

Práctica 6 - Teorema del Valor Medio

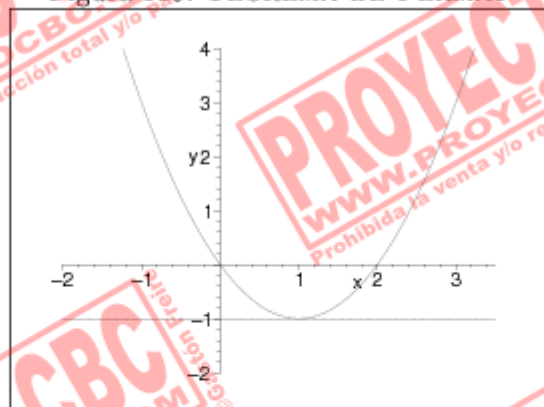
Ejercicio 1

Antes de poder hablar sobre la aplicabilidad del TEOREMA DE FERMAT deberíamos precisar el enunciado del mismo:

“TEOREMA DE FERMAT: Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$ un punto tal que $\exists f'(x_0)$. Si x_0 es un extremo local de f entonces debe valer $f'(x) = 0$ ”.

Gráficamente sería:

Figura 119: TEOREMA DE FERMAT



Como ven la hipótesis fundamental de este teorema es la existencia de $f'(x_0)$ — o equivalentemente la derivabilidad de f en dicho punto. Si no podemos garantizar de alguna manera la verificación de tan importante hipótesis entonces la aplicación descuidada del TEOREMA DE FERMAT puede traer consecuencias desastrosas. El más simple ejemplo nos lo da la función $f(x) = |x|$

que no es derivable en $x = 0$, punto en el que posee un extremo local. Si aplicáramos el anterior teorema a esta función en dicho punto llegaríamos al horroroso disparate de decir que $|x|'(0) = 0$ ¡Terrible!

En el caso de la función que nos ocupa lo que hay que averiguar es si es o no derivable en $x = 0$ antes de poder aplicarle el teorema. Analicemos el COCIENTE INCREMENTAL:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \begin{cases} -\infty & , \text{ si } h \rightarrow 0^- \\ +\infty & , \text{ si } h \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

Es evidente que no puede existir $f'(0)$ y por lo tanto el TEOREMA DE FERMAT resulta inaplicable para la misma.

■

Ejercicio 2

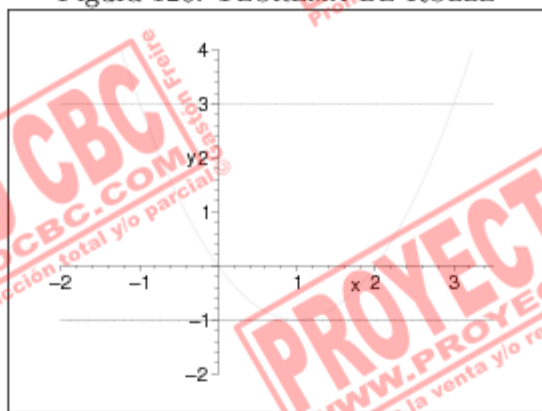
Aquí tenemos que revisar el enunciado del TEOREMA DE ROLLE, el cual dice:

“TEOREMA DE ROLLE: Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua sobre el $[a, b]$ y derivable sobre el (a, b) . Si $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.”

El presente teorema tiene una clara interpretación geométrica. Lo que está afirmando es que si la recta secante a los puntos del gráfico de la función $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es de pendiente nula, entonces debe haber algún punto $a < c < b$ en donde la recta tangente a f también tenga pendiente nula.

Gráficamente sería:

Figura 120: TEOREMA DE ROLLE



Como verán es necesario que $f(x)$ sea derivable sobre todo el $(-1, 1)$, pero sabemos que la misma no resulta derivable en $x = 0 \in (-1, 1)$ como pudimos comprobar en el ejercicio anterior. Pero entonces el Teorema de Rolle no es de aplicación para esta función, razón por la cual el hecho de que f' no se anule nunca sobre el $(-1, 1)$ no contradice al mencionado teorema. ■

Ejercicio 3

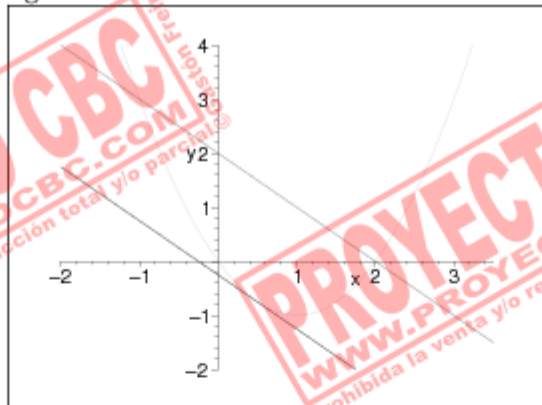
Ahora es buen momento para recordar el enunciado del TEOREMA DEL VALOR MEDIO, el cual dice:

“TEOREMA DEL VALOR MEDIO: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.”

Hay una interpretación geométrica muy linda de este enunciado. Es posible que hayan notado que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ del gráfico de f . Lo que está afirmando el Teorema del Valor Medio es precisamente la existencia de un punto $a < c < b$ con la propiedad de que la recta tangente a $f(x)$ en dicho punto es paralela a la secante antes mencionada.

Gráficamente sería:

Figura 121: TEOREMA DEL VALOR MEDIO



En la figura puede apreciarse la versión gráfica del importante TVM. Puede comprobarse como la recta tangente a f en el punto $-1 < c < 1$ es paralela a la recta secante a los puntos $(-1, f(-1))$ y $(1, f(1))$.

Observemos que:

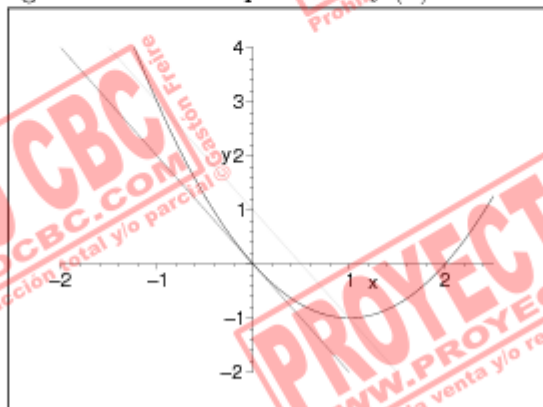
$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{-1 - (-3)}{2} = -2$$

Por lo tanto estamos buscando un $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = -2$, pero $f'(x) = 2x - 2$ por lo que:

$$-2 = f'(c) = 2c - 2 \Leftrightarrow c = 0$$

De esta forma hemos establecido con precisión el valor de c aludido en el TEOREMA DEL VALOR MEDIO. En el gráfico de mas abajo podrán comprobar los resultados obtenidos.

Figura 122: TVM aplicado a $f(x) = x^2 - 2$.



Pueden comprobar que la recta tangente al gráfico cuya pendiente es -2 es la del punto $c = 0$, tal como habíamos anticipado en nuestros cálculos.

■

Ejercicio 4

En este ejercicio es importante recalcar que hay una serie de hipótesis que deben hacerse sobre la física del problema para poder aplicar los teoremas necesarios para demostrar el mismo. En principio supondremos que la función $y(t)$ que nos da la altura del proyectil en función del tiempo es una función continua en $[0, t_F]$ y derivable en $(0, t_F)$ donde designamos por t_F al instante de tiempo en el cual el proyectil vuelve al piso. Éstas hipótesis no son en lo absoluto pretenciosas ni ridículas ya que es sabido que si la única fuerza que actúa sobre un proyectil que es lanzado hacia arriba en *tiro vertical* es la de *gravedad* entonces la función $y(t)$ tiene que ser una parábola, la cual sabemos es todo lo buena que se requiere.

Hecha esta aclaración, basta observar que $y(0) = y(t_F) = 0$, razón por la cual una aplicación directa del Teorema de Rolle nos permite inferir que $\exists 0 < t_0 < t_F$ tal que $y'(t_0) = 0$, pero ésto es lo mismo que decir que en el instante t_0 la velocidad del proyectil se debe haber anulado.

■

Ejercicio 5

Este problema es algo sutil y requiere el uso de la potencia de los teoremas del valor medio. De hecho tal vez el nombre de dicho teorema tenga cierta relevancia en una situación como la planteada aquí. Se preguntarán ustedes ¿Por qué? La respuesta es interesante: Sencillamente porque a partir de la velocidad media del vehículo en cuestión entre las 12 : 00 y las 12 : 04 es posible inferir que dicho vehículo debe haber violado la máxima de velocidad.

¿Cómo se demuestra ésto?

Primero que nada fijemos un sistema de referencia adecuado. Fijemos $t = 0$ cuando el reloj marcaba las 12 : 00 horas; llamemos $x(t)$ a la posición de nuestro vehículo en función del tiempo t haciendo la asunción de que dicha función es derivable — lo cual no parece descabellado y es un hecho que los físicos suelen aceptar —; y fijemos la posición inicial de nuestro vehículo $x(0) = 0$. Calculemos ahora la velocidad media del mismo entre los instantes $t = 0$ y $t = 4$, es decir entre los instantes en los cuales pasó por ambos controles camineros. La misma se calcula de la siguiente forma:

$$v_m = \frac{x(4) - x(0)}{4 - 0} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \leftarrow \text{en } \frac{\text{km}}{\text{min}}$$

Como $x(t)$ es una función continua en $[0, 4]$ y derivable en $(0, 4)$ según la asunción que habíamos hecho para $x(t)$, por una aplicación del TEOREMA DEL VALOR MEDIO podemos asegurar que:

$$\exists 0 < t_0 < 4 \text{ tal que } v_m = \frac{x(4) - x(0)}{4 - 0} = x'(t_0)$$

Pero teniendo en cuenta que $v_m = \frac{5}{2} \frac{\text{km}}{\text{min}}$, entonces en $t = t_0 \in (0, 4)$ nuestro vehículo habría marchado a dicha velocidad. Traducida la misma a $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nos da $\frac{5}{2} \cdot 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 150 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, hecho que demuestra con bastante holgidez que nuestro amigo había pisado el acelerador bastante mas de lo debido, y por ende se hallaba en infracción. ■

Ejercicio 6

Este ejercicio no parece fácil a simple vista, pero sin embargo lo es y mucho. Claro que para el alumno que recién toma contacto con el análisis probablemente no sea capaz de darse cuenta en forma inmediata el camino correcto para solucionarlo e incluso es posible que haya dado vueltas al mismo durante un largo tiempo sin éxito alguno. La clave de la respuesta se halla escondida en el Teorema del Valor Medio, una herramienta de valor incalculable.

