

Práctica 4 - Límites y Continuidad

Ejercicio 1

(a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 \left(1 - \frac{10}{x^2} + \frac{3}{x^4} \right) = +\infty$$

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^6} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 \left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x^{\frac{11}{2}}} \right) = -\infty \end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^8 \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^8} = 0$$

(d)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(x + \frac{1}{x^2}\right)} - x}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{\text{pues } x > 0 \Rightarrow |x| = x}{x} \sqrt{x + \frac{1}{x^2}} - x}{x + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\sqrt{x + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)}{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = +\infty \end{aligned}$$

A partir de aquí, donde quede *muy claro* el número al que tiende alguna expresión, para evitar recargar los diagramas se omitirá la flecha correspondiente. Por ejemplo expresiones constantes divididas por fórmulas que tienden a infinito aparecerán continuamente, e indicar con flechas en cada una de ellas que las mismas tienden a cero puede llegar a volver engorrosas las fórmulas, al punto que resulte incómodo leerlas.

(e)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}^{-6} \left(6 + \frac{3}{\cancel{x}^6} \right)}{\cancel{x}^{-1} \left(1 - \frac{5}{\cancel{x}^6} \right)} = 6$$

(f)

¡Advertencia! Es una costumbre *muy común* del alumno del CBC el asociar automáticamente el siguiente límite con “1”: $\lim_{x \rightarrow ??} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. El signo de interrogación alude al curioso hecho de que no importa a dónde esté tendiendo “ x ”, muchos alumnos del otro lado del igual *inevitablemente* escriben al número 1. Esto es un *grave error*, por ejemplo al ser $\sin(x)$ una función acotada, si la dividimos por x , para valores de x grandes dicha expresión tiene que tender a 0, y de ninguna manera a 1.

Hecha esta aclaración, la cual se espera tengan bien en cuenta, podemos proseguir con el ejercicio.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\lim} \left(1 + \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{-0} \right)}{\cancel{\lim} \left(1 - \left(\frac{\cos(x)}{x} \right)^{-0} \right)} = 1$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{6}{x^2} \right)}}{5x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{6}{x^2} \right)^{-3}}}{\sqrt{\left(5 - \frac{1}{x} \right)^{-5}}} = \frac{3}{5}$$

pues $x > 0 \Rightarrow |x| = x$

(h)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(\frac{5}{\sqrt{x}} - 1 \right)^{-1}}{\sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 4 \right)^{-4}} = -\frac{1}{4}$$

(i)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (x + \sqrt{x^2 + 1})}{(x + \sqrt{x^2 + 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{(x + \sqrt{x^2 + 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(x + \sqrt{x^2 + 1})} = 0 \end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{(x-10)(x+4)} - x\right) \cdot \left(\sqrt{(x-10)(x+4)} + x\right)}{\left(\sqrt{(x-10)(x+4)} + x\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-10) \cdot (x+4) - x^2}{\left(\sqrt{(x-10)(x+4)} + x\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x}{\left(\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{10}{x}\right) \left(1 + \frac{4}{x}\right)} + x\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x}{\left(\underset{\text{pues } x > 0 \Rightarrow |x| = x}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{10}{x}\right) \left(1 + \frac{4}{x}\right)}} + x\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6 \cancel{x}}{\cancel{x} \left(\sqrt{\left(1 - \frac{10}{x}\right) \left(1 + \frac{4}{x}\right)} + 1\right)^{-2}} = -3
 \end{aligned}$$

(k)

Como $x \rightarrow +\infty$, entonces podemos suponer *s.p.g.*⁴³ que $x \gg 5$, con lo que $|5-x| = x-5$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-5}{5-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{x-5}{\cancel{x-5}} \cdot 1}{\underset{x-5}{\cancel{x-5}} \cdot (-1)} = -1$$

(l)

Como el término del numerador es acotado y el del denominador tiende a $+\infty$ entonces la sucesión del ejercicio debe tender a cero.

(m)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

⁴³ Aquí tienen otro ejemplo de lo que significa *suponer sin pérdida de generalidad*. Lo que queremos decir es que como $x \rightarrow +\infty$ es de esperar que sus valores van a ser mas grandes que 5.

(n)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(o)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

(p)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1) - \overbrace{\ln(x)}^{+\infty} = -\infty$$

■

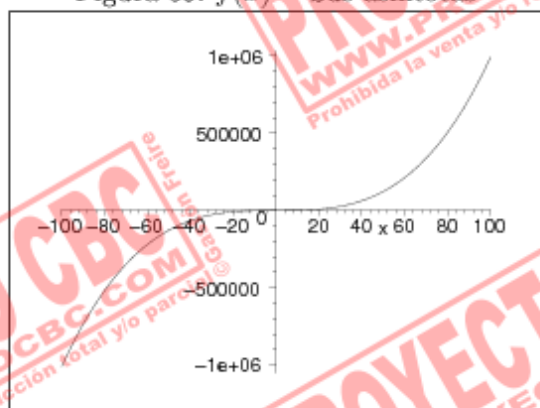
Ejercicio 2

(a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

El gráfico de f nos muestra que las conclusiones que sacamos son acertadas:

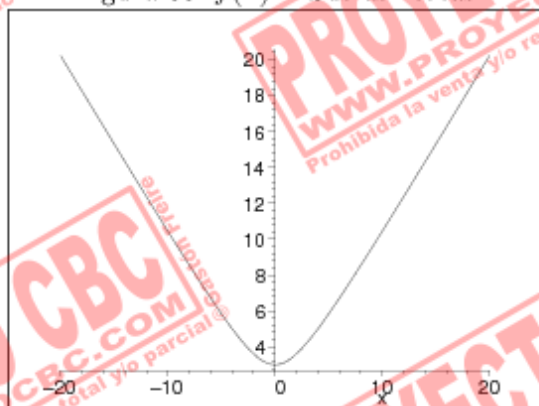
Figura 59: $f(x)$ — Sus asíntotas

(b)

En este ítem no tendría sentido plantear por separado los límites para x tendiendo a $-\infty$ y $+\infty$ pues al estar x elevado al cuadrado en la expresión de $f(x)$ se pierde la información del signo.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \leftarrow \text{(es fácilmente comprobable)}$$

Veamos el gráfico para corroborar nuestras conclusiones:

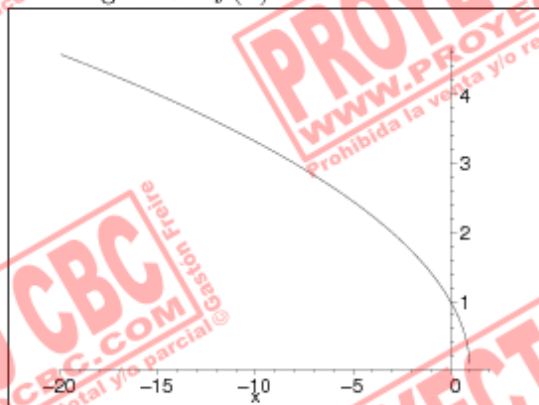
Figura 60: $f(x)$ — Sus asíntotas

(c)

Aquí no tendría sentido plantear $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ pues $\text{Dom}(f) = (-\infty, 1]$ por lo que plantearemos el otro solamente. Teniendo en cuenta que como x es negativo $\Rightarrow -x = |x|$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + |x|} = +\infty$$

El gráfico queda:

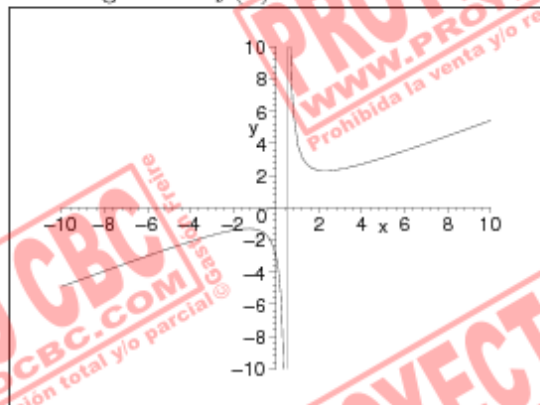
Figura 61: $f(x)$ — Sus asíntotas

(d)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)^{-1}}{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)^{-2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)^{-1}}{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)^{-2}} = +\infty$$

El gráfico queda:

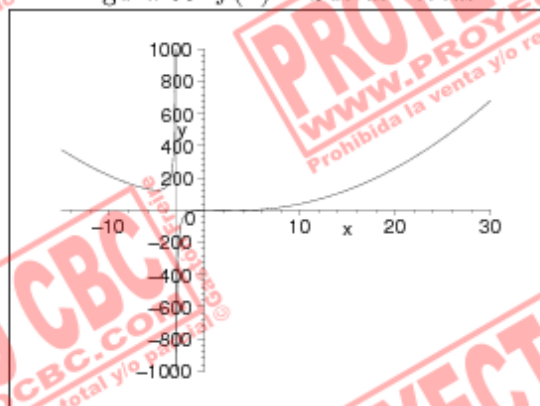
Figura 62: $f(x)$ — Sus asíntotas

(e)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{-1}}{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{-1}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{-1}}{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{-1}} = +\infty$$

El gráfico queda:

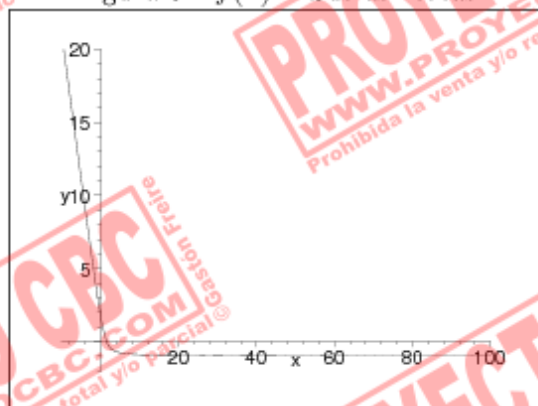
Figura 63: $f(x)$ — Sus asíntotas

(f)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} \underbrace{-x}_{-(-\infty)=+\infty} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - x) \cdot (\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x)}{(\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3 - x^2}{(\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 3}{\left(\begin{array}{l} |x| \\ =x \text{ pues } x > 0 \end{array} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + x\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\begin{array}{c} -2 \\ x \end{array} \left(-2 + \frac{3}{x}\right)}{\begin{array}{c} -2 \\ x \end{array} \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1\right)} = -1 \end{aligned}$$

El gráfico queda:

Figura 64: $f(x)$ — Sus asíntotas

(g)

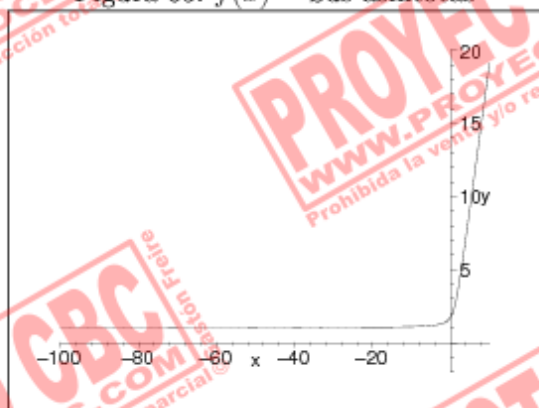
Este ítem es un ejemplo que muestra como puede haber notables y sutiles diferencias en el cálculo de un límite cuando $x \rightarrow +\infty$ con respecto a cuando $x \rightarrow -\infty$. Aquí un instante de descuido puede hacerlos incurrir en un error, pues si hicieran $\sqrt{x^2} = x$ inocentemente estaría mal en el caso $x \rightarrow -\infty$ pues en este caso $|x| = -x$. Claro es que cuando uno hace este comentario todo el mundo parece estar de acuerdo, pero la realidad es que en la práctica muchos alumnos se confunden a este respecto.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x) \cdot (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - x)}{(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} - 2x + 3 - \cancel{x^2}}{(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 3}{\left(\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} - x\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 3}{\left(\underset{= -x = x < 0}{|x|} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - x\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{-2x} \left(2 - \frac{3}{x}\right)}{\cancel{-x} \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1\right)} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x}\right) + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{-1} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x}\right) + \frac{-1}{x}} = +\infty\end{aligned}$$

El gráfico queda:

Figura 65: $f(x)$ — Sus asíntotas



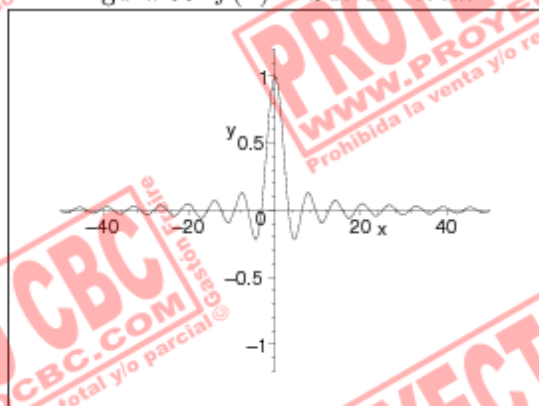
(h)

Como el $\sin(x)$ es acotado en módulo por 1 y dado que la expresión en el denominador tiende a infinito, se deduce que:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

Sería recomendable que lean la advertencia hecha en el ejercicio anterior punto (f) el cual pueden encontrar en la página 212.

El gráfico queda:

Figura 66: $f(x)$ — Sus asíntotas

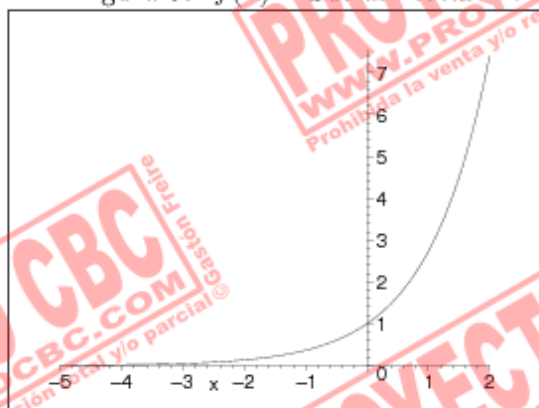
(i)

Es claro viendo el gráfico de $f(x)$ el cual deberían conocer bastante bien que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

El gráfico queda:

Figura 67: $f(x)$ — Sus asíntotas

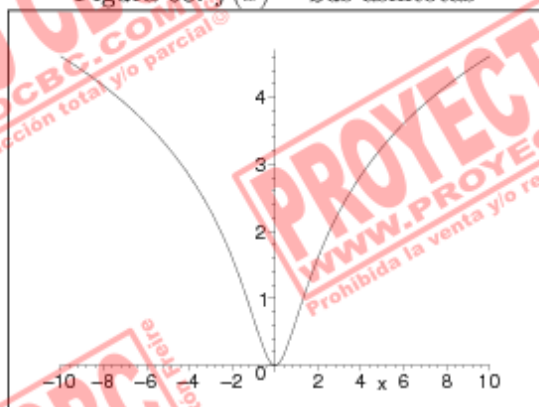
(j)

Como la expresión dentro del logaritmo en cualquier caso $-x \rightarrow \pm\infty$ tiende a $+\infty$, y dadas las características de la función $\ln(x)$, se deduce inmediatamente que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

El gráfico queda:

Figura 68: $f(x)$ — Sus asíntotas



Ejercicio 3

Cuando se pretende buscar las asíntotas horizontales y verticales de una cierta función $f(x)$ los límites que hay que estudiar son: Los de x tendiendo a “ $-\infty$ ” y “ $+\infty$ ” para las horizontales; y los de aquellos puntos donde la función presente *problemas*: Denominadores o logaritmos que se hagan cero; etc... para las verticales, que deben ser estudiados por derecha y por izquierda separadamente para poder determinar hacia cual infinito tiende la función en la asíntota vertical —en caso de haber concluido que tal existe—

Con la información obtenida a partir del cálculo de éstos límites, si bien no nos sería posible hacer un gráfico preciso para $f(x)$ *globalmente*, lo cierto es que para valores de x grandes en módulo así como también para valores de x en las cercanías de $x = 0$ hemos recavado suficiente información para realizar el mismo bastante fiel a la realidad. Para que lo comprueben en cada ítem se adjuntará un gráfico de la función cuyas asíntotas se han estudiado, y podrán comprobar que el mismo refleja fielmente lo que hemos descubierto a partir del cálculo de éstos límites.

