

Práctica 5 - Derivada

Ejercicio 1

El alumno observador y estudioso que haya hecho las prácticas precedentes habrá notado el parecido entre éste ejercicio y el Ejercicio 4 de la práctica 1. De hecho, los puntos (a)...(c) la única diferencia es que adicionalmente se nos pide la ecuación de las rectas. En cuanto al (d) la diferencia es que como a esta altura se supone conocida la noción de Recta Tangente a un punto del gráfico de una cierta función $f(x)$, se pide directamente obtener la misma.

Tengamos en cuenta que la ecuación de la recta tangente a un punto $(x_0, f(x_0))$ del gráfico de una cierta función $f(x)$ es: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, donde $f'(x_0)$ alude a la derivada de la función f en el punto $x = x_0$. Se recuerda asimismo que para calcular $f'(x_0)$ hay que estudiar el cociente incremental de $f(x)$ en el punto aludido, siendo en concreto:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

En este ejercicio en todos los items $x_0 = 1$, y $f(x_0) = f(1) = 0$.

(a)

Como $m = \frac{3-0}{2-1} = 3$ y la recta pasa por el punto $(1, 0)$ entonces debe ser $y = 3 \cdot (x - 1)$.

(b)

Como $m = \frac{(\frac{2}{3}-1)-0}{\frac{2}{3}-1} = \frac{5}{2}$ y la recta pasa por el punto $(1, 0)$ entonces debe ser $y = \frac{5}{2} \cdot (x - 1)$.

(c)

Como $m = \frac{(1,1^2-1)-0}{1,1-1} = 2,1$ y la recta pasa por el punto $(1,0)$ entonces debe ser $y = 2,1 \cdot (x - 1)$.

(d)

Sabemos que $y = f(1) + f'(1)^m(x - 1)$. Es claro que $f(1) = -1$, y como:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((1+h)^2 - 1) - 0}{(1+h) - 1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2 + h \\ &= 2 \end{aligned}$$

Entonces: La recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = 1$ es $y = 2 \cdot (x - 1)$.

Gráfico de las cuatro rectas Es interesante disponer en un mismo gráfico las cuatro rectas para ver como a medida que nos acercamos a $x = 1$ las rectas secantes al gráfico de $f(x)$ se van pareciendo cada vez más a la recta tangente. Dicho gráfico queda así:

Figura 101: Gráfico de las rectas secantes y de la Recta Tangente.



Se puede apreciar como las secantes se van aproximando a la tangente.

Ejercicio 2

El objetivo de este ejercicio es estudiar la derivada de las funciones más usuales. Si bien es cierto que contaremos en breve con numerosas reglas de derivación, las cuales simplificarán el cálculo de las mismas no haciendo necesario el planteo del cociente incremental para obtenerlas, lo cierto es que dichas reglas requieren como materia prima el *conocimiento previo* de como son las derivadas de las funciones más usuales, pues las más complejas se construyen como suma, producto, cociente, composición, etc... de las primeras. Como todo en la vida, hay un momento donde el trabajo duro no puede evitarse, el momento de tomar coraje y hacer los cálculos con las herramientas más primitivas. Sin embargo dicha tarea será recompensada en un cercano futuro ya que a partir de las REGLAS DE DERIVACIÓN y conociendo la derivada de las funciones más usuales, el procedimiento de derivar funciones quedará reducido a un mero cálculo capaz de ser realizado hasta por un ordenador no pensante.

(a)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y - y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

Observen que en el cálculo anterior se usó fuertemente que $y = CTE$, razón por la cual la función $y(x)$ vale y para todo posible valor de x .

Así: Si $y = CTE \Rightarrow y' = 0$ ⁵⁵.

(b)

Ahora le toca a las funciones lineales, otro de los ladrillos con los que construimos funciones más complejas.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) - ax}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax + ah - ax}{h} \\ &= a \end{aligned}$$

Así: En este caso $y'(x) = a \forall x \in \mathbb{R}$.

⁵⁵ ¿Qué les parece, valdrá la recíproca? Así como sabemos que si una cierta función $f(x)$ es constante $\Rightarrow f'(x) = 0$, ¿Se podrá afirmar que si $f'(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = CTE$?

(c)

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h \\
 &= 2x
 \end{aligned}$$

Así: En este caso $y'(x) = 2x$.

(d)

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\
 &= 3x^2
 \end{aligned}$$

Así: En este caso $y'(x) = 3x^2$.

(e)

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{(x+h)x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \\
 &= -\frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

Así: En este caso $y'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

(f)

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto: Obtenemos que $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(g)

La obtención de esta derivada es un poco mas complicada que las anteriores. Primero observamos que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{(e^h - 1)}{h}
 \end{aligned}$$

Ahora nos damos cuenta que conviene hacer un cambio de variables $u = e^h - 1 \Rightarrow h = \ln(1+u)$. Además como $u \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} &= \lim_{u \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{u}{\ln(1+u)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x}{\frac{1}{u} \ln(1+u)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x}{\underbrace{\ln\left(\underbrace{(1+u)^{\frac{1}{u}}}_{\rightarrow 1}\right)}} \\
 &= e^x
 \end{aligned}$$

Así: Obtenemos que $y'(x) = e^x = y(x)$. Una de las propiedades más importantes de la función exponencial de base neperiana e^x es la de ser la única posible función real $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con la propiedad de ser:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Es precisamente por ésta razón que resulta tan importante y se la distingue de las otras exponenciales.

(h)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(\left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{h}{x}}}\right]^{\frac{1}{x}}\right) \\ &= \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Luego: $y'(x) = \frac{1}{x}$.

(i)

En este ítem tenemos que usar la importante Identidad Trigonométrica que afirma:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

A partir de ella se puede resolver el cociente incremental para ésta función, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} y(x+h) - y(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h} - \sin(x) \cdot \frac{(1 - \cos(h))}{h} \end{aligned}$$

Como

$$\frac{(1 - \cos(h))}{h} = \frac{(1 - \cos(h))(1 + \cos(h))}{h(1 + \cos(h))} = \frac{1 - \cos^2(h)}{h(1 + \cos(h))} = \frac{\sin^2(h)}{h(1 + \cos(h))}$$

, entonces en el desarrollo anterior nos queda:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} y(x+h) - y(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h} - \sin(x) \cdot \frac{\sin^2(h)}{h(1 + \cos(h))} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h} - \frac{h \cdot \sin(x)}{1 + \cos(h)} \cdot \left(\frac{\sin(h)}{h} \right)^2 \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

Así: En este caso $y'(x) = \cos(x)$.

(j)

La cuenta es muy parecida a la de arriba, con la diferencia que ahora usaremos la otra importante identidad trigonométrica que afirma:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

También tenemos que tener presente que⁵⁶: $\frac{(1 - \cos(h))}{h} = \frac{\sin^2(h)}{h(1 + \cos(h))}$.

A partir de la misma el análisis del cociente incremental es como sigue:

⁵⁶Ver ítem anterior.

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} y(x+h) - y(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} -\sin(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h} - \cos(x) \cdot \frac{(1 - \cos(h))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} -\sin(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h} - \cos(x) \cdot \frac{\sin^2(h)}{h(1 + \cos(h))} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} -\sin(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h} - \frac{h \cdot \cos(x)}{(1 + \cos(h))} \cdot \left(\frac{\sin(h)}{h}\right)^2 \\
 &= -\sin(x)
 \end{aligned}$$

Así, Obtenemos que $y'(x) = -\sin(x)$ en este caso.

■

Ejercicio 3

Para realizar éste ejercicio correctamente hay que tener en cuenta un par de cosas. Si $y(x)$ es una cierta función y x_0 un punto del dominio de la misma, entonces:

- La pendiente de la recta tangente a $y(x)$ en el punto $x = x_0$ — si la misma existe — está dada por:

$$y'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h}$$

- La ecuación de la recta tangente a $y(x)$ en dicho punto es:

$$L(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$

Es muy interesante cuando se empieza a trabajar con funciones y sus rectas tangentes hacer un gráfico de las mismas para convencerse del por qué dichas rectas juegan un papel tan importante en análisis. Cuando uno hace éste gráfico puede apreciar como de entre todas las rectas posibles la recta tangente es la que *mejor aproxima* a la función en un entorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ del punto x_0 . Es por eso que en este ejercicio haremos los gráficos mencionados para que el alumno pueda familiarizarse con éstos nuevos conceptos.

(a)

Para hallar la derivada de $y(x)$ en $x = 3$ usando el cociente incremental hay que estudiar el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(3+h) - y(3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{((3+h)^2 - 4(3+h) + 7)}^{y(3+h)} - \overbrace{(4)}^{y(3)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 12 - 4h + 7 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} \\ &= 2 \end{aligned}$$

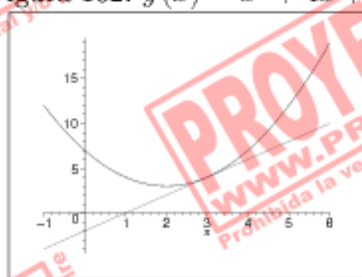
Por lo tanto arribamos a la conclusión de que la pendiente de la recta tangente a $y(x)$ en $x = 3$ debe ser $y'(3) = 2$. Como $y(3) = 4$ se concluye que la ecuación de dicha recta tangente debe ser:

$$L(x) = y(3) + y'(3)(x - 3) = 4 + 2(x - 3)$$

$$L(x) = 2x - 2$$

He aquí un gráfico de $y(x)$ y su recta tangente en el punto pedido:

Figura 102: $y(x) = x^2 + 4x + 7$



$$L(x) = 2x - 2 \text{ tangente en } x = 3.$$

(b)

Para hallar la derivada de $y(x)$ en $x = 5$ usando el cociente incremental hay que estudiar el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(5+h) - y(5)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\left(\frac{2}{(5+h) - 1} \right)}^{y(5+h)} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} \right)}_{y(5)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cdot 2 - (4+h)}{2(4+h)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{2h(4+h)} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

Por lo tanto arribamos a la conclusión de que la pendiente de la recta tangente a $y(x)$ en $x = 5$ debe ser $y'(5) = -\frac{1}{8}$. Como $y(5) = \frac{1}{2}$ se concluye

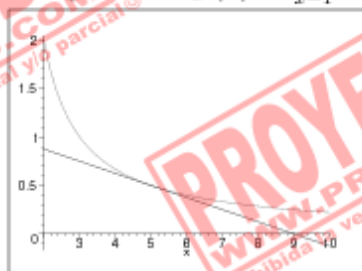
que la ecuación de dicha recta tangente debe ser:

$$L(x) = y(5) + y'(5)(x - 35) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}(x - 5)$$

$$L(x) = -\frac{1}{8}x + \frac{9}{8}$$

He aquí un gráfico de $y(x)$ y su recta tangente en el punto pedido:

Figura 103: $y(x) = \frac{2}{x-1}$



$$L(x) = -\frac{1}{8}x + \frac{9}{8} \text{ tangente en } x = 5.$$

(c)

Para hallar la derivada de $y(x)$ en $x = 13$ usando el cociente incremental hay que estudiar el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(13+h) - y(13)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sqrt{(13+h)+12}}^{y(13+h)} - \overbrace{5}^{y(13)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{25+h} - 5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{25+h} - 5)(\sqrt{25+h} + 5)}{h(\sqrt{25+h} + 5)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{25 + h - 25}{h(\sqrt{25+h} + 5)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{25+h} + 5)} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

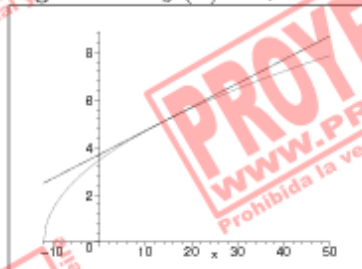
Por lo tanto arribamos a la conclusión de que la pendiente de la recta tangente a $y(x)$ en $x = 13$ debe ser $y'(13) = \frac{1}{10}$. Como $y(13) = 5$ se concluye que la ecuación de dicha recta tangente debe ser:

$$L(x) = y(13) + y'(13)(x - 13) = 5 + \frac{1}{10}(x - 13)$$

$$L(x) = \frac{1}{10}x + \frac{37}{10}$$

He aquí un gráfico de $y(x)$ y su recta tangente en el punto pedido:

Figura 104: $y(x) = \sqrt{x+12}$



$$L(x) = \frac{1}{10}x + \frac{37}{10} \text{ tangente en } x = 13.$$

(d)

Para hallar la derivada de $y(x)$ en $x = 1$ usando el cociente incremental hay que estudiar el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(1+h) - y(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{(\mathcal{A} + h + \ln(1+h))}^{y(1+h)} - \overbrace{(\mathcal{A})}^{y(1)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{h} \ln(1+h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1 + \ln \left((1+h)^{\frac{1}{h}} \right) \\ &= 1 + \ln(e) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto arribamos a la conclusión de que la pendiente de la recta tangente a $y(x)$ en $x = 1$ debe ser $y'(1) = 2$. Como $y(1) = 1$ se concluye que la ecuación de dicha recta tangente debe ser:

$$L(x) = y(1) + y'(1)(x - 1) = 1 + 2(x - 1)$$

$$L(x) = 2x - 1$$

He aquí un gráfico de $y(x)$ y su recta tangente en el punto pedido:

Figura 105: $y(x) = x + \ln(x)$



$$L(x) = 2x - 1 \text{ tangente en } x = 1.$$

(e)

Para hallar la derivada de $y(x)$ en $x = 0$ usando el cociente incremental hay que estudiar el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(0+h) - y(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{(5h+3)}^{y(0+h)} - \overbrace{(3)}^{y(0)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto arribamos a la conclusión de que la pendiente de la recta tangente a $y(x)$ en $x = 0$ debe ser $y'(0) = 5$. Como $y(0) = 3$ se concluye que la ecuación de dicha recta tangente debe ser:

$$L(x) = y(0) + y'(0)(x - 0) = 5x + 3$$

$$L(x) = 5x + 3$$

No debe sorprender que la ecuación de la recta tangente a una curva sea la misma recta, ya que como dijimos anteriormente la noción de RECTA TANGENTE tiene que ver con la de *recta que mejor aproxima* a una función dada en un entorno de un punto dado x_0 . Pero si la función en cuestión *ya*

es una recta, no hay dudas de que será ella misma la mejor recta que la aproxime.

He aquí un gráfico de $y(x)$ y su recta tangente en el punto pedido⁵⁷:

Figura 106: $y(x) = 5x + 3$



$$L(x) = 5x + 3 \text{ tangente en } x = 0.$$

(f)

Para hallar la derivada de $y(x)$ en $x = 4$ usando el cociente incremental hay que estudiar el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(4+h) - y(4)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\left(\frac{2}{4+h}\right)}^{y(4+h)} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{y(4)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4-y-h}{2(4+h)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2h(4+h)} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

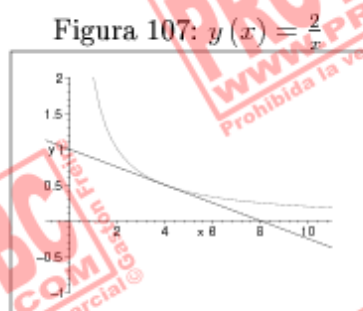
Por lo tanto arribamos a la conclusión de que la pendiente de la recta tangente a $y(x)$ en $x = 4$ debe ser $y'(4) = -\frac{1}{8}$. Como $y(4) = \frac{1}{2}$ se concluye que la ecuación de dicha recta tangente debe ser:

$$L(x) = y(4) + y'(4)(x - 4) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}(x - 4)$$

$$L(x) = -\frac{1}{8}x + 1$$

⁵⁷No esperen ver dos funciones distintas.

