 9

Comencemos por estudiar los límites de las sucesiones de los extremos.

$$\lim_{n\to\infty} 4 - \frac{3}{n} = 4$$

Y

$$\lim_{n\to\infty} 4\Big(\overset{\longrightarrow 1}{\sqrt[n]{9}}\Big) + 5\cdot \underset{\longrightarrow 0}{2^{\left(\overset{\longrightarrow -\infty}{-n^2+n}\right)}} = 4$$

Por la Propiedad del Sandwich, podemos garantizar que:

$$\exists \lim_{n\to\infty} 3 - \frac{7}{a_n} = 4 \qquad (20)$$

Ahora tenemos que analizar lo que le ocurre a a_n para lo cual tendremos que apelar al álgebra de límites.

- Primero restando a (20) la sucesión constante $b_n = 3$, vía álgebra de límites se obtiene que:

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{7}{a_n} = 1 \qquad (21)$$

- Luego multiplicando a (21) por la sucesión constante $c_n = -\frac{1}{7}$, vía álgebra de límites se obtiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 1$$

- Como el límite para la sucesión $\frac{1}{a_n} = 1 \neq 0$ podemos nuevamente aplicar álgebra de límites para concluir que:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{a_n}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

Pero esto último dice justamente que:

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

, como se quería demostrar.

■

Problema 10

Este problema es muy similar al anterior. El extremo izquierdo del Sandwich es directamente la sucesión nula, por lo que tiende a cero en forma inmediata. En cuanto al extremo derecho, podemos estudiar lo que le ocurre utilizando el CRITERIO DE LA RAÍZ N-ÉSIMA DE CAUCHY:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{notn} \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 7 \cdot \left[\underbrace{\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^{\frac{n}{2}}}_{\longrightarrow e^{-1}}\right]^2 = 7 \cdot e^{-2} = \frac{7}{e^2} \approx 0,94 < 1$$

Por lo tanto el criterio mencionado nos permite asegurar que el extremo derecho también tiende a cero, con lo cual aplicando la Propiedad del Sandwich se deduce que la sucesión del medio también. Es decir:

$$\exists \lim_{n\to\infty} 5 - 3a_n = 0$$

Restando a la sucesión anterior la sucesión constante $b_n = 5$, vía una aplicación de álgebra de límites obtenemos que

$$\exists \lim_{n\to\infty} -3a_n = -5$$

Ahora multiplicamos a la anterior por la sucesión constante $c_n = -\frac{1}{3}$ y, vía una aplicación de álgebra de límites, obtenemos que:

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{3}$$

■

Problema 11

Como x_n es monótona creciente y acotada superiormente por 3 e inferiormente por 1, por el TEOREMA DE LAS SUCESIONES MONÓTONAS se sabe que:

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = L \in \mathbb{R} \text{ y debe ser } 1 < L \leq 3$$

Observemos que L no puede ser igual a 1 ya que al ser $x_n > 1 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ también tiene que ser $x_1 > 1$ con lo que al ser x_n creciente resultará imposible que $L = 1$.

Por lo tanto los valores posibles para L serán $1 < L \leq 3$.

En cuanto a la sucesión $1 - \frac{2}{x_n}$ tiene que ser:

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{2}{\underset{\to L}{x_n}} = 1 - \frac{2}{L}$$

Operando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 1 < L \leq 3 &\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{L} < 1 \\ &\Leftrightarrow -2 < -\frac{2}{L} \leq -\frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{2}{L} \leq 1 - \frac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{2}{L} \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

obtenemos que:

$$-1 < \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{2}{x_n} \leq \frac{1}{3}$$

■

Problema 12

Llamemos a la sucesión del problema a_n y veamos primero que a debe ser igual a cero. Lo haremos por el absurdo. Supongamos que fuera $a \neq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\cancel{6}\,2}\left(a + \frac{3b}{n^2} + \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{n^6}\right)}{\cancel{n^4}\left(5 - \frac{3}{n^3} + \frac{4}{n^4}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to+\infty}{n^2}\overbrace{\left(a + \overset{\to 0}{\left(\frac{3b}{n^2}\right)} + \overset{\to 0}{\left(\frac{2}{n^{\frac{11}{2}}}\right)}\right)}^{\to a\neq 0}}{\underbrace{\left(5 - \underset{\to 0}{\frac{3}{n^3}} + \underset{\to 0}{\frac{4}{n^4}}\right)}_{\to 5}} = \infty
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de suponer $a \neq 0$ llegamos a que debe ser $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, cuyo signo dependerá del signo de a. En cualquier caso ya sería imposible que el límite nos diera 4. Pero por hipótesis habíamos elegido a y b para que esto ocurriera. ¡¡ABSURDO!!, que proviene de suponer $a \neq 0 \Rightarrow a = 0$.