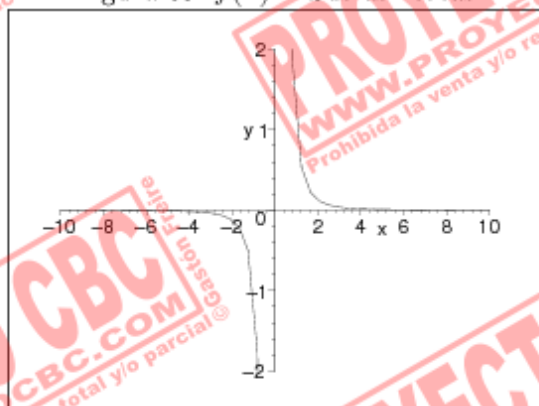
(a)

En este ítem hay problemas en $x = 0$ ya que en éste el denominador se hace nulo.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{0^+} = +\infty}{x^3} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{0^-} = -\infty}{x^3} = -\infty$$

Podemos apreciar entonces que la función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$, ambas con ecuación $y = 0$. En cuanto a las verticales, tenemos una en $x = 0$, que por izquierda tiende a $-\infty$ y por derecha tiende a $+\infty$.

Pueden cotejar la información aquí obtenida con el gráfico de $f(x)$ para comprobar como se reflejan en el mismo las asíntotas que hemos descubierto:

Figura 69: $f(x)$ — Sus asíntotas

(b)

Aquí tenemos problemas cuando $x = -3$, punto en donde el denominador de $f(x)$ se anula. Por supuesto que $x = -3 \notin \text{Dom} f$, pero nuestra intención es averiguar lo que le ocurre a f en las cercanías de dicho punto, no en él mismo.

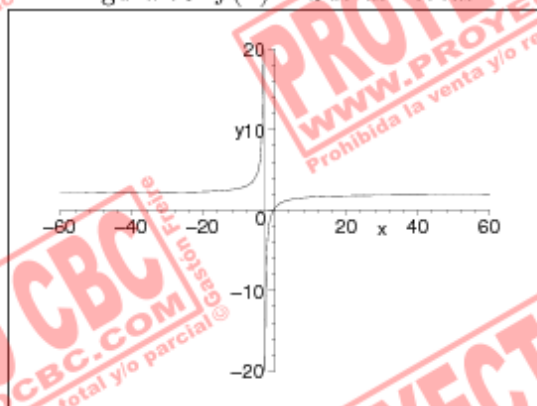
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(2 + \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{3}{x})} = 2 \leftarrow (\text{en } -\infty \text{ y en } +\infty \text{ valen igual})$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -3^- \\ -0^-}} \frac{2x+1}{x+3} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -3^+ \\ -0^+}} \frac{2x+1}{x+3} = -\infty$$

Ya tenemos suficiente información como para asegurar que la función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$, ambas con ecuación $y = 2$. En cuanto a las verticales, tenemos una en $x = -3$, que por izquierda tiende a $+\infty$ y por derecha tiende a $-\infty$.

Veamos el gráfico de f para contemplar las asíntotas que descubrimos:

Figura 70: $f(x)$ — Sus asíntotas

(c)

Los problemas en este ejercicio se presentan como en el anterior, en $x = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-\infty}{5x}}{\frac{-1}{1 + \frac{3}{x}}} = -\infty$$

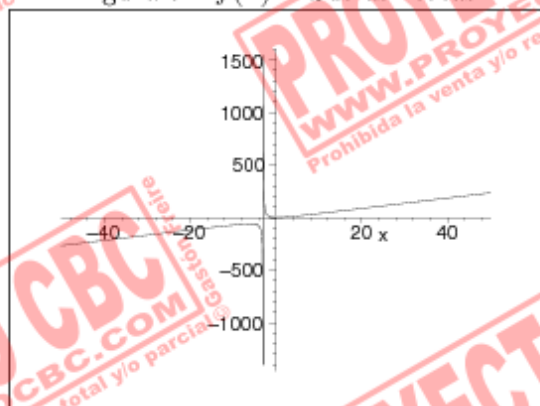
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-\infty}{5x}}{\frac{-1}{1 + \frac{3}{x}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{\frac{-45}{5x^2}}{\frac{-0}{x+3}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\frac{-45}{5x^2}}{\frac{-0}{x+3}} = +\infty$$

Ya tenemos suficiente información como para asegurar que la función $f(x)$ no presenta asíntotas horizontales. En cuanto a las verticales, tenemos una en $x = -3$, que tanto por izquierda como por derecha tiende a $+\infty$.

Veamos el gráfico de f para contemplar las asíntotas que descubrimos:

Figura 71: $f(x)$ — Sus asíntotas

(d)

El problema lo presenta ahora la función f en $x = 0$.

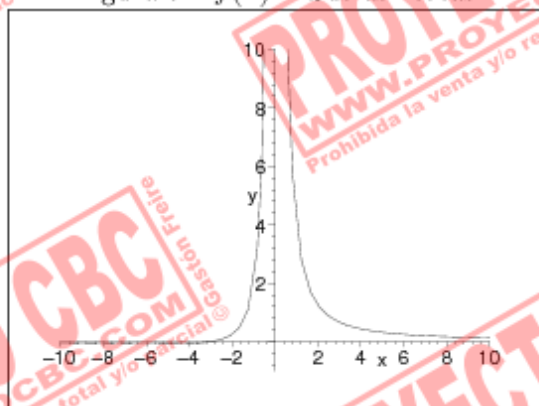
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^{-1} \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\frac{x}{-\pm\infty}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-3} + 3}{x^2} = +\infty$$

Observen que no nos fue necesario estudiar los límites laterales para $x = 0$ pues como $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ entonces podemos asegurar que los límites laterales también existen y coinciden con el primero.

Ya tenemos suficiente información como para asegurar que la función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$, ambas con ecuación 0. En cuanto a las verticales, tenemos una en $x = 0$, que tanto por izquierda como por derecha $+\infty$.

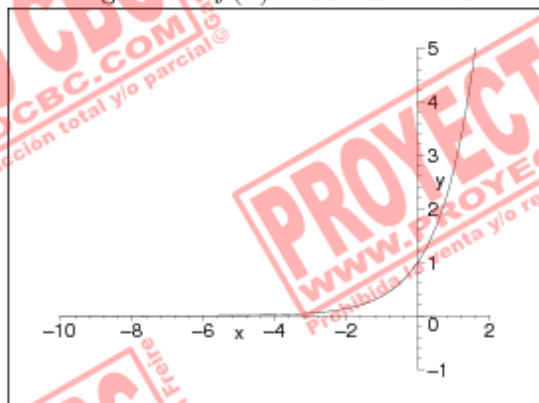
Veamos el gráfico de f para contemplar las asíntotas que descubrimos:

Figura 72: $f(x)$ — Sus asíntotas

(e)

Es evidente que f tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$ en $-\infty$ la cual es la única de esta función.

Pueden comprobarlo con el gráfico de la misma:

Figura 73: $f(x)$ — Sus asíntotas

(f)

Esta función es muy interesante por la rareza que presenta su única asíntota vertical, la cual obviamente se encuentra en $x = 0$, único donde se anula algún denominador.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = e$$

Tenemos entonces una asíntota horizontal en ambos infinitos de ecuación $y = e$.

Para analizar la posible asíntota vertical tenemos que estudiar:

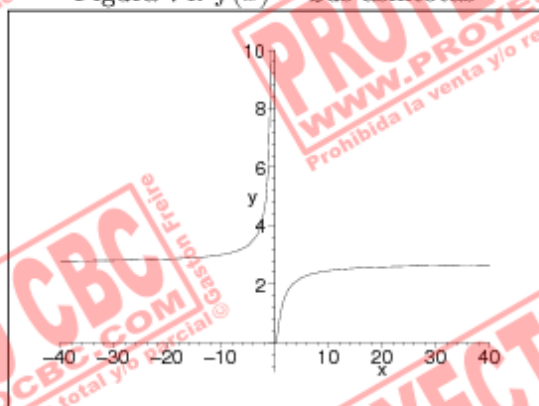
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = +\infty$$

Observen que este límite nos queda de la forma $e^{+\infty}$, razón por la cual deducimos que el resultado debe ser $+\infty$. En cuanto al otro, como $e^{-\infty} \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = 0$$

De esta manera podemos apreciar por el lado izquierdo en $x = 0$ f , tiene una asíntota vertical que va a $+\infty$, mientras que del lado derecho la función tiende a cero. El gráfico queda de aspecto curioso:

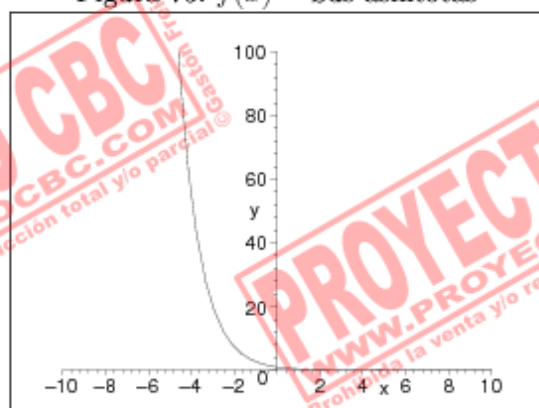
Figura 74: $f(x)$ — Sus asíntotas



(g)

Es evidente que f tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$ en $+\infty$ la cual es la única de esta función.

Pueden comprobarlo con el gráfico de la misma:

Figura 75: $f(x)$ — Sus asíntotas

(h)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

De aquí que f presenta una única asíntota vertical en $x = 0$ la cual por derecha tiende a $-\infty$ y no posee asíntotas horizontales.

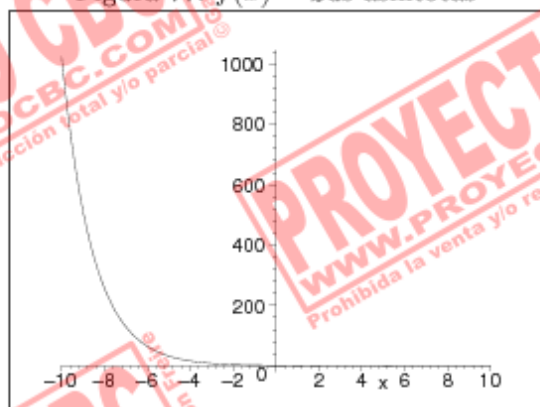
Figura 76: $f(x)$ — Sus asíntotas

(i)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

De aquí que f presenta una única asíntota horizontal en $-\infty$ de ecuación $y = 0$ y ninguna vertical. El gráfico de la situación queda:

Figura 77: $f(x)$ — Sus asíntotas

(j)

Esta función es más interesante que las anteriores. De hecho las funciones racionales⁴⁴ presentan en general gráficos muy pintorescos. Tenemos dos puntos problemáticos, candidatos a ser lugares donde f presente asíntotas verticales: $x = -3$ y $x = 1$, lugares ambos donde se anula el denominador. Habrá que estudiar los límites del caso para determinar lo que ocurre en los mismos.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{x}^2 \left(2 - \frac{5}{x^3}\right)}{\cancel{x}^{-1} \left(1 + \frac{3}{x}\right) \cancel{x}^{-1} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{\overset{-59}{(2x^3 - 5)}}{\underset{-0}{(x+3)} \underset{-16}{(x-1)^2}} = +\infty$$

⁴⁴ Así es como se llaman las que se obtienen como cociente de funciones polinómicas.

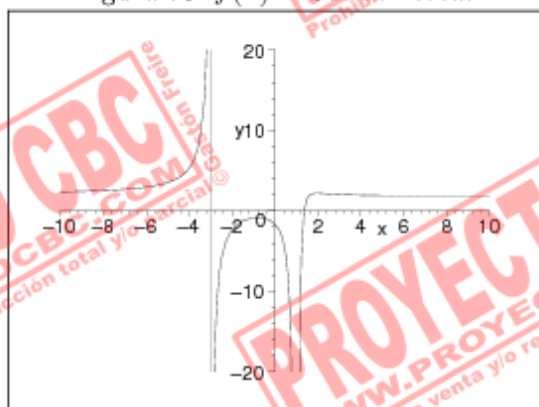
$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^3 - 5}{(x+3)(x-1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 - 5}{(x+3)(x-1)^2} = -\infty$$

Podemos apreciar entonces que f tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 2$ tanto en $-\infty$ como en $+\infty$; que posee una asíntota vertical en $x = -3$ que por izquierda tiende a $+\infty$ y por derecha a $-\infty$; y otra asíntota vertical en $x = 1$ que en ambos lados tiende a $-\infty$.

El gráfico queda así:

Figura 78: $f(x)$ — Sus asíntotas



(k)

Observemos algo muy importante. $\text{Dom}(f) = (-1, 1)$, y en este dominio f se puede escribir como:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Si bien esta *nueva* fórmula para $f(x)$ no presenta *problemas* en $x = -1$ esto no quiere decir en lo absoluto que f ya no los tenga. De hecho f sigue siendo la misma función que antes con los mismos problemas, pero hemos reescrito su fórmula convenientemente para estudiar mejor sus límites.

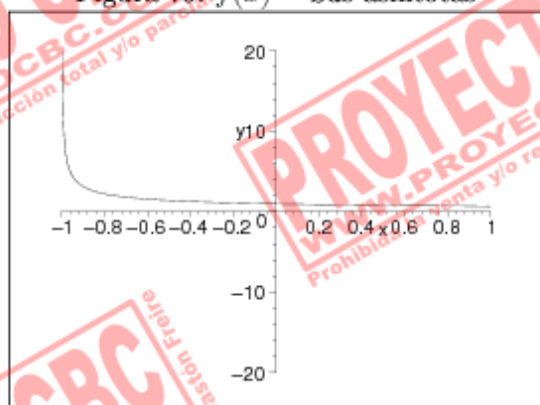
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto la función f tiene una única asíntota vertical en $x = -1$ tendiendo a $+\infty$ — por la derecha.

El gráfico de la función es el siguiente:

Figura 79: $f(x)$ — Sus asíntotas



(1)

Aquí tenemos problemas en $x = -3$, lugar donde el denominador se hace cero.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \cdot x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = +\infty$$

Con esta información es suficiente para descartar la presencia de asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^3 - 5x^2}{x + 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^3 - 5x^2}{x + 3} = -\infty$$

Y vemos que presenta una asíntota vertical en $x = -3$, la cual tiende a $+\infty$ por la izquierda y a $-\infty$ por la derecha. Su gráfico luce a continuación:

Figura 80: $f(x)$ — Sus asíntotas

Ejercicio 4

Este ejercicio esconde un contenido matemático importante. Llamemos $f(x)$ a la curva del enunciado; las rectas cuyas pendientes se está pidiendo averiguar en los items (a)...(d) son rectas secantes al gráfico de la curva y todas pasan por el punto $(1, f(1))$. El lector atento podrá observar que sistemáticamente se está haciendo acercar a $x = 1$ la abscisa del segundo punto por donde pasa la recta en cuestión para los diferentes items. En concreto las rectas se irán aproximando cada vez más a *la recta tangente a f en el punto $(1, f(1))$* cuanto más se acerque la abscisa del segundo punto a $x = 1$. De hecho en el ítem (e) se pide justo llevar la situación al límite. Éste límite nos dará un número que se corresponderá con la pendiente de dicha recta tangente. Por eso la importancia de éste ejercicio, porque introduce de manera *natural* al alumno hacia la noción de RECTA TANGENTE A UN PUNTO DEL GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN, noción que será explotada al máximo en las prácticas subsiguientes.

(a)

$$m = \frac{3 - 0}{2 - 1} = 3$$

(b)

$$m = \frac{\left(\frac{9}{4} - 1\right) - 0}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{5}{2}$$

(c)

$$m = \frac{(1,1^2 - 1) - 0}{1,1 - 1} = 2,1$$

(d)

$$\begin{aligned}
 m(h) &= \frac{((1+h)^2 - 1) - 0}{(1+h) - 1} \\
 &= \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\
 &= \frac{h(2+h)}{h} \\
 &= 2+h
 \end{aligned}$$

Pero entonces:

$$m(h) = 2 + h$$

(e)

Como podrán observar $m(h) \rightarrow_{h \rightarrow 0} 2$, lo que nos indica que la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f(x)$ debe ser igual a 2.