Consideremos la función $f(x) = \sin(x)$. La misma es continua en $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$ para todo posible valor de $x > 0$. Pero una simple aplicación del Teorema del Valor Medio nos asegura la existencia de un $0 < \xi < x$ tal que:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \overset{=0}{\sin(0)}}{x - 0} = \sin'(\xi) = \cos(\xi)$$

Pero lo anterior es lo mismo que afirmar que:

$$\sin(x) = x \cdot \cos(\xi)$$

Luego:

$$\forall x > 0 \exists \xi \in (0, x) \text{ tal que } \sin(x) = x \cdot \cos(\xi)$$

■

Ejercicio 7

Este ejercicio constituye un resultado importantísimo para el análisis. De hecho en la práctica anterior cuando hicimos una extensa tabla de derivadas de las funciones mas usuales a partir de su estudio *manual* analizando el COCIENTE INCREMENTAL, una de las cosas que pudimos comprobar es que si $f(x) = K = cte$ entonces $f'(x) = 0 \forall x$. El presente ejercicio nos muestra que la recíproca — si el dominio de f es un intervalo — de dicha propiedad también es cierta. En concreto lo que veremos es equivalente a mostrar que si $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable verifica que $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$ entonces debe ser $f(x) = K = cte$. Pero como verán a continuación, para demostrar éste hecho serán necesarias herramientas del análisis más poderosas que las usuales, a saber: EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO⁶⁵.

Supongamos que $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ siendo I un intervalo cualquiera y que las mismas son derivables para todo x en el interior de dicho intervalo⁶⁶, verificando $f'(x) = g'(x)$. Sean $a < b \in I$ de modo que si pensamos a $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ las mismas resultarán continuas en el $[a, b]$ y derivables en el (a, b) .

Sea $x \in (a, b)$, observen que si definimos $h: [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$ $h(x) = g(x) - f(x)$, la misma resulta continua en el $[a, x]$ y derivable en el (a, x) . Por el TEOREMA DEL VALOR MEDIO y observando que por haber elegido $x \in (a, x) \Rightarrow x - a \neq 0$, debe existir un $a < c < x$ tal que:

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(c) = g'(c) - f'(c) = 0 \Rightarrow h(x) = h(a)$$

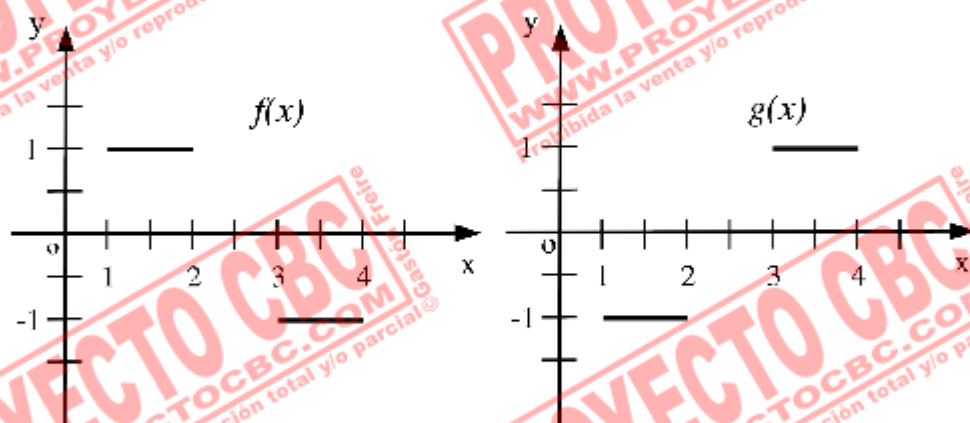
Teniendo en cuenta la definición de $h(x) = g(x) - f(x)$ y tomando $K = h(a) = g(a) - f(a)$ que es una constante real, se tiene que debe ser $g(x) = f(x) + K$. Pero si ustedes observan bien, x fue elegido arbitrariamente en $(a, b) \subset I$, habiendo sido a y b también elegidos en forma arbitraria. Pero ésto último implica que:

$$\forall x \in I: g(x) = f(x) + K \text{ siendo } K = g(a) - f(a) \text{ para cualquier } a \in I$$

Observación: Observen que la constante K se puede *identificar* eligiendo *cualquier* punto a de I y calculando $g(a) - f(a)$. Ésto es interesante pero no muy sorprendente ya que si efectivamente $g(x) = f(x) + K \forall x \in I \Rightarrow K = g(x) - f(x)$ para cualquier valor $x \in I$.

⁶⁵ Hay un comentario importante al final del ejercicio que deberían leer para comprender mejor la esencia del mismo.

⁶⁶ Que es por cierto el único lugar donde tiene sentido definir la derivada.

Figura 123: $f(x)$ y $g(x)$ 

Si bien ambas funciones verifican $f'(x) = g'(x) = 0$ para todo x en su dominio, no es cierto que $f(x) = g(x) + K$. El problema aparece pues el dominio de las mismas no es un intervalo sino la unión de dos intervalos *disjuntos*.

Sutilezas del Ejercicio

Es sumamente importante hacer un comentario al presente ejercicio. En el enunciado del mismo el dominio para las funciones $f(x)$ y $g(x)$ fue dejado tácito, sin hacerse ninguna mención sobre tal. Es posible que a raíz de ésto el alumno crea que no hay en principio ningún problema en que tal dominio sea elegido arbitrariamente a nuestro antojo. Esto no es así, el dominio juega un papel decisivo en la validez del ejercicio, siendo éste último falso si aquel deja de ser un intervalo. Por ejemplo si elegimos como dominio todo \mathbb{R} — que en sí es el intervalo $(-\infty, +\infty)$ —, el enunciado es verdadero. En realidad el mismo sigue siendo válido si pensamos a $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ para cualquier intervalo posible no necesariamente finito. Pero el hecho de que el dominio sea un intervalo es relevante. El resultado no es cierto en general si por ejemplo f y g estuvieran definidas sobre un conjunto de la forma $(1, 2) \cup (3, 4)$, como es fácilmente comprobable si pensamos en las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \in (1, 2) \\ -1 & , \text{ si } x \in (3, 4) \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ si } x \in (1, 2) \\ 1 & , \text{ si } x \in (3, 4) \end{cases}$$

Observen los gráficos de las mismas en esta página.

Si hacen un sencillo análisis de éstas dos funciones podrán comprobar que son ambas derivables en todo su dominio y ciertamente se verifica que $f'(x) = 0 = g'(x) \forall x \in (1, 2) \cup (3, 4)$, sin ser en lo absoluto $f(x) = g(x) + K$ como fácilmente se puede comprobar.

El problema aquí es la *desconexión* del dominio que permite la construcción de $f(x)$ y $g(x)$ en forma partida y presentando un abrupto salto sin que éstas pierdan por ello la propiedad de ser derivables, pues en realidad no existe un punto *fijo* sobre el eje x donde se produzca tal salto; primero hay una especie de *laguna* que separa el dominio en dos trozos disjuntos y luego se produce el salto.

Tengan muy presente que en el momento de apelar a este ejercicio y utilizar que si $f(x)$ tiene derivada nula entonces la misma debe ser constante, es muy importante que el $\text{Dom}(f)$ sea un intervalo, sino pasan cosas como las descritas anteriormente.

■

Ejercicio 8

Indicaciones

En este ejercicio se utilizará fuertemente la propiedad demostrada en el ejercicio anterior. Lo mas conveniente es proceder como sigue:

- Restar ambos miembros de la igualdad y al resultado llamarlo $f(x)$.
- Luego probar que $f'(x) = 0$ para todo x ; ésto último probaría que $f(x)$ es constante.
- Deducir que dicha constante debe ser igual a cero, pudiendo obtener la misma a partir de evaluar f en cualquier punto, ya que la misma era una función constante.

(a)

Planteamos

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2(x) - \frac{1 - \cos(2x)}{2} \\ &= \sin(2x) \\ \Rightarrow f'(x) &= 2 \sin(x) \cos(x) - \sin(2x) = 0 \end{aligned}$$

En la cuenta anterior se ha utilizando la importante identidad trigonométrica que afirma $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ se puede ver que en el caso $x=y$ uno obtiene $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Pero entonces $f(x) = K = cte$. Como $f(0) = 0$ entonces debe ser $K = 0$ y finalmente nos queda que $f(x) = 0$. Pero ésto último es lo que queríamos probar.

(b)

Hagamos $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x) - \frac{\pi}{2}$. Como:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow f(x) = K = cte$$

Y como $f(0) = 0$ como bien pueden comprobar por sí mismos, entonces $K = 0$. Pero ésto es precisamente lo que se quería demostrar.

(c)

Comencemos aclarando que la identidad propuesta en este ítem sólo es cierta si restringimos $x \in (-1, 1)$ — las razones de ello se expondrán a continuación. Se trata de una sutileza, la cual no debe escapar a nuestro análisis. En concreto consiste en la diferencia entre los dominios de las funciones:

$$\text{Dom}[2 \arctan(x)] = \mathbb{R} \quad \text{Dom}\left[\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\right] = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

El procedimiento de considerar $f(x)$ como la resta entre ambas funciones y comprobar que $f'(x) \equiv 0$ no alcanza para asegurar que dichas funciones difieren en una constante sobre todo \mathbb{R} , pues $f(x)$ no es continua ni en $x = -1$ ni en $x = 1$. En cada intervalo de continuidad la misma, a saber $I_1 = (-\infty, -1)$; $I_2 = (-1, 1)$ e $I_3 = (1, +\infty)$ es posible asegurar que $f(x) \equiv K$. Pero las constantes K_1 ; K_2 y K_3 — para I_1 ; I_2 ; e I_3 respectivamente — no necesariamente serán las mismas. En efecto, si hacemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \arctan(x) - \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \left(\frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}\right) \\ &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+4x^2} \cdot \left(\frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}\right) \\ &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2(1+x^2)}{1-2x^2+x^4+4x^2} \\ &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2(1+x^2)}{1+2x^2+x^4} \\ &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

En el intervalo $I_1 = (-\infty, -1)$, $f(x) \equiv K_1$. Para despejar el valor de K_1 podríamos evaluar en $x = -2$, pero esto último no constituye la idea más luminosa, pues nos daría un resultado numéricamente incomprensible. Si tenemos presente que $f(x)|_{(-\infty, -1)} \equiv K_1$, podríamos determinar K_1 como

el:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \overbrace{2\arctan(x)}^{-\frac{\pi}{2}} - \overbrace{\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)}^{-0} \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) - 0 = -\pi\end{aligned}$$

Luego:

$$K_1 = -\pi$$

Sobre el intervalo I_2 es posible evaluar en $x = 0$ para obtener:

$$K_2 = 0$$

Sobre el intervalo $I_3 = (1, +\infty)$, $f(x) \equiv K_3$. Procediendo como en el caso de K_1 estudiamos K_3 como el:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \overbrace{2\arctan(x)}^{\frac{\pi}{2}} - \overbrace{\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)}^{-0} \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = \pi\end{aligned}$$

Luego:

$$K_3 = \pi$$

Conclusión: El enunciado del ejercicio no es verdadero en tanto no restringimos el dominio de ambas funciones al intervalo $I_2 = (-1, 1)$. No obstante, la identidad podría recuperarse agregando a la identidad la constante correspondiente:

$$2 \arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - \pi \quad \forall x \in (-\infty, -1)$$

$$2 \arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$2 \arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + \pi \quad \forall x \in (1, +\infty)$$

■

Ejercicio 9

Primero debemos ver que efectivamente $y(x) = ke^x$ es solución de la ecuación para todo $k \in \mathbb{R}$, lo cual es una trivialidad teniendo en cuenta que $(e^x)' = e^x$. Supongamos ahora que la función $u(x)$ es también solución de dicha ecuación diferencial y hagamos $h(x) = \frac{u(x)}{e^x}$ como nos marca la sugerencia — *que por cierto es muy buena*. Derivando $h(x)$ se obtiene que:

$$h'(x) = \frac{u'(x)e^x - u(x)(e^x)'}{e^{2x}} = \frac{u(x)e^x - u(x)e^x}{e^{2x}} = 0$$

Pero entonces debe ser $h(x) = k = cte$, con lo que se obtiene:

$$k = \frac{u(x)}{e^x} \Rightarrow u(x) = ke^x$$

Pero esto último es lo que se pretendía demostrar. ■

Ejercicio 10

Indicaciones

El presente ejercicio utiliza otra notable consecuencia de los Teoremas del Valor Medio, el importante hecho que dice:

“Sea $f(a, b) : \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces:

Si $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$: Entonces $f(x)$ es *estrictamente creciente* sobre el (a, b) .