La sucesión original nos queda entonces:

$$a_n = \frac{3bn^4 + 2\sqrt{n}}{5n^4 - 3n + 4}$$

Pero entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^4}\cdot\left(3b + \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{n^4}\right)}{\cancel{n^4}\cdot\left(5 - \frac{3}{n^3} + \frac{4}{n^4}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3b + \overset{\to 0}{\left(\frac{2}{\sqrt{n^7}}\right)}}{5 - \underset{\to 0}{\frac{3}{n^3}} + \underset{\to 0}{\frac{4}{n^4}}} = \frac{3b}{5}
\end{aligned}$$

Pero como queríamos que el valor del límite nos diera igual a 4, se tiene que: $\frac{3b}{5} = 4 \Rightarrow 3b = 20 \Rightarrow b = \frac{20}{3}$

Así: Se concluye que $a = 0$ y $b = \frac{20}{3}$.

■

Problema 13

(a)

Este problema es realmente sencillo, basta considerar las subsucesiones de términos pares e impares de a_n para comprobar que la misma no puede tener límite.

$$a_{2n} = \frac{3\cdot(2n)-1}{7\cdot(2n)+2} = \frac{6n-1}{14n+2} = \frac{\cancel{2n}\cdot\left(3-\frac{1}{2n}\right)}{\cancel{2n}\cdot\left(7+\frac{1}{n}\right)} \longrightarrow_{n\to\infty} \frac{3}{7}$$

$$a_{2n} = -\frac{3\cdot(2n)-1}{7\cdot(2n)+2} = -\frac{6n-1}{14n+2} = -\frac{\cancel{2n}\cdot\left(3-\frac{1}{2n}\right)}{\cancel{2n}\cdot\left(7+\frac{1}{n}\right)} \longrightarrow_{n\to\infty} -\frac{3}{7}$$

Por lo tanto el CRITERIO DE LAS SUBSUCESIONES nos asegura que a_n no puede ser convergente.

(b)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{7n+2}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\overbrace{\left(3-\frac{1}{n}\right)^2}^{\longrightarrow 9}}{\cancel{n^2}\underbrace{\left(7+\frac{2}{n}\right)^2}_{\longrightarrow 49}} = \frac{9}{49}$$

■

Problema 14

(a)

La ocasión se presenta propicia para usar el CRITERIO DE D'ALEMBERT, ya que la fórmula de recurrencia de a_n nos posibilita *recuperar* la expresión del cociente de D'Alembert para la misma de una manera fácil.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \Bigg[\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to e^{-1}}\Bigg]^{\overset{\to -2}{\frac{2n}{n+1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \\
&= e^{-2} < 1
\end{aligned}$$

Así: Por el Criterio de D'Alembert podemos concluir rápidamente que

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(b)

Acabamos de ver que $a_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. En cuanto al término de la derecha, veremos que no es en lo absoluto difícil ver que también debe tender a cero. En efecto, si planteamos para la misma el cociente de D'Alembert obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a_{n+1}}{n \cdot a_n} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}^{\to 1} \cdot \underbrace{\overbrace{\left(\frac{a_{n+1}}{a}\right)}^{\to e^{-2}}}_{\text{lo vimos en (a)}} = e^{-2} < 1$$

Razón por la cual $n \cdot a_n$ también debe tender a cero.

Así: La Propiedad del Sandwich hace el resto y concluimos que

$$\exists \lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$$

■

Problema 15

(a)

Lo que debemos probar es que $\forall n \in \mathbb{N}\, x_{n+1} \geq x_n$. Hay una forma de llegar a esto que es bastante elegante. Como:

$$\begin{aligned} x_{n+1} \geq x_n \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} + x_n^2 \geq x_n \\ &\Leftrightarrow \quad x_n^2 - x_n + \frac{1}{4} \geq 0 \\ \text{(completamos cuadrados)} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

, y dado que la última proposición en la cadena de equivalencias es trivialmente verdadera por ser el término de la izquierda un cuadrado se concluye que la afirmación del principio debe ser también cierta. Pero la afirmación del principio es precisamente la que se quería probar.

Así: Resulta x_n monótona creciente.