He aquí un gráfico de $y(x)$ y su recta tangente en el punto pedido:



$$L(x) = -\frac{1}{8}x + 1 \text{ tangente en } x = 4.$$

(g)

Aquí para estudiar si $y(x)$ es derivable o no en $x = 1$ tenemos que estudiar el cociente incremental —como de costumbre—, pero con el cuidado de hacerlo primero por izquierda y luego por derecha en forma separada, debido a que la fórmula para $y(x)$ es partida justo en $x = 1$. Cuando se definen funciones de a trozos hay que tener cuidado de que los gráficos *se peguen bien* en el punto donde la definición se parte, ya que si la unión no resultara *suave* entonces no resultaría $y(x)$ derivable en dicho punto.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{y(1+h) - y(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(2(1+h) - 1) - (1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h}{h} = 2 \end{aligned}$$

Si el límite por derecha no resultara igual a 2, entonces $y(x)$ no podría ser jamás derivable en $x = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(1+h) - y(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(2+h)}{h} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Afortunadamente ambos límites coinciden, razón por la cual podemos inferir que $y'(1) = 2$. Como $y(1) = 1$ se concluye que la ecuación de dicha recta tangente debe ser:

$$L(x) = y(1) + y'(1)(x - 1) = 1 + 2(x - 1)$$

$$L(x) = 2x - 1$$

He aquí un gráfico de $y(x)$ y su recta tangente en el punto pedido:

Figura 108: $y(x) = \begin{cases} x^2 & , x > 1 \\ 2x - 1 & , x \leq 1 \end{cases}$



$$L(x) = 2x - 1 \text{ tangente en } x = 1.$$

(h)

Para hallar la derivada de $y(x)$ en $x = 0$ usando el cociente incremental hay que estudiar el siguiente límite:

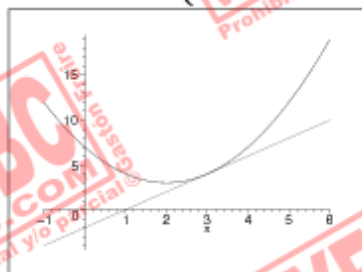
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(0+h) - y(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\left(h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) \right)}^{y(0+h)} - \underbrace{y(0)}_{(0)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overset{\text{acotado}}{h^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto arribamos a la conclusión de que la pendiente de la recta tangente a $y(x)$ en $x = 0$ debe ser $y'(0) = 0$. Como $y(0) = 3$ se concluye que la ecuación de dicha recta tangente debe ser:

$$L(x) = y(0) + y'(0)(x - 0) = 3 + 0 \cdot (x - 0) = 3 \Rightarrow L(x) = 3$$

He aquí un gráfico de $y(x)$ y su recta tangente en el punto pedido:

Figura 109: $y(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$



Esta función presenta un pintoresco gráfico. Sorprende el hecho de que tenga recta tangente en $x = 0$ debido a la cantidad infinita de veces que oscila a medida que se acerca a $x = 0$. Sin embargo la tiene y es nula.

$$L(x) = 0 \text{ tangente en } x = 0.$$

Ejercicio 4

(a)

Para describir el mencionado haz de rectas hay que determinar cuáles son *todas* las rectas que pasan por el punto mencionado. Como la condición para pertenecer a dicho haz de rectas es pasar por el punto $(1, y(1)) = (1, 2)$, entonces cualquier recta que pase por dicho punto pertenecerá al haz. Pero éstas son exactamente las de la forma:

$$y = 2 + m(x - 1)$$

Así: El haz de rectas es $\{y = 2 + m(x - 1) : m \in \mathbb{R}\}$.

(b)

Para calcular $y'(1)$ planteamos el cociente incremental correspondiente y calculamos su límite para h tendiendo a cero.

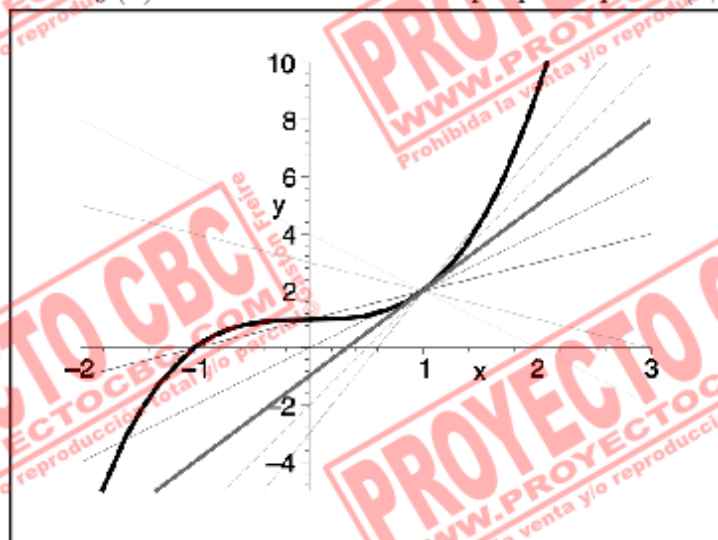
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(1+h) - y(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((1+h)^3 + 1) - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 3h^2 + 3h + 1 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h(h+1)}{h} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Pero entonces $y'(1) = 3$. Y como la ecuación de la recta tangente en dicho punto es $L(x) = y(1) + y'(1)(x - 1)$, podemos concluir que:

$$L(x) = 2 + 3(x - 1) = 3x - 1$$

Observación interesante Pueden apreciar como la recta tangente es una del haz de rectas, la correspondiente a $m = 3$. Es un detalle digno de mención ya que de las pertenecientes al mismo es la que mejor aproxima a $y(x)$.

Gráfico del haz de rectas y de la tangente Ahora hacemos un gráfico representando el haz de rectas y también la recta tangente. Allí se podrá comprobar como es que la tangente es la que más se le pega al gráfico de la función en un entorno de $x = 1$.

Figura 110: $y(x) = x^3 + 1$ Haz de rectas que pasan por el $(1, y(1))$ 

La función y su recta tangente en $x = 1$ se encuentran resaltadas.

Ejercicio 5

Hay muchas formas de pensar este problema. Por ejemplo teniendo en cuenta que la función $f(x)$ es cuadrática, sabemos que la única recta tangente a la misma que es paralela al eje x tiene que ser la que pasa por el vértice de la parábola. Como dicho vértice es $(x_v, y_v) = (-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a})) = (3, -1)$, entonces la ecuación de la misma será —teniendo en cuenta que las rectas paralelas al eje x tienen pendiente $m = 0$:

$$y = -1$$

Otra forma más ortodoxa de llegar al mismo resultado es plantear $f'(x) = 0$, ya que en dicho caso será la recta tangente de pendiente nula y por ende paralela al eje x . Pero:

$$f'(x) = 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ahora como la ecuación de la recta tangente está dada por $y = f(3) + f'(3)(x - 3)$, deducimos que debe ser:

$$y = -1$$

Comentario: Aprovechamos para observar que cuando un problema se resuelve por varios métodos distintos, aunque los métodos para resolverlo sean distintos se imaginarán que *el resultado arribado debe ser el mismo*, como en el caso del presente ejemplo.

■

Ejercicio 6

El objeto del ejercicio es adquirir práctica en el CÁLCULO DE DERIVADAS, suponiendo *perfectamente conocidas* las derivadas de las funciones más usuales así como también las REGLAS DE DERIVACIÓN. Por una cuestión de practicidad se refrescarán a continuación las reglas de derivación a fin de que el alumno pueda consultar las mismas con agilidad en caso de no recordar bien alguna de ellas.

Regla para la suma: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Producto por un escalar: Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $(\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$.

Regla para el producto: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. Nunca vayan a cometer el típico error de pensar que la derivada del producto es el producto de las derivadas: $(f \cdot g)'(x) \neq f'(x) \cdot g'(x)$.

Regla para el cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$. La misma recomendación que para el producto. Nunca vayan a pensar que la derivada del cociente es el cociente de las derivadas: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) \neq \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Regla de la cadena: Es la que permite determinar como se calcula la derivada de una composición entre dos funciones. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Teniendo bien presente las reglas anteriores y habiendo estudiado la tabla de derivadas de las funciones más usuales, no tendrán problemas para resolver el presente ejercicio.

(a)

La única regla de derivación que utilizaremos en este ejercicio es la de la suma, ya que por lo demás se trata de funciones usuales contempladas en la tabla. El procedimiento es muy sencillo:

$$f'(x) = (x^3)' + (x^2)' + (\sin(x))' = 3x^2 + 2x + \cos(x)$$

(b)

Aquí sólo tenemos que usar la regla del producto:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x^2)' \cdot \cos(x) + x^2 \cdot (\cos(x))' \\
 &= 2x \cos(x) + x^2 (-\sin(x)) \\
 &= 2x \cos(x) - x^2 \sin(x)
 \end{aligned}$$

(c)

Aquí se utiliza la regla del producto por un escalar, que nos permite sacar afuera del proceso de derivación la constante $\lambda = 3$. Es muy común que muchos alumnos traten a éste tipo de función no como el producto por el escalar 3 de la función $\sin(x)$, sino que la piensan como el producto entre dos funciones $g(x) = 3$ y $h(x) = \sin(x)$. Esto se traduce en una pérdida de tiempo significativa durante el proceso de derivación pues hacen:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Si miran fijo la fórmula de más arriba observarán que al ser g constante se anulará cuando la deriven, y al final sobrevive sólo el segundo término. Si bien el resultado al que arribarán será correcto, no es la forma más económica de llegar a él. Recomendamos fuertemente darse cuenta cuando hay un producto por un escalar y tratarlo como tal, no como el producto entre dos funciones, una de las cuales es constante.

La forma correcta de proceder es la siguiente — vean que fácil:

$$f'(x) = (3 \cdot \cos(x))' = 3 \cdot (\sin(x))' = 3 \cdot (\cos(x)) = 3 \sin(x)$$

(d)

Aquí se usa solamente la regla de la derivada del producto de dos funciones.

$$f'(x) = x' \cdot \ln(x) + x \cdot (\ln(x))' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

(e)

Aquí usamos la regla de la derivada de la suma que nos autoriza a derivar los dos miembros en forma independiente y luego sumar las derivadas de los mismos.

$$f'(x) = (x^5)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 5x^4 + (x^{-1})' = 5x^4 + (-x^{-2}) = 5x^4 - \frac{1}{x^2}$$

Observación: Hay muchas formas de derivar la función $f(x) = \frac{1}{x}$, pero lo cierto es que el camino más intrincado y menos fructífero es pensarla como un cociente entre la función “1” y la función “ x ”. Aplicar la regla de derivación para la división en el caso de que o bien numerador o bien denominador sea una función constante — *un numerito* — es el peor de los errores en términos de economía de cuentas. Comparen la diferencia entre las dos formas de derivar dicha función y juzguen ustedes mismos cuál de los métodos es mejor:

- Forma económica de hacer la cuenta:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

- Forma poco feliz de hacer la cuenta:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

El desacierto se percibe aún más cuando la función en el denominador no es simplemente x sino es por ejemplo algo como $\sqrt{x^2 + 1}$. Observen en este caso las complicaciones que se acarrearán en el mal método:

- Forma económica de hacer la cuenta:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \left((1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

Observen como la cuenta se hace en forma natural, con el mínimo nivel de complejidad, no hay pasos redundantes ni recargamiento de las fórmulas.

- Forma poco feliz de hacer la cuenta:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)' &= \frac{1' \cdot \sqrt{1+x^2} - 1 \cdot (\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x}{(\sqrt{1+x^2})^2} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1+x^2} (1+x^2)} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \end{aligned}$$

Como ven, la cuenta es un desorden innecesario. Es tanto más factible equivocarse cuanto más complicadas sean las cuentas que se realizan. Tener presentes estas sugerencias les hará ahorrar tiempo pero además salud, y como beneficio extra bajarán las probabilidades de cometer errores debido al mareo que produce en la mente el tener que manejar fórmulas demasiado complicadas —innecesariamente y teniendo poca experiencia aún en ello.

(f)

Usamos la regla de derivación de la suma y derivamos miembro a miembro.

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

(g)

Aquí derivamos cada sumando por separado utilizando en cada uno de ellos la regla del producto.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \sin(x) + x \cos(x) + e^x \cos(x) + e^x (-\sin(x)) \\ &= \sin(x) (1 - e^x) + \cos(x) (x + e^x) \end{aligned}$$

Observen que luego del proceso de derivación de la fórmula se puede realizar al resultado lo que en la jerga matemática se llama *cosmética de la fórmula*, para llevarla a una expresión más elegante y simplificar su lectura. No obstante sería bueno aclarar que éste último proceso no afecta en lo absoluto la corrección en la resolución del ejercicio.

(h)

Aquí por fin aparece un cociente *de verdad* —no como el caso de $\frac{1}{x}$ en el cual explicamos sería un desacierto en cuanto a economía de cuentas derivarlo utilizando la regla del cociente.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin'(x) \cdot x - \sin(x) \cdot x'}{x^2} \\ &= \frac{\cos(x) x - \sin(x)}{x^2} \end{aligned}$$

(i)

Aquí solo es necesario recordar la definición de la función $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, y darse cuenta que para derivarla hay que usar la regla del cociente.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) - (-\sin^2(x))}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\overbrace{\cos^2(x) + \sin^2(x)}^{=1}}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

(j)

Aquí tenemos tres productos, pero no hay que desesperar. ¿Por qué no pensar que los primeros dos productos son —en bloque— una única función? De esta forma habría solo dos productos. Para ilustrar la idea, si tenemos que $L(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ y tenemos que calcular $L'(x)$, ¿por qué no pensar que $f(x) \cdot g(x) = F(x)$? De esta forma tendríamos que $L'(x) = F'(x)h(x) + F(x)h'(x) = (f(x)g(x))'h(x) + f(x)g(x)h'(x)$. Y como ven no necesitamos nunca lidiar con los tres productos a la vez, siempre trabajamos con ellos de a dos. En la fórmula de más arriba habría que terminar el último paso, pero creemos que con lo hecho la idea queda bastante clara.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \overset{=1}{(x+2)'} [(x^2+1) \ln(x)] + (x+2) [(x^2+1) \ln(x)]' \\ &= (x^2+1) \ln(x) + (x+2) \left[2x \ln(x) + (x^2+1) \frac{1}{x} \right] \end{aligned}$$

La cosmética de la fórmula resultante la pueden hacer a su propio gusto y según las necesidades que tengan.

(k)

Éste es uno bien completo con productos, sumas y cocientes. Tenemos que utilizar todas ellas con corrección.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x \ln(x))'(x^2 + 1) - x \ln(x) (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x})(x^2 + 1) - x \ln(x) (2x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(\ln(x) + 1)(x^2 + 1) - 2x^2 \ln(x)}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

(l)

Aquí tenemos que escribir al $\log_a(x)$ en términos del neperiano, que es aquel cuya derivada estudiamos por definición y conocemos que da $\frac{1}{x}$. Como $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$, entonces:

$$f'(x) = \frac{\overset{\text{¡No usar regla!}}{(\frac{\ln(x)}{\ln(a)})'}}{\underset{\text{del cociente!}}{\ln(a)}} = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \underset{\text{es etc.}}{\ln'(x)} = \frac{1}{x \ln(a)}$$

(m)

Aquí obviamente hay que derivar cada sumando por separado como nos autoriza la regla de derivación de la suma de funciones. Y en cada sumando, el factor constante del numerador *puede salir fuera* del proceso de derivación. Sería muy útil e ilustrativo que leyeran la observación a este respecto hecha en el ítem (e) del presente ejercicio en la página 335.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^{-1})' + 2(x^{-2})' + 3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \\ &= -x^{-2} - 4x^{-3} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Observen como pensado de esta manera el ejercicio sale elegante, económico en cuentas y ahorrativo en aspirinas que no tendrán que tomar para el dolor de cabeza que les hubiera producido el camino equivocado.

(n)

Si uno se encontrara en uno de esos momentos en los que rehuye invertir demasiada imaginación en la resolución de un problema, en éste en particular habría que hacer muchas cuentas:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \\
 &= \frac{(\sin(x) - \cos(x)) \cdot (\sin(x) + \cos(x)) - (\sin(x) - \cos(x)) \cdot (\sin(x) + \cos(x))}{(\sin(x) + \cos(x))^2} \\
 &= \frac{(\cos(x) + \sin(x)) \cdot (\sin(x) + \cos(x)) - (\sin(x) - \cos(x)) \cdot (\cos(x) - \sin(x))}{(\sin(x) + \cos(x))^2} \\
 &= \frac{(\sin(x) + \cos(x))^2 + (\sin(x) - \cos(x))^2}{(\sin(x) + \cos(x))^2} \\
 &= \frac{\sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x)}{(\sin(x) + \cos(x))^2} \\
 &= \frac{2}{(\sin(x) + \cos(x))^2}
 \end{aligned}$$

La abominación de más arriba puede evitarse. De hecho una solución más elegante puede darse si nos permitimos utilizar la Regla de la Cadena, cosa que en este problema tenemos cuasi-vedada si nos atenemos al cronograma. La presentamos de todas formas para que logren salir del estupor en el que seguramente deben encontrarse.