La fórmula planteada para $m(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ se llama COCIENTE INCREMENTAL. En el ejercicio esta cuenta se ha hecho para el punto $P = (1, f(1)) \in \text{Gra}(f)$. El cociente incremental se puede plantear para cualquier punto $(x_0, f(x_0)) \in \text{Gra}(f)$ y en este caso $m(h)$ quedaría:

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

A esta última fórmula se la conoce con el nombre de COCIENTE INCREMENTAL y sirve para calcular la pendiente de la recta tangente al punto $(x_0, f(x_0)) \in \text{Gra}(f)$ —en caso de que la misma exista— y en dicho caso se le pondrá el nombre de Derivada de $f(x)$ en el punto x_0 , siendo la notación matemática utilizada para designarla: $f'(x_0)$. ■

Ejercicio 5

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-0} \left(\frac{2}{x^3} \right) = -\infty$$

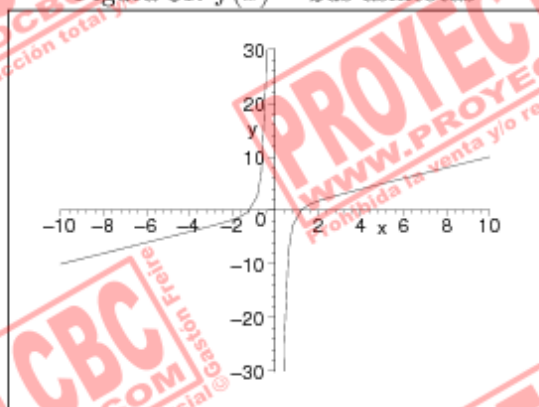
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^{-0} \left(\frac{2}{x^3} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{-0} \left(x - \frac{2}{x^3} \right)}{x^{-0}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-0} \left(x - \frac{2}{x^3} \right)}{x^{-0}} = +\infty$$

El gráfico que representa los límites calculados es el siguiente:

Figura 81: $f(x)$ — Sus asíntotas



(b)

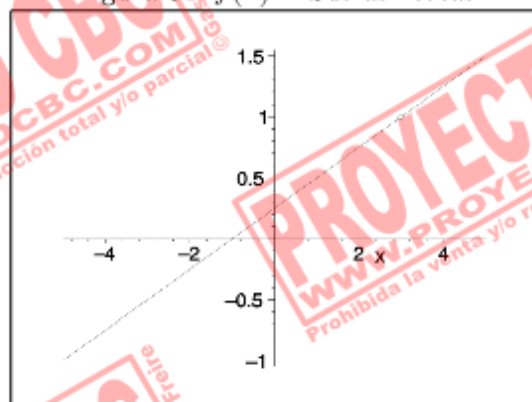
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-3)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{4} = +\infty$$

El gráfico que representa los límites calculados es el siguiente:

Figura 82: $f(x)$ — Sus asíntotas



(c)

Observación Antes de proseguir con la resolución de este ítem, es necesario hacer un comentario acerca de lo que quiere decir en términos matemáticos *precisos* elevar una función $g(x)$ a la otra función $h(x)$.

Sin precisar con exactitud qué quiere decir *elevar una función a la otra función*, si trabajamos con la *noción intuitiva de exponenciación*, podemos encontrarnos con numerosos problemas. Sería interesante dedicar un pequeño comentario para ejemplificar lo que pasaría si trabajan sin tener en claro qué quiere decir elevar una función a la otra función.

Teniendo en cuenta que la fórmula para $f(x)$ puede simplificarse de la siguiente forma obteniendo:

$$f(x) = \left(\frac{\cancel{4}(x-3)(x+1)}{\cancel{4}(x-3)} \right)^{\frac{2}{x-3}} = \left(\frac{x+1}{4} \right)^{\frac{2}{x-3}}$$

, podemos apreciar que si por ejemplo $x = -5$ entonces no tendría sentido hacer $f(-5) = (-1)^{\frac{2}{-8}} = (\sqrt[4]{-1})^{-1}$ ya que no existe tal raíz cuarta de -1 en \mathbb{R} .

Más generalmente, sería todo un desafío averiguar con exactitud cuál sería el dominio natural de una función como $f(x)$ sin haber precisado primero el significado de la exponenciación de funciones. Por ejemplo, si tenemos la mala suerte de *pegarle* a un valor de x tal que como exponente nos quede una fracción irreducible con denominador *par* y como base un número negativo, entonces la fórmula no podría evaluarse, con lo que dicho valor de x no podría estar en el dominio natural de la función.

Lo más interesante es que podemos ver muy sencillamente que hay sucesiones a_n y b_n que tienden a $-\infty$ verificando que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \notin \text{Dom}(f) \leftarrow (\text{pues su fórmula no tendría sentido})$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : b_n \in \text{Dom}(f)$$

Ejemplos para éstas son $a_n = -2^{n+2} + 3$ y $b_n = -2 \cdot 3^n + 3$. Veamos cómo queda la cuenta cuando hacemos $f(a_n)$ y $f(b_n)$:

$$f(a_n) = \left(\frac{-4 \cdot 2^n + 4}{4} \right)^{-\frac{1}{2n+1}} = (1 - 2^n)^{-\frac{1}{2n+1}}$$

La cuenta anterior no tiene ningún sentido en los números reales para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ pues es una raíz *par-ésima* de un número negativo.

En cambio en:

$$f(b_n) = \left(\frac{-2 \cdot 3^n + 4}{4} \right)^{-\frac{1}{3^n}}$$

, si bien la base queda negativa $\forall n \in \mathbb{N}$, como en el exponente aparece un denominador impar no existe problema alguno para realizar dicha cuenta en \mathbb{R} .

De más está decir que la noción *intuitiva* de exponenciación no parece haber sido tan fructífera como pensábamos si pretendemos utilizarla para elevar funciones a la otras funciones. Es por eso que a partir de la función exponencial e^x que está bien definida y cuyo dominio está perfectamente establecido, se puede definir la operación:

$$g(x)^{h(x)} := e^{h(x) \cdot \ln(g(x))}$$

De esta manera no habría ningún tipo de problema para determinar el dominio natural de $g(x)^{h(x)}$ como función ya que el mismo sería g_+ , el conjunto de positividad de $g(x)$.

Volvamos ahora al ejercicio: $\text{Dom}(f) = (3, +\infty)$, que es el conjunto de positividad de $\frac{2}{x-3}$. No tendrá sentido pues ni siquiera hablar del $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x)$.

Para resolver este ítem hay que tener presente la siguiente propiedad:

$$\text{“Si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow x_0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e\text{”}$$

No olviden que cuando están tratando con un límite de la forma 1^∞ están en presencia de una indeterminación; y como tal no es posible tomar una decisión hasta tanto no salvar dicha indeterminación.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-3)} \right)^{\frac{2}{x-3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(1 + \frac{x+1}{4} - 1 \right)^{\frac{2}{x-3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{\overbrace{x-3}^{-0}}{4} \right)^{\left(\frac{1}{\frac{x-3}{4}} \right)}}_{\rightarrow e} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Veamos ahora qué pasa con el límite tendiendo a $+\infty$, que es claramente una indeterminación de la forma $+\infty^0$. Para resolver el límite en cuestión necesitamos previamente demostrar un:

Lema: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

DEM: Lo que haremos es probar por definición de límite para funciones que:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Para sucesiones ya sabemos que $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.

Sea ahora $\varepsilon > 0$:

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{\ln(n)}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Para cada número real x definimos $[x]$ como su parte entera, por ejemplo $[3,15] = 3$. Es claro que si $x \geq 1$ entonces siempre vale que $1 + \frac{1}{x} \leq 2$. Comprueben esto si no les queda claro haciendo algunas cuentas.

Como $\ln(x)$ es una función *estrictamente creciente* y teniendo en cuenta que cuanto más chico es el denominador de una expresión más se agranda la misma, entonces también es cierto que $\frac{\ln(x)}{x} < \frac{\ln([x]+1)}{[x]}$.

Si $x > n_0$: Es además clarísimo que $[x] + 1 > n_0$ también, de donde como $[x]+1$ es un número natural más grande que n_0 se sigue que $\frac{\ln([x]+1)}{[x]+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pero entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x)}{x} &< \frac{\ln([x]+1)}{[x]} \\ &= \frac{\ln([x]+1)}{[x]+1} \cdot \frac{[x]+1}{[x]} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{[x]}\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Así: Para todo $\varepsilon > 0$, si $x > n_0$ entonces $\frac{\ln(x)}{x} < \varepsilon$. Pero hemos pues probado por definición de límite para funciones que:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

■ FIN LEMA

Habiendo probado el Lema, lo podemos utilizar para resolver el límite en cuestión:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{4} \right)^{\frac{2}{x-3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2}{x-3} \cdot \ln\left(\frac{x+1}{4}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2(\ln(x+1) - \ln(4))}{x-3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{2\ln(x+1)}{x-3} - \frac{\ln(4)}{x-3}} \end{aligned}$$

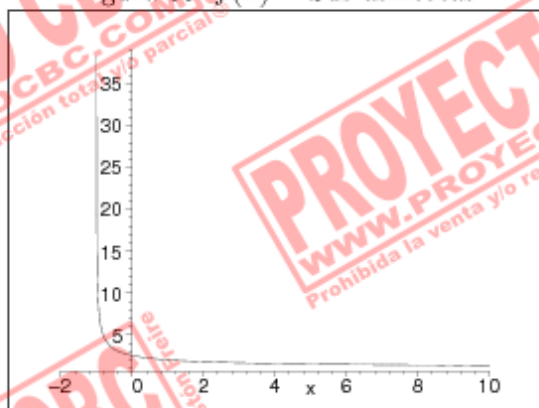
Podemos ahora hacer un cambio de variables $u = x + 1 \Rightarrow x = u - 1$.
Teniendo en cuenta que $u \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} +\infty$, nos quedaría:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{\frac{2 \ln(u)}{u-4} - \frac{\ln(4)}{u-4}} \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{\overbrace{\frac{2u}{u-4}}^{-0} \cdot \left(\frac{\ln(u)}{u} \right)^{-\frac{0}{0}} - \frac{\ln(4)}{u-4}} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

Observación: Aprenderán a *idolatrar* a la REGLA DE L'HOSPITAL cuando comprueben que un límite tan complicado como el anterior mediante la utilización de la misma puede ser resuelto con una simplicidad absoluta. Sería un ejercicio *muy recomendable* volver a este ítem cuando la hayan aprendido para comprobar por ustedes mismos cuánto más fácil resultaba si lo resolvían mediante la utilización de tal.

Para finalizar, veamos a continuación como queda el gráfico de $f(x)$ para comprobar que nuestro análisis ha sido correcto.

Figura 83: $f(x)$ — Sus asíntotas



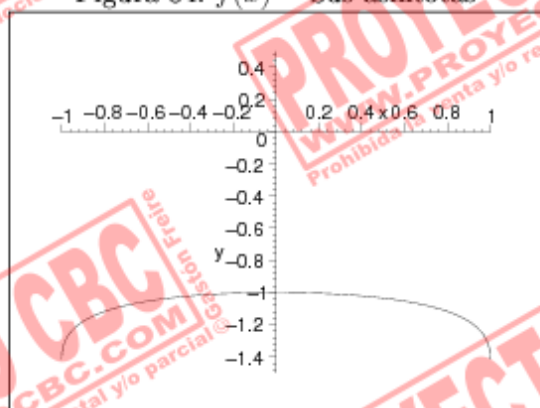
(d)

Como $\text{Dom}(f) = [-1, 0) \cup (0, 1]$ entonces en este caso no tienen sentido los límites para $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}) \cdot (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x) - (1+x)}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = -1
 \end{aligned}$$

El gráfico queda:

Figura 84: $f(x)$ — Sus asíntotas



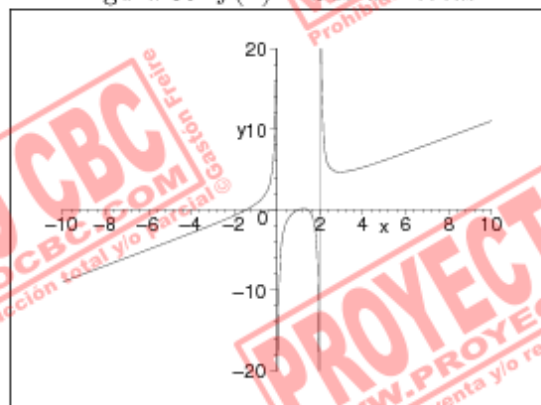
(e)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x+1)}{x-2} - \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-1)(x+1) - (x+2)(x-1)}{x(x-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x(x+1) - (x+2))}{x(x-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x^2 + x - x - 2)}{x(x-2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x-1)(x^2 - 2)}{x} \right) \cdot \left(\frac{1}{x-2} \right) \\
 &= \begin{cases} -\infty & , \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & , \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x - \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{2}{x})} - \frac{x(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})}{x(1 - \frac{2}{x})} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x - \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{2}{x})} - \frac{x(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})}{x(1 - \frac{2}{x})} = +\infty$$

Presentamos a continuación un gráfico de f para que comprueben los resultados obtenidos.

Figura 85: $f(x)$ — Sus asíntotas

(f)

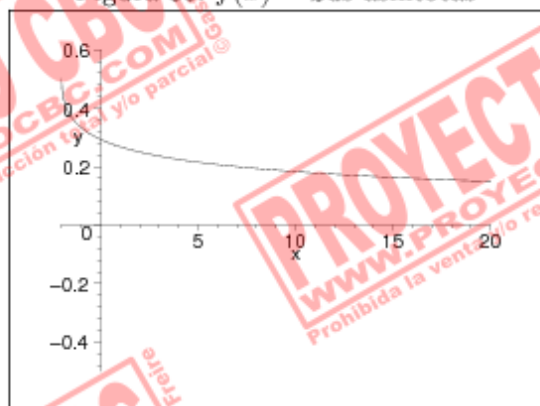
Como el $\text{Dom}(f) = [-2, 2) \cup (2, +\infty)$ entonces el límite para $x \rightarrow -\infty$ no se aplica a esta función.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)-4}{(\sqrt{x+2}+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}}{(\sqrt{x+2}+2)\cancel{(x-2)}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = 0$$

El gráfico queda:

Figura 86: $f(x)$ — Sus asíntotas



(g)

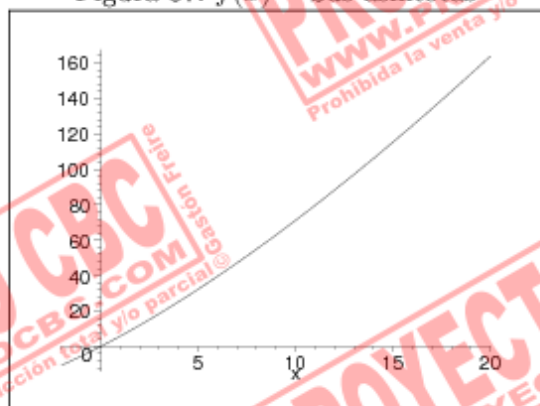
El dominio para f es $[-7, 2) \cup (2, +\infty)$ razón por la cual el límite para $x \rightarrow -\infty$ no es de aplicación en este ítem.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(\sqrt{x+7}-3)} \cdot \frac{(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x+7)-9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2x(\sqrt{x+7}+3)}{x-2} = 12\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x+7}+3) = +\infty$$

El gráfico queda así:

Figura 87: $f(x)$ — Sus asíntotas



(h)

El límite que hay que resolver en este ítem proviene del estudio de la pendiente de la recta tangente a la función $y = x^4$ en el punto $x = 2$. De hecho lo que se está calculando es el límite cuando $h \rightarrow 0$ del COCIENTE INCREMENTAL para la función $y = x^4$ en $x = 2$. La noción de COCIENTE INCREMENTAL está íntimamente relacionada con la de DERIVADA de una función, y se estudiará en la práctica siguiente.

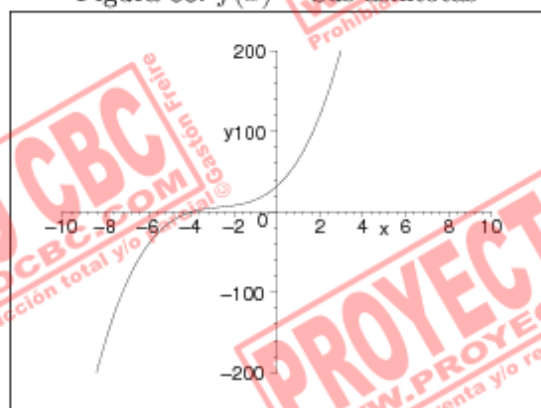
$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((2+h)^2 - 4)((2+h)^2 + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((2+h) - 2)((2+h) + 2)((2+h)^2 + 4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h((2+h) + 2)((2+h)^2 + 4)}{h} = 32\end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow -\infty} f(h) = \lim_{h \rightarrow -\infty} (4+h)((2+h)^2 + 4) = -\infty$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} f(h) = \lim_{h \rightarrow +\infty} (4+h)((2+h)^2 + 4) = +\infty$$

El gráfico queda:

Figura 88: $f(x)$ — Sus asíntotas



(i)

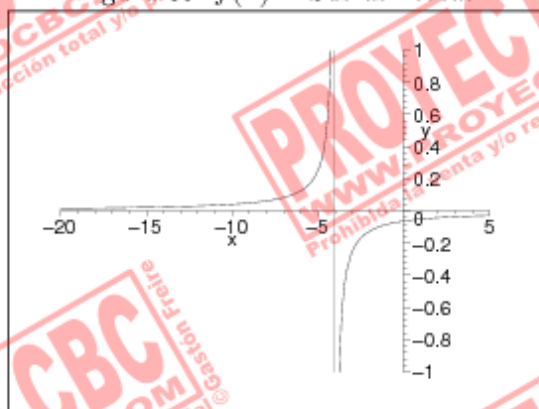
Aquí tenemos otro COCIENTE INCREMENTAL, esta vez asociado a la función $y = \frac{1}{x}$ en el punto $x = 4$.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f(h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{4+h} - \frac{1}{4}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{4 - (4+h)}{4(4+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{4(4+h)} = -\frac{1}{16}\end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow \pm\infty} f(h) = \lim_{h \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(\frac{1}{4+h} - \frac{1}{4}\right)}{h} = 0.$$

El hecho de que los límites laterales nos den ambos 0 tiene una connotación interesante: Alude a que las pendientes de las rectas tangentes al gráfico de $y(x)$ a medida que x se aleja del origen se van acercando a cero. Esto es coherente con el gráfico de la función, como se podrá apreciar a continuación.