(b)

Al ser x_n monótona creciente podemos concluir que debe tener un límite L, que podrá ser finito o infinito. Nos interesan los valores de a tales que L resulte finito. Para uno de estos valores, por el Teorema de las Subsucesiones tanto a_{n+1} como a_n tienden a L. Entonces:

$$L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} + \overbrace{x_n^2}^{\to L^2} = \frac{1}{4} + L^2$$

Se deduce entonces que L debe verificar la ecuación:

$$L^2 - L + \frac{1}{4} = 0$$

,que tiene como única raíz a $\frac{1}{2}$.

Pero entonces debe ser:

$$L = \frac{1}{2}$$

Para terminar el ejercicio veamos dos cosas importantes:

1. Veamos primero que si $0 < a \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, 0 < a_n \leq \frac{1}{2}$: (Lo haremos por inducción)

a) $x_1 = a \Rightarrow 0 < x_1 \leq \frac{1}{2}$, o sea que para el primer término vale.

b) Supongamos como hipótesis inductiva que $0 < x_n \leq \frac{1}{2}$. Tenemos que probar que entonces también vale que $0 < x_{n+1} \leq \frac{1}{2}$. La primera desigualdad es evidente. En cuanto a la segunda observemos que como por hipótesis inductiva $x_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x_n^2 \leq \frac{1}{4}$, entonces:

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Luego: Efectivamente vale que $\forall n \in \mathbb{N}\, 0 < x_n \leq \frac{1}{2}$.

2. Veamos ahora que si $a > \frac{1}{2} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, x_n > \frac{1}{2}$: Esto es muy sencillo de justificar pues al ser x_n creciente, como el primer término $x_1 > \frac{1}{2}$ luego todos los que le siguen también.

La segunda afirmación que acabamos de probar nos dice que si $a > \frac{1}{2}$ entonces L no podría jamás ser igual a $\frac{1}{2}$ pues toda la sucesión x_n quedaría por encima de dicho número. Por lo tanto:

$$\forall a > \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

La segunda afirmación por el contrario nos dice que si elegimos $0 < a \leq \frac{1}{2}$, entonces toda la sucesión x_n se queda también acotada entre 0 y $\frac{1}{2}$, por lo tanto lo que no puede ser ahora es $L = +\infty$.

Luego: Los valores de $a > 0$ para los cuales x_n resulta convergente son exactamente $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Y para cualquiera de estos valores se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$$

∎

Problema 16

Este es un típico problema donde el CRITERIO DE CAUCHY puede ser de gran utilidad para poder decidir lo que le ocurre a a_n en la mayoría de los posibles valores de x.

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[\cancel{n}]{|x|^{2\cancel{n}}} \cdot \sqrt[n]{|x|}}{\sqrt[n]{n^3} \cdot \sqrt[n]{5^n \cdot 5}} = \frac{|x|^2 \cdot \overbrace{\sqrt[n]{|x|}}^{\to 1}}{\Big(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\Big)^3 \cdot 5 \cdot \underbrace{\sqrt[n]{5}}_{\to 1}} = \frac{|x|^2}{5}$$

Observen que:

$$\begin{cases} \frac{|x|^2}{5} < 1 \Leftrightarrow & |x| < \sqrt{5} \\ \frac{|x|^2}{5} > 1 \Leftrightarrow & |x| > \sqrt{5} \\ \frac{|x|^2}{5} = 1 \Leftrightarrow & |x| = \sqrt{5} \end{cases}$$

Entonces podemos deducir que:

- Para $|x| < \sqrt{5} \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$ la sucesión debe tender a cero.
- Para $|x| > \sqrt{5} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$ la sucesión diverge. Pero en éste punto debemos desdoblar el análisis en dos partes pues falta decidir a qué infinito, positivo o negativo.
  - Si $x \in \left(-\infty, -\sqrt{5}\right)$:
    En este caso como $x = -|x|$ por ser el mismo un número negativo se tiene que la sucesión a_n se puede escribir de forma conveniente para deducir su signo de la siguiente forma:

    $$a_n = \frac{(-|x|)^{2n+1}}{n^3 \cdot 5^{n+1}} = \frac{(-1)^{2n+1}|x|^{2n+1}}{n^3 \cdot 5^{n+1}} = - \overbrace{\frac{|x|^{2n+1}}{n^3 \cdot 5^{n+1}}}^{\text{este término es positivo}}$$

    Deducimos pues que a_n queda negativa y por lo tanto que deberá tender a $-\infty$.
  - Si $x \in \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$: Aquí no hay ningún tipo de duda sobre el signo de a_n el cual resulta positivo. Por lo tanto en este caso la misma tiende a $+\infty$.