Observen que si tanto en el numerador como en el denominador dividen todo por $\cos(x)$, la expresión queda:

$$f(x) = \frac{\tan(x) - 1}{\tan(x) + 1} = 1 - \frac{2}{1 + \tan(x)}$$

Pero entonces:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -2 \left((1 + \tan(x))^{-1} \right)' \\
 &= 2 (1 + \tan(x))^{-2} \cdot (1 + \tan(x))' \\
 &= \frac{2}{(1 + \tan(x))^2} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} \\
 &= \frac{2}{((1 + \tan(x)) \cdot \cos(x))^2} \\
 &= \frac{2}{(\sin(x) + \cos(x))^2}
 \end{aligned}$$

(ñ)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(x^{\frac{1}{3}} \right)' \ln(x) + x^{\frac{1}{3}} \ln'(x) \\
 &= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \ln(x) + x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x} \\
 &= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \left(1 + \frac{\ln(x)}{3} \right)
 \end{aligned}$$

(o)

Aquí hay que tener bien presente que $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. Teniendo esto bien en cuenta no hay ninguna complicación extra mas que traducir la fórmula que nos dan a otra en términos del logaritmo neperiano.

$$f(x) = \frac{\ln^2(x)}{\ln(a)} - \ln(a) \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln^2(x)}{\ln(a)} - \ln(x)$$

Como ven, la fórmula para $f(x)$ resulta sumamente sencilla.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{\ln(a)} \cdot 2 \ln(x) \ln'(x) - \frac{1}{x} \\
 &= \frac{2 \ln(x)}{x \ln(a)} - \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

(p)

En general los alumnos le temen a las funciones hiperbólicas. Nada más errado, lo único que tienen de complicado y rimbombante es el nombre. En general no suele haber mayor problema con ellas más que acordarse sus fórmulas.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2}(e^x)' + \frac{1}{2}(e^{-x})' \\ &= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \cdot (-1) \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)\end{aligned}$$

(q)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2}(e^x)' - \frac{1}{2}(e^{-x})' \\ &= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} \cdot (-1) \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)\end{aligned}$$

Ejercicio 7

En el ejercicio anterior se han practicado las reglas de derivación para la suma, producto por un escalar, producto de funciones y cociente de funciones hasta el cansancio. Sin embargo, a la REGLA DE LA CADENA se la relegó lo más posible a un segundo plano, salvo en uno o dos ítems en los cuales se hallaba presente. La razón de esto no es casual, la REGLA DE LA CADENA es en general la más costosa de comprender, motivo por el cual se le ha dedicado un ejercicio completo aparte, con casi tantos subpuntos como letras tiene el abecedario. Recordemos someramente lo que dice la mencionada regla:

Regla de la cadena: Es la que permite determinar como se calcula la derivada de una composición entre dos funciones. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Aprovechamos para aclarar que en el presente ejercicio nos concentraremos exclusivamente en la regla anterior, asumiendo que el alumno ya ha practicado las de la suma, producto, etc... Si no lo han hecho aún sería recomendable que hicieran y luego consultaran —antes que a éste— al ejercicio anterior.

(a)

En el siguiente ítem, la composición que hay que identificar es la siguiente: Si $g(x) = x + 1$ y $h(x) = x^2$, entonces $f(x) = h \circ g(x)$, razón por la cual $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$.

$$f'(x) = 2(x + 1) \cdot (x + 1)' = 2(x + 1)$$

(b)

Este es similar al anterior, salvo que en este caso $h(x) = x^3$.

$$f'(x) = 3(x + 1)^2 \cdot (x + 1)' = 3(x + 1)^2$$

(c)

Similarmente:

$$f'(x) = 2001(x + 1)^{2000} \cdot (x + 1)' = 2001(x + 1)^{2000}$$

(d)

Aquí $g(x) = e^x$ y $h(x) = x + 3$ armándose $f(x) = g \circ h(x)$, razón por la cual $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

$$f'(x) = e^{x+3} \cdot (x+3)' = e^{x+3}$$

(e)

En este caso $g(x) = 1 - x$ y $h(x) = x^3$, quedando $f(x) = h \circ g(x) \Rightarrow f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$.

$$f'(x) = 3(1-x)^2 \cdot (1-x)' = 3(1-x)^2 \cdot (-1) = -3(1-x)^2$$

Observen como el procedimiento general consiste en derivar la expresión $(1-x)^2$ haciendo de cuenta que la misma es x^2 , con lo que su derivada sería $2x$, pero en ese momento nos acordamos que en lugar de x^2 estábamos derivando $(1-x)^2$ con lo que debemos poner $2(1-x)$ pero además multiplicar al final por $(1-x)'$, quedándonos como resultado final $-3(1-x)^2$.

Cuesta algún trabajo acostumbrarse al procedimiento de derivar composiciones de expresiones, pero en cuanto se le encuentra la vuelta se transforma en algo muy fácil y mecánico de hacer.

(f)

Aquí se está construyendo $f(x)$ a partir de $g(x) = \cos(x)$ y $h(x) = 3x$ haciendo $f(x) = g \circ h(x)$. También se puede pensar como que estamos derivando: $\cos(y)$ donde $y = 3x$. Cualquier forma de pensarlo está bien, elijan la que más les guste. Por ejemplo utilicemos la segunda:

$$f'(x) = -\sin(y) \cdot y' = -\sin(3x) \cdot 3 = -3 \sin(3x)$$

(g)

En este ítem sería bueno recordar —para no hacer tantas cuentas— que $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Observen que $f(x) = \tan(y(x))$ con $y(x) = -3x^5$. Por lo tanto, según la REGLA DE LA CADENA se procede así:

$$f'(x) = \tan'(y(x)) \cdot y'(x) = \frac{1}{\cos^2(-3x^5)} \cdot (-15x^4)$$

(h)

En este caso $f(x) = 3(y(x))^4$, donde $y(x) = \sin(x)$. Por lo tanto:

$$f'(x) = 12(y(x))^3 \cdot y'(x) = 12 \sin^3(x) \cdot \cos(x)$$

(i)

Este es muy sencillo pues $f(x) = \ln(y(x))$, con $y(x) = x + 1$, razón por la cual:

$$f'(x) = \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) = \frac{1}{x+1} \cdot 1 = \frac{1}{x+1}$$

(j)

Parecido al anterior, salvo que $y(x) = 2 + \sin(x)$. Entonces:

$$f'(x) = \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) = \frac{1}{2 + \sin(x)} \cdot (\cos(x)) = \frac{\cos(x)}{2 + \sin(x)}$$

(k)

Aquí $f(x) = e^{y(x)}$, con $y(x) = \sin(x)$. Por lo tanto:

$$f'(x) = e^{y(x)} \cdot y'(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$$

(l)

Aquí hay que empezar a tener cuidado pues aparecen dos en lugar de una sola composición. Si observan bien, podemos pensar que: $g(x) = x^2$

y $h(x) = \ln(x)$ $l(x) = x^2 + 1$, entonces $f(x) = g \circ \left(\overbrace{h \circ l}^L(x) \right)$, razón

por la cual la aplicación de la Regla de la Cadena habrá que hacerla dos veces, la primera para derivar $g \circ L$, y la segunda vez cuando haya que hacer $L'(x) = (h \circ l)'(x)$, con lo que será $f'(x) = g'(h(l(x))) \cdot h'(l(x)) \cdot l'(x)$.

Otra forma de pensarlo tal vez mas comprensible es directamente hacer lo siguiente: Pensar que estamos derivando directamente $(y(x))^2$, con $y(x) = \ln(x^2 + 1)$, con lo que nos queda que a la vez $y(x)$ es una composición entre dos funciones, pero ésto no nos preocupa hasta que llegue el momento de derivar y . La idea será:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2 \ln(x^2 + 1) \cdot (\ln(x^2 + 1))' \\
 &= 2 \ln(x^2 + 1) \cdot \left(\frac{1}{x^2 + 1} (x^2 + 1)' \right) \\
 &= 2 \ln(x^2 + 1) \cdot \left(\frac{1}{x^2 + 1} \cdot (2x) \right) \\
 &= \frac{4x \ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Como ven, el procedimiento no es tan terriblemente complicado como suele amenazar con ser. Si se le va encontrando la vuelta y uno es ordenado al trabajar resulta ser bastante simple, pues hay que preocuparse de las composiciones de a una por vez, no todas juntas, lo que sería un caos.

(m)

Aquí tenemos dos términos que se hayan restados, razón por la cual los derivaremos por separado y luego los restaremos como nos autoriza la regla de derivación de la suma. En cada uno de estos términos la composición mas externa —que determina cual es la primer función a derivar— es elevar a la -1 . Se procede así:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -(3 \cos^2(x))^{-2} \cdot (3 \cos^2(x))' - [-(\cos(x))^{-2} \cdot \cos'(x)] \\
 &= -(3 \cos^2(x))^{-2} \cdot (6 \cos(x) \cdot \cos'(x)) - [-(\cos(x))^{-2} \cdot (-\sin(x))] \\
 &= -(3 \cos^2(x))^{-2} \cdot (6 \cos(x) \cdot (-\sin(x))) - \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \\
 &= \frac{\cancel{6}^2 \sin(x) \cos(x)}{\cancel{6}^3 \cos^4(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}
 \end{aligned}$$

(n)

Si tenemos en cuenta que $f(x) = \frac{x}{x(1-\frac{x}{a})^2} = \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-1}$. Pensando a f de esta manera tiene una solución utilizando casi en forma exclusiva la REGLA DE LA CADENA.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-2} \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)' \\
 &= -\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-2} \cdot \left(-2\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \left(\frac{x}{a}\right)'\right) \\
 &= \frac{2x}{a\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{a}\right) \\
 &= \frac{2x}{a^2\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^2}
 \end{aligned}$$

(ñ)

Aquí tenemos que recordar que la única exponencial que sabemos derivar con toda seguridad es e^x , razón por la cual si necesitáramos derivar una exponencial de base r arbitraria r^x sería recomendable acordarse que $r^x = e^{x \cdot \ln(r)}$. De esta forma no habrá ningún inconveniente a la hora de derivar. Pero entonces:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{\sin(x) \cdot \ln(3)} + \sin^2(x) \\
 \Rightarrow f'(x) &= e^{\sin(x) \cdot \ln(3)} \cdot (\sin(x) \cdot \ln(3))' + 2 \sin(x) \cdot \sin'(x) \\
 &= 3^x \cdot (\ln(3) \cos(x)) + 2 \sin(x) \cos(x)
 \end{aligned}$$

(o)

Aquí tenemos que pensar primero en derivar la función f como si se tratara de $f(x) = \sqrt{y(x)}$, con lo que nos quedará $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y(x)}} \cdot y'(x)$. Como $y(x) = 1 + (z(x))^2$, su derivada será $y'(x) = 2z(x) \cdot z'(x)$. Veámoslo en detalle:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1 + \tan^2(x)}} \cdot (1 + \tan^2(x))' \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{1 + \tan^2(x)}} \cdot (2 \tan(x) \cdot (\tan(x))') \\
 &= \frac{\tan(x)}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}
 \end{aligned}$$

Una vez aquí hay cierta interesante cosmética que puede hacerse a la fórmula de mas arriba. Por ejemplo:

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Pero entonces

$$\sqrt{1 + \tan^2(x)} \cdot \cos^2(x) = \frac{\cos^2(x)}{|\cos(x)|} = |\cos(x)|$$

Así, nuestra cuenta final queda:

$$f'(x) = \frac{\tan(x)}{|\cos(x)|}$$

Comentario: Como habrán podido apreciar más arriba, el hecho de tener a nuestra disposición tantas identidades para las funciones trigonométricas hace que sea *muy factible* que no haya una expresión única para el resultado de nuestra cuenta. Por eso, es altamente probable que dos alumnos hayan arribado a resultados en apariencia muy diferentes, pero que en realidad sean la misma expresión vía algunas identidades trigonométricas. Es bueno tener en cuenta esto a la hora de chequear si los resultados están bien o no.

(p)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} (a + bx^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (a + bx^2)' \\ &= \frac{1}{2} (a + bx^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2bx) \\ &= \frac{bx}{(a + bx^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

(q)

Tengamos en cuenta que $f(x) = \ln\left(\frac{5x}{3x}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$ es constante, razón por la cual su derivada debe ser igual a cero.

(r)

Aquí tenemos que aplicar la regla de la derivada del cociente, pero en cada miembro que haya que derivar habrá que usar REGLA DE LA CADENA.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(2x^3 + 3) \cdot (2x^3 + 3)' \cdot \ln(x^2 + 1) - (2x^3 + 3)^2 \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)'}{\ln^2(x^2 + 1)} \\ &= \frac{12x^2(2x^3 + 3) \ln(x^2 + 1) - (2x^3 + 3)^2 \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}}{\ln^2(x^2 + 1)} \\ &= \frac{2x(2x^3 + 3)[6x \ln(x^2 + 1) - (2x^3 + 3)]}{\ln^2(x^2 + 1)(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

(s)

Es claro que aquí $f(x) = 1$ es constante, por lo que su derivada será nula.

(t)

En el PROBLEMA 2 DE LA PRÁCTICA 1 el cual pueden consultar en la página 97, demostramos que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ es constante, razón por la cual su derivada también resultará nula.

(u)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} (\ln(x^4 + 1))^{-\frac{1}{2}} \cdot (\ln(x^4 + 1))' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^4 + 1)}} \cdot \frac{1}{x^4 + 1} \cdot (x^4 + 1)' \\ &= \frac{4x^3}{2(x^4 + 1)\sqrt{\ln(x^4 + 1)}} \end{aligned}$$

(v)

Aquí nuevamente los términos de la resta los derivamos por separado usando la regla de la suma; y en cada uno de ellos habrá que aplicar según corresponda REGLA DE LA CADENA.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\substack{\text{sale afuera por} \\ 1}}{\substack{\text{ser constante} \\ \sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\cos(x)}} \cdot (1+\cos(x))' - \left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' \\
 &= -\frac{\sin(x)}{2\sqrt{2}\sqrt{1+\cos(x)}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)
 \end{aligned}$$

(w)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot (\sqrt{x^2+1})' \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)'\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{x}{x^2+1}
 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 8

Comentario: En los dos ejercicios anteriores hemos practicado hasta el cansancio las reglas de derivación, de forma tal que de aquí en adelante no seremos tan *minuciosos* en aclarar cada detalle en cada paso del cálculo de las mismas, suponiendo al alumno ya familiarizado con las mencionadas reglas, por lo menos a un nivel elemental. El alumno que encuentre no sentirse cómodo aún con el cálculo de derivadas —por ejemplo si de un paso al que sigue no lograra percibir que regla se aplicó— debería hacer en detalle los dos ejercicios precedentes, ya que luego de haber derivado 42 funciones, con seguridad sentirá un mejor dominio del tema y podrá abordar este ejercicio con más comodidad.

Este ejercicio trata sobre funciones *raras* y cómo son sus derivadas. Las funciones son de la forma $f(x)^{g(x)}$. Siempre hay que tener muy presente como se definieron en su momento dichas funciones, y para trabajar con ellas será fundamental estudiar su dominio antes de empezar a pensar en derivar algo.

Si tienen presente que

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$$

no deberían tener entonces demasiados problemas para poder resolver los ítems del presente ejercicio con éxito.

(a)

Recordemos que $f(x) = e^{x \ln(x)}$, lo que pone en evidencia su dominio el cual es $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>0}$. No tendría pues sentido siquiera pensar en calcular $f'(x)$ para valores de $x \leq 0$ ya que en ellos *ni siquiera está definida la función!*

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x \ln(x)} \cdot \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= x^x (1 + \ln(x)) \end{aligned}$$

Observen como si sabemos lo que significa una operación como x^x , no presenta ningún problema el cálculo de su derivada. Muchos chicos se encuentran con no saber qué hacer con dicha función debido a que en realidad no tienen en claro la naturaleza de dicha cuenta.

Un error muy común es hacer:

~~$$(x^x)' = x \cdot x^{x-1}$$~~

Por favor: ¡NO HAGAN ÉSTO! Significaría que no han comprendido en lo absoluto las reglas de derivación ni las derivadas de las funciones elementales. La regla que los autoriza a hacer $(x^p)' = px^{p-1}$ tiene la importante hipótesis de que p es *constante*. En una función como x^x ni la base ni el exponente son constantes, razón por la cual equiparar la situación de ésta última función con la de la tabla x^p constituye un error garrafal.

(b)

Antes que nada estudiamos el dominio de $f(x)$. Como $x^{3x} = e^{3x \ln(x)}$ y $a^x = e^{x \ln(a)}$, entonces queda claro que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>0}$. En dicho dominio:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{3x \ln(x)} \cdot \left(3 \ln(x) + 3x \cdot \frac{1}{x} \right) + e^{x \ln(a)} \cdot \ln(a) \\ &= 3x^{3x} \cdot (\ln(x) + 1) + a^x \cdot \ln(a) \end{aligned}$$

(c)

Como

$$f(x) = e^{3 \ln(x) \cdot \ln(\sin(x))}$$

podemos apreciar que el dominio de esta función serán los x positivos donde a la vez el $\sin(x) > 0$. Como el conjunto de positividad del $\sin(x)$ es

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

entonces debemos concluir que:

$$\text{Dom}(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (2n\pi, \pi + 2n\pi)$$

Sobre éste dominio $f(x)$ es derivable por haber sido construidas a partir de operaciones que preservan la derivabilidad aplicadas sobre funciones derivables. Nos queda:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{3 \ln(x) \cdot \ln(\sin(x))} \cdot 3 \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(\sin(x)) + \ln(x) \cdot \left(\frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) \right) \right) \\ &= 3 (\sin^3(x))^{\ln(x)} \cdot \left(\frac{\ln(\sin(x))}{x} + \frac{\ln(x) \cdot \cos(x)}{\sin(x)} \right) \end{aligned}$$

(d)

Aquí el dominio es claramente $\mathbb{R}_{>0}$.

$$f'(x) = \left(e^{\sqrt{x} \cdot \ln(x)} \right)' = e^{\sqrt{x} \cdot \ln(x)} \cdot \left(\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) = \frac{x^{\sqrt{x}} \cdot (\ln(x) + 2)}{2\sqrt{x}}$$

(e)

Aquí $f(x) = e^{\cos(x) \cdot \ln(1 + \sin(x))}$. Observemos que la expresión dentro del logaritmo — es decir la base de la exponencial — resulta siempre no negativa ya que $1 + \sin(x) \geq 0$. No obstante en los puntos $x \in \left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ vale que $1 + \sin(x) = 0$, razón por la cual carece de sentido evaluar el logaritmo en dichos puntos.