Figura 89: $f(x)$ — Sus asíntotas



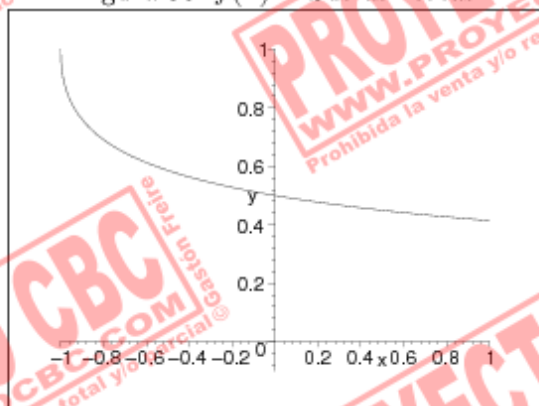
(j)

Aquí $\text{Dom}(f) = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$ como función de h . El Cociente Incremental le toca ahora a $y(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h) - 1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} f(h) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = 0$$

El gráfico queda:

Figura 90: $f(x)$ — Sus asíntotas

En el dibujo se pretendió reforzar la idea de que cerca de $h = 0$ la función se acerca a $\frac{1}{2}$. No obstante no hay que confundirse, para valores de x grandes la curva se irá acercando a 0.

(k)

Las funciones de la forma $g(x)^{h(x)}$ presentan el inconveniente de que como se construyen a partir de elevar una función a la otra función, habría primero que precisar la noción de *exponenciación* para números en general. Recuerden que la exponenciación es muy clara cuando se trata de hacer 2^3 . ¿Qué me dicen de hacer $\pi^{\sqrt{2}}$? Habrán notado que ya no nos queda tan clara la cuenta que hay que hacer. Por eso en general se suele definir de antemano la exponenciación de números arbitrarios como sigue: $a^b := e^{b \cdot \ln(a)}$. Como se supone que hemos definido con precisión la función exponencial e^x y su inversa $\ln(x)$, ya no habrá ningún tipo de dudas al respecto de qué cuenta hacer. De esta manera, es *altamente recomendable* que cuando vean una función del tipo $g(x)^{h(x)}$ la asocien automáticamente con la función $e^{h(x) \cdot \ln(g(x))}$. Para otro comentario sobre el problema de hacer este tipo de cálculos utilizando la noción intuitiva de exponenciación ver el ítem (c) de este ejercicio que se encuentra en la página 238.

Hecha esta aclaración, para nosotros:

$$f(x) = e^{\frac{2x+1}{x-3} \cdot \ln\left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)}$$

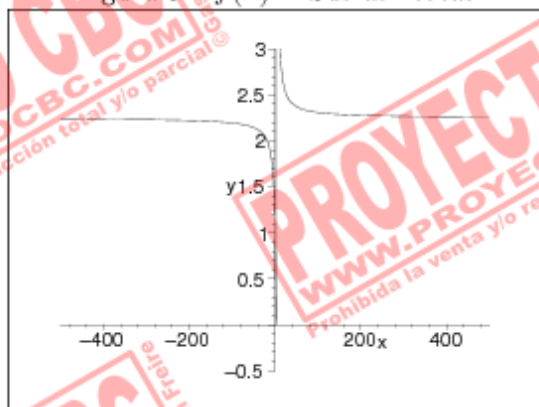
En cuanto al dominio de esta función, debe ser el conjunto de positividad de homografía dentro del logaritmo, la cual tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = \frac{3}{2}$, su asíntota vertical en $x = -\frac{1}{2}$ y su único cero en $x = \frac{-1}{3}$. Se puede comprobar fácilmente que la homografía es negativa en $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$. Por lo tanto: $\text{Dom}(f) = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$.

Ahora ya sabemos que todos los límites pedidos en el ejercicio tienen sentido.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{-2}{x-3} \cdot \ln\left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)} = e^{2 \ln\left(\frac{3}{2}\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

El gráfico queda:

Figura 91: $f(x)$ — Sus asíntotas



(1)

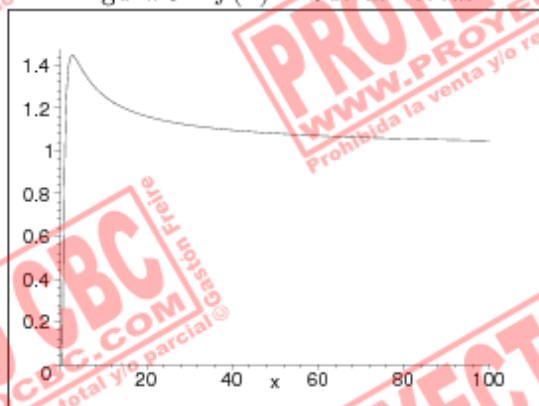
Como $f(x) = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$ entonces su dominio serán los números reales mayores que cero. Para resolver este problema es necesario apelar a un lema que demostramos anteriormente cuando resolvimos el ítem (c), el cual pueden encontrarlo junto con su respectiva demostración en la página 238. En concreto lo que afirma el Lema es que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

A partir de este resultado este ejercicio se vuelve trivial pues:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^0 = 1$$

Y el gráfico:

Figura 92: $f(x)$ — Sus asíntotas

(m)

Aquí el dominio de $f(x)$ son todos los números reales.

Para resolver este problema es necesario apelar a un lema que demostramos anteriormente cuando resolvimos el ítem (c), el cual pueden encontrarlo junto con su respectiva demostración en en la página 238. En concreto lo que afirma el Lema es que:

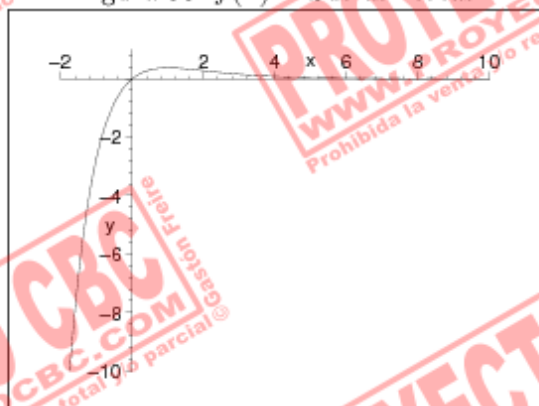
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Habiendo probado lo anterior el límite que tenemos que calcular podrá resolverse, aunque no sin antes hacer aplicación de otro truco. El mismo consiste en hacer es un Cambio de Variables $y = e^x$, por lo que $x = \ln(y)$. Y tengamos en cuenta que $y \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$$

Observemos el gráfico para comprobar los resultados arribados:

Figura 93: $f(x)$ — Sus asíntotas

(n)

Aquí conviene hacer el cambio de variables siguiente: $y = \frac{1}{x}$; $x = \frac{1}{y}$;
 $y \rightarrow_{x \rightarrow 0^+} +\infty$. Además:

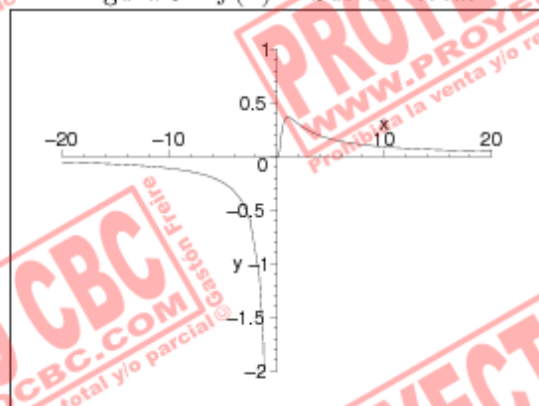
$$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e^{-y}}{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = \frac{y}{e^y}$$

Pero entonces, como en el ítem anterior probamos que $\frac{y}{e^y} \rightarrow_{y \rightarrow +\infty} 0$:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$$

En lo que respecta a los límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$: Es muy fácil comprobar que ambos nos dan cero.

El gráfico queda:

Figura 94: $f(x)$ — Sus asíntotas

Ejercicio 6

Por hipótesis sabemos que:

$$1 - \frac{3}{4}x^2 \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq 1$$

Como las expresiones de las puntas, ambas tienden a 1, por la PROPIEDAD DEL SANDWICH para funciones se concluye que:

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$$

■

Ejercicio 7

En todos los casos, como de costumbre, nos referiremos a la función del enunciado del ejercicio con $f(x)$.

(a)

Teniendo en cuenta que $|\sin(\frac{1}{x})| \leq 1$, utilizando la propiedad que afirma que una expresión acotada multiplicada por otra que tiende a cero debe tender a cero, se concluye que $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow 0} 0$.

(b)

Como $|\cos(x)| \leq 1$ y teniendo en cuenta que una expresión acotada dividida por otra que tiende a infinito debe tender a cero, se concluye que $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow 0} 0$.

(c)

Tengamos en cuenta que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$. Como $4 \leq f(x) + 2 \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{f(x)+2} \leq \frac{1}{4}$. Como esta última expresión es acotada, queda claro que al multiplicarla por $\sin(x)$ deberá tender a cero a medida que x tiende a cero. Por lo tanto la respuesta debe ser que el límite pedido es 0.

■

Ejercicio 8

En la mayoría de los ejercicios de esta sección se explotará al máximo el resultado que afirma:

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Como se ha recordado en varias oportunidades a lo largo del libro, nunca hay que olvidar que este resultado sólo vale cuando " $x \rightarrow 0$ ". Hay una gran población de alumnos que al tomar contacto con esta proposición la utilizan en forma *indiscriminada* sin siquiera fijarse primero hacia dónde está tendiendo " x ". Traten de tener esta recomendación presente a lo largo del curso, pues les va a evitar muchos inconvenientes.

Haciendo un cambio de variables apropiado este resultado se puede generalizar al siguiente:

"Sea $a(x)$ una expresión tal que $a(x) \rightarrow_{x \rightarrow L} 0$ donde L puede ser pensado como un número real determinado o bien $\pm\infty$. Entonces:

$$\exists \lim_{x \rightarrow L} \frac{\sin(a(x))}{a(x)} = 1$$

"

Utilizando estas herramientas los items del presente ejercicio deberán salir sin mayores complicaciones.

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{-1}{\sin(3x)}}{3x} \cdot 3 = 3$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)} = 1$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{-1}{\sin(5x)}}{5x} \cdot \frac{\overset{-1}{3x}}{\overset{-1}{\sin(3x)}} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{-1}{\sin(x)}}{\overset{-1}{x}} \cdot \frac{x}{\overset{-1}{\cos(x)}} \cdot \overset{-0}{2x} = 0$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

Nótese que se ha utilizado la proposición citada al comienzo del ejercicio.

(f)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \cdot (1 + \cos(x))}{x(1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\overset{-1}{\sin(x)}}{\overset{-1}{x}} \right) \cdot \frac{x}{\underset{-\frac{0}{2}=0}{(1 + \cos(x))}} = 0 \end{aligned}$$

(g)

En este ítem haremos uso de la importante identidad trigonométrica que dice:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

La misma no es de fácil demostración, de hecho para poder hacerlo hay que apelar a propiedades bastante profundas sobre las funciones trigonométricas, las cuales por ahora están fuera de nuestro alcance. Recién cuando se profundice sobre la noción de DERIVADA podremos recién pensar en atacar una posible demostración para ella.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) \cos(a) + \cos(h) \sin(a) - \sin(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(h)}{h} \right) \cdot \cos(a) + \sin(a) \cdot \left(\frac{\overbrace{1 - \cos(h)}^{-0}}{h} \right) \\ &= \cos(a)\end{aligned}$$

ver punto (f)

El límite que acabamos de calcular está íntimamente relacionado con la noción de derivada. De hecho hemos probado con todo detalle que $\sin'(a) = -\cos(a)$, donde “ $\sin'(a)$ ” alude a la función derivada del coseno evaluada en el número real “ a ”. Aunque todavía no comprendan mucho de que estamos hablando sería bueno que tengan presente el cálculo de este límite, pues al momento de calcular las funciones derivadas de las trigonométricas lo harán siguiendo estas mismas ideas.

(h)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \cdot (1 + \cos(x))}{x^2 (1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2 (1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2 (1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{(1 + \cos(x))} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(i)

En este ítem haremos uso de la importante identidad trigonométrica que dice:

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

Esta identidad trigonométrica tampoco es de fácil demostración, por las mismas razones que la utilizada en el ítem (g). Habrá que esperar hasta profundizar en el cálculo de derivadas y sus propiedades para poder pensar en hacer una demostración de la misma.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) - \cos(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(a) \cdot \underbrace{\left(-\frac{1 - \cos(h)}{h} \right)}_{-0} - \sin(a) \frac{\sin(h)}{h} \\ &= -\sin(a) \end{aligned}$$

El resultado que acabamos de arribar está íntimamente relacionado con la noción de derivada. De hecho hemos probado con todo detalle que $\cos'(a) = -\sin(a)$, donde " $\cos'(a)$ " alude a la función derivada del coseno evaluada en el número real " a ". Aunque todavía no comprendan mucho de que estamos hablando sería bueno que tengan presente el cálculo de este límite, pues al momento de calcular las funciones derivadas de las trigonométricas lo harán siguiendo estas mismas ideas.

(j)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1 - \cos(x)}{x^2}} \cdot \frac{\overset{-1}{\sin(x)}}{x} = 2 \end{aligned}$$

(ver ítem (h))

(k)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \left(3 + 8 \cdot \frac{\overset{-1}{\sin(2x)}}{2x} \right)}{\cancel{x} \left(x + 5 \cdot \frac{\overset{-1}{\sin(x)}}{x} \right)} = \frac{11}{5}$$

(l)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(2 + x \overset{-0}{\sin(x)} + \overset{-2}{\sin(x)} \cdot \overset{-1}{\frac{\sin(x)}{x}} \right)}{x \cdot \underset{-0^+}{\sin^2(4x)}} = +\infty$$

(m)

Aquí lo más conveniente es hacer primero un cambio de variables, pues nosotros sabemos manejar bien este tipo de límites cuando $x \rightarrow 0$ no cuando el mismo tiende a 1. Podríamos hacer: $y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1$; además $y \Rightarrow_{x \rightarrow 1} 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(y+1))}{\sin(3\pi(y+1))} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi y + \pi)}{\sin(3\pi y + 3\pi)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sin(\pi y)}}{\cancel{\sin(3\pi y)}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overset{-1}{\sin(\pi y)}}{\underset{-1}{\pi y}} \cdot \frac{3\pi y}{\sin(3\pi y)} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(n)

Este es otro ejemplo que evidencia la necesidad de hacer un cambio de variables, por la misma razón que en el ítem anterior, ya que sabemos lidiar con límites donde la expresión dentro del $\sin(x)$ tiende a cero y no con otras. Tengamos en cuenta que además, como está presentado el ejercicio, no parece haber ningún $\sin(x)$ en la fórmula la función que debemos estudiar su límite, lo que en realidad es un engaño ya que si transformamos la misma correctamente a partir del mencionado cambio de variables, observaremos pronto como aparece por ahí la expresión del $\sin(x)$.

El cambio de variables que conviene hacer es $y = x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = y + \frac{\pi}{2}$. Es claro que $y \rightarrow_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 0$. Pero entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overset{= -\sin(y)}{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = -1\end{aligned}$$

Observen como a veces un cambio de variables adecuado simplifica mucho las cosas. Ustedes se preguntarán tal vez: ¿Cómo tomo la decisión sobre qué cambio de variables hacer? O peor aun: ¿Cómo me doy cuenta que tengo que hacer un cambio de variables? La respuesta a estas dos preguntas tiene un común denominador: Se los dirá la experiencia luego de practicar *mucho* y hacer los ejercicios. Nada forma mejor la intuición que *trabajar duro con las prácticas*, otro consejo más para que tengan en cuenta y puedan mejorar su rendimiento en la materia.