Hasta ahora tenemos el comportamiento de a_n bien caracterizado salvo para los extremos del intervalo $\left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$, o sea para los puntos $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$, donde el CRITERIO DE CAUCHY no aporta información alguna. Evidentemente estos dos puntos los tendremos que estudiar por separado y utilizando algún otro método.

- Si $x = \sqrt{5}$:

$$\Rightarrow a_n = \frac{\left(\sqrt{5}\right)^{2n+1}}{n^3 \cdot 5^{n+1}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5}^2\right)^n}{n^3 \cdot 5 \cdot 5^n} = \frac{\sqrt{5} \cdot \cancel{5^n}}{n^3 \cdot 5 \cdot \cancel{5^n}} = \frac{\sqrt{5}}{5n^3} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$$

Por lo tanto en este caso a_n tiende a cero también.

- Si $x = -\sqrt{5}$: Con una cuenta similar se puede apreciar que también a_n tiende a cero.

Finalmente: Concluimos que:

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty & ,\text{si } x \in \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 & ,\text{si } x \in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right] \\ \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty & ,\text{si } x \in \left(\sqrt{5}, +\infty\right) \end{cases}$$

■

Problema 17

(a)

En numerosas oportunidades se ha mencionado que para estudiar el crecimiento de una sucesión a_n es de gran utilidad estudiar su COCIENTE DE D'ALEMBERT[41]. Para simplificar la escritura llamemos $r := 0,95$. Tengan presente que $1 - r > 0$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{r^{2(n+1)+1} \cdot (n+1)^2}{r^{2n+1} \cdot n^2} = \frac{r^{\cancel{2n}+2+\cancel{1}}}{\cancel{r^{2n+1}}} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = r^2 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

Un hecho interesante que conviene tener presente es que si a y b son números reales positivos, entonces $a^2 < b^2 \Leftrightarrow a < b$. Como a_n es de términos positivos y $r > 0$, entonces:

$$r^2 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(r \cdot \frac{n+1}{n}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow r \cdot \frac{n+1}{n} < 1$$

Estudiemos ahora la condición que debe cumplir n para que esto ocurra. Nos va a quedar dependiente de r.

$$\begin{aligned} r \cdot \frac{n+1}{n} < 1 &\Leftrightarrow r < \frac{n}{n+1} \\ &\Leftrightarrow r < \frac{n+1-1}{n+1} \\ &\Leftrightarrow r < 1 - \frac{1}{n+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \overset{>0}{(1-r)} \\ &\Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{1-r} \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r} \end{aligned}$$

Reemplazando r por el valor que tiene, nos queda que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow n > 19 \Leftrightarrow n \geq 20$$

[41] No confundan al COCIENTE DE D'ALEMBERT con el CRITERIO DE D'ALEMBERT. El primero se refiere a la sucesión que se forma al hacer $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, mientras que el segundo es el teorema que afirma que si dicho cociente en módulo tiende a un límite menor que 1, la sucesión original tiende a cero, mientras que si lo hace a un límite mayor que uno la misma diverge.

Por lo tanto a_n resulta decreciente a partir de $n = 20$, con lo que a_n es decreciente PCTN.

(b)

Como a_n es decreciente y acotada inferiormente por 0 podemos asegurar que $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \geq 0$. Si el mismo fuera $L > 0$ entonces por el Teorema de las Subsucesiones de una Convergente, sería:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to L>0}{a_{n+1}}}{\underset{\to L>0}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} r^2 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} r^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 < 1$$

Pero entonces sería $1 < 1$ ¡¡ABSURDO!!, que proviene de suponer $L > 0$.

Así: Tiene que ser $L = 0$.

Comentario para el alumno que resolvió el Problema 3 de esta práctica El alumno estudioso que haya resuelto con éxito el problema 3 de esta práctica podrá ser recompenzado con una solución a este problema muy sencilla y elegante.

Llamemos b_n a la sucesión de dicho Problema. Se puede apreciar que $a_n = 0,95 \cdot b_n^2$. Si observan bien[42] esto implica que a_n tiene que tener exactamente el mismo comportamiento que b_n en cuanto al crecimiento. Por lo tanto es automático que $\forall n \geq 20\; a_n$ debe ser creciente.

Como el límite de b_n nos había dado 0, entonces no queda otra que el de a_n también.

■

[42] Las justificaciones se las dejo de tarea pues les aseguro que en el desarrollo de este problema tienen todas las herramientas desplegadas para poder hacerla solos.