Entonces:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sobre éste dominio $f(x)$ es derivable por haber sido construidas a partir de operaciones que preservan la derivabilidad aplicadas sobre funciones derivables. Nos queda:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\cos(x) \cdot \ln(1 + \sin(x))} \cdot \left(-\sin(x) \cdot \ln(1 + \sin(x)) + \cos(x) \cdot \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} \right) \\ &= (1 + \sin(x))^{\cos(x)} \cdot \left(\frac{\cos^2(x)}{1 + \sin(x)} - \sin(x) \cdot \ln(1 + \sin(x)) \right) \end{aligned}$$

(f)

Aquí la base queda mayor a cero si y sólo si $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, razón por la cual el anterior será el dominio de nuestra función. Sobre éste dominio $f(x)$ es derivable por haber sido construidas a partir de operaciones que preservan la derivabilidad aplicadas a funciones derivables.

Como $f(x) = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ su derivada resulta ser:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \cdot \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right) \end{aligned}$$

Nuevamente la *cosmética avanzada* de la fórmula se deja a cargo del lector para que éste la implemente a su gusto.



Ejercicio 9

Este ejercicio es para practicar la REGLA DE LA CADENA y adquirir un dominio un poco mas avanzado de la misma.

(a)

Teniendo en cuenta que por Regla de la Cadena:

$$(f \circ g)'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0)$$

entonces necesitamos el valor de $f'(0)$ y el valor de $g'(0)$. Si miran con atención notarán que no necesitamos en lo absoluto conocer la fórmula de $g(x)$, sino sólo su valor y el de su derivada en un único punto

Como:

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(g(0)) = f'(4) = 8$$

y teniendo en cuenta que:

$$g'(0) = \sin^2(\sin(1))$$

concluimos entonces que:

$$(f \circ g)'(0) = 8 \sin^2(\sin(1))$$

(b)

Para $h \circ f$ se procede igual que en el punto anterior. Como $(h \circ f)'(0) = h'(f(0)) \cdot f'(0)$ y teniendo en cuenta que $h'(x) = g'(1+2x) \cdot 2$, podemos concluir que:

- $h'(f(0)) = 2g' \left(1 + 2 \overbrace{f(0)}^{=1} \right) = 2g'(3) = 2 \sin^2(\sin(10)) \Rightarrow h'(f(0)) = 2 \sin^2(\sin(10))$
- $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(0) = 0$

Pero con ésto último es clarísimo que:

$$(h \circ f)'(0) = h'(f(0)) \cdot f'(0) = 2 \sin^2(\sin(10)) \cdot 0 = 0$$

Así: $(h \circ f)'(0) = 0$.

■

Ejercicio 10

Este ejercicio asusta debido a la presencia de la íntimamente frase *ecuación diferencial*, pero salvo por ésto es muy fácil de resolver. De hecho sólo hay que calcular la derivada de nuestra función $y(x)$ y comprobar que se verifica la igualdad planteada en el ejercicio.

Como:

$$y'(x) = kCe^{kx} = k \cdot y(x)$$

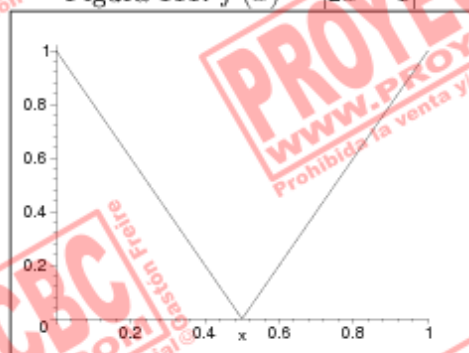
entonces ya no queda nada más que probar. ■

Ejercicio 11

(i)

Basta con mirar el gráfico de ésta función para darse cuenta en forma inmediata que no puede ser jamás derivable en $x = \frac{1}{2}$; pero no se confunda el lector ni se deje llevar por la fantasía: *darse cuenta* no es *demostrar*. Una mirada a dicho gráfico nos dejará tal vez más convencidos que una demostración, sin embargo la demostración o justificación de nuestras intuiciones es un paso que jamás vamos a poder obviar cuando hagamos matemática seriamente.

Como ven, el gráfico es contundente:

Figura 111: $f(x) = |2x - 1|$ 

Podemos apreciar como al tener un *pico* en $x = \frac{1}{2}$ dicha función no puede ser derivable.

Ahora, para poder justificar de una manera *válida* que dicha función no es derivable en $x = \frac{1}{2}$ debemos hacer una demostración. Lo que haremos es ver que si planteamos el COCIENTE INCREMENTAL para el mencionado punto, obtenemos distintos límites laterales, con lo que el mismo carecería de límite y por consiguiente no podría la función ser derivable en $x = \frac{1}{2}$.

Por un lado:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f\left(\frac{1}{2} + h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\left|2 \cdot \left(\frac{1}{2} + h\right) - 1\right| - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|2h|}{h} \leftarrow h < 0 \rightarrow |2h| = -2h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h}{h} = -2 \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{2} + h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|2 \cdot \left(\frac{1}{2} + h\right) - 1| - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|2h|}{h} \leftarrow h > 0 \rightarrow |2h| = 2h \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h}{h} = 2 \end{aligned}$$

Luego: Es imposible que $f(x)$ resulte derivable en $x = \frac{1}{2}$.

Aunque no es derivable en $x = \frac{1}{2}$ sí resulta continua en dicho punto, lo que es muy fácil de comprobar, pues:

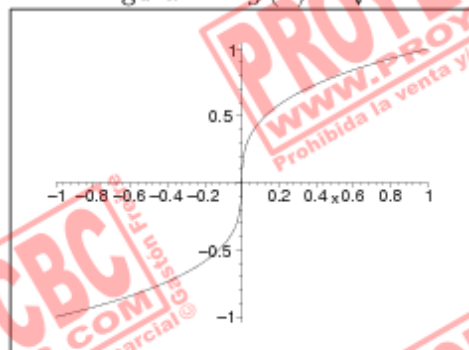
$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} |2x - 1| = 0 = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

(ii)

Aquí hay que saber mirar el gráfico para poder —a partir de él— llegar a la conclusión de que $g(x)$ no puede ser derivable en $x = 0$. Si uno es descuidado al contemplar el mismo puede llegar a caer en la trampa de pensar que la recta tangente al mismo existe y es la vertical que coincide justo con el eje y . El problema con ésto es que *ninguna* recta vertical es una función, y si nos atenemos a la definición de derivabilidad:

“ g resultaba derivable en $x_0 \in \text{Dom}(g)$ si y sólo si $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} =: g'(x_0) \in \mathbb{R}$ ”

Y lo que veremos es que en el caso de $g(x)$ el cociente incremental diverge, razón por la cual dicha función no puede ser derivable en $x = 0$. Antes de hacer la cuenta vean el gráfico para que comprueben *cuan tentadora* es la idea de pensar que la recta de ecuación $x = 0$ es un buen candidato para ser su recta tangente en dicho punto:

Figura 112: $g(x) = \sqrt[3]{x}$ 

Es innegable que resulta tentadora la idea de asociar al eje y con un buen candidato a recta tangente. Sin embargo esta función no es derivable en $x = 0$ pues su cociente incremental diverge.

Hagamos ahora la cuenta para comprobar que el cociente incremental diverge.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{1}{3}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \overbrace{\left(\frac{1}{\underbrace{h^{\frac{2}{3}}}_{\rightarrow 0}} \right)}^{-\infty} = \infty$$

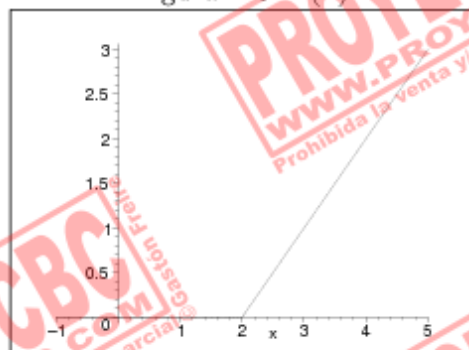
Así: $g(x)$ no puede ser derivable en $x = 0$.

Aunque $g(x)$ no resultó derivable en $x = 0$ sí es continua en dicho punto pues:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{3}} = 0 = g(0)$$

(iii)

Una mirada al gráfico de $h(x)$ nos muestra que la misma es continua en $x = 2$ pero no derivable:

Figura 113: $h(x)$ 

Podemos apreciar como al tener un *pico* en $x = 2$ dicha función no puede ser derivable, aunque al pegarse bien en dicho punto sí es continua.

Tendremos que hacer de todas formas las cuentas pertinentes para justificar nuestras observaciones. Veamos primero la continuidad analizando los límites laterales, que es lo más fácil:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 0 = 0 = h(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0 = h(0)$$

Por lo tanto debe ser continua.

Para probar que no es derivable veremos que el **COCIENTE INCREMENTAL** por izquierda tiende a 0 mientras que por derecha tiende a 1. Ésto será suficiente.

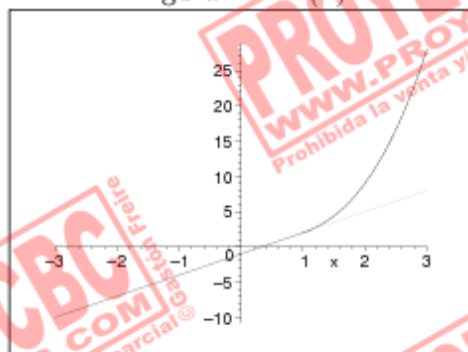
$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{h(2+t) - h(2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h(2+t) - h(2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{((2+t) - 2) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{t} = 1$$

Así: $h(x)$ no puede ser derivable en $x = 2$.

(iv)

En este caso el gráfico nos muestra que $r(x)$ tiene que ser continua y derivable en $x = 1$:

Figura 114: $r(x)$ 

Podemos observar no sólo que se pega bien sino que la forma en que lo hace resulta *suave*.

Para ver que es continua en $x = 1$ estudiemos los límites laterales y veamos que ambos dan $r(1) = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} r(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x - 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} r(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^3 + 1 = 2$$

Ahora para ver que es derivable veamos que ambos límites laterales del Cociente Incremental existen y dan como resultado 3.

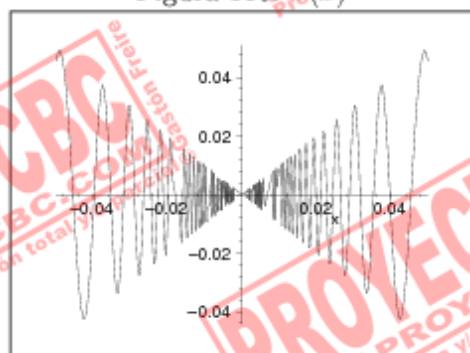
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{r(1+h) - r(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(3(1+h) - 1) - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3h}{h} = 3$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{r(1+h) - r(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{((1+h)^3 + 1) - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1 + 3h + 3h^2 + h^3 + 1) - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h(3 + 3h + h^2)}{h} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Así: $\exists r'(1) = 3$; y la fórmula para la recta tangente en $x = 1$ es $y = 3x - 1$.

(v)

El gráfico de esta función es muy *pintoresco*, como podrán apreciar a continuación:

Figura 115: $s(x)$ 

Hay una cantidad infinita de oscilaciones en torno a $x = 0$ las cuales aumentan su frecuencia a medida que nos acercamos a dicho punto. Se puede apreciar que el gráfico se *aplasta* al 0 pero no lo suficientemente rápido como para conseguir *suavidad* en el proceso.

Probaremos pues que $s(x)$ es continua en $x = 0$ para empezar:

$$\lim_{x \rightarrow 0} s(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = s(0)$$

Por lo tanto $s(x)$ resulta continua como se había afirmado.

Veamos ahora que la misma no es derivable en dicho punto probando que:

$$\nexists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(0+h) - s(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right) \quad (26)$$

Observemos que en este caso los límites laterales no nos serán de gran ayuda debido a que los mismos no existen, por lo cual apelar a que son distintos no tendría ningún sentido.

Aquí nos serán de gran ayuda las sucesiones pues sería suficiente con encontrar a_n y b_n ambas tendiendo a cero tales que $\sin\left(\frac{1}{a_n}\right)$ y $\sin\left(\frac{1}{b_n}\right)$ tengan límites distintos, pues ésto sería prueba de que no puede existir el $\lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$, con lo que quedaría demostrado en virtud de (26) que el Cociente Incremental carece de límite.

Pero si $a_n = \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}$ y $b_n = \frac{1}{(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi)}$, es claro que ambas tienden a cero y:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

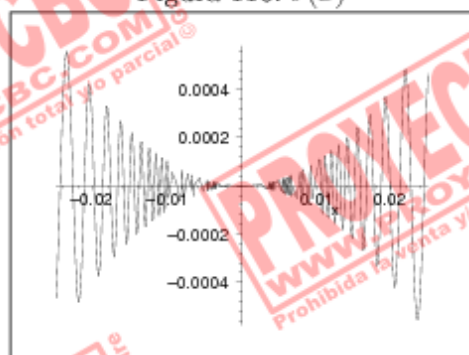
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 = -1$$

Así: Queda demostrado que el Cociente Incremental no puede tener límite, y con ello se descarta la existencia de $s'(0)$.

(vi)

La función del presente ítem es muy parecida a la del anterior, con la diferencia que la función que *aplata* al $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tiende a cero *más rápido* que en el caso anterior. Este hecho se traducirá en que además de ser continua la función $t(x)$ como en el caso anterior resultó ser $s(x)$, ahora t verificará la propiedad extra de ser derivable en $x = 0$. Si observan el gráfico a continuación, verán que ahora el mismo presenta evidentes signos de *suavidad* al ir apagándose a 0.

Figura 116: $t(x)$



Hay una cantidad infinita de oscilaciones en torno a $x = 0$ las cuales aumentan su frecuencia a medida que nos acercamos a dicho punto. Se puede apreciar que el gráfico se *aplata* al 0 lo suficientemente rápido como para conseguir *suavidad* en el proceso. El resultado será que $s(x)$ terminará siendo derivable en dicho punto.

Primero veamos la continuidad:

$$\lim_{x \rightarrow 0} s(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \overset{\text{acotada}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = 0 = s(0)$$

Para ver que también resulta derivable es suficiente con analizar el COCIENTE INCREMENTAL y ver que el mismo tiene límite.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{t(0+h) - t(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} \stackrel{\text{acotado}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

Así: Resulta ser $t(x)$ derivable en $x = 0$; $t'(0) = 0$ y la ecuación de su recta tangente en dicho punto es $y = 0$. ■

Ejercicio 12

Observen que la tercera posibilidad jamás podría ser la respuesta, sencillamente porque es una proposición falsa con independencia de como sea $f(x)$ ya que es imposible que una función sea *derivable* pero *no continua*. Es un teorema que seguramente deben conocer el que dice: $f(x)$ es derivable en $x_0 \Rightarrow f(x)$ es continua en x_0 .

Para descartar la última veamos que $f(x)$ es continua en $x = 0$. En efecto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-\frac{1}{5}} \cdot \sin(x)}{x+2} = 0 = f(0)$$

Luego: $f(x)$ debe ser continua en $x = 0$.