Si $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$: Entonces $f(x)$ es *creciente* sobre el (a, b) .

Si $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b)$: Entonces $f(x)$ es *estrictamente decreciente* sobre el (a, b) .

Si $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$: Entonces $f(x)$ es *decreciente* sobre el (a, b) .”

Este importante resultado es un pilar que nos servirá de apoyo no solo a la hora de resolver este ejercicio sino también a la hora de estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una cierta función *suficientemente buena* de la cual conozcamos los ceros de su derivada.

Las indicaciones pues son muy sencillas:

- Derivar $f(x)$ y estudiar el signo de $f'(x)$ para concluir sobre la monotonía de la anterior.
- Tener en cuenta que una función *estrictamente monótona* a lo sumo corta una única vez al eje x .
- Tener presente que si la monotonía es *en sentido amplio* la indicación anterior no sigue siendo válida ya que incluso $f'(x)$ podría cortar al eje de las x infinitas veces — por ejemplo una función constante.

(i)

$$f'(x) = -3 + 2 \cos^{\leq 2}(2x) < 0$$

Pero entonces resulta $f(x)$ estrictamente decreciente en todos los reales. Como $f(1) < 0$ y $f(-1) > 0$ por el Teorema de Bolzano debe existir $-1 < c < 1$ tal que $f(c) = 0$, y al ser estrictamente decreciente dicho cero debe ser único.

Así: $f(x)$ es estrictamente decreciente y corta una única vez al eje x en un punto $-1 < c < 1$.

(ii)

$$f'(x) = -\frac{1}{e^x} + \frac{1}{x} = \frac{e^x - x}{xe^x} > 0 \forall x > 1 \Leftrightarrow e^x - x > 0 \forall x > 1$$

Fíjense que si lográramos probar que $e^x - x > 0 \forall x > 1$ entonces habríamos probado que $\forall x > 1$ es $f'(x) > 0$ con lo que resultaría $f(x)$ estrictamente creciente. Concentrémonos pues en probar aquello.

Llamemos $g(x) = e^x - x$. Como $g'(x) = e^x - 1 > 0 \forall x > 1$ entonces $g(x)$ es estrictamente creciente. Al ser $g(1) = e - 1 > 0$ y dado su carácter de creciente podemos concluir que $g(x) > 0 \forall x$ como se quería probar.

Observemos ahora que $f(1) = \frac{1}{e} > 0$. por lo tanto al ser $f(x)$ estrictamente creciente será imposible que corte al eje de las x .

Así: Resulta $f(x)$ estrictamente creciente y no corta jamás al eje x .

(iii)

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \forall x > 0$$

Pero entonces resulta inmediato que $f(x)$ es estrictamente creciente, y como $f(e^{-1}) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$ entonces se concluye que f debe cortar una única vez al eje x .

Así: $f(x)$ es estrictamente creciente y corta una única vez al eje x .

(iv)

$$f'(x) = (2n+1)x^{2n} + 3x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Pero entonces $f(x)$ resultará estrictamente creciente. Como $f(-1) = -2 < 0$ y $f(0) = 1 > 0$ entonces debe haber un único punto $c \in (-1, 0)$ donde $f(c) = 0$.

Así: $f(x)$ es estrictamente creciente y corta una única vez al eje x en algún punto $c \in (-1, 0)$.

(v)

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{x}}{2\sqrt{x + \ln(x)}} > 0 \quad > 0 (\forall x > 1)$$

Nuevamente $f(x)$ resulta estrictamente creciente y al ser $f(1) = 1$ jamás cortará al eje x .

Así: $f(x)$ es estrictamente creciente y nunca cortará al eje x sobre $\mathbb{R}_{>1}$.

(vi)

$$f'(x) = -\frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{2\sqrt{x}} < 0 \quad (\forall x > 0)$$

Pero entonces $f(x)$ resulta en este caso estrictamente decreciente. Como $f(1) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} < 0$ se concluye que la misma jamás cortará al eje x .

Así: $f(x)$ será estrictamente decreciente y jamás cortará al eje x .

(vii)

$$f'(x) = -2x(x^2 + 2)^{-2} < 0 \quad > 0 (\forall x > 0)$$

Pero entonces $f(x)$ es estrictamente decreciente. Al ser $f(1) = \frac{1}{2} - 3 < 0$ concluimos que $f(x)$ jamás podrá cortar al eje x .

Así: En este caso $f(x)$ será estrictamente decreciente y nunca corta al eje x .

(viii)

$$f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot (x \cos(x) - \sin(x))$$

El signo de $f'(x)$ depende entonces exclusivamente de la expresión $x \cos(x) - \sin(x)$. Deberíamos ver que ésta última mantiene su signo en $(0, \frac{\pi}{2})$ y estudiar cual es el mismo.

Para ello podemos pensar en la función $g(x) = x \cos(x) - \sin(x)$.

$$g'(x) = \cos(x) - x \sin(x) - \cos(x) = -x \cdot \begin{matrix} > 0 (\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})) \\ \sin(x) < 0 (\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})) \end{matrix}$$

Al ser $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ podemos concluir que $g(x)$ debe ser estrictamente decreciente. Tengamos en cuenta que $g(0) = 0$, razón por la cual deberá ser $g(x) < 0 \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Pero entonces hemos probado que $f'(x) < 0$ para todo x en dicho intervalo, razón por la cual resultará $f(x)$ estrictamente decreciente en $(0, \frac{\pi}{2})$. Como es trivial observar que $f(x) > 0$ en dicho intervalo por serlo x y $\sin(x)$ podemos concluir que no cortará jamás al eje x .

Así: $f(x)$ resulta estrictamente decreciente y no corta jamás al eje x en $(0, \frac{\pi}{2})$.

■

Ejercicio 11

En este ejercicio nuevamente está presente la idea de elegir una función $f(x)$ conveniente y estudiar su crecimiento mirando el signo de la derivada. La idea fundamental presente en todo momento es el resultado descrito con detalle al principio del ejercicio anterior en la página 428.

(a)

Aquí conviene considerar la función $f(x) = \sin(x) - x$ para $x > 0$ y probar que $f(x) < 0 \forall x > 0$.

$$f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Pero entonces concluimos que la función $f(x)$ debe ser *decreciente* sobre $\mathbb{R}_{>0}$. Tengamos en cuenta que $f(0) = 0$, razón por la cual es claro que en $(0, +\infty)$ deberá ser $f(x) \leq 0$. Pero nosotros queremos probar algo un poco mas fuerte, el menor estricto. Pero $\sin(x) = x \Rightarrow \cos(x) = 1 \Rightarrow x \in \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, y el único de éstos números que está en la imagen del $\sin(x)$ es $x = 0$, por lo tanto $f(x) = 0$ únicamente en $x = 0$. Pero entonces es claro que será $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

(b)

Consideremos ahora la función $f(x) = e^x - (1+x)$. Como $f'(x) = e^x - 1$ es claro entonces que su único cero se da en $x = 0$. Pero entonces como $f'(x)$ es una función continua que sólo se anula en $x = 0$, por el Teorema de Bolzano se tiene que la misma debe mantener su signo en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$. Es conveniente en estos casos hacer una tabla y disponer la información en la misma para extraer las conclusiones de una manera más ordenada. Teniendo en cuenta que $f'(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ y $f'(1) = e - 1 > 0$ se tiene:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	\searrow	(mínimo absoluto)	\nearrow

Como $f(x)$ tiene un mínimo absoluto en $x = 0$ es claro que en dicho mínimo la función valdrá lo menos posible. Y como $f(0) = 0$, se tiene que entonces $f(x) \geq 0$ para todo posible $x \in \mathbb{R}$.

(c)

Observen cuán sencillo se puede resolver este ejercicio si utilizamos las conclusiones del ejercicio anterior. En dicho ejercicio habíamos arribado a la conclusión siguiente:

$$1 + x \leq e^x \forall x \in \mathbb{R} \leftarrow \text{Y la igualdad vale sólo en } x = 0$$

Tengamos en cuenta que la función e^x es estrictamente creciente en \mathbb{R} , de modo que $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$. Teniendo en cuenta ésto último llegamos a la siguiente equivalencia:

$$(\forall x > -1): \ln(1+x) < x \Leftrightarrow 1+x < e^x$$

¡Pero que maravilla! Nosotros sabemos que ésto último es cierto para cualquier número real distinto de 0, el cual era el único punto donde valía la igualdad. Pero entonces:

$$(\forall x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)): \ln(1+x) < x$$

Lo que es más de lo que se nos pedía probar.

(d)

Consideremos ahora $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} - 1$ y tratemos de probar que la misma es estrictamente positiva si $x > 1$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} > 0 \forall x \in (1, +\infty)$$

Pero entonces $f(x)$ es estrictamente creciente en $(1, +\infty)$ y como $f(1) = 0$ se tiene que la misma debe ser estrictamente positiva en dicho intervalo, como se quería demostrar.