(o)

Lo primero tal vez sea hacer un cambio de variables adecuado. Hagamos $y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1$. Además $y \rightarrow_{x \rightarrow 1} 0$.

Tendremos que tener presente además para comprender los pasos que siguen que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$; que por definición $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ y cosas como que $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, etc... Las identidades en general de las funciones trigonométricas, que deben tratar de recordar lo más posible.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\pi y + \pi)}{\frac{\sin^2(\pi y + \pi)}{\cos^2(\pi y + \pi)}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\pi y)}{\frac{\sin^2(\pi y)}{\cos^2(\pi y)}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(\pi y))}{(1 - \cos(\pi y))} \cdot \frac{\overset{-1}{\cos^2(\pi y)}}{(1 + \cos(\pi y))} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(p)

Otra vez conviene hacer el cambio de variables $y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1$. Además $y \rightarrow_{x \rightarrow 1} 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi y + \pi)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overset{-1}{\sin(\pi y)}}{\pi y} \cdot \pi = -\pi\end{aligned}$$

Ejercicio 9

Resultados Preliminares

En este ejercicio se utiliza una propiedad muy importante, que presenta numerosas variantes de las cuales enunciaremos aquellas que vayamos a utilizar. Seguramente las mismas no serán gran novedad para ustedes ya que las debieran haber demostrado en la teórica. No obstante al final del ejercicio podrán encontrar la demostración de las mismas suponiendo que ya se ha demostrado para sucesiones que: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ y $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$. La demostración formal *bien hecha* de este último resultado es complicada y requiere el uso de algunas construcciones matemáticas elaboradas.

“Sea L una letra que puede designar o bien $+\infty$ o bien $-\infty$. Sea M otra letra que puede designar o bien un número real o bien $+\infty$ o bien $-\infty$. Si $a(x)$ y $b(x)$ son expresiones que verifican:

$$\lim_{x \rightarrow M} a(x) = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \\ \infty \text{ a secas} \end{cases} \quad (\text{cualquiera de estos valores})$$

y

$$\lim_{x \rightarrow M} b(x) = 0 \text{ y } b(x) \neq 0 \forall x$$

Entonces:

- $\lim_{x \rightarrow L} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \rightarrow L} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$
- $\lim_{x \rightarrow M} \left(1 + \frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = e$
- $\lim_{x \rightarrow M} \left(1 - \frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = e^{-1}$
- $\lim_{x \rightarrow M} \left(1 + b(x)\right)^{\frac{1}{b(x)}} = e$
- $\lim_{x \rightarrow M} \left(1 - b(x)\right)^{\frac{1}{b(x)}} = e^{-1}$

(a)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3x+1}{3x+4} - 1 \right)^{\frac{2x^2+1}{x-3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(3x+1) - (3x+4)}{3x+4} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-3}{3x+4} \right)^{\frac{2x^2+1}{x-3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3x+4}{-3}} \right)^{\frac{-3x+4}{-3}} \right]^{\frac{-3}{3x+4} \cdot \frac{2x^2+1}{x-3}}
 \end{aligned}$$

Como:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{(3x+4)} \cdot \frac{2x^2+1}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x^2-3}{3x^2-5x-12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2}(-6-\frac{3}{x^2})}{\cancel{x^2}(3-\frac{5}{x}-\frac{12}{x^2})} = 2$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{-2}$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3x}{e}} \right)^{\frac{e}{3(x-2)}} \right] = e^0 = 1$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + 3x \right)^{\frac{1}{3x}} \right]^3 = e^3$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \sin(x))^{\frac{1}{\sin(x)}} \right]^{\frac{-1}{x}} = e$$

(e)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(1 + \frac{3x+2}{5x-2} - 1 \right)^{\frac{1}{x-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(1 + \frac{3x+2-5x+2}{5x-2} \right)^{\frac{1}{x-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(1 + \frac{-2x+4}{5x-2} \right)^{\frac{1}{x-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{5x-2}{-2(x-2)}} \right)^{\frac{-2}{5x-2}} \right]^{\frac{-2}{x-2}} = e^{-\frac{2}{8}} = e^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Observen que en el cálculo de este límite no se ha hecho utilización en ningún paso que nos estábamos acercando por la derecha, razón por la cual no sólo existe el límite lateral por derecha sino que por izquierda también y vale lo mismo. Recuerden que cuando esto ocurre se dice que $\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = e^{-\frac{1}{4}}$.

(f)

Si observan bien en el ítem anterior podrán darse cuenta que en ningún momento durante el cálculo del límite se ha hecho uso de la condición de acercarse por derecha. Sin importar de qué forma x se acercara a 2 demostramos que $\exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = e^{-\frac{1}{4}}$, con lo que como caso particular $\exists \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = e^{-\frac{1}{4}}$.

(g)

Observen que como los valores de x son cercanos a cero, podemos suponer que $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, con lo que $\forall x \cos(x) > 0$. Esto nos autoriza a hacer $\cos(x) = \sqrt{\cos^2(x)}$, cosa que no sería cierta para x en general. Además hay que observar que estamos autorizados a dividir por $\sin(x)$ pues si bien $x \rightarrow 0$, $x \neq 0$, razón por la cual al haber supuesto $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(x) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos^2(x))^{\frac{1}{2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2(x))^{\frac{1}{2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \sin^2(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}} \right]^{\frac{-1}{x} \cdot \frac{-\sin(x)}{2}} \\
 &= (e^{-1})^0 = 1
 \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} f(h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln \left(\frac{2+h}{2} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left[\left(1 + \frac{h}{2} \right)^{\frac{1}{h}} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left[\left(\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{2}{h}\right)} \right)^{\frac{2}{h}} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= \ln \left(e^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}
 \lim_{y \rightarrow 0} f(y) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \cdot \ln(1+y) \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \ln \left((1+y)^{\frac{1}{y}} \right) \\
 &= \ln(e) = 1
 \end{aligned}$$

(j)

Este ítem sale muy fácil haciendo un cambio de variables: $y = e^h - 1 \Rightarrow h = \ln(y + 1)$. Tengamos en cuenta que $y \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$. Entonces:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{y}{\ln(y+1)}\right)^{-1}}$$

(ver ítem anterior)

Demostración de los resultados preliminares

Al principio del ejercicio se enunciaron una serie de propiedades, de las cuales haremos aquí su demostración. Para una mayor claridad transcribamos a continuación dichas propiedades:

“Sea L una letra que puede designar o bien $+\infty$ o bien $-\infty$. Sea M otra letra que puede designar o bien un número real o bien $+\infty$ o bien $-\infty$. Si $a(x)$ y $b(x)$ son expresiones que verifican:

$$\lim_{x \rightarrow M} a(x) = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \\ \infty \text{ a secas} \end{cases} \quad (\text{cualquiera de estos valores})$$

y

$$\lim_{x \rightarrow M} b(x) = 0 \text{ y } b(x) \neq 0 \forall x$$

Entonces:

- $\lim_{x \rightarrow L} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \rightarrow L} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$
- $\lim_{x \rightarrow M} \left(1 + \frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = e$
- $\lim_{x \rightarrow M} \left(1 - \frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = e^{-1}$
- $\lim_{x \rightarrow M} (1 + b(x))^{\frac{1}{b(x)}} = e$
- $\lim_{x \rightarrow M} (1 - b(x))^{\frac{1}{b(x)}} = e^{-1}$

Como se anticipó, en la demostración de tales se utilizará que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ y que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$. Usaremos a lo largo de la demostración la función $[x]$ que significa *parte entera de x* . Por ejemplo: $[2,78] = 2$. No confundan a la parte entera con la operación *redondear*. La primera *trunca* los decimales no importa cuántos ni haciendo ningún tipo de redondeo.

1. DEM:

a) Caso $x \rightarrow +\infty$:⁴⁵

Sabemos que la expresión cuyo límite queremos probar es e se encuentra acotada por:

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \quad (22)$$

Como

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}$$

y

$$\left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)$$

,entonces bastará con probar que:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e \text{ y } \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} = e$$

para que en el Sandwich de la ecuación 22 los extremos tiendan ambos a e , y por consiguiente habríamos probado que la parte del medio también, siendo esto último lo que se quería demostrar.

Veamos pues que efectivamente ambos límites dan como resultado e .

Sea $\varepsilon > 0$:

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n \geq n_0 \Rightarrow \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon$.

Si $x > n_0 + 1$, entonces $[x] > n_0$ y naturalmente $[x] + 1 > n_0$ también; pero al ser ambos números naturales mayores que n_0 tiene entonces que ocurrir que:

$$\left|\left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} - e\right| < \varepsilon \text{ y } \left|\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} - e\right| < \varepsilon$$

Hemos pues demostrado que dado $\varepsilon > 0$ existe un número real positivo n_0 tal que si $x > n_0 + 1$ entonces:

$$\left|\left(1 + \frac{1}{[a(x)]}\right)^{[a(x)]} - e\right| < \varepsilon \text{ y } \left|\left(1 + \frac{1}{[a(x)]+1}\right)^{[a(x)]+1} - e\right| < \varepsilon.$$

⁴⁵Es decir donde L vale $-\infty$.

Así: Por definición de límite hemos comprobado que:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{|x|}\right)^{|x|} = e \text{ y } \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{|x|+1}\right)^{|x|+1} = e$$

, con lo que damos por finalizada esta parte de la demostración.

b) Caso $x \rightarrow -\infty$:⁴⁶

Tengamos en cuenta que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}$$

Haciendo el cambio de variables $y = -x$, teniendo en cuenta que $y \rightarrow x \rightarrow -\infty \rightarrow +\infty$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{y}\right)^y\right]^{-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1}$$

(no vale la pena cambiar x por y)

Por lo tanto si logramos probar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$ habríamos probado lo que queremos, ya que entonces el límite de arriba daría e como se quiere demostrar. Concentrémonos entonces en probar esto último.

Sabemos que la expresión cuyo límite queremos probar es e^{-1} se encuentra acotada por:

$$\left(1 - \frac{1}{|x|}\right)^{|x|+1} \leq \left(1 - \frac{1}{|x|}\right)^{|x|} \leq \left(1 - \frac{1}{|x|+1}\right)^{|x|} \quad (23)$$

Como

$$\left(1 - \frac{1}{|x|}\right)^{|x|+1} = \left(1 - \frac{1}{|x|}\right) \left(1 - \frac{1}{|x|}\right)^{|x|}$$

y

$$\left(1 - \frac{1}{|x|+1}\right)^{|x|} = \left(1 - \frac{1}{|x|+1}\right)^{-x+|x|} \left(1 - \frac{1}{|x|+1}\right)^{|x|}$$

⁴⁶ Es decir donde L vale $-\infty$.

, entonces bastará con probar que:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{[x]} = e^{-1} \text{ y } \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} = e^{-1}$$

para que en el Sandwich de la ecuación 23 en la página anterior los extremos tiendan ambos a e^{-1} , y por consiguiente habríamos probado que la parte del medio también, siendo esto último lo que se quería demostrar.

Veamos pues que efectivamente ambos límites dan como resultado e^{-1} .

Sea $\varepsilon > 0$:

$$\text{Como } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n \geq n_0 \Rightarrow \left| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - e^{-1} \right| < \varepsilon.$$

Si $x > n_0 + 1$, entonces $[x] > n_0$ y naturalmente $[x] + 1 > n_0$ también; pero al ser ambos números naturales mayores que n_0 tiene entonces que ocurrir que:

$$\left| \left(1 - \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} - e^{-1} \right| < \varepsilon \text{ y } \left| \left(1 - \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} - e^{-1} \right| < \varepsilon$$

Hemos pues demostrado que dado $\varepsilon > 0$ existe un número real positivo n_0 tal que si $x > n_0 + 1$ entonces:

$$\left| \left(1 - \frac{1}{[a(x)]}\right)^{[a(x)]} - e^{-1} \right| < \varepsilon \text{ y } \left| \left(1 - \frac{1}{[a(x)]+1}\right)^{[a(x)]+1} - e^{-1} \right| < \varepsilon.$$

Así: Por definición de límite hemos comprobado que:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{[x]} = e^{-1} \text{ y } \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1} = e^{-1}$$

, con lo que damos por finalizada esta parte de la demostración.

Habiendo explorado los dos casos posibles, el de $L = +\infty$ y el de $L = -\infty$ podemos garantizar que en las hipótesis de la proposición:

$$\exists \lim_{x \rightarrow L} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

2. DEM:

Utilizaremos como si fuera un baluarte el resultado que probamos previamente, es decir ya sabemos — y por ende lo podemos utilizar — que $\exists \lim_{x \rightarrow L} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Haremos un cambio de variables $y = -x \Rightarrow y \rightarrow_{x \rightarrow L} -L$

$$\lim_{x \rightarrow L} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow L} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x} \right]^{-1} = \lim_{y \rightarrow -L} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^{-1} = e^{-1}$$

Observen como en el último paso hemos utilizado que al ser $L = \pm\infty \Rightarrow -L = \pm\infty$.

3. DEM:

Basta hacer $y = a(x)$. Como $y \rightarrow_{x \rightarrow M} \infty$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow M} \left(1 - \frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^y = e^{-1}$$

Como ven resultó consecuencia inmediata de 1. y 2.

4. DEM:

Basta hacer $y = a(x)$. Como $y \rightarrow_{x \rightarrow M} \infty$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow M} \left(1 + \frac{1}{a(x)}\right)^{a(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

Como ven resultó consecuencia inmediata de 1. y 2.

5. DEM:

Aquí podemos hacer $y = \frac{1}{b(x)} \Rightarrow y \rightarrow_{x \rightarrow M} \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow M} \left(1 + b(x)\right)^{\frac{1}{b(x)}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

Nuevamente hemos acudido a 1. y 2.

6. DEM:

Aquí podemos hacer otra vez $y = \frac{1}{b(x)} \Rightarrow y \rightarrow_{x \rightarrow M} \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow M} \left(1 - b(x)\right)^{\frac{1}{b(x)}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^y = e^{-1}$$

Nuevamente hemos acudido a 1. y 2.

■

Ejercicio 10

Resultado Preliminares⁴⁷

“Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sean L y M o bien números reales o bien $+\infty$ o bien $-\infty$, L y M no necesariamente iguales. Entonces las siguientes dos proposiciones son equivalentes:

- $\exists \lim_{x \rightarrow L} f(x) = M$
- $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} - \{L\}$, si $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ entonces $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = M$

Observación: El anterior resultado es de extremada utilidad para demostrar que una cierta función $f(x)$ carece de límite cuando $x \rightarrow L$, pues si encontráramos $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow L$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow L$ para las cuales $\lim_{n \rightarrow L} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow L} f(b_n)$ entonces $\nexists \lim_{x \rightarrow L} f(x)$.

(a)

El primer término claramente tiende a 1 mientras que el segundo como $x \rightarrow 0$ y el $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ es una expresión acotada debe tender a 0. De esta manera podemos apreciar que la respuesta correcta es 1.

(b)

La respuesta correcta es 1 pues:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$$

(c)

Aquí la respuesta correcta es que no existe dicho límite, sin embargo demostrar este acierto requiere algún grado de sofisticación. No podemos hablar de subsucesiones de $f(x)$ por ser la misma una función, pero en realidad lo cierto es que hay una estrecha vinculación entre las funciones y las sucesiones en cuestiones de límites. De hecho contamos con un resultado que vincula la noción de límite de funciones con la de límite de sucesiones de manera tal

⁴⁷La demostración del mismo se encuentra disponible al final del ejercicio.

que las últimas nos puedan servir de útil herramienta para estudiar el de las primeras. (Ver Resultado Preliminar en la página anterior).

Por el RESULTADO PRELIMINAR bastará con encontrar dos sucesiones a_n y b_n ambas tendientes a infinito y que verifiquen: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$. Basta pues tomar $a_n = 2n\pi$ y $b_n = \pi + 2n\pi$; como $f(a_n) = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ y $f(b_n) = -1 \forall n \in \mathbb{N}$ no hay mas nada que probar⁴⁸.

(d)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + ax + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + ax + 1} + 1)}{x(\sqrt{x^2 + ax + 1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + ax + 1 - 1}{x(\sqrt{x^2 + ax + 1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + a)}{x(\sqrt{x^2 + ax + 1} + 1)} \\ &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

De esta manera podemos observar que:

$$\frac{a}{2} = 2 \Leftrightarrow a = 4$$

Así: Debe ser $a = 4$.

⁴⁸Pueden consultar al final del ejercicio la demostración del RESULTADO PRELIMINAR.