Resta ahora decidir sobre la derivabilidad de $f(x)$ en el mencionado punto. Para estudiarlo tenemos que analizar el COCIENTE INCREMENTAL.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{1}{5}} \sin(h) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{1}{5}} \sin(h)}{h(h+2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{h^{-\frac{1}{5}}}{h+2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así: Hemos probado que $\exists f'(0) = 0$, con lo que $f(x)$ resulta continua en y derivable en $x = 0$, razón por la cual la respuesta correcta es la segunda. ■

Ejercicio 13

El TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA es un resultado clave del análisis matemático, con consecuencias importantísimas. En el caso de la recta real su demostración sigue un hilo argumentativo muy intuitivo y natural, basándose fuertemente en el importante hecho de que las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que son inyectivas son *exactamente* las *estrictamente monótonas*. Utilizando este hecho —muy fuerte— es fácil probar que la continuidad de f implica la de su función inversa; y si suponemos además que $f'(x) \neq 0 \forall x \in \text{Dom}(f)$ entonces se puede probar que $f|_{\text{im}(f)}$ ⁵⁸ tiene que ser inversible, siendo f^{-1} también derivable. Éste importante resultado no se detuvo en la recta real, siendo posible generalizarlo a otros lugares —como \mathbb{R}^n por ejemplo—, sin embargo la correspondiente versión del mismo en éstos espacios requiere un análisis mucho más delicado y la utilización de herramientas más *avanzadas*.

Recordemos pues éste importante teorema:

“Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable e inyectiva tal que $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) \neq 0$. Entonces $f|_{\text{im}(f)}$ debe ser inversible, y $\forall x \in \text{im}(f)$ resulta f^{-1} derivable con $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ ”

(a)

Es claro que $f'(x) = 5e^{x^3+2x} \cdot (3x^2+2) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, razón por la cual $f'(x) > 0 \forall x$. Y es trivial que $f(0) = 5 \cdot e^0 = 5$.

(b)

Por el Teorema de la Función Inversa, dado que $f(x)$ se encuentra en las hipótesis del mismo, sabemos que la misma —restringida a su imagen en el codominio— tiene que ser inversible, y su inversa $f^{-1}(x)$ debe ser derivable, siendo $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. Como $f'(x) = 5e^{x^3+2x} \cdot (3x^2+2) \Rightarrow f'(0) = 10$. Y como $f^{-1}(5) = 0$ por ser $f(0) = 5$, se tiene que:

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(5))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{10}$$

⁵⁸Lo anterior significa $f(x)$ con el codominio restringido a su imagen.

Ejercicio 14

(a)

Comencemos por observar que $\text{Dom}(\arcsin(x)) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, razón por la cual el único lugar donde en principio tendría sentido plantearse la existencia de $\arcsin'(x)$ es en dicho intervalo. Si $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin'(x) = \cos(x) > 0$, lo que muestra que:

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sin'(x) \neq 0$$

Por una aplicación del TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA, concluimos que $\arcsin(x)$ debe ser derivable sobre el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, siendo:

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \end{aligned}$$

Tengamos ahora en cuenta que:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos(x) > 0 \Rightarrow \cos(x) = \sqrt{\cos^2(x)} = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

Pero entonces:

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \underbrace{\left(\sin(\arcsin(x))\right)}_{=x}^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

Así:

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \exists \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(b)

Comencemos por observar que $\text{Dom}(\arccos(x)) = (0, \pi)$, razón por la cual el único lugar donde en principio tendría sentido plantearse la existencia

de $\arccos'(x)$ es en dicho intervalo. Si $x \in (0, \pi) \Rightarrow \cos'(x) = -\sin(x) < 0$, lo que muestra que:

$$\forall x \in (0, \pi) \cos'(x) \neq 0$$

Por una aplicación del TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA, concluimos que $\arccos(x)$ debe ser derivable sobre el intervalo $(0, \pi)$, siendo:

$$\begin{aligned} \arccos'(x) &= \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} \\ &= \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} \end{aligned}$$

Tengamos ahora en cuenta que:

$$x \in (0, \pi) \Rightarrow \sin(x) > 0 \Rightarrow \sin(x) = \sqrt{\sin^2(x)} = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$$

Pero entonces:

$$\begin{aligned} \arccos'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\underbrace{\cos(\arccos(x))}_x\right)^2}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

Así:

$$\forall x \in (0, \pi) \Rightarrow \exists \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(c)

El dominio de la $\arctan(x)$ son todos los números reales, pues $\tan(x)$ es sobreyectiva. Sabemos que la restricción correcta de dominio que hay que hacer a la función $\tan(x)$ para que resulte inversible es $\text{Dom}(\tan(x)) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, siendo en éste dominio:

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0 \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Pero entonces estamos en las condiciones del TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA, el cual nos asegura que $\tan(x)$ —inversible en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ — verificará que su inversa será derivable sobre \mathbb{R} , siendo:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))}$$

Si $x = 0$: Es claro entonces que como:

$$\tan'(0) = \frac{1}{\cos^2(0)} = 1 \stackrel{\text{T.F.I}}{\Rightarrow} \arctan'(0) = \frac{1}{\tan'(\arctan(0))} = \frac{1}{\tan'(0)} = 1$$

Si $x \neq 0$: En este caso podemos operar con garantía de poder pasar x multiplicando y dividiendo.

$$\begin{aligned} \arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} \\ &= \cos^2(\arctan(x)) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\tan^2(\arctan(x))} \cdot \sin^2(\arctan(x)) \\ &= \frac{1 - \cos^2(\arctan(x))}{x^2} \end{aligned} \quad (28)$$

En este punto hay que recordar que según (27), $\arctan'(x) = \cos^2(\arctan(x))$, razón por la cual teniendo en cuenta que $x \neq 0$ en este caso, (28) nos brinda una ecuación cuya incógnita es precisamente $\arctan'(x)$. Dicha ecuación es:

$$\begin{aligned} \arctan'(x) &= \frac{1 - \arctan'(x)}{x^2} \\ \Leftrightarrow x^2 \arctan'(x) &= 1 - \arctan'(x) \\ \Leftrightarrow \arctan'(x) \cdot (x^2 + 1) &= 1 \\ \arctan'(x) &= \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Y la fórmula obtenida para $\arctan'(x)$ en el paso anterior es válida en principio para todo $x \neq 0$, pero si observamos bien, cuando $x = 0$, la mencionada fórmula coincide con el valor de $\arctan'(0) = 1$ que habíamos averiguado por separado.

Luego:

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(d)

El dominio de la $\operatorname{arccot}(x)$ son todos los números reales, pues $\cot(x)$ es sobreyectiva. Sabemos que la restricción correcta de dominio que hay que hacer a la función $\cot(x)$ para que resulte inversible es $\operatorname{Dom}(\cot(x)) = (0, \pi)$, siendo en éste dominio:

$$\cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)} > 0 \forall x \in (0, \pi)$$

Pero entonces estamos en las condiciones del TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA, el cual nos asegura que $\operatorname{arccot}(x)$ será derivable sobre \mathbb{R} , siendo:

$$\operatorname{arccot}'(x) = \frac{1}{\cot'(\operatorname{arccot}(x))}$$

Si $x = 0$: Es claro entonces que como:

$$\cot'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1 \stackrel{\text{T.F.I.}}{\Rightarrow} \operatorname{arccot}'(0) = \frac{1}{\cot'\left(\operatorname{arccot}(0)\right)} = \frac{1}{\cot'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1$$

Si $x \neq 0$: En este caso podemos operar con garantía de poder pasar x multiplicando y dividiendo.

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot}'(x) &= \frac{1}{\cot'(\operatorname{arccot}(x))} \\ &= -\sin^2(\operatorname{arccot}(x)) \quad (29) \\ &= \frac{-1}{\cot^2(\operatorname{arccot}(x))} \cdot \cos^2(\operatorname{arccot}(x)) \\ &= \frac{-1}{x^2} \cdot \cos^2(\operatorname{arccot}(x)) \\ &= -\frac{(1 - \sin^2(\operatorname{arccot}(x)))}{x^2} \quad (30) \end{aligned}$$

En este punto hay que recordar que según (29), $\operatorname{arccot}'(x) = -\sin^2(\operatorname{arccot}(x))$, razón por la cual teniendo en cuenta que $x \neq 0$ en este caso, (30) nos brinda una ecuación cuya incógnita es precisamente $\operatorname{arccot}'(x)$. Dicha ecuación es:

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot}'(x) &= \frac{-1 - \operatorname{arccot}'(x)}{x^2} \\ \Leftrightarrow x^2 \operatorname{arccot}'(x) &= -1 - \operatorname{arccot}'(x) \\ \Leftrightarrow \operatorname{arccot}'(x) \cdot (x^2 + 1) &= -1 \\ \operatorname{arccot}'(x) &= \frac{-1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Y la fórmula obtenida para $\operatorname{arccot}'(x)$ en el paso anterior es válida en principio para todo $x \neq 0$, pero si observamos bien, cuando $x = 0$, la mencionada fórmula coincide con el valor de $\operatorname{arccot}'(0) = -1$ que habíamos averiguado por separado.

Luego:

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists \operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

■

Ejercicio 15

(a)

Es conveniente observar que como $f(x)$ está definida sobre el $[-1, +\infty)$ entonces a lo sumo tendrá sentido plantear su derivada en el $(-1, +\infty)$. En dicho intervalo:

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < 0 \forall x \in (-1, +\infty) \leftarrow \text{(Claramente)}$$

Observamos también que

$$f(3) = -3 - \sqrt{4} = -3 - 2 = -5$$

(b)

Como $f(x)$ es inyectiva y al haber mostrado que $f'(x) \neq 0$ para todo x , entonces por el TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA se tiene que:

$$\exists (f^{-1})'(-5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-5))} = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{-1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{-\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}$$

Ejercicio 16

(a)

Sabemos que $\sinh'(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ para todo x claramente.

(b)

Para usar el TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA primero debemos ver que $\sinh(x)$ es inyectiva en \mathbb{R} . Tenemos que demostrar que si $x \neq y \Rightarrow \sinh(x) \neq \sinh(y)$. Lo haremos por el absurdo, supongamos que $x \neq y$ pero que $\sinh(x) = \sinh(y)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\ \Leftrightarrow e^x + \frac{1}{e^x} &= e^y + \frac{1}{e^y} \\ \Leftrightarrow \frac{e^{2x} + 1}{e^x} &= \frac{e^{2y} + 1}{e^y} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{1}{e^{x+y}} \\ e^{x+y} &= 1 \leftarrow \text{¡ABSURDO! pues } e^{x+y} > 0 \end{aligned}$$

Así: $\sinh(x)$ debe ser una función inyectiva y por lo tanto si restringimos su codominio a su imagen, una función inversible.

Ahora estamos en condiciones de aplicar el TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA pues tenemos una función inversible cuya derivada no se anula jamás. Por éste último será:

$$(\sinh^{-1})'(x) = \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}(x))}$$

Si utilizamos la fórmula anterior con $x = 0$, se tendrá que:

$$(\sinh^{-1})'(0) = \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}(0))} = \frac{1}{\cosh(0)} = 1$$

Así: $\sinh^{-1}(x)$ resulta derivable y en particular $(\sinh^{-1})'(0) = 1$.

■

Ejercicio 17

Como $s(t)$ representa la posición del punto en función del tiempo, sabemos que la velocidad del mismo en el instante t estará dada por $s'(t) = 3 - 2t$.

Así:

$$v(t) = 3 - 2t \leftarrow \text{Velocidad del punto en función de } t$$

Para determinar la velocidad en los puntos dados, basta observar que:

$$v(0) = -2$$

$$v(1) = 1$$

$$v(2) = -1$$

■

Ejercicio 18

(a)

La velocidad de crecimiento del radio estará dada por $r'(t) = 3$.

Luego: Se puede apreciar que la misma es constantemente igual a 3.

(b)

Uno podría pensar que así como la velocidad de crecimiento del radio es constantemente igual a 3, lo mismo debería ocurrir con la velocidad de crecimiento del área. ¡Nada más equivocado!, pues la velocidad de crecimiento del radio es constante debido precisamente a que la fórmula $r(t)$ es lineal. Si observamos con cuidado, la fórmula para $a(t)$ no será en lo absoluto lineal, ya que viene dada por:

$$a(t) = \pi \cdot r^2(t) = \pi \cdot (3t + 2)^2 = (9t^2 + 12t + 4) \pi = 9\pi t^2 + 12\pi t + 4\pi$$

Como pueden apreciar, la fórmula anterior está lejos de ser lineal ya que es una función cuadrática. Como tal, su derivada no será constante. De hecho será:

$$a'(t) = 18\pi t + 12\pi$$

Luego: La velocidad de crecimiento del área estará dada por:

$$a'(t) = 18\pi t + 12\pi$$

■

Ejercicio 19

(a)

Para calcular la velocidad de enfriamiento, como conocemos con precisión la fórmula $C(t)$ que nos da la temperatura en función del tiempo sabemos que la misma estará dada por:

$$C'(t) = 70 \cdot e^{-0,1t} \cdot (-0,1) = -7e^{-0,1t}$$

Observen que el signo negativo nos indica que el objeto se está enfriando.

(b)

Tenemos simplemente que corroborar que se verifica la ecuación del enunciado. Pero:

$$C'(t) = -7e^{-0,1t} = -\frac{1}{10} \left((20 + 70e^{-0,1t}) - 20 \right) = -0,1(C(t) - 20)$$

Pero ésto último es lo que se quería probar.

(c)

Tenemos que estudiar el límite para $t \rightarrow +\infty$ de la función $C'(t)$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{-7e^{-0,1t}}_{-0} = 0$$

Luego: La velocidad de enfriamiento tiende a cero a medida que el tiempo tiende a $+\infty$.

Comentario: El que la velocidad de enfriamiento tienda a cero es consistente con el hecho físico bastante intuitivo de que un objeto que se deja enfriando en un ambiente determinado, conforme pasa el tiempo su temperatura se irá equiparando con la del medio en que se encuentra. Imaginen una olla de agua hirviendo que se saca del fuego. Inicialmente la misma se encontrará a 100°C ; al principio su temperatura descenderá rápidamente, pero conforme pasa el tiempo y la olla se va entibiando la velocidad de enfriamiento de la misma será cada vez mas lenta.

■

Ejercicio 20

Si designamos por $l(t)$ al lado del cubo en función del tiempo, según la descripción del enunciado del problemas tendremos que:

$$l(t) = t \cdot \frac{cm}{seg} \leftarrow t \text{ medido en segundos}$$

Observen que como medimos t en segundos entonces $l(t)$ queda en centímetros.

Como el volumen del cubo está dado por:

$$V(t) = l^3(t) = t^3 \cdot \frac{cm^3}{seg^3}$$

se tiene que la variación de dicho volumen con respecto al tiempo será:

$$V'(t) = 3t^2 \cdot \frac{cm^3}{seg^3}$$

Como se puede apreciar en la fórmula de arriba, la variación del volumen nos queda en unidades $\frac{cm^3}{seg}$, lo que era de esperar.

Tengamos en cuenta que la arista del cubo tendrá $10cm$ cuando $l(t) = 10 \Leftrightarrow t = 10$. Y la variación del volumen en dicho instante estará dada por:

$$V'(10seg) = 300 \cdot \frac{cm^3}{seg^3} = 300 \cdot \frac{cm^3}{seg}$$

Luego: Cuando $l(t) = 10$, se tiene que la variación del volumen del cubo será de $V'(10) = 300 \cdot \frac{cm^3}{seg}$.

Procediendo en sentido inverso, si supiéramos que la razón de variación del volumen es de $108 \frac{cm^3}{seg}$, la cuenta para determinar el instante de tiempo en el que se produce tal variación sería:

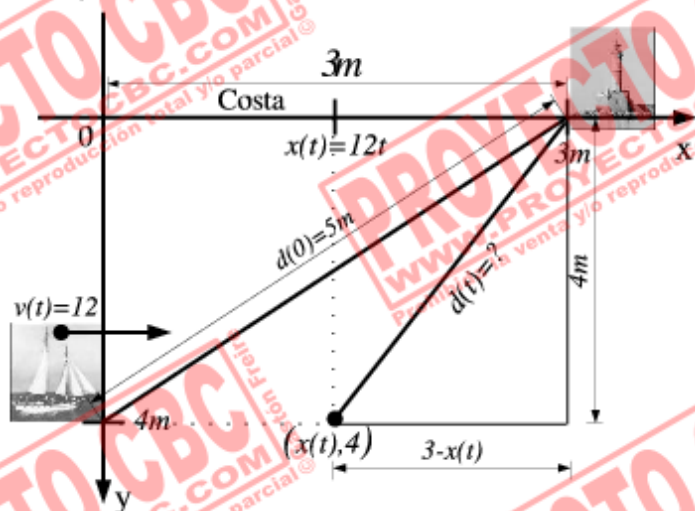
$$108 \frac{cm^3}{seg} = V'(t) = 3t^2 \cdot \frac{cm^3}{seg^3} \Leftrightarrow t = \sqrt{36seg^2} = 6seg$$

Luego: A los $6seg$ se producirá una variación del volumen de $108 \frac{cm^3}{seg}$.

Ejercicio 21

En este tipo de problemas *siempre* es recomendable hacer un gráfico de la situación planteada en el cual habrá que elegir un sistema de coordenadas conveniente y fijar apropiadamente los valores iniciales de las variables que se manejarán durante el planteo del mismo. Una incorrecta elección de alguno de estos factores puede llegar a ser *nefasta* al punto que las cuentas no salgan.