(e)

Ahora consideremos $f(x) = \sin(x) - \frac{2}{\pi}x$ y tratemos de probar que la misma es estrictamente positiva en $(0, \frac{\pi}{2})$.

$$f'(x) = \cos(x) - \frac{2}{\pi} = 0 \Leftrightarrow x = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right) \leftarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Tengamos en cuenta que $f'(x)$ es una función continua en $(0, \frac{\pi}{2})$ y al haber comprobado que en dicho intervalo la misma posee un único cero — en el punto $x = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)$ —, podemos concluir por el Teorema de Bolzano

que la misma debe mantener su signo en los intervalos $(0, \arccos(\frac{2}{\pi}))$ y $(\arccos(\frac{2}{\pi}), \frac{\pi}{2})$. Como en el punto (b) es recomendable la confección de una tabla donde disponer la información para extraer nuestras conclusiones de manera ordenada. Tengamos en cuenta que $\arccos(\frac{2}{\pi}) \approx 0,88$ y como $f'(0,8) > 0$ y $f'(1) < 0$ la tabla nos queda:

	$(0, \arccos(\frac{2}{\pi}))$	$\arccos(\frac{2}{\pi})$	$(\arccos(\frac{2}{\pi}), \frac{\pi}{2})$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	↗	(máximo absoluto)	↘

Ahora que sabemos que el comportamiento de $f(x)$ en cuanto a su crecimiento, es claro que los valores donde $f(x)$ valdrá lo menos posible son los extremos del intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Pero $f(0) = 0$ y $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ con lo que ahora sí no quedan dudas sobre el hecho de que $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

(f)

Sea $f(x) = \arctan(x) - x$ y tratemos de probar que la misma es estrictamente negativa en $\mathbb{R}_{>0}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1+x^2} \right) - 1 < 0 \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$$

Pero entonces $f(x)$ tiene que ser estrictamente decreciente en dicho dominio. Tengamos en cuenta que $f(0) = 0$, pero entonces no hay nada más que probar.

(g)

Aquí nos conviene considerar $f(x) = (1+x)^a - (1+ax) = e^{a \ln(1+x)} - (1+ax)$ y tratar de probar que la misma es estrictamente positiva. Tengamos en cuenta antes que nada el hecho de ser $f(0) = 0$, razón por la cual si logramos ver que $f(x)$ es estrictamente creciente ya habríamos probado lo que se nos pide.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= e^{a \ln(1+x)} \cdot \frac{a}{1+x} - a \\
 &= \frac{(1+x)^a}{(1+x)} \cdot a - a \\
 &= (1+x)^{a-1} \cdot a - a \\
 &= a \cdot \left((1+x)^{a-1} - 1 \right) \\
 &\geq a \cdot ((1+x) - 1) \\
 &= a \cdot x \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

Bueno pero entonces $f'(x) > 0$ con lo que $f(x)$ resulta estrictamente creciente, exactamente como se quería probar.

■

Ejercicio 12 — Muy conceptual

(a)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = 1 + h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 1$$

Pero entonces $\exists f'(0) = 1$.

(b) Hay una *perla* en el enunciado.

Aclaración: Es sumamente importante aclarar que el enunciado así como está planteado es *falso*. No es suficiente con pedir que el intervalo arbitrario I contenga al 0, sino que es necesario además agregar que dicho intervalo contenga elementos positivos y elementos negativos. Saben ustedes que hay intervalos que contienen al cero sin contener valores estrictamente negativos ni valores estrictamente positivos, por ejemplo $[-1, 0]$ y $[0, 1]$. Bueno, éstos últimos *no verifican* la propiedad enunciada en (b) ya que en el primero $f(x)$ es negativa — *en sentido amplio* — no conteniendo valores estrictamente positivos; mientras que en el segundo $f(x)$ es positiva — *también en sentido amplio* — no conteniendo valores estrictamente negativos, como veremos a continuación.

Vamos a estudiar la positividad y negatividad de $f(x)$. Antes de meter nos con la parte *delicada*, que es aquello que ocurre en el intervalo $(-1, 1)$ estudiemos lo que pasa en $(-\infty, -1]$ y en $[1, +\infty)$, ya que el análisis en ellos es mucho más sencillo.

Si $x \in (-\infty, -1]$: Tengamos en cuenta que como $x \leq -1 \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{x} < 0$, pero entonces $\sin\left(\frac{1}{x}\right) < 0$. Teniendo en cuenta ésto comprobamos fácilmente que:

$$x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$

Si $x \in [1, +\infty)$: Ocurre algo parecido a lo que ocurría en el caso anterior, pero a la inversa. Como $x \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} \leq 1$, pero entonces $\sin\left(\frac{1}{x}\right) > 0$. Teniendo en cuenta ésto comprobamos fácilmente que:

$$x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) > 0$$

EJERCICIO 12 — MUY PRONCIPIATE TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Tratemos ahora de estudiar lo que ocurre en el intervalo $(-1, 1)$. Obviamente el caso fácil es el valor de $f(0) = 0$. Ahora tratemos de averiguar lo que pasa para los valores positivos de dicho intervalo y para los valores negativos del mismo.

Tengamos en cuenta que:

$$f(x) = x \cdot \left(1 + x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

Si $x \in (0, 1)$:

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq -1 \Rightarrow x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq -x \Rightarrow 1 + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 - x > 0$$

Utilizando además el hecho de que $x > 0$ podemos comprobar entonces que vale:

$$x \left(1 + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) > 0$$

Pero de esta manera nos queda que:

$$(\forall x \in (0, 1)) \Rightarrow f(x) > 0$$

Si $x \in (-1, 0)$:

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x \Rightarrow 1 + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 + x > 0$$

Utilizando además el hecho de que $x < 0$ en este caso, podemos comprobar que entonces:

$$x \left(1 + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) < 0$$

Pero de esta manera nos queda que:

$$(\forall x \in (-1, 0)) \Rightarrow f(x) < 0$$

Pero la conclusión que acabamos de obtener es *fantástica*, ya que determinamos algo muy pero muy importante a los fines de resolver este ítem. Si juntamos todo lo que vinimos haciendo, determinamos que:

EJERCICIO 12 — MUY PRONCIADO TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si $x \in (-\infty, 0)$: Entonces $f(x) < 0$.

Si $x = 0$: Entonces $f(x) = 0$.

Si $x \in (0, +\infty)$: Entonces $f(x) > 0$.

Tomemos ahora un intervalo arbitrario I conteniendo al 0 y hagamos la suposición adicional de que en dicho intervalo hay valores negativos y positivos — como antes se explicó esto es necesario. Bueno pero con lo que acabamos de ver es clarísimo que:

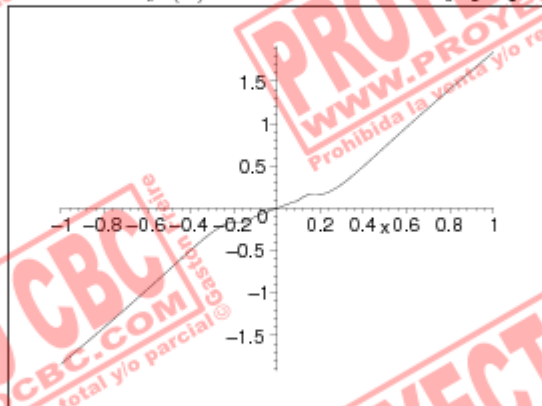
$$f\left(\overbrace{I \cap (-\infty, 0)}^{\neq \emptyset}\right) < 0 \text{ y } f\left(\overbrace{I \cap (0, +\infty)}^{\neq \emptyset}\right) > 0$$

Comentario

Aunque *no es para nada necesario* hacer un gráfico de $f(x)$ para resolver el ejercicio — hecho que recalamos para no asustar innecesariamente al alumno —, es interesante observar el mismo en el entorno de $x = 0$ dado por el intervalo $(-1, 1)$ para poder comprobar visualmente nuestras conclusiones precedentes. Habíamos dicho que en el $(-1, 0)$ $f(x)$ era negativa mientras que en el $(0, 1)$ la misma era positiva. Todo esto puede comprobarse en el gráfico, siendo además palpable que la recta tangente a f en $x = 0$ tiene que ser $y = x$ — y por lo tanto tener pendiente 1 tal como habíamos dicho en el punto (a).

EJERCICIO 12 — MUY PRONTO TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Figura 124: Gráfico de $f(x)$ en un entorno muy pequeño de $x = 0$.



Observen como la misma es negativa a la izquierda del cero y positiva a la derecha del mismo, razón por la cual es clara la necesidad de *aclarar* que el intervalo conteniendo al cero *debía contener valores negativos de x* ya que de lo contrario la propiedad enunciada no tenía por qué ser verdadera. Tomemos por ejemplo al intervalo $[0, 1]$ que claramente contiene al cero pero más claramente aún *no contiene* valores negativos de $f(x)$.

(c)

(1) — **Contraejemplo fácil.**

La respuesta es un rotundo ¡No!. Consideremos la función:

$$g(x) = \begin{cases} x + 10x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

De igual forma que se hizo en el punto (a) es posible determinar sin complicación alguna que $\exists g'(0) = 1 > 0$.

- $g(x)$ es en realidad derivable sobre todo \mathbb{R} , sólo que su derivada no es continua en $x = 0$. Para verlo procedemos como sigue: $g'(0) = 1$ se puede calcular a mano con el COCIENTE INCREMENTAL. En cualquier otro lado no hay ningún problema para derivar su fórmula, obteniéndose:

$$g'(x) = \begin{cases} 1 - 10 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 20x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ si } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 12 — MUY PRONCIPIATE TEOREMA DEL VALOR MEDIO

- Veremos que no hay la más mínima chance de que $g(x)$ resulte creciente en ningún intervalo abierto que contenga al cero:

Si existiera $\delta > 0$ tal que $g(x)$ fuera creciente en $(-\delta, \delta)$, sabemos que debería ser $g'(x) > 0$ para todo x en dicho intervalo. Pero observen que si $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, en los números de la forma $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ verifican $g'(x_k) = -9 < 0$. Pero para valores de $|k| > \frac{1}{\delta}$ se tiene que $-\delta < \frac{1}{k} < \delta$. ¡**ABSURDO!** Era imposible que un número $x \in (-\delta, \delta)$ verificara $g'(x) < 0$.

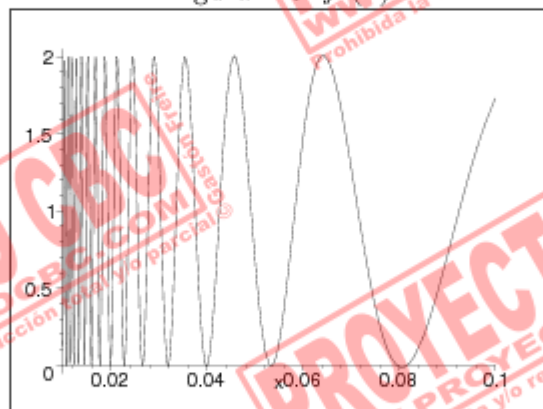
Luego: Tenemos un ejemplo de una función $g(x)$ con $g'(0) > 0$ pero que no resulta creciente en ningún intervalo abierto que contenga al cero.

(1) — Contraejemplo del ejercicio: ¡Muy difícil!

Advertencia: La lectura de la presente sección es opcional, un mero divertimento matemático tendiente a probar que la función presentada en el enunciado de este ejercicio es un contraejemplo para la propiedad enunciada en este ítem. El alumno que lo desee puede saltarse esta sección hasta (2) en la página 446.