Demostración de los resultados preliminares

Por una cuestión de claridad de exposición copiemos el enunciado del mencionado resultado:

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sean L y M o bien números reales o bien $+\infty$ o bien $-\infty$, L y M no necesariamente iguales. Entonces las siguientes dos proposiciones son equivalentes:

- $\exists \lim_{x \rightarrow L} f(x) = M$
- $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} - \{L\}$, si $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ entonces $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = M$

DEM:

En la demostración supondremos *s.p.g.*⁴⁹ que L y $M \in \mathbb{R}$, dejando los casos infinitos como muy útil y recomendable ejercicio para el alumno.

Como toda demostración en donde hay que probar la equivalencia entre dos proposiciones, lo que suele hacerse es probar primero la implicación hacia un sentido, y luego la implicación hacia el otro sentido.

1 \Rightarrow 2: Supongamos que $\exists \lim_{x \rightarrow L} f(x) = M$ y sea una $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ que tienda a L . Dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - L| < \delta$ entonces $|f(x) - M| < \varepsilon$. A la vez para el $\delta > 0$ de mas arriba y dada la convergencia de a_n debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $0 < |a_n - L| < \delta$. Pero entonces $a_n \in \mathbb{R}$ es un número como cualquier otro que verifica distar de L a menos de δ , pero entonces debe ser $|f(a_n) - M| < \varepsilon$.

Hemos pues probado que: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|f(a_n) - M| < \varepsilon$, por lo que $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = M$.

Como a_n era una sucesión elegida en forma arbitraria, la demostración de este lado de la implicación queda completa.

2 \Rightarrow 1: Supongamos ahora que vale 2, es decir que cualquier sucesión a_n que tienda a L evaluada en $f(x)$ hace tender dicha expresión a M . Tenemos que ver que entonces efectivamente existe el límite para $f(x)$ cuando x tiende a L y es igual a M . Lo haremos por el absurdo. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow L} f(x) \neq M$ y veremos que existe una sucesión $a_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} L$ pero $f(a_n) \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} M$, lo cual sería ¡ABSURDO!.

Como $\lim_{x \rightarrow L} f(x) \neq M$ sabemos que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0 \exists 0 < |x - L| < \delta$ verificando $|f(x) - M| \geq \varepsilon$. Esto se obtiene *negando* la

⁴⁹Significa sin perder generalidad.

definición de límite para f . Veremos que entonces podremos construir una sucesión a_n que tienda a L pero $f(a_n)$ no tienda a M . La construcción se hace como sigue⁵⁰:

Para $\delta_1 = 1 \exists x_1 \in \mathbb{R} / 0 < |x_1 - L| < \delta_1$ pero $|f(x_1) - M| \geq \varepsilon \Rightarrow a_1 = x_1$

Para $\delta_2 = \frac{1}{2} \exists x_2 \in \mathbb{R} / 0 < |x_2 - L| < \delta_2$ pero $|f(x_2) - M| \geq \varepsilon \Rightarrow a_2 = x_2$

Para $\delta_3 = \frac{1}{3} \exists x_3 \in \mathbb{R} / 0 < |x_3 - L| < \delta_3$ pero $|f(x_3) - M| \geq \varepsilon \Rightarrow a_3 = x_3$

\vdots

Para $\delta_n = \frac{1}{n} \exists x_n \in \mathbb{R} / 0 < |x_n - L| < \delta_n$ pero $|f(x_n) - M| \geq \varepsilon \Rightarrow a_n = x_n$

\vdots

Queda así definida una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con las siguientes propiedades:

- Como $\forall n \in \mathbb{N}$ es $0 < |a_n - L| < \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ y $a_n \neq L \forall n$.
- Como $\forall n \in \mathbb{N}$ es $|f(a_n) - M| \geq \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq M$.

Pero esto es ¡ABSURDO! pues por hipótesis *toda* sucesión a_n verificaba que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = M$. El absurdo proviene de suponer que $\lim_{x \rightarrow L} f(x) \neq M$.

Así: $\lim_{x \rightarrow L} f(x) = M$, como se quería demostrar.

■

⁵⁰ Este tipo de construcciones en análisis son muy frecuentes y conviene ir de apoco acostumbrándose a ellas.

Ejercicio 11

(a)

La función $f(x)$ no puede presentar ningún problema salvo a lo sumo donde la fórmula se parte, es decir $x = 1$. Tenemos que analizar lo que le ocurre a f en dicho punto. Para saber si f es continua tenemos que verificar que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^{-3}(x^2+x+1)}{(x-1)} = 3 \neq f(1)$$

Por lo tanto f no puede ser continua en $x = 1$.

Para analizar si la discontinuidad es *evitable* o *esencial* hay que determinar si habría forma de redefinir a $f(x)$ en el punto $x = 1$ de modo que resulte continua. Podemos observar que al existir $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ se puede concluir que si definiéramos $f(1) = 3$ la misma resultaría continua. Por lo tanto hemos de concluir que la discontinuidad es evitable.

Es interesante comprobar nuestras conclusiones con el gráfico de $f(x)$:

Figura 95: Gráfico de $f(x)$ 

Podemos apreciar como $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$. Se nota que es evitable pues uno podría *levantar* el punto y completar el hueco del gráfico.

(b)

Aquí nuestra función resultará continua con claridad siempre que $x \neq -2$ y $x \neq 7$. En éstos últimos habrá que estudiar los límites correspondientes para poder decidir lo que ocurre. Empecemos con $x = 7$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 7} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x+2}+3)}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x+2)-9}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

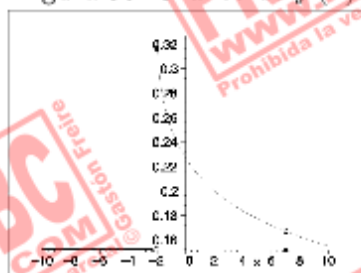
Como $f(7) = 0 \neq \frac{1}{6}$ se concluye que f presenta una discontinuidad en $x = 7$. Como si bien f es discontinua vale que $\exists \lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \frac{1}{6}$ la discontinuidad resulta evitable, pudiendo redefinir $f(7) = \frac{1}{6}$ para que la misma resulte continua.

Sigamos ahora con $x = -2$, en donde $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$ claramente. En cambio $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0$ aun más claramente. La diferencia entre ambos límites laterales nos evidencia la presencia de una *discontinuidad de salto* para $f(x)$ en $x = -2$, la que por supuesto resultará *inevitable*.

Así: $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 7$ y otra inevitable en $x = -2$.

Es interesante comprobar nuestras conclusiones con el gráfico de $f(x)$:

Figura 96: Gráfico de $f(x)$



Podemos apreciar como $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 7$. Se nota que es evitable pues uno podría *levantar* el punto y completar el hueco del gráfico. En contraste con esto, la discontinuidad de $x = -2$ resulta inevitable ya que $f(x)$ pega un salto. No importa como vayamos a redefinir f en $x = -2$ el salto seguirá presente.

(c)

Aquí hay que tener presente que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, razón por la cual no podemos decir que f sea discontinua en $x = 1$ ya que en dicho punto no está definida. En cualquier otro punto f resulta continua.

Así: $f(x)$ es continua en todo su dominio.

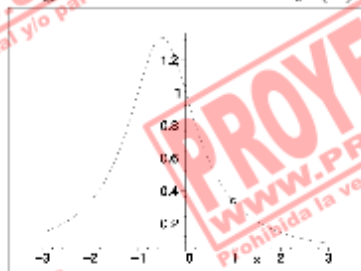
Cabe preguntarse de tosa formas *si sería posible definir f en $x = 1$ para que la función resultante quedara continua en dicho punto.* Para estudiar la respuesta a ésta pregunta será necesario estudiar $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Para hacerlo conviene hacer un cambio de variables $y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = y^3$. Como $y \rightarrow_{x \rightarrow 1} 1$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{y^3-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{y-1(y^2+y+1)} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto: Concluimos que si definiéramos $f(1) = \frac{1}{3}$ la función resultante sí sería continua en el punto $x = 1$.

Es interesante comprobar nuestras conclusiones con el gráfico de $f(x)$:

Figura 97: Gráfico de $f(x)$



Podemos apreciar como es posible completar el hueco del tráfico de $f(x)$ simplemente definiendo la misma en $x = 1$ como $f(1) = \frac{1}{3}$.

(d)

Volvemos a observar igualmente que en el ítem anterior que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, \pi\}$. Como f se construye a partir de funciones que son continuas en dicho dominio a partir de operaciones que preservan la continuidad, se concluye que f resultará continua en todo su dominio.

Cabe igual preguntarse si existe una posible forma de *definir* f en 0 y π de forma tal que la función resultante quedara continua. Para responder a ésta pregunta debemos primero analizar los límites de f en dichos puntos.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{-1}{\sin(x)} \cdot 1}{x(x-\pi)} = -\frac{1}{\pi}$$

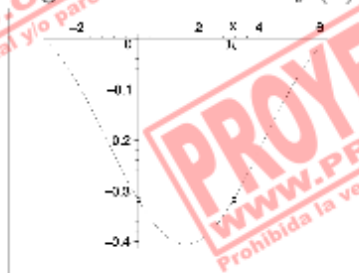
Para estudiar el otro conviene hacer un cambio de variables $y = x - \pi \Rightarrow x = y + \pi$. Como $y \rightarrow_{x \rightarrow \pi} 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overset{-\sin(y)}{\sin(y+\pi)} \cdot 1}{y(y+\pi)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overset{-1}{\sin(y)} \cdot 1}{y(y+\pi)} = -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Por lo tanto: Concluimos que si definiéramos $f(0) = -\frac{1}{\pi} = f(\pi)$ la función resultante sería continua en todos los números reales.

Es interesante comprobar nuestras conclusiones con el gráfico de $f(x)$:

Figura 98: Gráfico de $f(x)$



Podemos apreciar como si definiéramos $f(x)$ en $x = 0$ y en $x = \pi$ como $f(0) = f(\pi) = -\frac{1}{\pi}$ entonces la misma resultaría continua en todos los números reales.

(e)

Aquí $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Como f se construye a partir de funciones que son continuas en dicho dominio y teniendo en cuenta que las operaciones para construir f preservan la continuidad, entonces la misma resulta continua en todo su dominio.

Nos preguntamos de nuevo sobre la posibilidad de *definir* f en el mencionado conjunto de tal forma que resulte continua. Tendremos que distinguir dos casos especiales en el conjunto $\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Si $k = 0$: En este caso tanto numerador como denominador tienden ambos a cero.

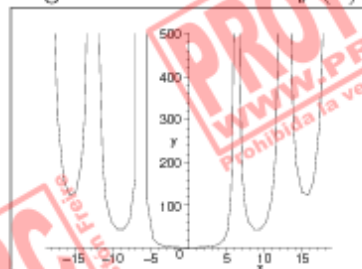
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \cos(x))}{(1 - \cos(x)) \cdot (1 + \cos(x))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \cos(x))}{1 - \cos^2(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \cos(x))}{\sin^2(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin(x)} \right)^2 \cdot (1 + \cos(x)) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Si $k \neq 0$: En este caso el denominador tiende a 0 por valores positivos mientras que el numerador es un número real positivo fijo —dependiendo de el k elegido—. Por lo que en este caso:

$$\lim_{x \rightarrow 2k\pi} f(x) = +\infty$$

Así: Concluimos que si bien podríamos definir $f(0) = 2$ para lograr que en dicho punto la función resultante sea continua, nos será imposible en cualquier otro punto de la forma $x = 2k\pi : k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ definir con éxito $f(x)$ para que la función resultante sea continua.

Es interesante comprobar nuestras conclusiones viendo el gráfico de $f(x)$, el cual por cierto en este caso es bastante llamativo:

Figura 99: Gráfico de $f(x)$ 

Podemos apreciar como si bien es posible definir $f(x)$ en $x = 0$ para que la misma resulte continua en dicho punto, en los demás se pierde toda esperanza ya que la función diverge a $+\infty$.

■

Ejercicio 12

En este ejercicio la única idea que hay que tener en mente para poder resolverlo exitosamente es la de estudiar los límites laterales en los puntos donde la definición de f se parte, los cuales quedarán en función de la constante a . Luego hay que averiguar para cuál o cuáles valores de a los mismos coinciden.

(a)

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 + 2a$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = a - 4$, para que f resulte continua en $x = 2$ será necesario que ambos valores coincidan, lo cual ocurre si y sólo si $4 + 2a = a - 4 \Leftrightarrow a = -8$.

Así: El único valor de a para que f resulte continua en $x = 2$ es $a = -8$.

(b)

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

y en cambio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

entonces no hay posible valor para a que haga que éstos límites puedan coincidir.

Así: En este caso $\nexists a \in \mathbb{R}$ tal que f resulte continua en $x = 0$.

(c)

En este caso $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = a - 3$ pues hay que usar la fórmula de abajo; mientras que al acercarme por derecha tendremos que utilizar la fórmula de arriba. Como $x + 1 \rightarrow_{x \rightarrow -1^+} 0^+$ y dado que el numerador en el exponente es negativo, se deduce que dicho exponente debe tender a $-\infty$, con lo que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$ dado que la función e^x tiene una asíntota horizontal $y = 0$ en $-\infty$.

Para que $f(x)$ resulte continua debe ocurrir que $a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$.

Así: Debe ser $a = 3$.

(d)

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = |3 - a| \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 4a + 1$$

Tenemos que distinguir entre dos casos:

Si $a \geq 3$: Entonces debe ser $a - 3 = 4a + 1 \Rightarrow 3a = -4 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$. Este valor de a resulta inconsistente con la suposición de que $a \geq 3$, razón por la cual deducimos que ningún valor de $a \geq 3$ hará que la función $f(x)$ resulte continua en $x = a$.

Si $a < 3$: Entonces debe ser $3 - a = 4a + 1 \Rightarrow 5a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{5}$.

Así: El único valor de a tal que $f(x)$ resulta continua en $x = a$ será $a = \frac{2}{5}$.

(e)

Como $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \overset{\text{acotado}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$, deducimos entonces que debe ser $a = 0$.

(f)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= a + 3 \end{aligned}$$

Para que f resulte continua en $x = 1$ es necesario que ambos límites coincidan, lo cual ocurre si y sólo si $a + 3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$.

Así: Debe ser $a = -\frac{5}{2}$ para que f resulte continua en $x = 1$. ■

Ejercicio 13

Lo primero que sería bueno observar es que desafortunadamente parece haber un *pequeño problema conceptual* en el planteo de éste ejercicio. En concreto es que como $0 \notin \text{Dom}(f)$ no tiene sentido alguno preguntarse si $f(x)$ es o no continua en dicho punto. Para reforzar la idea basta con consultar la definición de continuidad, donde se define una función $f(x)$ como continua en x_0 si y sólo si $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Mal puede ser un límite igual a $f(x_0)$ si no está definida la función f en $x = x_0$.

Sin embargo este desafortunado planteo no hace que el ejercicio carezca por completo de sentido. Lo que hay que hacer es interpretarlo correctamente. Habría que entender que debemos estudiar si existe alguna definición posible para f en el punto $x = 0$ de tal forma que la misma resulte continua, y concluir negativamente.

Les recomiendo ampliamente consultar la sección de Resultados Preliminares del Ejercicio 10, los cuales los podrán encontrar al principio del mismo en la página 273, debido a que en este ejercicio las herramientas teóricas necesarias para resolverlo son las mismas.

Bastará con mostrar dos sucesiones a_n y b_n , ambas con límite igual a 0, para las cuales $f(a_n)$ y $f(b_n)$ tengan límites distintos. Podemos tomar simplemente:

$$a_n = \frac{1}{2n\pi} \text{ y } b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

Como $f(a_n) = \sin(2n\pi) = 0$ para todo número natural n y $f(b_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$ para todo número natural n , se concluye que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Pero si esto es así, entonces la función original no puede tener límite en $x = 0$, y por lo tanto nos va a ser imposible definir f de alguna forma en $x = 0$ para que la misma resulte continua. ■

Ejercicio 14

La respuesta correcta aquí es que existe un entorno de a , digamos $(a - \delta, a + \delta)$ donde $f(x) > \frac{1}{2}f(a)$ para todo x en dicho entorno. Se puede demostrar este acierto apelando en forma directa a la definición de límite.

Sea pues $\varepsilon = \frac{1}{2}f(a)$:

Vale que $\varepsilon > 0$ pues $f(a) > 0$.

Para éste epsilon, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon = \frac{1}{2}f(a)$$

Pero ésto último implica que:

$$\text{Si } |x - a| < \delta \Rightarrow -\frac{1}{2}f(a) < f(x) - f(a) < \frac{1}{2}f(a)$$

Podemos utilizar la parte izquierda de esta desigualdad, y como:

$$f(a) - \frac{1}{2}f(a) = \frac{1}{2}f(a)$$

, se concluye que:

$$\text{Si } x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) > \frac{1}{2}f(a)$$

■

Ejercicio 15

El resultado estrella que va a actuar en este ejercicio es el TEOREMA DE BOLZANO, del cual una posible forma de enunciarlo sería la siguiente:

“Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”

(a)

Como $f(-1) = 3$ y $f(1) = -1$, al ser $f(x)$ continua y por aplicación directa del Teorema de Bolzano, se concluye que $\exists c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$. Esto es lo mismo que afirmar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el mencionado intervalo.