Figura 117: Diagrama del barco acercándose al faro.



Dispongamos un sistema de coordenadas con el eje x sobre la línea de la costa y el eje y perpendicular a la misma, fijando $t = 0$ en el momento en que el barco dista 5 millas del faro.

La curva que describe la trayectoria del barco sobre nuestro sistema de coordenadas es $(x(t), y(t))$. Dado que la velocidad del barco es $v(t) = 12$ millas por hora en dirección del eje x y sentido positivo, podemos determinar que $x(t) = 12t$, mientras que $y(t) = 4$ permanece constante. Pero entonces la posición del barco sobre nuestro sistema de coordenadas es $(x(t), y(t)) = (12t, 4)$. Y la posición del faro en el mismo es $(3, 0)$.

El segmento que une $(x(t), 4)$ —posición del barco— con el punto $(3, 0)$ —posición del faro— por el TEOREMA DE PITÁGORAS mide:

$$d(t) = \sqrt{(3 - x(t))^2 + 4^2} = \sqrt{(3 - 12t)^2 + 16}$$

que es precisamente la distancia del barco al faro como función del tiempo. Observen que en $t = 0$ es $d(0) = 5$, lo que no es de sorprender ya que

habíamos hecho las hipótesis del caso y elegido convenientemente el sistema de referencia para que ésto último pasara.

Observemos que a medida que el barco se acerque al faro entonces la distancia $d(t)$ se irá acortando, mientras que cuando ésta última se agrande será indicio de que el barco se está alejando. Como $d'(t)$ mide la variación de la distancia al barco en función del tiempo, es claro ahora que la *velocidad de aproximación* al faro en función del tiempo estará dada por⁵⁹:

$$-d'(t) = \frac{12(3-12t)}{\sqrt{(3-12t)^2 + 16}}$$

Como se nos pide la misma en el instante en que el barco dista del faro 5 millas, y dado que $d(0) = 5$, entonces dicho instante es $t = 0$ y la velocidad de aproximación al faro en el mismo estará dada por:

$$-d'(0) = \frac{36}{5} = 7,2 \leftarrow \text{naturalmente en millas por hora}$$

Observen que como el barco se acerca al faro hasta el preciso instante en que dista del mismo 4 millas, el cual es $t = \frac{1}{4}$ de hora —15 minutos—, entonces la *velocidad de aproximación* al mismo irá disminuyendo desde 7,2 millas por hora en el instante inicial $t = 0$ hasta anularse a los 15 minutos de iniciado el viaje, momento en que el barco comenzará a alejarse del faro y por lo tanto su *velocidad de aproximación* se hará negativa.

Es interesante comentar que si el barco siguiera alejándose indefinidamente en las mismas condiciones en las que emprendió el viaje, a medida que se aleja del faro el segmento que une la posición $(12t, 4)$ del barco con el punto $(3, 0)$ donde se halla el faro se hará cada vez mas paralelo al eje x , razón por la cual la *velocidad de aproximación* al faro tenderá asintóticamente a -12 cuando $t \rightarrow +\infty$. Pueden comprobar ésto último sencillamente verificando que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -d'(t) = 12$$

dejándose el desarrollo de la cuenta como interesante ejercicio para el lector. ■

⁵⁹Las cuentas intermedias para hallar $d'(t)$ quedan de tarea.

Ejercicio 22

Para el alumno que quiera profundizar sobre el significado de Δx , Δy , dx , y dy puede consultar la sección dedicada a ellos al final de la resolución del presente ejercicio.

(a)

Sabemos por definición que:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= \left(x + \Delta x + \frac{1}{x + \Delta x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \Delta x + \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0 \text{ (lógicamente)}\end{aligned}$$

Así:

$$\Delta y = \Delta x + \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$

(b)

Aclaración: Precisemos algunos conceptos. En este ejercicio x es un punto fijo, no lo estamos pensando como una variable, es decir x está quieto. Para movernos en torno a x utilizaremos pequeños incrementos del orden de $dx = \Delta x$. En este sentido a cualquier punto que no sea x lo designaremos por $x + dx$ o bien por $x + \Delta x$. En este contexto sabemos que la recta tangente a f en el punto de abscisa x estará dada por:

$$\begin{aligned}L(x + dx) &= f(x) + f'(x)((x + dx) - x) \\ \Leftrightarrow L(x + dx) &= f(x) + f'(x) dx\end{aligned}$$

siendo también importante mencionar que según la fórmula de mas arriba ocurre que $L(x) = f(x)$ —tomando $dx = \Delta x = 0$ — ya que en el punto de tangencia tanto L como f coinciden.

Por definición sabemos que:

$$\begin{aligned}dy &= L(x + dx) - L(x) \\ &= f(x) + f'(x) dx - f(x) \\ &= f'(x) dx\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow dy = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$

Así:

$$dy = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

(c)

Habiendo calculado Δy y dy sólo queda hacer:

$$\begin{aligned} \Delta y - dy &= \left(\frac{-dx}{\Delta x} + \frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x} \right) - \left(\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \right) \\ &= dx + \frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x} - dx + \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{dx}{x^2} - \frac{dx}{x(x+dx)} \\ &= \frac{dx}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+dx} \right) \end{aligned}$$

Así:

$$\Delta y - dy = \frac{dx}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+dx} \right)$$

(d)

Usando los items anteriores se comprueba sin esfuerzo que:

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+dx} \right)$$

(e)

Usando los items anteriores se comprueba sin esfuerzo que:

$$\frac{dy}{dx} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Observación: Una cosa interesante de estudiar que no está mencionada en el ejercicio es la relación que hay entre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y $\frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x + \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{\Delta x + \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} \\ &= 1 - \frac{1}{x(x+\Delta x)}\end{aligned}$$

De esta manera la comparación entre ambos nos queda:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 - \frac{1}{x(x+\Delta x)} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

¿Llegan a darse cuenta como tanto la teoría como la notación *cierran* perfectamente? Si aún no perciben nada interesante en las fórmulas de más arriba, observen estas dos cosas:

▪

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

▪

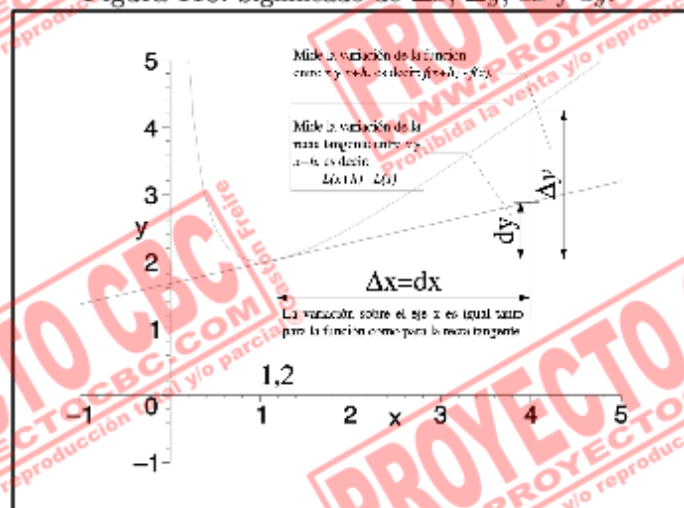
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{x(x+\Delta x)} = 1 - \frac{1}{x^2} = f'(x)$$

■

¿Qué son Δx , Δy , dx y dy ?

Llamemos $f(x)$ a la función del enunciado. En la figura 118 en la página siguiente se puede observar el gráfico de $f(x)$ y el de su recta tangente en $x = 1,2$. El punto $x = 4$ representa a $x + \Delta x$ lo que nos da un $\Delta x = 2,8$. Se puede apreciar que $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ mide lo que varía la función entre x y $x + \Delta x$, mientras que $dy = L(x + dx) - L(x) = f'(x)dx$ ⁶⁰ mide lo que varía la recta tangente a dicha función en $(x, f(x))$ entre x y $x + dx$. Habrán notado que si bien Δx y dx son iguales — y se los distingue por una

⁶⁰El hecho de que $L(x + dx) - L(x) = f'(x)dx$ es muy fácil de ver. En efecto como $L(x)$ es una recta cuya pendiente es $f'(x)$ entonces su pendiente se calcula haciendo la cuenta $\frac{L(x+dx)-L(x)}{dx}$. Pero esta pendiente no es otra cosa que $f'(x)$, entonces efectivamente vale $L(x+dx) - L(x) = f'(x)dx$.

Figura 118: Significado de Δx , Δy , dx y dy .Gráfico de $f(x)$ y su recta tangente $L(x)$ para $x = 1,2$.

cuestión notacional — no ocurre en lo absoluto lo mismo con Δy y dy ya que $f(x)$ y $L(x)$ *no son la misma función*, y es más que evidente que cuanto más lejos nos halleemos del punto de tangencia más se acentuará la diferencia entre la función y su recta tangente. Pero lo importante que deben aprender es que en un entorno muy pequeño alrededor de x , digamos $(x - \delta, x + \delta)$ con $0 < \delta \ll 1$ si resultan muy parecidos Δy y dy .

Este extremo parecido entre $f(x)$ y $L(x)$ en un entorno $(x - \delta, x + \delta)$ con $0 < \delta \ll 1$ — además de ser un hecho fundamental del análisis con consecuencias muy importantes — nos dará un método para aproximar funciones cerca de un punto x_0 cuyo valor de $f(x_0)$ se conoce con exactitud, como verán en el ejercicio siguiente.

Ejercicio 23

Indicaciones

Este ejercicio es para que comprueben la utilidad de la recta tangente como herramienta para aproximar funciones en las cercanías de un punto *conocido* de la misma. Si x_0 es un punto donde se conocen los valores de $f(x_0)$ y $f'(x_0)$, entonces es posible *con un cierto grado de confiabilidad* aproximar valores de $f(x)$ para x cercanos a x_0 mediante la recta tangente. Supongamos que $f(x)$ es una función derivable y se nos pide aproximar $f(x)$ para un cierto x fijo. Los pasos a seguir son los siguientes:

- Encontrar un punto x_0 lo más cercano posible a x donde conozcamos los valores de $f(x_0)$ y $f'(x_0)$ *con exactitud*.
- Calcular la recta tangente a $f(x)$ en el punto x_0 : $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- Evaluar $y(x)$ y devolver éste último resultado como valor aproximado de $f(x)$.

(a)

Según las indicaciones precedentes debemos buscar un punto cercano x_0 a $x = 25$ donde conozcamos $\sqrt[3]{x_0}$ con exactitud. Podemos tomar entonces $x_0 = 27$, ya que $\sqrt[3]{27} = 3$.

Calculemos ahora la recta tangente a $f(x)$ en $x_0 = 27$:

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(27) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27} \Rightarrow f'(27) = \frac{1}{27}$$

Con esta información:

$$y(x) = 3 + \frac{1}{27}(x - 27) \Rightarrow y(25) = 3 - \frac{2}{27} = 2,925$$

Luego:

$$\sqrt[3]{25} \approx 3 - \frac{2}{27} = 2,925 \leftarrow \text{Valor calculadora: } 2,9240177$$

(b)

Aquí el punto x_0 donde conocemos con exactitud el valor $f(x_0)$ y de $f'(x_0)$ es $x_0 = 1$, ya que $\ln(1) = 0$ y $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$. Pero entonces la recta tangente a $\ln(x)$ en $x = 1$ queda así:

$$y(x) = 0 + 1(x - 1) = x - 1 \Rightarrow y(1, 12) = 1, 12 - 1 = 0, 12$$

Así:

$$\ln(1, 12) \approx 0, 12 \leftarrow \text{Valor calculadora: } 0, 1133286$$

(c)

Una lógica elección de x_0 para esta función sería $\frac{\pi}{6} \approx 0, 5235$ ya que es un valor bastante cercano a 0, 5 y podemos esperar con cierto grado de confianza que la aproximación utilizando este punto sea bastante buena.

Tengamos en cuenta que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y como $\cos'(x) = -\sin(x) \Rightarrow \cos'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$. Pero entonces la recta tangente a $\cos(x)$ en $x = \frac{\pi}{6}$ nos queda:

$$y(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y(0, 5) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{12}$$

Así:

$$\cos(0, 5) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{12} \leftarrow \text{Valor calculadora: } 0, 8775825$$

Comentario: Habrán notado que nuestra aproximación para $\cos(0, 5)$ requiere el cálculo de ciertos números irracionales posiblemente más extraños que el mismo $\cos(0, 5)$. No faltará el lector que piense para sí mismo: “...Era preferible que nos diga que tomemos $\cos(0, 5)$ para aproximar a él mismo a que nos diera un número aun mas rebuscado...” Hasta cierto punto el anterior pensamiento está más que justificado y me recuerda a esos momentos en que uno recurre al diccionario —posiblemente uno bueno— urgido de necesidad de encontrar el significado de una cierta palabra como por ejemplo “*panícula*”, en cuya definición encuentra, abismalmente sola, la palabra “*panocha*” —como si ésto nos aclarara algo—; al ir a la definición de “*panocha*” encontramos para nuestro completo asombro la trisílaba “*panoja*”; ya desesperados buscamos ésta última para sólo decepcionarnos aún más al encontrar “*panícula*”, luego de lo cual naturalmente dejamos el diccionario donde lo hallamos y proseguimos nuestra anterior actividad con el amargo sabor de no haber satisfecho nuestra curiosidad. Y bueno, el alumno que sienta que $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{12}$ es a $\cos(0, 5)$ como “*panocha*” es a “*panícula*”, le recomendamos que se serene y lo tome con una sonrisa.



Ejercicio 24

Para el que le teme a las derivadas sucesivas de una función sería bueno sugerirle que pierda el miedo ya que no hay nada nuevo en calcular $f''(x)$ si piensan más vale que están calculando $g'(x)$ con $g(x) = f'(x)$. Si ya comprendieron el procedimiento para derivar una función, encontrarán que no hay nada nuevo en derivar dos, tres, diez o mil veces una función.

(a)

Aquí es bueno observar que $f(x)$ presenta novedades en sus derivadas sólo hasta el orden 3, ya que $f^{(iv)}(x) = x$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \\ f'(x) &= \cos(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) \\ f'''(x) &= -\cos(x) \\ f^{(iv)}(x) &= \sin(x) = f(x) \end{aligned}$$

Y en este punto todo vuelve a comenzar. Obviamente $f^{(v)}(x) = \cos(x)$ y para calcular $f^{(70)}(x)$ lo único que hay que observar es que si n es un número múltiplo de 4, digamos $n = 4k$, entonces $f^{(n)}(x) = f(x)$. Como $70 = 4 \cdot 17 + 2$, entonces será $f^{(70)}(x) = (f^{(4 \cdot 17)})''(x) = f''(x) = -\sin(x)$.

Así: $f^{(v)}(x) = \cos(x)$ y $f^{(70)}(x) = -\sin(x)$.

(b)

Éste es muy fácil ya que $f'(x) = f(x)$, razón por la cual las derivadas de cualquier orden de dicha función coincidirán con $f(x)$.

(c)

Éste es levemente distinto que el anterior habiendo que mirar unas cuentas derivadas para poder darse cuenta lo que está pasando y formarse una intuición de la situación:

$$f'(x) = ke^{kx} \Rightarrow f''(x) = k^2 e^{kx} \Rightarrow f'''(x) = k^3 e^{kx} \Rightarrow f^{(4)}(x) = k^4 e^{kx} \dots$$

En este punto nos damos cuenta que seguramente $f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$. Para dar una solución formalmente correcta al problema habría que demostrar el

aciertó anterior mediante algún procedimiento matemático válido —al margen de la observación precedente que nos sirvió para formarnos la *idea* de lo que ocurría. Podríamos hacer una demostración utilizando el PRINCIPIO DE INDUCCIÓN⁶¹, el cual ya habíamos aprendido en la práctica 3 y ahora nuevamente acude en nuestra ayuda.

$n = 1$: Evidentemente $f'(x) = k^1 e^{kx}$ por lo cual este caso queda demostrado.

Paso Inductivo: Supongamos como HIPÓTESIS INDUCTIVA que la propiedad vale para n y demostremos que entonces tiene que valer para $n + 1$. Si la propiedad vale para n :

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = k^n e^{kx} \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = k \cdot k^n e^{kx} = k^{n+1} e^{kx} \leftarrow \text{¡LISTO!}$$

Luego: Por el Principio de Inducción la propiedad tiene que valer $\forall n \in \mathbb{N}$, con lo que $f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$.

Observación: Lo anterior implica claramente que $f^{(20)}(x) = k^{20} e^{kx}$.