Lo que ocurre en verdad, es que dicha función está a un pasito de no ser un contraejemplo. En la que propusimos anteriormente como contraejemplo, era muy claro que había una sucesión *obvia* de puntos donde la derivada era *brutamente* negativa, valiendo ni mas ni menos que -9 . En este contraejemplo no hay una sucesión tan *obvia* donde la derivada sea negativa. De hecho el gráfico de la misma presenta un aspecto muy peculiar que por sí sólo evidencia la dificultad de dar con una sucesión como aquella. Véanlo ustedes mismos en el dibujo a continuación:

Figura 125: $f'(x)$



EJERCICIO 12 — MUY PRONCIPIATE TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Se puede apreciar que si bien la derivada toma valores negativos, los mismos son *extremadamente cercanos al cero*, es decir hay que afinar mucho las cuentas para dar con ellos.

A diferencia del contraejemplo fácil antes propuesto donde se hizo una demostración *indirecta*, aquí haremos una demostración *constructiva y explícita* de la familia de intervalos disjuntos que se acercan al cero donde $f(x)$ alterna entre ser creciente y decreciente. Aunque un poco más difícil que el camino indirecto, lo bello de éste es que nos muestra en forma *palpable* aquello que el otro camino sólo afirmaría su existencia. Recuerden que esto lo estamos haciendo por *mero deporte*, y como tal, es más elegante dar con el objeto deseado que mostrar sólo que el mismo existe.

A continuación veremos que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

es derivable en \mathbb{R} , $f'(0) = 1 > 0$ pero $\nexists \delta > 0 / f(x)$ sea creciente en $(-\delta, \delta)$.

- Pudimos comprobar en $x = 0$ y $\exists f'(0) = 1 > 0$.
- $f(x)$ es en realidad derivable sobre todo \mathbb{R} , sólo que su derivada no es continua en $x = 0$. Para verlo procedemos como sigue: $f'(0) = 1$ ya la habíamos calculado a mano con el COCIENTE INCREMENTAL. En cualquier otro lado no hay ningún problema para derivar su fórmula, obteniéndose:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ si } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

La misma existe en todo punto pero tiene la *desgracia* de no ser continua en $x = 0$. Tomemos por ejemplo las sucesiones de números reales $a_n = \frac{1}{2n\pi} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ y $b_n = \frac{1}{\pi + 2n\pi} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Como $f'(a_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ y $f'(b_n) = 2 \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$, razón por la cual la misma no puede ser continua en $x = 0$.

- Veremos que no hay la más mínima chance de que $f(x)$ resulte creciente en ningún intervalo abierto que contenga al cero:

La idea para demostrar lo anterior *no es trivial* y requiere un cierto grado de sofisticación en las acotaciones que hay que hacer para desarrollarla. Al alumno que aún no se encuentre familiarizado con el procedimiento para acotar expresiones se le recomienda fuertemente

EJERCICIO 12 — MUY PRONCIADO TEOREMA DEL VALOR MEDIO

volver a las prácticas anteriores y entrar en calor con el mismo antes de proseguir la lectura — para evitar frustraciones innecesarias recuerden que esto es *mero deporte*.

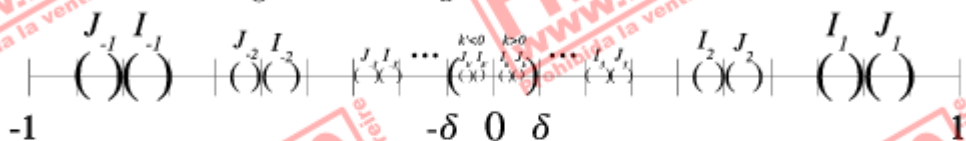
Descripción de la idea: Toda demostración debería seguir un plan.

El nuestro es el que sigue: Para poder probar que no puede haber ningún intervalo abierto conteniendo al 0 — digamos $(-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$ — donde $f(x)$ resulte creciente, lo que haremos es construir dos familias de intervalos — todos ellos disjuntos entre sí — $\mathcal{I} = \{I_k = (a_k, b_k) : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ y $\mathcal{J} = \{J_k = (b_k, c_k) : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ con las siguientes propiedades:

- Tanto $a_k, b_k, c_k \rightarrow 0$ como $|k| \rightarrow \infty$.
- $|I_k|, |J_k| \rightarrow 0$ como $|k| \rightarrow \infty$, es decir los intervalos de dichas familias tienen diámetro cada vez más pequeño a medida que el valor absoluto de $k \in \mathbb{Z}$ se agranda.
- Si $k \geq 0$ los intervalos I_k y J_k estarán a la derecha del cero, mientras que si tomamos valores de $k < 0$ los mismos se hallarán a la izquierda.
- Sobre cada I_k $f(x)$ resultará estrictamente creciente mientras que sobre cada J_k $f(x)$ resultará estrictamente decreciente.

Aunque lo anterior pareciera complicado en realidad la idea geométrica que hay en torno a nuestro proyecto de demostración es muy simple, como pueden apreciar en el siguiente gráfico:

Figura 126: Idea gráfica de la demostración



En la figura se puede apreciar que no importa cuán pequeño sea $\delta > 0$ siempre podremos elegir k suficientemente grande como para que el par de intervalos I_k, J_k se cuele dentro del $(-\delta, \delta)$. Como $f(x)$ es creciente en I_k y decreciente en J_k , ya no habrá chance de que la misma sea monótona creciente en el $(-\delta, \delta)$.

Lo único que resta ahora es dar explícitamente una definición para los intervalos I_k y J_k que cumplan las propiedades enumeradas más arriba.

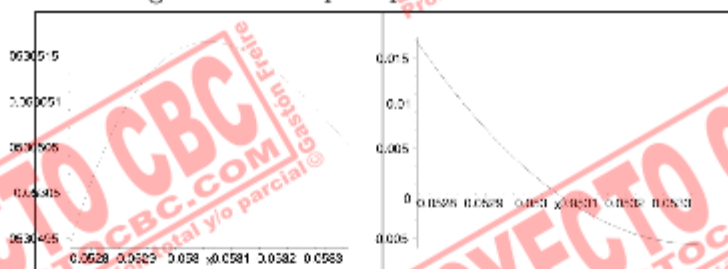
EJERCICIO 12 — MUY PRONCIPAL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Tenemos que detectar ciertas *regiones* donde $f'(x)$ sea negativa y otras donde $f'(x)$ sea positiva. Teniendo en cuenta que $f'(x)$ — salvo en $x = 0$ — es continua, un muy buen lugar para ir buscando es en las cercanías de los *ceros* de $f'(x)$. Si bien un estudio exhaustivo de *todos* los ceros de $f'(x)$ es una tarea muy complicada, lo cierto es que hay un subconjunto de los mismos que se *ve a ojo* muy fácilmente. En efecto, si hacemos:

$$f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = 1 - \cos(2k\pi) + \frac{2}{2k\pi} \sin(2k\pi) = 0 \leftarrow \text{con } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Bueno pero ésto nos da un punto de partida donde empezar a buscar. Tenemos que tratar de movernos *muy cerca* de éstos ceros, a lo mejor tenemos suerte y a un lado de los mismos $f'(x)$ es positiva y al otro lado de ellos $f'(x)$ es negativa — o viceversa. En concreto nos estamos *jugando* a que ocurra lo siguiente:

Figura 127: Lo que esperamos encontrar.



A la derecha $f'(x)$ en un pequeño entorno alrededor de los ceros que le encontramos. A la izquierda el aspecto de $f(x)$ en dicho entorno. Como ven el signo de la derivada se traslada inmediatamente al crecimiento de la función.

Sea ahora $0 < \varepsilon < 1$ ⁶⁷. Para pensar en puntos cercanos a los de la forma $\frac{1}{2k\pi}$, podemos pensar en puntos de la forma $\frac{1}{2k\pi - \varepsilon}$ y puntos de la forma $\frac{1}{2k\pi + \varepsilon}$. Dependiendo del signo de k y de si sumo o resto el ε nos estaremos moviendo a la derecha o a la izquierda de $\frac{1}{2k\pi}$. Analizaremos los distintos casos — *que son cuatro* — pero antes haremos las cuentas hasta donde se pueda en general⁶⁸:

⁶⁷Siempre que trabajamos con $\varepsilon > 0$ podemos suponer al mismo < 1 pues justamente el interés de trabajar con ε es que sea un número *pequeño*. A veces dejar abierta la posibilidad de que el mismo sea *grande* puede generar problemas en las cuentas, que se evitan restringiendo adecuadamente su tamaño.

⁶⁸Usaremos que $\cos(-x) = \cos(x)$ que $\sin(-x) = -\sin(x)$.

EJERCICIO 12 — MUY PRONCIPIATE TEOREMA DEL VALOR MEDIO

$$\begin{aligned}
 f' \left(\frac{1}{2k\pi \pm \varepsilon} \right) &= 1 - \cos(\pm\varepsilon) \pm \frac{2}{2k\pi \pm \varepsilon} \cdot \sin(\pm\varepsilon) \\
 &= 1 - \cos(\varepsilon) \pm \frac{2}{2k\pi \pm \varepsilon} \cdot \sin(\varepsilon) \\
 &= \frac{1 - \cos^2(\varepsilon)}{1 + \cos(\varepsilon)} \pm \frac{2}{2k\pi \pm \varepsilon} \cdot \sin(\varepsilon) \\
 &= \frac{\sin^2(\varepsilon)}{1 + \cos(\varepsilon)} \pm \frac{2}{2k\pi \pm \varepsilon} \cdot \sin(\varepsilon) \\
 &= \sin(\varepsilon) \cdot \left(\frac{\sin(\varepsilon)}{1 + \cos(\varepsilon)} \pm \frac{2}{2k\pi \pm \varepsilon} \right)
 \end{aligned}$$

Así nos queda: Como $0 < \sin(\varepsilon) < \varepsilon$ y $1 + \cos(\varepsilon) > 1$:

$$f' \left(\frac{1}{2k\pi \pm \varepsilon} \right) = \sin(\varepsilon) \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\frac{\sin(\varepsilon)}{1 + \cos(\varepsilon)}}_{< \varepsilon} \pm \frac{2}{2k\pi \pm \varepsilon} \right)}_{> 0} \quad (34)$$

Hasta aquí se puede trabajar en general, ahora tenemos que considerar los distintos casos:

Restando ε :

Para $k > 0$: Partiendo desde la ecuación 34 se tiene que:

$$\begin{aligned}
 f' \left(\frac{1}{2k\pi - \varepsilon} \right) &< \sin(\varepsilon) \cdot \left(\varepsilon - \frac{1}{k\pi} \right) \\
 &< 0 \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{1}{k\pi}
 \end{aligned}$$

Pero ésto nos indica que podemos movernos con ε hasta que el mismo llegue a $\frac{1}{k\pi}$ manteniéndose la derivada negativa. Pero entonces podemos hacer:

$$J_k = \left(\frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{2k\pi - \frac{1}{|k|\pi}} \right) \leftarrow \forall x \in J_k, f'(x) < 0 \text{ y } f(x) \text{ decrece.}$$