(b)

Para resolver esta parte del ejercicio debemos apelar al llamado MÉTODO DE BISECCIÓN para aproximar raíces de funciones. Pueden encontrar una descripción detallada de éste método al final del ejercicio.

Partimos del $[-1, 1]$. $f(-1) = 3$ y $f(1) = -1$

Como $f(0) = 1$, elegimos al intervalo $[0, 1]$ para sustituir al $[-1, 1]$ pues como $f(0) \cdot f(1) = -1$, el TEOREMA DE BOLZANO nos garantiza la presencia de una raíz de $f(x)$ en el mismo.

Como $f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8}$, nos damos cuenta que debemos quedarnos con el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ pues $f(0) \cdot f(\frac{1}{2}) < 0$ y de nuevo el TEOREMA DE BOLZANO nos garantiza una raíz de $f(x)$ en éste último.

Ahora hacemos $f(\frac{1}{4}) = \frac{17}{64}$, como $f(\frac{1}{2}) \cdot f(\frac{1}{4}) < 0$ elegimos como nuevo intervalo conteniendo una raíz de $f(x)$ al $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

Con un paso más ya estaremos dentro de los lineamientos que nos pide el ejercicio. Observemos que el punto medio del último intervalo elegido es igual a $\frac{3}{8}$ y $f(\frac{3}{8}) = -\frac{37}{512}$. Como $f(\frac{3}{8}) \cdot f(\frac{1}{4}) < 0$ debemos elegir ahora al intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$ sabiendo que el mismo posee una raíz de $f(x)$ como consecuencia de una nueva aplicación del TEOREMA DE BOLZANO.

Elegimos pues: $I = [\frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$ que contiene una raíz de $f(x)$ y su longitud es de $0,125 < 2$.

■

Método de Bisección

El MÉTODO DE BISECCIÓN para aproximar raíces de funciones es muy sencillo y consiste en un algoritmo que parte de un intervalo del cuál sabe contiene alguna raíz de $f(x)$ y nos da un método para subdividir el intervalo original en subintervalos cada vez mas pequeños, conteniendo éstos últimos también alguna raíz de $f(x)$. El algoritmo es como sigue:

Sea $f(x)$ una función de la cual se sabe tiene que tener alguna raíz en el intervalo $[a, b]$ debido a que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Definiremos por recurrencia una sucesión de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ que tendrá la propiedad de que su longitud será $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ y dentro de cada uno de ellos habrá seguridad de que hay alguna raíz de $f(x)$.

1. Prefijamos $a_0 = a$ y $b_0 = b$ y hacemos $I_0 = [a_0, b_0]$
2. Para elegir quién es $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$, si $n \in \mathbb{N}_+$ se procede como sigue:

Se calcula $c = \frac{a_n + b_n}{2}$.

- a) Si $f(a_n) \cdot f(c) < 0$: Entonces $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = c$, quedando $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$.
- b) Si $f(c) \cdot f(b_n) < 0$: Entonces $a_{n+1} = c$ y $b_{n+1} = b_n$, quedando $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Es claro que en cada paso de la construcción, I_{n+1} tiene una longitud que es la mitad de la que tenía I_n y dada la forma de elegir I_{n+1} a partir del anterior es evidente que el mismo se encuentra en exactamente las mismas condiciones que el anterior para aplicarle el Teorema de Bolzano y concluir que contiene una raíz de $f(x)$.

La situación es la siguiente:

$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset I_4 \subset \dots \subset I_n \subset I_{n+1} \subset \dots$$

$$b-a = |I_0| < |I_1| = \frac{b-a}{2} < |I_2| < \frac{b-a}{2^2} < \dots < |I_n| = \frac{b-a}{2^n} < \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Así: Podemos aislar a la raíz tanto como se quiera.



Ejercicio 16

Como:

$$\cosh(0) - \sinh(0) = \frac{1+1}{2} = 1$$

y

$$\cosh(1) - \sinh(1) = \frac{e+e^{-1}}{2} - \frac{e-e^{-1}}{2} = e^{-1} \approx 0,36 < \frac{1}{2}$$

, se concluye por el Teorema de los Valores Intermedios que debe existir un $x \in (0, 1)$ tal que $\cosh(x) - \sinh(x) = \frac{1}{2}$ ya que el mencionado teorema nos asegura que $[e^{-1}, 1] \subseteq f([0, 1])$, y como caso particular entonces debe estar el punto $y = \frac{1}{2}$ en $f([0, 1])$, pero ésto último es lo mismo que afirmar la existencia de un $x \in [0, 1]$ con la propiedad de que $f(x) = \frac{1}{2}$.

■

Ejercicio 17

(a)

Sería equivalente probar que la función $f(x) = 2x - 1 - \cos(x)$ tiene alguna raíz en \mathbb{R} . Pero como $f(0) = -2 < 0$ y $f(\pi) = 2\pi - 1 - (-1) = 2\pi > 0$ y dado que $f(x)$ es una función continua, el TEOREMA DE BOLZANO asegura la existencia de una raíz para $f(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$. Dicha raíz será solución de la ecuación original.

(b)

Llamemos $f(x)$ al lado izquierdo de la ecuación. Es claro que $\forall n \in \mathbb{N} f(0) = 1 > 0$. Como:

$$f(-2) = (-2)^{2n+1} + 5 = -(2)^{2n+1} + 5 \stackrel{\text{tomando } n=1}{\leq} -2^3 + 5 = -3 < 0$$

Dado que $f(x)$ es una función continua y por aplicación del TEOREMA DE BOLZANO deducimos que la misma debe tener alguna raíz $c \in (-2, 0)$.

(c)

Consideramos la función $f(x) = \ln(x) + 3x$ que es continua en todo su dominio. Como $f(1) = \ln(1) + 3 = 3$ y por ejemplo $f(e^{-2}) = \ln(e^{-2}) + 3e^{-2} = -2 + \frac{3}{e^2} < 0$, entonces por el Teorema de Bolzano concluimos que $f(x)$ tiene que tener una raíz $c \in (e^{-2}, 1)$.

(d)

Llamemos $f(x)$ al miembro de la izquierda. Aquí será suficiente con encontrar x_1 y x_2 tales que $f(x_1) < 0,2$ y $f(x_2) > 0,2$, pues si consiguiéramos tales números por una aplicación del TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS sabríamos que $0,2$ tiene que estar en la imagen de $f(x)$. Y ésto último es lo que se quería probar. Veamos que x_1 y x_2 existen.

$$f(0) = 0 < 0,2 \text{ y } f(1) = \frac{1}{2} = 0,5 > 0,2$$

Por lo tanto basta con tomar $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$.

(e)

Consideramos $f(x) = e^{-x^2} - \ln(x)$. Como $f(1) = \frac{1}{e} > 0$ y $f(e^2) = e^{-e^4} - 2 < -1 < 0$, por el TEOREMA DE BOLZANO concluimos que $\exists c \in (1, e^2) / f(c) = 0$.

(f)

Llamemos al miembro izquierdo $f(x)$. Como $f(0) = 0 < 2$ y $f(1) = 4 > 2$, por el TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS debe existir $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 2$.

■

Ejercicio 18

Llamemos $f(x)$ al miembro de la izquierda. Como -2 y 3 no pertenecen al dominio de $f(x)$, no podemos intentar aplicar el TEOREMA DE BOLZANO directamente utilizando los extremos del intervalo. Pero dicho teorema puede ser *adaptado* para que nos sirva en este caso:

“TEOREMA DE BOLZANO ADAPTADO: Sean a y b no necesariamente finitos. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ ya sean finitos o infinitos tienen signos distintos. Entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”

Utilizando esta adaptación del TEOREMA DE BOLZANO el ejercicio tiene que salir sin problemas:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 1}{x + 2} + \frac{x^4 + 1}{x - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 1}{x + 2} + \frac{x^4 + 1}{x - 3} = -\infty$$

Se aprecia que ambos límites tienen signos opuestos, por lo que: $\exists c \in (-2, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

Demostración del Teorema de Bolzano Adaptado

Supongamos *s.p.g*⁵¹ que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L < 0$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = M > 0$. Si fuera $\forall x \in (a, b)$ $f(x) \geq 0$ entonces debería ser $L \geq 0$, razón por la cual se concluye que $\exists a' \in (a, b)$ tal que $f(a') < 0$. Si fuera $\forall x \in (a, b)$ $f(x) \leq 0$ entonces sería $M \leq 0$, razón por la cual concluimos que $\exists b' \in (a, b)$ tal que $f(b') > 0$. Podemos suponer nuevamente *s.p.g* que $a' < b'$ con lo cual podemos aplicar el Teorema de Bolzano Original al intervalo (a', b') para concluir que debe existir $c \in (a', b') \subseteq (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. ■

⁵¹Significa *sin perder generalidad*.

Ejercicio 19

(a)⁵²

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = -3 \text{ ó } x = 2$$

Armos ahora una tabla con los intervalos como sigue:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f(x)$	$f(-4) = 96$ +	$f(-1) = -6$ -	$f(1) = -4$ -	$f(3) = 54$ +

(b)

Aquí $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>0}$ y en su dominio $f(x)$ no presenta ningún problema de continuidad. La única raíz de $f(x)$ es $x = 1$, lugar donde el logaritmo se anula. Nuestra tabla entonces queda:

	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f(x)$	$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \ln(\frac{1}{2}) < 0$ -	$f(e) = e > 0$ +

(c)

Ahora $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{\neq -1}$. Hay que tener muchísimo cuidado en casos como éste donde la función $f(x)$ o bien presenta un dominio disconexo o bien tiene discontinuidades, ya que en la tabla que vamos a realizar además de tener en cuenta los ceros de la función habrá que incluir los puntos de discontinuidad o aquellos que no estén en el dominio. La razón de esto es sencilla: Para aplicar el Teorema de Bolzano necesitamos que $(a, b) \subseteq \text{Dom}(f)$ y que en dicho intervalo $f(x)$ sea continua.

Teniendo en cuenta que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$, la tabla queda así:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f(x)$	$f(-3) = -\frac{5}{2}$ -	$f(-\frac{1}{2}) = \frac{7}{2}$ +	$f(0) = -4$ -	$f(3) = \frac{5}{4}$ +

(d)

Aquí $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ pues el denominador jamás se podría anular y sus ceros vienen dados por $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Como vemos hay infinitas raíces que considerar, razón por la cual la tabla se complicaría un poco. Afortunadamente

⁵² Al final del ejercicio pueden consultar el método utilizado para resolverlo explicado en detalle.

$f(x)$ es periódica de período 2π , y sabemos que si a una de éstas funciones la estudiamos en el intervalo $[0, 2\pi]$, entonces ya la conoceremos en todos lados. Basta hacer pues la tabla restringida al mencionado intervalo.

	$(0, \pi)$	$(\pi, 2\pi)$
$f(x)$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}} > 0$ +	$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2 - \frac{\sqrt{2}}{2}} < 0$ -

Pero entonces: $f_+ = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$ y $f_- = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$

Comentario al Ejercicio

El TEOREMA DE BOLZANO es una útil herramienta que a pesar de su simplicidad tiene consecuencias importantísimas. Una de ellas es la que nos va a servir para resolver el presente ejercicio. La idea es la siguiente: Si $f(x)$ es una función continua de la cual conocemos con exactitud sus ceros, digamos que hicimos una lista ordenada de los mismos obteniendo que son:

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_n$$

Tengamos en cuenta que si $1 \leq i \leq n-1 : \forall x \in (x_i, x_{i+1}) \Rightarrow f(x) \neq 0$, ya que los ceros de $f(x)$ son exactamente los de la lista de mas arriba. Teniendo en cuenta ésto último, concluimos muy fácilmente que $\forall 1 \leq i \leq n-1$, en los intervalos (x_i, x_{i+1}) $f(x)$ no puede cambiar de signo. En efecto, si esto ocurriera entonces existiría por el Teorema de Bolzano $c \in (x_i, x_{i+1})$ tal que $f(c) = 0$, pero esto es imposible dado que en el mencionado intervalo f no posea ceros. ¡ABS!

De esta forma obtenemos un sencillo método para hallar los intervalos de positividad y negatividad de una función continua $f(x)$:

- Se buscan *todos* sus ceros y se los ordena $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_n$.
- Para cada $1 \leq i \leq n-1$ elegimos $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ y nos fijamos el signo de $f(c_i)$. Dicho signo será el que tenga $f(x)$ en todo éste intervalo. ■

Problema 1

Nociones Preliminares

El presente problema está relacionado con el cálculo de las ASÍNTOTAS OBLICUAS de una cierta función $f(x)$. En general diremos que la recta de ecuación $y = mx + b$ es una Asíntota Oblicua de $f(x)$ en $+\infty$ si y sólo si:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (mx + b)$$

La misma noción se define para $-\infty$, en cuyo caso se dirá que $f(x)$ tiene una Asíntota Oblicua en $-\infty$. Para averiguar la existencia de posibles asíntotas oblicuas se debe proceder como sigue:

1. Se estudia según corresponda $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si éste límite existe y nos da $m \in \mathbb{R}$, dicho valor m es el *candidato* para pendiente de la recta que sea Asíntota Oblicua de $f(x)$. Si el límite anterior no existiera o bien nos diera infinito ya descartamos la existencia de tal asíntota.
2. Si tuvimos éxito en el paso anterior y contamos con un candidato para m , debemos ahora averiguar si existe b . Para ello estudiamos según corresponda $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx$. Si éste límite existe y nos da un valor de $b \in \mathbb{R}$, debemos concluir que $f(x)$ tiene una Asíntota Oblicua en $\pm\infty$ de ecuación $y = mx + b$. Si el valor del límite anterior no existiera o bien nos diera infinito descartamos la existencia de tal asíntota.

Como se dijo mas arriba, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ si y sólo si $y = ax + b$ es una asíntota oblicua de $f(x)$ en $+\infty$, por lo cual la determinación de a y b dependerá de que la misma exista.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \cdot 2}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} = 2$$

Por lo tanto debería ser $a = 2$. Veamos ahora si existe b estudiando:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 - 2x}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)} = 0$$

Por lo tanto concluimos que debe ser $b = 0$.

Así: Los valores para a y b existen y serán $a = 2$ y $b = 0$.

■

Problema 2

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(a + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{a}}{x \sqrt{a + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} = \sqrt{a} - 1\end{aligned}$$

Como el valor del límite nos es igual a $\sqrt{a} - 1$, tiene que ser:

$$\sqrt{a} - 1 = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 6 \Leftrightarrow a = 36$$

Así: Debe tomarse $a = 36$.

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 + ax - 1} - \sqrt{x^3 + ax - 1}) \cdot (\sqrt{x^2 + ax - 1} + \sqrt{x^3 + ax - 1})}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x^2 + ax - 1} + \sqrt{x^3 + ax - 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + ax - 1) - (x^3 + ax - 1)}{(x - 1) \cdot (\sqrt{x^2 + ax - 1} + \sqrt{x^3 + ax - 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 \cdot (x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + ax - 1} + \sqrt{x^3 + ax - 1})} = -\frac{1}{2\sqrt{a}}\end{aligned}$$

Como puede apreciarse del resultado anterior, debería ocurrir que:

$$-\frac{1}{2\sqrt{a}} = 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{a} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{a} = -\frac{1}{4} \text{ ¡ABS!}$$

Como ésto último es imposible es ¡ABSURDO! se concluye que no puede existir valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que la expresión del enunciado tienda a 2 cuando $x \rightarrow 1$.

■

Problema 3

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5^x \left(1 + \left(\frac{2}{5} \right)^x \right) \right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (5^x)^{\frac{1}{x}} \cdot \underbrace{\left(1 + \left(\frac{2}{5} \right)^x \right)^{\frac{1}{x}}}_{\rightarrow 1} \\ &= 5\end{aligned}$$

■

Problema 4

Tenemos que estudiar los límites laterales para averiguar si es posible que exista algún valor de $a \in \mathbb{R}$ que haga que ambos se *peguen* y así lograr que $f(x)$ resulte continua.

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ entonces es claro que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

En cuanto al otro, como $x > 0$ para el límite lateral por derecha, debemos utilizar la fórmula de abajo para evaluar los valores de $f(x)$. Nos queda:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$$

Pero entonces es claro que se deberá elegir $a = 0$ para que $f(x)$ resulte continua en $x = 0$.