(d)

Como el orden de la derivada que se nos pide calcular no es demasiado grande, no se justifica como en el caso anterior un análisis general de la misma, siendo más práctico ir calculando las derivadas sucesivas hasta dicho orden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \leftarrow \text{expresión más útil para derivar} \\ f''(x) &= -(1+x)^{-2} \\ f'''(x) &= 2(1+x)^{-3} \\ f^{(iv)}(x) &= -6(1+x)^{-4} = -\frac{6}{(1+x)^4} \end{aligned}$$

Así: Resulta ser

$$f^{(iv)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

⁶¹El alumno que esté interesado en una explicación detallada de éste principio puede consultar el ejercicio 16 de la práctica 3 en la página 172 y el ejercicio 17 de la misma práctica en la página 173.

(e)

Tratándose de un polinomio estudiar sus derivadas es una cosa muy fácil. En principio sería bueno observar que si $f(x)$ es un polinomio de grado n , digamos:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ con } a_n \neq 0$$

entonces sus derivadas serán no nulas hasta la de orden n , luego de la cual se puede comprobar fácilmente se anularán todas, siendo $f^{(k)}(x) = 0 \forall k \geq n+1$. El alumno que tenga deseos puede incluso demostrar muy fácilmente este acierto por inducción. Nosotros lo podremos comprobar en el ejemplo al resolver el problema.

En efecto:

$$f'(x) = 15x^2 + 8 \Rightarrow f''(x) = 30x \Rightarrow f'''(x) = 30 \Rightarrow f^{(k)}(x) = 0$$

Teniendo en cuenta ésto último es más que claro que $f^{(800)}(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Pero entonces con más razón debe ser $f^{(800)}(2) = 0$.

Comentario importante: Muchos alumnos incurren en la comisión de un muy grave error cuando se trata de calcular derivadas de una cierta función $f(x)$ evaluadas en un cierto número x_0 fijo. Vamos a hacer un ejemplo de lo que suelen hacer cuando se les pide calcular $f''(2)$. Primero calculan $f'(x)$ y la evalúan en $x = 2$ obteniendo el valor $f'(2) \in \mathbb{R}$. Luego afirman que como dicho número es una contante entonces $f''(2) = 0$. ¿Se dan cuenta dónde está el error en este proceder? Pues si no lo hacen sería recomendable *prestar mucha atención*: El error está en evaluar $f'(x)$ en $x = 2$ y luego derivar el resultado de ésta operación afirmando que al hacer ello obtendrán $f''(2)$. ¡Nada más equivocado! Si piensan en la operación "derivar" y la operación "evaluar", las mismas *no son conmutativas*. No es lo mismo primero derivar y luego evaluar que primero evaluar y luego derivar. Lo correcto si quieren calcular $f''(2)$ es primero obtener $f'(x)$, luego obtener $f''(x)$ y por último evaluar la anterior en $x = 2$. ■

Ejercicio 25

Lo único que debemos hacer es verificar que la ecuación del enunciado se verifica.

Para la primera función tenemos:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x) \\ \Rightarrow \sin''(x) &= -\sin(x) \\ \Rightarrow \sin''(x) + \sin(x) &= -\sin(x) + \sin(x) = 0 \\ \Rightarrow \sin''(x) + \sin(x) &= 0 \end{aligned}$$

Para la segunda función:

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= -\sin(x) \\ \Rightarrow \cos''(x) &= -\cos(x) \\ \Rightarrow \cos''(x) + \cos(x) &= -\cos(x) + \cos(x) = 0 \\ \Rightarrow \cos''(x) + \cos(x) &= 0 \end{aligned}$$

Para ver lo último no es necesario hacer tantas cuentas sino más vale utilizar la propiedad de linealidad de la derivada, que será una herramienta *muy útil* en este caso.

En efecto:

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) &= A \cos''(x) + B \sin''(x) + A \cos(x) + B \sin(x) \\ &= A \cdot \underset{=0 \text{ por lo anterior}}{\cos''(x) + \cos(x)} + B \cdot \underset{=0 \text{ por lo anterior}}{\sin''(x) + \sin(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pero ésto último es lo que queríamos demostrar. ■

Ejercicio 26

Tratándose de un polinomio estudiar sus derivadas es una cosa muy fácil. En principio sería bueno observar que si $f(x)$ es un polinomio de grado n , digamos:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ con } a_n \neq 0$$

entonces sus derivadas serán no nulas hasta la de orden n , luego de la cual se puede comprobar fácilmente se anularán todas, siendo $f^{(k)}(x) = 0 \forall k \geq n+1$. En la resolución de este problema podrá apreciarse éste hecho para el caso particular del polinomio del ejercicio.

Primero observemos como van evolucionando las derivadas para formarnos la idea de lo que está pasando:

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} \cdot (1+x)^{n-1}$$

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!} \cdot (1+x)^{n-2}$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3} = \frac{n!}{(n-3)!} \cdot (1+x)^{n-3}$$

$$f^{(4)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)(1+x)^{n-4} = \frac{n!}{(n-4)!} \cdot (1+x)^{n-4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n-1)}(x) = \frac{n!}{(n-(n-1))!} \cdot (1+x)^{n-(n-1)} = n! \cdot (1+x)$$

$$f^{(n)}(x) = n! \leftarrow \text{éste último es constante}$$

$$f^{(n+1)}(x) = 0$$

$$\vdots$$

Queda entonces clarísimo que:

$$\text{Si } 1 \leq k \leq n: \text{ Entonces } f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot (1+x)^{n-k}.$$

$$\text{Si } k > n: \text{ Entonces } f^{(k)}(x) = 0.$$

■

Problema 1

Indicaciones

Como es requisito indispensable para una función derivable en un cierto punto x_0 ser continua en dicho punto, entonces siempre es conveniente estudiar primero la continuidad en dicho punto y luego la derivabilidad. El por qué es claro, es más fácil en general estudiar continuidad, y si llegado el caso determináramos que f no resulta continua en x_0 podremos concluir que tampoco puede ser derivable en dicho punto ahorrando una cantidad considerable de cuentas y tiempo —cosa que siempre es conveniente.

Otra cosa que sería bueno recordar ya que se pide calcular la recta tangente a $f(x)$ en x_0 en los casos que exista, es la fórmula para dicha recta tangente. La misma es:

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

(i)

Estudiemos primero la continuidad de $f(x)$ en el punto indicado mediante los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1$$

Por lo tanto $f(x)$ debe ser continua en $x = 0$.

Analicemos ahora la derivabilidad en dicho punto mediante el estudio del Cociente Incremental, del cual habrá que calcular su límite por derecha y por izquierda debido a que la función $f(x)$ está definida por partes.

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1 - h) - 1}{h} = -1$$

Para el límite por derecha habrá que hacer algún cambio de variables pues sino terminaríamos estancados en una indeterminación $\frac{0}{0}$ dando vueltas sin poder salvarla. En efecto al plantear el Cociente Incremental por derecha queda:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-h} - 1}{h}$$

Ahora hay que hacer el mencionado cambio de variables $y = e^{-h} - 1 \Rightarrow h = -\ln(y + 1)$. Como $y \rightarrow_{h \rightarrow 0^+} 0^-$ entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-h} - 1}{h} &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{\ln(1+y)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{1}{y} \ln(1+y)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{-1} = -1 \\ &\quad \ln\left((1+y)^{\frac{1}{y}}\right) \end{aligned}$$

Pero entonces:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1$$

Pero ésto último implica que $f(x)$ debe ser derivable en $x = 0$, siendo:

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = -1 \quad \text{Y su recta tangente: } y(x) = x - 1$$

(ii)

Estudiemos primero la continuidad de $g(x)$ en el punto indicado mediante los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2x + 3 = 9$$

Por lo tanto $g(x)$ debe ser continua en $x = 3$.

Analicemos ahora la derivabilidad en dicho punto mediante el estudio del COCIENTE INCREMENTAL, del cual habrá que calcular su límite por derecha y por izquierda debido a que la función $g(x)$ está definida por partes.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{9} + 6h + h^2 - \cancel{9}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h(6+h)}{h} = 6 \end{aligned}$$

Al plantear el COCIENTE INCREMENTAL por derecha queda:

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(2(3+h) + 3) - 9}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{6 + 2h - 9}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h - 3}{h} = 2
 \end{aligned}$$

Pero ésto último implica que $g(x)$ no puede ser derivable en $x = 3$.

(iii)

Es muy importante tener en cuenta que la función $\cos(x)$ es acotada, siendo $|\cos(x)| \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$, pues teniendo en cuenta la misma es muy fácil comprobar que $h(x)$ debe ser continua en $x = 1$. En efecto:

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\frac{3}{2}} \cdot \overset{\text{acotado}}{\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)} = 0$$

Así: $h(x)$ debe ser continua como se había afirmado en $x = 1$.

Resta ahora estudiar la derivabilidad de la misma en el punto mencionado para lo cual como de costumbre analizaremos el COCIENTE INCREMENTAL. Observen que como la definición de $h(x)$ responde a la misma fórmula $\forall x \neq 0$ entonces no estamos forzados a distinguir entre los límites laterales

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(1+t) - h(1)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{\frac{3}{2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{1+t}\right)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overset{\text{acotado}}{t\sqrt{t}}}{t} \cdot \cos\left(\frac{1}{t}\right) = 0
 \end{aligned}$$

Pero entonces: Existe $h'(1) = 0$ y como $h(1) = 0$ la ecuación de su recta tangente en $x = 1$ será:

$$y(x) = 0$$

(iv)

Estudiemos primero la continuidad de $r(x)$ en el punto indicado mediante los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} r(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} r(x) = 0 = f(0)$$

Tengan en cuenta que los límites anteriores no presentan ningún tipo de dificultad debido a que no hay presentes en ellos ninguna indeterminación, de modo que el cálculo de los mismos es una mera evaluación de las funciones correspondientes en $x = 0$.

Por lo tanto: La función $r(x)$ debe ser continua en $x = 0$.

Analicemos ahora la derivabilidad en dicho punto mediante el estudio del COCIENTE INCREMENTAL, del cual habrá que calcular su límite por derecha y por izquierda debido a que la función $r(x)$ está definida por partes.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{r(h) - r(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 \sqrt{h} \ln(1+h)}{h} = 0$$

Al plantear el Cociente Incremental por derecha queda:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{r(h) - r(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h \cdot \sin(h)}{h} = 0$$

Pero entonces:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h) - r(0)}{h} = 0$$

Pero esto último implica que $r(x)$ debe ser derivable en $x = 0$, siendo:

$$r(0) = 0 \quad r'(0) = 0 \quad \text{Y su recta tangente: } y(x) = 0$$

(v)

Analicemos primero la continuidad de $s(x)$ en $x = 1$. Recuerden que empezar por estudiar continuidad es una buena idea y un correcto punto de partida ya que si la misma *no fuera continua* entonces *no sería derivable*, motivo por el cual no habría razón alguna para perder tiempo en analizar su derivabilidad, puesto que si fuera derivable en tal punto entonces debería ser continua en el mismo, lo que sabemos no ocurre.

Recuerden que este orden de proceder suele hacernos ahorrar muchas cuentas en el caso de que finalmente $s(x)$ no resulte derivable, ya que las

cuentas involucradas en el proceso del cálculo del COCIENTE INCREMENTAL son más complejas normalmente que las requeridas para estudiar continuidad.

Para estudiar la continuidad tendremos que analizar los límites laterales puesto que $s(x)$ está definida por partes y según nos acerquemos por derecha o por izquierda deberemos utilizar o bien una o bien otra fórmula:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} s(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} s(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 1 = 2$$

¡Eureka!: Como los límites laterales no coinciden entonces $s(x)$ no puede ser continua en $x = 1$. Pero esto último implica que tampoco puede ser derivable en dicho punto.

■

Problema 2

Indicaciones

Para hallar la recta tangente a un punto x_0 de una cierta función $f(x)$ es necesario conocer los valores de $f(x_0)$ y $f'(x_0)$ ya que la misma depende de ellos. Naturalmente será requisito indispensable que la función considerada sea derivable en x_0 pues de lo contrario no tiene ningún sentido hablar de dicha recta. Una vez obtenida la información precedente la fórmula de la recta tangente quedará sencillamente:

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

(a)

$x=0$: $f(0) = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Por otra parte $f'(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

por lo que se deduce que $f'(0) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$. Pero una vez obtenidos éstos valores ya podemos armar la recta tangente sin problemas, de la siguiente forma:

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad f'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2} + 1 \cdot (x - 0) = x + \frac{1}{2}$$

$x = -\frac{\pi}{4}$: $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin^2(0) = 0$. Por otro lado $f'(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ por lo que se deduce que $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin(0) \cos(0) = 0$. Pero una vez obtenidos éstos valores ya podemos armar la recta tangente sin problemas, de la siguiente forma:

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = 0$$

(b)

Es claro que $f(0) = 0$. Lo que es un poco intrincado es calcular la derivada debido a la presencia de varias composiciones, pero con la práctica que deberían ya tener adquirida, después de tanto trabajo previo —que suponemos deben haber hecho— no debería haber problema alguno:

$$f'(x) = \sqrt{x + \sqrt{x+1}} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x+1}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$$

De la fórmula anterior se deduce fácilmente que $f'(0) = 1$ pues el segundo término al estar multiplicado por x muere cuando ésta es cero y el primer término para $x = 0$ da 1.

Pero entonces podemos armar la recta tangente como sigue:

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = 0 + 1 \cdot (x - 0) = x$$

(c)

$x = 0$: $f(0) = 1^0 = 1$ claramente. Para calcular la derivada hay que recordar⁶² que como se definía la elevación entre dos funciones:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$$

Hecha la anterior aclaración podemos derivar la función original para calcular luego $f'(0)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\sin(x) \cdot \ln(1+x^2)} \right)' \\ &= e^{\sin(x) \cdot \ln(1+x^2)} \cdot \left(\cos(x) \ln(1+x^2) + \frac{\sin(x)}{1+x^2} \cdot 2x \right) \\ \Rightarrow f'(0) &= e^0 \cdot \left(\overset{=0}{\cos(0) \ln(1)} + 0 \right) = 0 \end{aligned}$$

Pero entonces la recta tangente se construye como sigue:

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = 1 + 0 \cdot (x - 0) = 1$$

$x = \pi$: $f(\pi) = (1 + \pi^2)^0 = 1$ claramente. En cuanto a la derivada ya la tenemos calculada del punto anterior.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sin(x) \cdot \ln(1+x^2)} \cdot \left(\cos(x) \ln(1+x^2) + \frac{\sin(x)}{1+x^2} \cdot 2x \right) \\ \Rightarrow f'(\pi) &= e^0 \cdot \left(\overset{=-1}{\cos(\pi) \ln(1+\pi^2)} + 0 \right) = -\ln(1+\pi^2) \end{aligned}$$

⁶²Y nunca nos vamos a cansar de hacer esta aclaración tan importante que se viene repitiendo desde los inicios.

Pero entonces la recta tangente se construye como sigue:

$$f(\pi) = 1 \quad f'(\pi) = -\ln(1 + \pi^2) \Rightarrow y(x) = 1 - \ln(1 + \pi^2) \cdot (x - \pi)$$

■

Problema 3

El análisis del presente problema conviene dividirlo en tres partes, dos de las cuales no presentarán dificultad alguna, siendo la tercera la que contiene el meollo de la cuestión.

Si $x > 0$: En este caso $f(x) = x^2$ —función mas buena que el pan— que resulta claramente derivable $\forall x > 0$ y como $f'(x) = 2x$ que es continua no hay mas nada que hacer.

Si $x < 0$: En este caso $f(x) = -x^2$, concluyendo como en el caso anterior y siendo esta vez $f'(x) = -2x$.

Si $x = 0$: Tenemos que ver que aquí también $f(x)$ resulta derivable con continuidad de la derivada, pero que $\nexists f''(0)$. Para la derivabilidad tendremos que estudiar el COCIENTE INCREMENTAL tanto por derecha como por izquierda:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} \stackrel{=0}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} \stackrel{=0}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h} = 0$$

Pero entonces efectivamente $\exists f'(0) = 0$. Si tenemos en cuenta toda la información anterior nos queda entonces una fórmula partida para $f'(x)$, la cual podemos analizar para ver que la misma es continua en $x \neq 0$ pero no derivable en dicho punto.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 2x, & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (31)$$

Para ver que la misma es continua en $x = 0$ analicemos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -2x = 0 = f'(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0 = f'(0)$$

De esta forma podemos comprobar que la misma es continua en $x = 0$. Para ver que $\nexists f''(0)$ habrá que plantear el COCIENTE INCREMENTAL y estudiar su límite para h tendiendo a cero por derecha y por izquierda verificando que los mismos no coinciden.

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2}{h} = -2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2}{h} = 2$$

Al ser estos dos límites distintos se concluye que $\nexists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h}$ razón por la cual $\nexists f''(0)$.