Para $k < 0$: Partiendo desde la ecuación 34 se tiene que:

$$f' \left(\frac{1}{2k\pi - \varepsilon} \right) = \underbrace{\sin(\varepsilon)}_{>0} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{1 + \cos(\varepsilon)}}_{>0} - \underbrace{\frac{2}{2k\pi - \varepsilon}}_{<0} \right)$$

$$> 0 \quad \forall 0 < \varepsilon < 1 \leftarrow \text{sin problemas}$$

Pero ésto nos indica que podemos mover ε con mucha libertad. Para que nos quede un intervalo parecido al anterior elegiremos como cota para el mismo $\frac{1}{-k\pi} = \frac{1}{|k|\pi}$. Pero entonces podemos hacer:

$$I_k = \left(\frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{2k\pi - \frac{1}{|k|\pi}} \right) \leftarrow \forall x \in I_k, f'(x) > 0 \text{ y } f(x) \text{ crece.}$$

Sumando ε :

Para $k > 0$: Partiendo desde la ecuación 34 se tiene que:

$$f' \left(\frac{1}{2k\pi + \varepsilon} \right) = \underbrace{\sin(\varepsilon)}_{>0} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{1 + \cos(\varepsilon)}}_{>0} + \underbrace{\frac{2}{2k\pi + \varepsilon}}_{>0} \right)$$

$$> 0 \quad \forall 0 < \varepsilon < 1 \leftarrow \text{sin problemas}$$

Pero ésto nos indica que podemos mover ε con mucha libertad. Para que nos quede un intervalo parecido a los anteriores elegiremos como cota para el mismo $\frac{1}{k\pi}$. Pero entonces podemos hacer:

$$I_k = \left(\frac{1}{2k\pi + \frac{1}{|k|\pi}}, \frac{1}{2k\pi} \right) \leftarrow \forall x \in I_k, f'(x) > 0 \text{ y } f(x) \text{ crece.}$$

Para $k < 0$: Partiendo desde la ecuación 34 se tiene que:

$$f' \left(\frac{1}{2k\pi + \varepsilon} \right) < \sin(\varepsilon) \cdot \left(\varepsilon - \frac{1}{-k\pi} \right)$$

$$< 0 \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{1}{-k\pi} = \frac{1}{|k|\pi}$$

EJERCICIO 12 — MUY PRONCIPIATE TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Pero esto nos indica que podemos movernos con ε hasta que el mismo llegue a $\frac{1}{|k|\pi}$ manteniéndose la derivada negativa. Pero entonces podemos hacer:

$$J_k = \left(\frac{1}{2k\pi + \frac{1}{|k|\pi}}, \frac{1}{2k\pi} \right) \leftarrow \forall x \in J_k, f'(x) < 0 \text{ y } f(x) \text{ decrece.}$$

Finalmente: Hemos construido los intervalos I_k y J_k con las propiedades necesarias. Resumimos los mismos como sigue:

$$I_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{2k\pi + \frac{1}{|k|\pi}}, \frac{1}{2k\pi} \right) & , \text{ si } k > 0 \\ \left(\frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{2k\pi - \frac{1}{|k|\pi}} \right) & , \text{ si } k < 0 \end{cases} \quad J_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{2k\pi - \frac{1}{|k|\pi}} \right) & , \text{ si } k > 0 \\ \left(\frac{1}{2k\pi + \frac{1}{|k|\pi}}, \frac{1}{2k\pi} \right) & , \text{ si } k < 0 \end{cases}$$

$$|I_k| = \frac{1}{2|k|\pi(2k^2\pi^2 + 1)} \quad |J_k| = \frac{1}{2|k|\pi(2k^2\pi^2 - 1)}$$

$$\xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0 \quad \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0$$

De esta forma: Queda justificada la imposibilidad de que $f(x)$ sea creciente en algún posible entorno del cero, tal como se quería demostrar.

(2)

Por fortuna en este caso la propiedad sí es verdadera y por lo tanto no tendremos que construir un contraejemplo *pavoroso* como el anterior — *el cual habrá dañado la salud mental de más de uno*. La sutil diferencia entre saber que $\exists f'(0) > 0$ con respecto a saber no sólo esto sino además el hecho de que $f'(x)$ es continua en $x = 0$ nos permitirá inferir la existencia de un intervalo en torno al cero $(-\delta, \delta)$ con la propiedad de que en dicho intervalo $f(x)$ será estrictamente creciente.

Como $f'(0) > 0$ y dada la PROPIEDAD DE CONSERVACIÓN DEL SIGNO para funciones continuas podemos inferir la existencia de un $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta \Rightarrow f'(x) > 0$. Pero entonces $f'(x) > 0 \forall x \in (-\delta, \delta)$, con lo que $f(x)$ resulta estrictamente creciente en dicho intervalo. ■

Ejercicio 13

Aunque este ejercicio es muy simple no hay que confiarse demasiado pues hay ciertos casos que considerar, que de no hacerlo, podríamos llegar a terminar diciendo una sarta de disparates. En principio tengamos en cuenta que:

$$f'(x) = 3x^2 \qquad g'(x) = 2x$$

El Teorema de Cauchy afirma la existencia de un $c \in [a, b]$ tal que:

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

En términos de f' y g' la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned} ((b^3 + 1) - (a^3 + 1))2c &= ((b^2 + 1) - (a^2 + 1))3c^2 \\ \Leftrightarrow (b^3 - a^3)2c &= (b^2 - a^2)3c^2 \\ \Leftrightarrow (b - a) \cdot (b^2 + ab + a^2)2c &= (b - a)(a + b)3c^2 \end{aligned}$$

Así: La relación del Teorema de Cauchy nos queda:

$$(b^2 + ab + a^2)2c = (a + b)3c^2 \quad (35)$$

Ahora es el punto en el que hay que ser cuidadoso, pues empezar a tachar cosas a diestra y siniestra puede llegar a ser catastrófico. En principio, si bien sabíamos con seguridad que $a - b \neq 0$, ya no estamos tan seguros de que $a + b \neq 0$, por ejemplo si $[a, b] = [-1, 1]$ estaríamos en problemas si pasamos dividiendo $a + b$. Por eso tenemos que distinguir entre dos casos:

Si $a < 0 < b$: En este caso podemos tomar $c = 0$ y listo.

Si $a \cdot b \geq 0$ ⁶⁹: En este caso tenemos seguridad de que $a + b \neq 0$. Podemos suponer tranquilamente que $c \neq 0$ pues la única posibilidad para que fuera cero sería que fuera uno de los bordes del intervalo $[a, b]$ en este caso — *ya que a y b están del mismo lado del cero*. Podemos ahora tachar en (35) c a ambos lados y despejar la misma como:

$$c = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{b^2 + ab + a^2}{a + b} \right) \leftarrow \text{en función de } a \text{ y } b.$$

Pero lo anterior termina el problema ya que era lo que se pedía. ■

Ejercicio 14

Este ejercicio es muy importante, de hecho cuando lleguemos a la Práctica 8 y estudiemos el TEOREMA DE TAYLOR — en relación a aproximar funciones por polinomios —, veremos que la idea contenida en la demostración que sigue es de extrema relevancia en el mismo. Nos permitirá demostrar la acotación para el RESTO DE TAYLOR, cosa de vital importancia ya que de nada sirve tener un método para aproximar funciones si dicho método no nos da información acerca del error que comete. Por lo tanto sería bueno que traten de comprender las ideas involucradas a fin de que mas adelante puedan emplearlas para efectuar tal demostración — o por lo menos comprenderla.

Utilizaremos el TEOREMA DE CAUCHY sucesivas veces.

Sea $x \in \mathbb{R}$ y supongamos $s.p.g^{70}$ que $x > 0$. Como las funciones $r(x)$ y $g(x) = x^3$ son continuas en $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$, por el Teorema de Cauchy podemos asegurar la existencia de un $0 < y < x$ tal que:

$$\begin{aligned}(r(x) - r(0)) \cdot 3y^2 &= (x^3 - 0^3) \cdot r'(y) \\ \Leftrightarrow \frac{r(x) - r(0)}{x^3} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{r'(y)}{y^2}\end{aligned}$$

Como $r'(x)$ y $g(x) = x^2$ son continuas en $[0, y]$ y derivables en $(0, y)$ por el TEOREMA DE CAUCHY existe $0 < z < y < x$ tal que:

$$\begin{aligned}(r'(y) - r'(0)) \cdot 2z &= (y^2 - 0^2) \cdot r''(z) \\ \Leftrightarrow \frac{r'(y) - r'(0)}{y^2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{r''(z)}{z}\end{aligned}$$

Volvemos a aplicar el Teorema de Cauchy esta vez a $r''(x)$ y a $g(x) = x$ en el $[0, z]$ para concluir la existencia de un $0 < c < z < y < x$ tal que:

$$\begin{aligned}(r''(z) - r''(0)) \cdot 1 &= (z - 0) \cdot r'''(c) \\ \Leftrightarrow \frac{r''(z) - r''(0)}{z} &= r'''(c)\end{aligned}$$

Luego: $\frac{r(x) - r(0)}{x^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{r'(y) - r'(0)}{y^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{r''(z) - r''(0)}{z} = \frac{r'''(c)}{3!}$.

⁷⁰Ya deberían estar acostumbrados a esta abreviación, que quiere decir *sin perder generalidad*.

Ejercicio 15

Como este ejercicio se resuelve mediante la utilización de la Regla de L'Hospital hemos dedicado al final del ejercicio en la página 452 una sección donde se enuncia la misma en todas sus variadas posibilidades.

(a)

En este caso estamos en presencia de una indeterminación $\frac{0}{0}$. Como $\ln(x+1)$ es derivable en un entorno de $x=0$ y lo mismo para la función identidad, podemos aplicar la REGLA DE L'HOSPITAL sin inconvenientes.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

(L'Hosp.)

Como pueden apreciar la potencia de esta regla es muy interesante, permitiendo resolver un límite que en circunstancias normales hubiera sido intrincado de manera muy simple.

(b)

Este es un típico ejemplo donde hay que aplicar la REGLA DE L'HOSPITAL más de una vez — *de hecho tres veces*. La razón es que luego de haber aplicado la primera vez la misma sigue habiendo una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, y no hay razón para no poder aplicar a la misma otra vez la mencionada regla. De todas formas siempre hay que detenerse unos instantes a observar que se verifiquen las hipótesis de la misma.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = 2 \end{aligned}$$

(L'Hosp.)

(c)

Otro ejemplo donde hay que aplicar L'HOSPITAL varias veces.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-\infty}{2 \ln(x)}}{\frac{-\infty}{1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{x}\right)}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{aligned}$$

(d)

Para hacer correctamente este ejercicio hay que recordar que $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ y $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} - \sin^2(x)} \\ \text{otra vez } \frac{0}{0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(e)

Aquí hay que tener cuidado porque de antemano no nos encontramos con una indeterminación típica de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Tenemos que *acomodar* la expresión para llevarla a una de esta forma.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \leftarrow \text{ahora sí es } \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{aligned}$$

Observen con que facilidad L'HOSPITAL resuelve este tipo de límites que nos eran tan trabajosos en las prácticas anteriores.