Problema 5

Tengamos en cuenta que $f(e) = -10^6 < 0$. Y como

$$f(e^{10^6+1}) = \ln(\ln(e^{10^6+1})) - 10^6 = \ln(e^{10^6+1}) - 10^6 = 10^6 + 1 - 10^6 = 1 > 0$$

Por una aplicación directa del TEOREMA DE BOLZANO se tiene que:

$$\exists c \in (e, e^{10^6+1}) \subseteq (e, +\infty) / f(c) = 0$$

Pero ésto último es lo que se quería demostrar. ■

Problema 6

En la solución que presentaremos a continuación, se hará uso del TEOREMA DE BOLZANO ADAPTADO propuesto en la solución del Ejercicio 18 de esta práctica. El enunciado será recordada aquí, pero la demostración del mismo pueden encontrarla si lo desean en el mencionado ejercicio en la página 292.

“TEOREMA DE BOLZANO ADAPTADO: Sean a y b no necesariamente finitos. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ ya sean finitos o infinitos tienen signos distintos. Entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”

Teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty > 0$$

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 > 0$$

$$f(\sqrt{2}) = 8 - 28 + 14\sqrt{2} - 1 = -21 + 14\sqrt{2} < -21 + 14 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0$$

Pero por aplicación del TEOREMA DE BOLZANO ADAPTADO se tiene que debe haber alguna raíz real en cada uno de éstos intervalos disjuntos: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, +\infty)$.

■

Problema 7

(a)

Basta observar dos cosas:

- $f(0) = 133 > 70$.
- $f(1) = 1 + \frac{133}{2+\sin(1)} \leq 1 + \frac{133}{2} \leq 68 < 70$

Por el TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS debe existir $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 70$.

(b)

Nuevamente, basta observar que:

- $f(0) = 0$.
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 15 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 15 \geq \frac{3}{4} + 15 > 15$

Otra vez por el TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS debe existir $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $f(c) = 15$. ■

Problema 8

Este problema es muy interesante y muestra en cierta forma la potencia del TEOREMA DE BOLZANO, en su versión análoga llamada TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS⁵³. Es maravilloso como con tan pocas hipótesis se puede decir tanto. La primera vez que uno toma contacto con este tipo de problemas es imposible sospechar: ¿Alcanza con las hipótesis que tenemos o habrán olvidado agregar alguna en el enunciado? Lo cierto es que en efecto alcanzan las hipótesis que nos han dado para resolver el problema. Claro, hay que aceptar que la función $f(t)$ que da la posición del automóvil en función del tiempo es una función continua, pero esto parece ser bastante razonable ya que la teletransportación aun no se ha inventado.

Consideremos pues la función $g(t) = f(t+1) - f(t)$. Observen que esta función $g(t)$ mide la distancia recorrida en el lapso comprendido entre el tiempo t y el tiempo $t+1$ medido en horas. El dominio de g es claramente $[0, 3]$ ya que el automóvil viajó durante 4 horas, de modo que el instante $t+1$ sólo tiene sentido físico en el problema cuando $t \in [0, 3]$.

Queremos probar que $\exists t \in [0, 3]$ tal que $g(t) = 400$. En términos matemáticos esto querría decir que en el período de una hora comprendido entre t y $t+1$ nuestro automóvil ha recorrido exactamente 100Km.

Ahora es cuando hay que detenerse un instante a pensar:

- Si para $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$ los valores de $g(t)$ fueran todos menores que 100, entonces en cada una de las primera, segunda, tercera y cuarta hora se habrían recorrido menos de 100Km. Pero entonces sería imposible haber recorrido en total 400Km. ¡ABUSRDO!

Luego: $\exists t \in \{0, 1, 2, 3\}$ tal que $g(t) \geq 100$. Supongamos *s.p.g*⁵⁴ que éste instante es $t = 1$.

- Si para $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$ los valores de $g(t)$ fueran todos mayores que 100, entonces en cada una de las primera, segunda, tercera y cuarta hora se habrían recorrido más que 100Km. Pero entonces se habrían recorrido en total más que 400Km. ¡ABUSRDO!

Luego: $\exists t \in \{0, 1, 2, 3\}$ tal que $g(t) \leq 100$. Supongamos *s.p.g* que éste instante es $t = 3$.

⁵³Por si no lo sabían estos dos teoremas son equivalentes. De hecho son dos formas distintas de decir lo mismo.

⁵⁴Significa *supongamos sin perder generalidad*. No hay nada de malo en suponer que $t = 1$ ya que nos da lo mismo cualquier valor, ya sea 0, 1, 2, ó 3 y podemos elegir el que nos plazca para proseguir con el hilo de la argumentación.

PROBLEMA 8 PRÁCTICA 4 - LÍMITES Y CONTINUIDAD

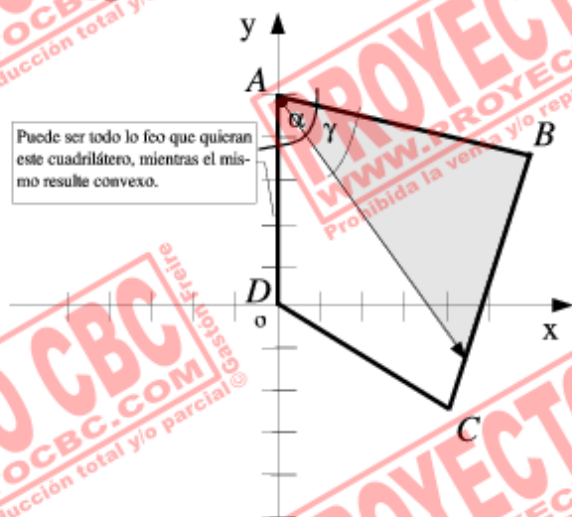
Pero entonces $g(1) \geq 100$ y $g(3) \leq 100$. Por el TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS debe existir un $t_* \in [1, 3]$ tal que $g(t_*) = 100$. Pero ésto último quiere decir precisamente que entre t_* y $t_* + 1$ se han recorrido exactamente 100Km.

Luego: En el lapso comprendido entre t_* y $t_* + 1$ se deben haber recorrido con exactitud ni más ni menos que 100Km. ■

Problema 9

El presente problema también es muy interesante, sin embargo es más evidente que el anterior. Al imaginar un cuadrilátero convexo $ABCD$ es factible sospechar enseguida que si se toma como origen uno de sus vértices, por ejemplo el A y se considera el segmento con origen en dicho vértice y que termina en algún punto del lado \overline{BC} o bien en algún punto del segmento \overline{CD} , en algún momento la figura quedará dividida en dos partes de igual área. Hagamos un gráfico para ilustrar la situación:

Figura 100: Cuadrilátero convexo.



En la figura se puede apreciar como si el ángulo $\widehat{ABD} = \alpha$ y $\gamma \in [0, \alpha]$, entonces si llamamos $A(\gamma)$ a la función *continua* que nos da el área de la figura sombreada —que depende del valor de γ obviamente—, entonces $A(0) = 0$ y $A(\alpha)$ nos da el área total del cuadrilátero, la cual podemos denotar por S . Como $\frac{S}{2} \in (0, S)$ se tiene que por aplicación del TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS, debe existir un cierto $\gamma_0 \in (0, \alpha)$ tal que $A(\gamma_0) = \frac{S}{2}$.

Pero esto último es lo que se quería demostrar pues entonces el cuadrilátero original habrá quedado dividida en dos figuras de igual área.

■

Problema 10

Este problema es otro magnífico ejemplo de la potencia del TEOREMA DE BOLZANO. Obsérvese que un punto c tal que $f(c) = c$ es lo que se llama un *punto fijo* de $f(x)$, el hecho de poder asegurar que una función en las condiciones de f tenga que tener necesariamente un punto fijo es sorprendente. La demostración de este hecho no es para nada complicada.

Sea $g(x) = f(x) - x$, la cual resulta continua por ser $f(x)$ e $y = x$ ambas funciones continuas. Observemos que $g(0) = f(0) > 0$ y $g(1) = f(1) - 1 < 0$. El TEOREMA DE BOLZANO garantiza entonces que $\exists c \in (0, 1)$ tal que $g(c) = 0$. Pero esto quiere decir que $f(c) - c = 0$, lo que es equivalente a decir que $f(c) = c$.

Así: Existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = c$.

■

Problema 11

(a)

Probaremos que $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Por el absurdo, supongamos que no.

Por la definición de límite sabemos que $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ si y sólo si:

$$(\forall \varepsilon > 0) ((\exists n_0 \in \mathbb{N}) / (\text{Si } n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon)) \quad (24)$$

La negación de ésta afirmación es:

$$(\exists \varepsilon > 0) / ((\forall n_0 \in \mathbb{N}) (\exists n > n_0 \text{ tal que } |a_n| \geq \varepsilon)) \quad (25)$$

Al final del ejercicio hay una sección dedicada a explicar como se hace para negar correctamente la definición de límite para pasar de (24) a (25). Sería recomendable su lectura si tienen problemas para negar ciertas proposiciones.

Partimos de $n_0 = 1$. Usando (25) sucesivas veces construiremos una subsucesión a_{n_k} de a_n con ciertas propiedades:

Para n_0 , sabemos que $\exists n_1 > n_0$ tal que $|a_{n_1}| \geq \varepsilon$

Para n_1 , sabemos que $\exists n_2 > n_1$ tal que $|a_{n_2}| \geq \varepsilon$

⋮

Para n_k , sabemos que $\exists n_{k+1} > n_k$ tal que $|a_{n_{k+1}}| \geq \varepsilon$

⋮

Queda definida una subsucesión de $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} : \forall k \in \mathbb{N} |a_{n_k}| \geq \varepsilon$.

Pero entonces debe ser:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k \cdot a_{n_k} \stackrel{\geq \varepsilon}{=} +\infty$$

Pero ésto último es ¡ABSURDO! pues $n_k \cdot a_{n_k}$ es una subsucesión de $n \cdot a_n$ de la cual sabemos tiende a 3, razón por la cual debería ser:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k \cdot a_{n_k} = 3$$

El absurdo proviene de suponer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.

Así: Debe ser $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(b)

Hay que tener bien presente que sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Llamemos b_n a la sucesión que plantea el ejercicio. Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(5a_n)}{5a_n} \right) \cdot \left(\frac{5}{n \cdot a_n} \right) = \frac{5}{3}$$

La definición de límite y su negación

Para desenvolverse en el quehacer matemático se utiliza la LÓGICA PREDICATIVA POLIÁDICA DE ORDEN SUPERIOR. Como toda lógica con cuantificadores, descriptores, relaciones y predicados es bastante compleja de manejar. En realidad uno se va acostumbrando a medida que la va utilizando. Sin embargo el primer choque aparece cuando luego de enunciar una proposición complicada — *tal vez plagada de cuantificadores* — la intentamos *negar*. Ahí es donde uno se da cuenta que está en problemas. Negar definiciones y/o proposiciones complejas es toda una tarea, al principio difícil. Claro, hay reglas para hacerlo correctamente en forma más o menos mecánica. Se aclara sin embargo que esta sección no pretende en lo absoluto ingresar al alumno de manera sistemática al mundo de la lógica de predicados, ya que dicha empresa requeriría la escritura de por lo menos otro libro para ser realizada con éxito. El alumno interesado en estudiar más en profundidad la misma puede consultar [Lógica Simbólica. Manuel Garrido].

El objetivo de esta sección es más humilde: que *comprendan* como se niega la definición de límite, para lo cual vamos a ver algunos ejemplos de proposiciones y sus negaciones, empezando por algunas muy simples y subiendo de a poco el nivel de complejidad. Al final, en el último ejemplo se hace la negación de la definición de límite con todo detalle y paso a paso.

- “Hay jirafas sagradas.” se niega correctamente afirmando “Ninguna jirafa es sagrada.” En el lenguaje simbólico de la matemática podemos repetir el ejemplo: “ $\exists x$ jirafa / x es sagrada.”, quedando su negación “ $\forall x$ jirafa, x es no sagrada” Si observan con atención, al negar un cuantificador *existencial* el mismo pasa en la negación a ser *universal*. Y la propiedad *afirmada existencialmente* pasa a ser *negada universalmente*. Por lo tanto podemos extraer de aquí una regla general:

LA DEFINICIÓN DE LÍMITE Y SU NEGACIÓN Y CONTINUIDAD

- En una fórmula, el cuantificador \exists se niega reemplazándolo por \forall y viceversa. Si denotamos P como la propiedad de ser jirafa, $P(x)$ significa “ x es jirafa”. Entonces la regla quedaría así: “ $\exists x/P(x)$ ” se niega por “ $\forall x, \neg P(x)$ ”. Vean como no solo hay que cambiar el \exists por \forall sino que también hay que *negar* la propiedad P .

- Otro ejemplo: “Hay jirafas que todos los días toman licor”. Se niega por “*Toda* jirafa verifica que algún día no toma licor”.
- “Para todo número primo x existe otro número primo y mas grande que el primero”, se niega por “Hay un número primo x para el cual para todo primo y se verifica que y es mas chico que x ”. En símbolos: “ $\forall x$ primo $\exists y$ primo $/y > x$ ”, se niega por “ $\exists x$ primo $\wedge \forall y$ primo es $y \leq x$ ”. Como ven los cuantificadores se intercambian y las propiedades afectadas se niegan.
- Veamos un ejemplo mas complicado:

- “Existe una jirafa tal que en todo día lluvioso, si ve pasar a un hombre con un perro que ladra entonces se pinta el pelo de verde”

La negaremos de a poco:

- “Para toda jirafa *no es cierto que* (en todo día lluvioso, si ve pasar a un hombre con un perro que ladra entonces se pinta el pelo de verde)”.
- “Para toda jirafa existe algún día lluvioso tal que *no es cierto que* (si ve pasar a un hombre con un perro que ladra entonces se pinta el pelo de verde)”.
- “Para toda jirafa existe algún día lluvioso tal que ve pasar a un hombre con un perro que ladra y no se pinta el pelo de verde.”

Observen como de apoco vamos negando la expresión compleja para no cometer errores.

- La negación de la definición de límite. La misma afirma:
 - $(\forall \varepsilon > 0) ((\exists n_0 \in \mathbb{N}) / (\text{Si } n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon))$.

La negaremos de a poco:

LA DEFINICIÓN DE LÍMITE A SU INAGUACIÓN Y CONTINUIDAD

- $(\exists \varepsilon > 0) / \neg ((\exists n_0 \in \mathbb{N}) / (\text{Si } n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon))$. Observen como primero cambiamos el cuantificador universal por un existencial y negamos la propiedad que se afirmaba existencialmente. Ahora tenemos que realizar el procedimiento de negarla, es decir sacar el \neg y negarla de verdad adentro.
- $(\exists \varepsilon > 0) / ((\forall n_0 \in \mathbb{N}) \neg (\text{Si } n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon))$. Nuevamente primero cambiamos el cuantificador e inmediatamente *negamos* la propiedad afirmada existencialmente por el mismo. Pero lo hacemos *formalmente* anteponiendo un “ \neg ” para no cometer errores. Después en el próximo paso la desarrollamos.
- $(\exists \varepsilon > 0) / ((\forall n_0 \in \mathbb{N}) (\exists n \geq n_0 / \neg (|a_n - L| < \varepsilon)))$. Para negar esto último hay que observar que si no es cierto que todo número n mas grande o igual que n_0 verifica la propiedad de que $|a_n| < \varepsilon$, quiere decir que debe existir algún número n mas grande o igual que n_0 para el cual no se verifica tal propiedad. Para terminar:
- $(\exists \varepsilon > 0) / ((\forall n_0 \in \mathbb{N}) (\exists n \geq n_0 / |a_n - L| \geq \varepsilon))$

Por lo tanto, si la definición de límite afirma que:

$$(\forall \varepsilon > 0) ((\exists n_0 \in \mathbb{N}) / (\text{Si } n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon))$$

La negación de ésta última afirmación será:

$$(\exists \varepsilon > 0) / ((\forall n_0 \in \mathbb{N}) (\exists n > n_0 \text{ tal que } |a_n - L| \geq \varepsilon))$$

■

Problema 12

Observemos primero que como $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ entonces $\cos\left(\frac{1}{n}\right) > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.
Llamemos a_n a la sucesión cuyo límite debemos calcular, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos^2\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}} \right]^{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}} \right]^{\frac{\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)^2 \cdot \frac{-0}{2n}}{-1}} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

Así:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Problema 13

Llamemos a la expresión del miembro izquierdo del enunciado $f(x)$, la cual es continua en forma independiente del parámetro b elegido. Tengamos en cuenta que $f(0) = 5 > 0$ y $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} - \frac{3}{2}b + 5$. Es claro que lo único que necesitamos es elegir un cierto valor de b de modo que la última expresión quede negativa. Como para $b = 4$ es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} - 6 + 5 = \frac{1}{32} - 1 < 0$, por una aplicación del Teorema de Bolzano se concluye en forma inmediata que $\exists c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$.

Así: Un posible valor para b es $b = 4$.

■