Comentario: Muchos alumnos cometen un típico y *muy serio error* al resolver problemas como éste. Es común encontrar soluciones — equivocadas — como la siguiente: Primero llegan a la fórmula 31 en la página anterior para $f'(x)$. Derivan aquella fórmula término a término obteniendo:

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & , \text{si } x < 0 \\ 2 & , \text{si } x > 0 \end{cases}$$

y concluyen que como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x) = -2$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = 2$ entonces no puede existir $f''(0)$. ¡¡¡NADA MÁS EQUIVOCADO!!!. La única posible inferencia coherente del hecho anterior sería a lo sumo: *que de existir $f''(0)$* —con lo que $x = 0$ pasaría a ser un punto del $\text{Dom}(f'')$ — entonces la función $f''(x)$ no podría ser continua en el mismo, presentando una discontinuidad de salto —que por ende sería inevitable. Pero de ninguna forma de esto se puede llegar al resultado que nos interesa en el contexto de este ejercicio.

Una pregunta para que mediten: Con motivo del comentario anterior surge una interesante pregunta, la que sería bueno investigar por sí mismos: ¿Puede existir una función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable *en todo punto* del (a, b) con $f'(x)$ continua salvo en un único punto $x_0 \in (a, b)$? Les puedo asegurar que ya conocen una⁶³, por ejemplo pensemos en la función $f(x)$ definida a

⁶³ Ayuda: Busquen entre las funciones del Ejercicio 11 de esta práctica

trozos como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Pueden comprobar que $f(x)$ resulta derivable en todo \mathbb{R} , siendo:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Y ésta última ni siquiera puede soñar con ser continua en $x = 0$ pese a serlo en cualquier otro punto.

El presente ejemplo nos muestra cuánto cuidado hay que tener al hacer nuestros razonamientos y justificaciones al resolver un determinado problema, pues es muy fácil cometer *sutiles errores*, que pasan desapercibidos ante nuestros ojos hasta hacer un análisis más profundo del discurso argumentativo. Errores que seguramente no pasarán desapercibidos durante la corrección del examen o la evaluación del docente. Nuevamente se evidencia la importancia de construir nuestras justificaciones *sólo* a partir de hechos sobre los cuales tengamos *absoluta seguridad* acerca de su validez. ■

Problema 4 (Hay un error en el enunciado)

Comentario: El enunciado de este problema tiene un error. Donde dice “no tiene ninguna recta tangente” debería decir “tiene una única recta tangente”.

Este problema puede tener una resolución muy sencilla si pensamos bien sobre lo que quiere decir que una recta tangente a una cierta función $y(t)$ pase por el origen de coordenadas. En concreto como la ecuación para dicha recta tangente para un t arbitrario fijo será:

$$L_t(x) = y(t) + y'(t)(x - t)$$

entonces la condición de *pasar por el origen* se traduce en que $L_t(0) = 0$, lo que quiere decir que:

$$0 = y(t) - y'(t) \cdot t$$

En nuestro problema, teniendo en cuenta que:

$$y'(t) = 1 + \frac{1}{t}$$

entonces debería ocurrir que:

$$\begin{aligned} 0 &= t + \ln(t) - \left(1 + \frac{1}{t}\right) \cdot t \\ \Leftrightarrow 0 &= t + \ln(t) - t - 1 \\ \Leftrightarrow 0 &= \ln(t) - 1 \\ \Leftrightarrow \ln(t) &= 1 \\ \Leftrightarrow t &= e \end{aligned}$$

Luego: *Sí existe y es único* un punto donde la recta tangente a $y(t)$ pasa por el origen de coordenadas y dicho punto es $t = e$.

Comentario: Como verán la guía tampoco está exenta de tener errores. En este caso el enunciado del problema debería haber dicho “tiene una única” en lugar de lo que dice. ■

Problema 5

Lo primero que debemos hacer es calcular la derivada de $y(t)$ pues para construir todas las posibles rectas tangentes a la misma necesitamos la información sobre sus pendientes.

$$y'(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$$

Pero entonces las rectas tangente a $y(t)$ en el punto t arbitrario serán:

$$L_t(x) = \left(t + \frac{1}{t}\right) + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \cdot (x - t)$$

Observen que la familia de rectas $\mathcal{L} = \{L_t : t \in \mathbb{R}_{\neq 0}\}$ depende de t pues para cada punto $(t, y(t))$ de la curva habrá una recta tangente que pasa por dicho punto.

(a)

Buscamos rectas de \mathcal{L} que pasen por el punto $(1, 0)$. Esto ocurre:

$$\Leftrightarrow 0 = L_t(1) = \left(t + \frac{1}{t}\right) + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)(1 - t) \quad (32)$$

Como verán (32) nos da una ecuación en t de la cual debemos hallar todas sus soluciones para determinar los posibles valores de t que sirvan. Y para cada valor de t la recta L_t verificará lo pedido.

$$\begin{aligned} 0 &= \left(t + \frac{1}{t}\right) + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)(1 - t) \\ \Leftrightarrow 0 &= t^3 + t + (t^2 - 1)(1 - t) \leftarrow \text{Mult. la ecuación por } t^2 \\ \Leftrightarrow 0 &= t^3 + t + t^2 - t^3 - 1 + t \\ \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 &= 0 \leftarrow \text{Cuadrática con ceros: } t = -1 - \sqrt{2} \text{ y } t = -1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Pero entonces los valores de t buscados son: $t = -1 - \sqrt{2}$ y $t = -1 + \sqrt{2}$, de donde las rectas tangentes a la curva $y(t)$ buscadas serán exactamente las de ecuaciones:

$$L_t(x) = \left(- (1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{-(1 + \sqrt{2})}\right) + \left(1 - \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^2}\right) \cdot (x^2 + (1 + \sqrt{2}))$$

$$L(x) = \left(-1 + \sqrt{2} + \frac{1}{-1 + \sqrt{2}}\right) + \left(1 - \frac{1}{(-1 + \sqrt{2})^2}\right) \cdot (x - (-1 + \sqrt{2}))$$

Aunque raras, estas fórmulas verifican con exactitud lo pedido siendo la primera la recta tangente en el punto $t = -1 - \sqrt{2}$ y la segunda la que es tangente en $t = -1 + \sqrt{2}$.

(b)

Buscamos rectas de \mathcal{L} que pasen por el punto $(0, 0)$. Esto ocurre:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0 &= L_t(0) = \left(t + \frac{1}{t}\right) - \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)t \\ \Leftrightarrow 0 &= t^3 + t - (t^2 - 1)t \leftarrow \text{Mult. la ecuación por } t^2 \\ \Leftrightarrow 0 &= \cancel{t^3} + t - \cancel{t^3} + t \\ \Leftrightarrow 2t &= 0 \Leftrightarrow t = 0 \leftarrow \text{¡Valor que no sirve pues } 0 \notin \text{Dom}(y)! \end{aligned}$$

Luego: No existe ninguna recta tangente a la curva que pase por el $(0, 0)$.

(c)

Buscamos rectas de \mathcal{L} que pasen por el punto $(0, 4)$. Esto ocurre:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 4 &= L_t(0) = \left(t + \frac{1}{t}\right) - \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)t \\ \Leftrightarrow 4 &= t^3 + t - (t^2 - 1)t \leftarrow \text{Mult. la ecuación por } t^2 \\ \Leftrightarrow 4 &= \cancel{t^3} + t - \cancel{t^3} + t \\ \Leftrightarrow 2t &= 4 \Leftrightarrow t = 2 \end{aligned}$$

Luego: La ecuación de la única recta tangente a $y(t)$ que pasa por el $(0, 4)$ es

$$L_t(x) = \frac{5}{2} + \frac{3}{4} \cdot (x - 2). \quad \blacksquare$$

Problema 6

Aquí la fórmula de $y(t)$ es análoga a la del problema anterior, sin embargo la forma de resolver el problema es distinta ya que no se nos está pidiendo que la recta tangente a $y(t)$ pase por un determinado punto, sino que se nos está pidiendo que le misma tenga una determinada pendiente. Ésto último depende exclusivamente de $y'(t)$.

Como:

$$y'(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$$

entonces para que la recta tangente tenga pendiente -3 debemos igualar ésta última a -3 . Nos queda:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{t^2} &= -3 \leftarrow \text{Mult. por } t^2 \\ \Leftrightarrow t^2 - 1 &= -3t^2 \\ \Leftrightarrow 4t^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow t^2 &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{2} \text{ ó } t = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pero entonces las ecuaciones de las dos únicas rectas tangentes a $y(t)$ con pendiente igual a -3 serán:

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{5}{2} - 3 \left(x - \frac{1}{2} \right) \leftarrow \text{Correspondiente a } t = \frac{1}{2} \\ L(x) &= -\frac{5}{2} - 3 \left(x + \frac{1}{2} \right) \leftarrow \text{Correspondiente a } t = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

Problema 7

Este es un típico problema donde se nos da información sobre la recta tangente a una cierta función $f(x)$ sin darnos su fórmula, y se nos pide hallar la recta tangente a otra función $g(x)$ de la cual se nos da su fórmula pero dependiente de la fórmula de $f(x)$ — *la cual no conocemos*. Suele haber cierto terror a este tipo de planteos, pero la realidad es que no necesitamos *demasiada información* sobre $f(x)$ para poder construir la recta tangente a $g(x)$. De hecho, todo lo que necesitamos está *escondido* en la fórmula de la recta tangente a f .

En efecto, para calcular la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$ necesitamos únicamente $g(1)$ y $g'(1)$. Les aseguro que dicha información la vamos a poder obtener sin problemas — *aun cuando no conozcamos la fórmula de $f(x)$* .

Lo primero que debemos observar es que la recta tangente a $f(x)$ en $x = -1$ es:

$$\begin{aligned} -5x + 3 = y(x) &= f(-1) + f'(-1)(x - (-1)) \\ \Rightarrow -5x + 3 &= f(-1) + f'(-1)(x + 1) \end{aligned}$$

Podemos evaluar en $x = -1$ para despejar el valor de $f(-1)$, el cual nos quedará: $f(-1) = -5 \cdot (-1) + 3 = 8$. Pero entonces nos queda:

$$-5x + 3 = 8 + f'(-1)(x + 1)$$

Evaluemos en $x = 0$ para despejar el valor de $f'(-1)$. Nos quedará:

$$3 = 8 + f'(-1) \Leftrightarrow f'(-1) = -5$$

Así: Hemos hallado $f(-1) = 8$ y $f'(-1) = -5$.

Por una aplicación de la REGLA DE LA CADENA:

$$g'(x) = f'(-x^2 + \sin(\pi x)) \cdot (-2x + \pi \cos(\pi x))$$

con lo que se tiene:

$$g(1) = f(-1) = 8$$

$$g'(1) = f'(-1) \cdot (-2 - \pi) = 10 + 5\pi$$

Pero con esto último ya nos será posible determinar la ecuación de la recta tangente pedida, la cual será:”0

$$y(x) = 8 + (10 + 5\pi)(x - 1)$$

■

Problema 8

Para que una función resulte derivable en x_0 sabemos que es requisito indispensable que la misma sea también continua en dicho punto, en virtud del teorema que afirma:

“Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in (a, b)$. Entonces f es continua en x_0 .”

Pedir que resulte continua ya nos dará una relación entre a y b .

$$\lim_{|x| \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow 5^-} a + b|x|^2 = a + 25b$$

$$\lim_{|x| \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow 5^+} \frac{1}{|x|} = \frac{1}{5}$$

Pero entonces debe ser:

$$a + 25b = \frac{1}{5} \Leftrightarrow a = \frac{1}{5} - 25b$$

Para determinar por completo los valores de a y b debemos plantear la derivabilidad, calcular el límite del COCIENTE INCREMENTAL por derecha e izquierda y pedir su igualdad.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(a + b(5+h)^2) - (a + 25b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \cdot a + b(25 + 10h + h^2) - \frac{1}{5} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \cdot \left((a + 25b) + 10bh + bh^2 - \frac{1}{5} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \cdot h(10b + bh) \\ &= 10b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{5+h} - (a + 25b)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{\beta - \beta - h}{5(5+h)} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \cdot \left(-\frac{h}{5(5+h)} \right) \\
 &= -\frac{1}{25}
 \end{aligned}$$

Para que estos límites coincidan es necesario entonces que:

$$10b = -\frac{1}{25} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{250}$$

Y dada la relación $a + 25b = \frac{1}{5}$, debe ser entonces:

$$\begin{aligned}
 a + 25 \cdot \left(-\frac{1}{250} \right) &= \frac{1}{5} \\
 \Leftrightarrow a - \frac{1}{10} &= \frac{1}{5} \\
 \Leftrightarrow a &= \frac{3}{10}
 \end{aligned}$$

Luego: Deben ser $a = \frac{3}{10}$ y $b = -\frac{1}{250}$.

■

Problema 9

El problema es muy similar al anterior, razón por la cual haremos el mismo análisis⁶⁴.

Pedir que resulte continua ya nos dará una relación entre a y b .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a + bx^2 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

Pero entonces debe ser $a = 0$.

Para determinar b debemos estudiar la derivabilidad con el **COCIENTE INCREMENTAL**.

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{b \cdot h}^{\text{No solo tiende a cero: ¡Es 0!}}}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h \cdot e^{-\frac{1}{h}}}{h} = 0$$

Pero entonces:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0 \leftarrow \text{Con independencia del valor de } b$$

Pero ésto último quiere decir que toda vez que $a = 0$, entonces $\forall b \in \mathbb{R}$ se verificará que la función $f(x)$ para estos valores de los mismos resultará derivable con $f'(0) = 0$.

Luego: Deben ser $a = 0$ y $b \in \mathbb{R}$ cualquiera. ■

⁶⁴ Para una mejor comprensión del método utilizado para resolverlo consultar el ejercicio anterior, el cual está hecho con todo detalle.

Problema 10

Este ejercicio se resuelve sin mucho esfuerzo. Tengamos en cuenta que independientemente del valor de $g(0)$ se verifica trivialmente que $f(0) = 0$.

Para estudiar $f'(0)$ lo tendremos que hacer con el COCIENTE INCREMENTAL:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) \cdot \sin(3h) - 0}{h} \\ (\text{Usamos la continuidad de } g \text{ en } x = 0) \rightarrow &= \lim_{h \rightarrow 0} g(h) \cdot 3 \cdot \frac{\sin(3h)}{3h} \quad (33) \\ &= 3g(0) \end{aligned}$$

Destaquemos la importancia de la condición de continuidad de g en $x = 0$ para poder concluir el paso anterior, ya que si la misma no hubiera sido continua en tal punto no tendría sentido afirmar en (33) que $g(h) \rightarrow_{h \rightarrow 0} g(0)$ pues ésta es una propiedad exclusiva de las funciones continuas.

Pero entonces hemos determinado que efectivamente $f(x)$ resulta derivable en $x = 0$ siendo:

$$f'(0) = 3g(0) \quad \blacksquare$$

Problema 11

La condición que afirma la constancia de la presión del gas sirve para darse cuenta que entonces el volumen del globo debe cambiar a medida que introducimos el mismo — *y por ende su tamaño*. Como se nos dice que la forma del globo es esférica entonces no queda otra que la magnitud que se modifica a medida que ingresa el gas sea el *radio* de la misma.

Debemos entonces determinar la función $r(t)$.

$$v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r(v) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}v}$$

Y nosotros sabemos que:

$$v(t) = 50t \leftarrow \text{en cm}^3$$

Pero entonces:

$$r(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \cdot 50t} = \sqrt[3]{\frac{75}{2\pi}t} = \left(\frac{75}{2\pi}t\right)^{\frac{1}{3}}$$

De esta forma la rapidez con que aumenta el radio en función de t será:

$$r'(t) = \frac{1}{3} \left(\frac{75}{2\pi}t\right)^{-\frac{2}{3}}$$

Teniendo en cuenta que:

$$5 = r(t) \quad 125 = \frac{3}{4\pi} \cdot 50 \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{10\pi}{3}$$

entonces la rapidez en dicho instante debe ser:

$$r' \left(\frac{10\pi}{3} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{75}{2\pi} \cdot \frac{10\pi}{3} \right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125^2}} = 25$$

Así: El instante es $t = \frac{10\pi}{3} \text{ seg}$ y la rapidez con que varía el radio $25 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$. ■

Problema 12

Es claro que la función $y'(t)$ nos dará la velocidad de crecimiento de la población en unidades: $\frac{\text{miles de personas}}{\text{meses}}$. Para calcular lo que se nos pide debemos averiguar $y'(12)$.

$$y'(t) = 0,2 \cdot 0,1e^{0,1t} = \frac{1}{50}e^{\frac{1}{10}t} \Rightarrow y'(12) = \frac{e^{1,2}}{50} \approx 0,0664$$

Teniendo en cuenta que el anterior número está medido en $\frac{\text{miles de personas}}{\text{meses}}$ entonces la velocidad de crecimiento de la población al cabo de un año será de $66400 \frac{\text{personas}}{\text{mes}}$.