(f)

Es muy frecuente que el alumno *imprudente* trate de aplicar L'HOSPITAL a este tipo de límite.

¿Qué les parece? ¿Sería eso correcto? Claro que no, no hay ninguna indeterminación en casos del tipo $-\infty \cdot +\infty$. De hecho:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \leftarrow \text{en forma inmediata}$$

Tengan cuidado con este tipo de errores, que son bastante frecuentes. No se dejen llevar por el impulso de aplicar L'HOSPITAL hasta tanto hayan verificado que se encuentran en las hipótesis del mismo.

(g)

Para poder hacer la cuenta correctamente primero tenemos que estudiar otro límite, que será necesario cuando analicemos el que nos piden.

$$\begin{aligned} \text{es indet. } \frac{\infty}{\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-x} = 0 \end{aligned} \quad (\text{L'Hosp.})$$

Ahora podemos proseguir con el que se nos pedía.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin(x) \cdot \ln(x)} \leftarrow \text{tenemos } 0 \cdot \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-1}{x} \cdot \left(\frac{0}{x}\right)} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Observación: Vean cuán importante es saber *acomodar* las expresiones para llevarlas a la forma más conveniente. En análisis muchas veces no importa lo que uno escribe sino *como lo escribe*.

(h)

Estamos ahora en presencia de una indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 0
 \end{aligned}$$

■

La Regla de L'Hospital

Este ejercicio es para introducirnos en el mundo de la REGLA DE L'HOSPITAL que sirve para salvar indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. Enunciar bien dicha regla es todo un trabajo, ya que la misma ha demostrado ser tan versátil y valer en tan variado abanico de posibilidades — *con sutiles diferencias* —, que su enunciación se torna dificultosa si uno pretende contemplar todas esas posibilidades. Aunque en un curso más avanzado de análisis todos conocen las distintas variantes de la misma, en el presente es conveniente detenerse un instante y enunciarla correctamente.

Regla de L'Hospital:

Versión para $x \rightarrow x_0$: Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en el (a, b) salvo a lo sumo en un punto x_0 de dicho intervalo. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ó $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ el cual puede ser $\pm\infty$ o aún también ∞ a secas. Si $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ya sea finito o infinito, entonces $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Versión para $x \rightarrow x_0^+$: Sean $f, g : (x_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en el (x_0, b) . Supongamos que $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0$ ó $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \infty$ el cual puede ser $\pm\infty$ o aún también ∞ a secas. Si $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ya sea finito o infinito, entonces $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Versión para $x \rightarrow x_0^-$: Sean $f, g : (a, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en el (a, x_0) . Supongamos que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = 0$ ó

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = \infty$ el cual puede ser $\pm\infty$ o aún también

∞ a secas. Si $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ya sea finito o infinito, entonces

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Versión para $x \rightarrow +\infty$: Sean $f, g : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ó $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$ el cual puede ser $\pm\infty$ o aún también ∞ a secas. Si

$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ya sea finito o infinito, entonces $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Versión para $x \rightarrow -\infty$: Sean $f, g : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ ó $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$ el cual puede ser $\pm\infty$ o aún también ∞ a secas. Si

$\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ya sea finito o infinito, entonces $\exists \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Versión Michael Spivak: Para citar a MICHAEL SPIVAK, un gran matemático contemporáneo que ha escrito numerosos libros de análisis — *todos ellos excelentes y recomendables* —, el cual en “CALCULUS, *Cálculo Infinitesimal*” dedicó una serie de ejercicios a que el alumno pudiera formarse por sí mismo una idea de las variadas formas de la REGLA DE L'HOSPITAL, luego de haber enunciado unas cinco o seis posibles formas de la misma en su ejercicio 53 del capítulo 11, escribe:

“Para completar la orgía de variantes de la regla de L'Hospital, aplicar el problema 52 para demostrar unos cuantos casos más de la siguiente proposición general (existen tantas posibilidades que el lector debe seleccionar aquellas, si las hay, que sean de su interés:

Si $\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = \{\}$ y $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f'(x)}{g'(x)} = ()$

entonces $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = ()$.

Aquí \square puede ser a o a^+ o a^- o ∞ o $-\infty$, y $\{\}$ puede ser 0 o ∞ o $-\infty$ y $()$ puede ser l o ∞ o $-\infty$.”

Como podrán apreciar a Michael también se le complicó la definición de la misma, hecho que fue explotado por su gran chispa e imaginación literaria para dar origen a un comentario tan simpático.

¡Advertencia! Citando nuevamente el estilo de Spivak, *no se deje llevar el lector por la fantasía* y no se les ocurra aplicar la REGLA DE L'HOSPITAL en los casos $\frac{0}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$ e inclusive $\infty \cdot \infty$ — *error muy común* — ya que las situaciones anteriores no constituyen ningún tipo de indeterminación, y seguramente si la aplican en las mismas los resultados sean desastrosos. ■

Ejercicio 16

Sería recomendable que leyeran la sección LA REGLA DE L'HOSPITAL en la página 452 del ejercicio anterior, para familiarizarse con la misma ya que la utilizaremos para resolver este ejercicio.

(a)

Aquí la indeterminación de fondo es $\infty - \infty$ por lo cual parecería a primera vista que L'Hospital no es muy aplicable que digamos. Pero sería un error descartar aquel camino sin considerar bien la situación, ya que acomodando la expresión convenientemente se puede llevar la misma a una forma donde sí se puede aplicar dicha regla.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 - \ln(x)}{\ln(x)(x - 1)} \\ &\stackrel{(L'Hosp)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\left(\frac{x-1}{x}\right) + \ln(x)} \leftarrow \text{otra vez } \frac{0}{0} \\ &\stackrel{(L'Hosp)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b)

Aquí no hay mucho L'HOSPITAL que aplicar como podrán apreciar a continuación.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{\ln(x)}{\ln(x)}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} e = e$$

(c)

Estudiemos por separado el siguiente límite que nos será de utilidad para resolver el problema:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(x)}{1 - x} \stackrel{(L'Hosp.)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$$

Aquí tenemos un caso de $\infty \cdot 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) \cdot \ln(1-x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\overset{-1}{\ln(x)}}{\underset{-0}{1-x}} \right) \cdot \overbrace{\ln(x)}^{-0} = 0$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(x+e^{2x})}{x}}$$

El exponente en este límite contiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ la cual podemos estudiar con L'HOSPITAL.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+e^{2x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1+2e^{2x}}{x+e^{2x}} \right)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{-3}{1+2e^{2x}}}{\underset{-1}{x+e^{2x}}} = 3$$

(e)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &\stackrel{(L'Hosp)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k \ln^{k-1}(x) \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2k \cdot \frac{\ln^{k-1}(x)}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Observen que luego de la primer aplicación de L'Hospital llegamos a la misma expresión que antes sólo que multiplicada por $2k$ y habiendo bajado el exponente de la misma a $(k-1)$. Es de esperar que si seguimos aplicando L'Hospital este fenómeno seguirá ocurriendo. La expresión de más arriba continúa como sigue⁷¹:

⁷¹La forma correcta de hacer esto sería aplicando una Inducción. El alumno que lo desee puede hacerlo para terminar de formalizar por completo la resolución del problema.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \dots \\
 &\stackrel{\text{(L'Hosp.)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2k)(2(k-1)) \cdot \frac{\ln^{k-2}(x)}{\sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^2(k)(k-1) \cdot \frac{\ln^{k-2}(x)}{\sqrt{x}} \\
 &\vdots \\
 &\stackrel{\text{(L'Hosp.)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^k k! \cdot \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^k k! \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(2^{k+1} k!)}_{\text{es una cte.}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

(f)

Para el límite del presente ejercicio necesitamos calcular auxiliariamente otro:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-2^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-2^x \ln(2)}{1-2^x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{-2^x \ln(2)}^{-1}}{1-2^x} = -\infty$$

Ahora podemos resolver lo que se nos pide:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{\sin(x)}{x} \left(\frac{\ln(1-2^x)}{x} \right)^{-1}} = 0 \leftarrow \text{nos queda } e^{-\infty}$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-n}} \stackrel{\text{(L'Hosp.)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-n x^{-n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^n}{n} = 0$$

(h)

En este ejercicio la idea será aplicar L'Hospital tantas veces como sea necesario para lograr salvar la indeterminación. Como en el numerador tendremos x^n cuyas derivadas son nx^{n-1} , $n(n-1)x^{n-2}$, ..., $n!x$, $n!$, se puede apreciar que todas ellas tienden a $+\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$ hasta la derivada n -ésima que es constantemente $n!$. Por lo tanto si aplicamos n veces seguidas la Regla de L'Hospital en el último paso se habrá salvado la indeterminación. La idea se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} \\ &\stackrel{(\text{L'Hosp.})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} \leftarrow \text{siguen las condiciones de L'Hosp.} \\ &\quad \vdots \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} \stackrel{(\text{L'Hosp.})}{=} 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 17

En este ejercicio tenemos que hacer uso de la Regla de L'Hospital tantas veces como sea necesario. No es para nada complicado si se tiene en claro lo que hay que hacer. Habrá que usar que $R^{(10)}(x)$ es continua en $x = 0$ razón por la cual $\lim_{x \rightarrow 0} R^{(10)}(x) = R(0) = 1$. La cuenta queda:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{x^{10}} & \stackrel{(L'Hosp.)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R'(x)}{10x^9} \leftarrow \text{sigue siendo } \frac{0}{0} \\ & \stackrel{(L'Hosp.)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R''(x)}{10 \cdot 9x^8} \leftarrow \text{sigue siendo } \frac{0}{0} \\ & \vdots \\ & \stackrel{(L'Hosp.)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R^{(10)}(x)}{10!} = \frac{1}{10!} \end{aligned}$$

Como pueden apreciar la REGLA DE L'HOSPITAL es una herramienta más que útil, sobre todo si se tiene en cuenta que podemos aplicar la misma sucesivas veces — tantas como necesitemos y nos permita la *bondad* de las funciones que estamos estudiando. ■

Ejercicio 18

La respuesta es muy sencilla. En efecto, luego de la primera aplicación de la REGLA DE L'HOSPITAL ya no hay ninguna indeterminación pues el numerador tiende a 4 y el denominador tiende a 2. Esto nos permite concluir en forma inmediata el resultado de dicho límite, el cual es 2. ■

Ejercicio 19

El objetivo de este ejercicio es advertir al alumno para que no haga uso indiscriminado de la REGLA DE L'HOSPITAL. Siempre que se va a aplicar un teorema o propiedad hay que tener el cuidado de verificar que se está dentro de las hipótesis de dicha pieza teórica. Por ejemplo aplicar el TEOREMA DE PITÁGORAS a un triángulo que no es rectángulo sería absurdo, no se puede esperar jamás llegar a algo coherente de hacer tal cosa. Lo mismo pasa con cualquier teorema.

(a)

Si llamamos $f(x) = x + \sin(x)$ y $g(x) = x$ podremos observar que $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ya que $g'(x) = 1$ y $f'(x) = 1 + \cos(x)$, y no hay límite para ésta última. Como la REGLA DE L'HOSPITAL requiere la existencia de dicho límite y esta hipótesis falla, será imposible aplicar la misma.

No obstante haber fallado con lo anterior no hay que desesperar ya que siempre es posible encontrar algún otro método para analizar el límite pedido. Por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\overset{\text{acotado}}{\sin(x)}}{x} = 1$$

(b)

En este caso el problema es que al aplicar por primera vez L'Hospital seguimos teniendo una indeterminación. Cuando intentamos aplicarla por segunda vez ocurre tristemente que volvemos al punto de partida, razón por la cual si seguimos el proceso *ad-infinitum* solo perderemos nuestra preciada vida en algo que no vale la pena. Veamos lo que ocurre:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{(L'Hosp.)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leftarrow \text{¡Qué pena!}$$

Sin embargo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - e^{-x}) + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\overset{\rightarrow 0}{e^{-x}}}{\underset{\rightarrow +\infty}{e^x - e^{-x}}} = 1$$

(c)

Aquí tenemos el *feo* inconveniente de que si derivamos el numerador y el denominador, la expresión resultante es aun peor que la primera en términos del cálculo del límites. Observemos lo que ocurre:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \leftarrow \text{Nada agradable.}$$

La imposibilidad de calcular el límite que nos pide L'HOSPITAL hace pensar a uno en utilizar otro método. Y es una sabia decisión. Por ejemplo podemos pensar en hacer el cambio de variables $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$. Como $y \rightarrow_{x \rightarrow 0^+} +\infty$ nos quedaría:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y}$$

Ahora sí podemos aplicar la Regla de L'Hospital, pero al último límite no al primero. Nos quedaría:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} \stackrel{\text{(L'Hosp.)}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^y} = 0$$

Comentario: Hubiera podido aplicarse L'Hospital a la expresión inicial haciendo un pequeño acomodamiento a la misma, como pueden comprobar a continuación:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \stackrel{\text{(L'Hosp.)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)}{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

En realidad si observan bien se darán cuenta que no hay mucha diferencia en haber hecho el cambio de variables de más arriba y lo que hicimos a continuación, que es operar de la misma manera que con el cambio de variables pero sin haberlo hecho.

Es importante recalcar la variedad de caminos posible a la hora de encarar un ejercicio para que comprueben que no hay una *única forma correcta* de hacerlo. Cada uno tiene que usar su propia imaginación y tener cuidado al hacer los planteos y justificaciones.

■

Ejercicio 20

(a)

Es fácil comprobar que no puede existir mediante sucesiones. En efecto si $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ y $b_n = \frac{1}{\pi+2n\pi}$ es claro que $a_n, b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{2n\pi} \cdot \overset{=0}{\sin(2n\pi)} - \overset{=1}{\cos(2n\pi)}}{\underset{-1}{\cos\left(\frac{1}{2n\pi}\right)}} = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{\pi+2n\pi} \cdot \overset{=0}{\sin(\pi+2n\pi)} - \overset{=-1}{\cos(\pi+2n\pi)}}{\underset{-1}{\cos\left(\frac{1}{\pi+2n\pi}\right)}} = 1$$

entonces resulta imposible que exista $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, como se nos pedía demostrar.

(b)

Observen que si usamos L'HOSPITAL obtendremos la desafortunada expresión de más arriba, razón por la cual no podremos siquiera soñar con utilizarla. Pero a no desesperar, siempre es posible sacar el as de la manga que tenemos reservado para estas ocasiones:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{\text{acotado}}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)} = 0$$

(c)

Este límite es muy pero muy sencillo. Si no les ha salido lo que ocurre es que en este punto deben estar tan deslumbrados con la potencia de tan novedosos métodos que han olvidado los trucos de antaño:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \cdot \left(1 + \frac{\overset{\text{acotado}}{\sin(x)}}{x}\right)}{\cancel{x} \cdot \left(1 + \frac{\overset{\text{acotado}}{\cos(x)}}{x}\right)} = 1$$

■

Ejercicio 21

En este tipo de ejercicios una muy buena recomendación es ir descartando una a una las posibilidades falsas. Por ejemplo una que quedaría descartada a como de lugar sería la tercera pues no puede ser una función derivable pero no continua. Sobreviven pues hasta ahora la primera, la segunda y la cuarta.

Analicemos primero la continuidad de la función en $x = 0$. Teniendo en cuenta que $f(0) = 0$, para que sea continua su límite tendría que darnos cero. Por izquierda no hay dudas ya que es la función nula, veamos que pasa por derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-\frac{3}{2}}} \stackrel{(L'Hosp.)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = 0$$

Pero entonces no hay dudas de que $f(x)$ resulta continua en $x = 0$, con lo cual la primera queda descartada. Estamos entonces entre la segunda y la cuarta. Analicemos el COCIENTE INCREMENTAL para ver si la misma es o no derivable en $x = 0$. Nuevamente por izquierda no hay dudas de que da cero ya que es la función nula.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^{\frac{1}{2}} \cdot \ln(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(h)}{h^{-\frac{1}{2}}} \\ &\stackrel{(L'Hosp.)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{h}}{-\frac{1}{2}h^{-\frac{3}{2}}} \\ &\stackrel{(L'Hosp.)}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} -2h^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned}$$

Pero entonces resulta $f(x)$ no solo continua sino también derivable.

Luego: La cuarta opción era la correcta. ■

Ejercicio 22

Para determinar el valor de a es suficiente con estudiar el límite cuando nos acercamos a cero para $f(x)$ ya que si existe el mismo y da 6 entonces la misma resultaría continua. Es cuestión pues de elegir a tal que ésto último ocurra. Pero:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + 3 - 3 \cos(x)}{x} \stackrel{(L'Hosp.)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + 3 \sin(x)}{1} = a$$

Entonces debemos elegir $a = 6$.

Nos resta estudiar si para éste valor $f(x)$ resulta derivable en $x = 0$. Estudiemos el COCIENTE INCREMENTAL.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(6h + 3 - 3 \cos(h)) - 6}{h^2} \\ &\stackrel{(L'Hosp.)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 + 3 \sin(h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{h} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin(h)}{h} = \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(x)$ no podrá ser derivable en $x = 0$. ■

La Regla de L'Hospital y el Cociente Incremental

Observen que la REGLA DE L'HOSPITAL es una herramienta fantástica para lidiar con COCIENTES INCREMENTALES de funciones cuya definición en un cierto punto es *dudosa*. De hecho a partir de la misma se puede construir un criterio más que útil para estudiar la derivada de funciones definidas en forma partida — cuya utilización sin embargo debe ser hecha cuidadosamente ya que en general no es un tema que se suela dar en los cursos de análisis del ingreso a la universidad, razón por la cual su uso puede ser cuestionado. El criterio es como sigue:

Supongamos que tenemos $f(x)$ definida en forma partida, digamos por:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \text{ si } x < x_0 \\ r(x) & , \text{ si } x \geq x_0 \end{cases}$$

Hagamos la suposición adicional de que tanto $g(x)$ como $r(x)$ son derivables en $\mathbb{R}_{<x_0}$ y $\mathbb{R}_{>x_0}$ respectivamente y que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} r(x) = f(x_0)$,

es decir se pegan con continuidad. Entonces si:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} g'(x) = L \text{ y } \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} r'(x) = L \leftarrow \text{Las derivadas encajan.}$$

entonces $f(x)$ tiene que ser derivable en $x = x_0$ y vale $f'(x_0) = L$

La demostración de esta útil herramienta es *trivial* si uno piensa en la potencia de la Regla de L'HOSPITAL, ya que sabemos que $f(x)$ resultará derivable en $x = x_0$ si y sólo si existe el límite para el COCIENTE INCREMENTAL en dicho punto. Y esto último ocurrirá si y sólo si existe el mismo a derecha e izquierda. Pero:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\ &\stackrel{\text{(L'Hosp.)}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g'(x_0 + h)}{1} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g'(x) = L \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} g'(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{r(x_0 + h) - r(x_0)}{h} \\ &\stackrel{\text{(L'Hosp.)}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{r'(x_0 + h)}{1} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} r'(x) = L \end{aligned}$$

Pero entonces ambos límites existen y coinciden con L , razón por la cual se tiene que $f(x)$ debe ser en efecto derivable siendo $f'(x_0) = L$.

Comentario: No se si se habrán percatado de lo importante e interesante que es este criterio, ya que nos permite alejarnos aún mas del COCIENTE INCREMENTAL al momento de estudiar la derivabilidad de funciones. Hemos visto que incluso si $f(x)$ fuera definida en forma *dudosa* para algún en particular — *como ocurre en el caso de las partidas* —, basta con que las funciones de los extremos *se peguen bien* y sus derivadas *encajen* en el punto de unión para que entonces $f(x)$ resulte también derivable. ■

Problema 1

Sabemos bien que antes de pensar en que una función resulte *derivable* en $x = 0$ la misma debe primero ser *continua* en dicho punto, razón por la cual es conveniente estudiar la continuidad de la misma y determinar la relación que deben cumplir a y b para que ésto ocurra en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \stackrel{(L'Hosp.)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2bx + a \sin(x)}{e^x} = 0$$

Pero ésto último nos dice que $f(x)$ resultará continua con independencia de los valores elegidos para a y b .

Para estudiar la derivabilidad tenemos que plantear el **COCIENTE INCREMENTAL** para $f(x)$ en $x = 0$, el cual obviamente dependerá de los valores de a y b . Nuestra tarea es determinar la relación que deben cumplir los mismos para que el mismo existe y sea igual a -3 .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{bh^2 + a(1 - \cos(h))}{h(e^h - 1)}$$

$$\text{Uso L'Hospital} \rightarrow = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2bh + a \sin(h)}{(e^h - 1) + he^h}$$

$$\text{Nuevamente L'Hospital} \rightarrow = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2b + a \cos(h)}{2e^h + he^h}$$

$$= \frac{2b + a}{2} = b + \frac{a}{2}$$

Pero entonces:

$$\exists f'(0) = b + \frac{a}{2} = -3 \Leftrightarrow b = -3 - \frac{a}{2}$$

Luego: Basta elegir $b \in \mathbb{R}$ cualquiera y tomar $a = -3 - \frac{a}{2}$ para que $\exists f'(0) = -3$.

Problema 2

Como tanto f , f' y f'' son funciones derivables en todo \mathbb{R} y teniendo en cuenta como se construye $g(x)$, podemos inferir que la misma también será una función derivable en $\mathbb{R}_{\neq 0}$. En $x = 0$ tenemos cierta incertidumbre sobre lo que ocurrirá con esta nueva función debido que la hemos definido en forma partida, razón por la cual habrá que estudiar su comportamiento en dicho punto con el cuidado del caso.

(a)

Analicemos primero la continuidad de la misma, que es análogo a lo que se nos pide:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \stackrel{\text{usamos que } f' \text{ es cont.}}{(L'Hosp.)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6f'(6x)}{5} = \frac{6f'(0)}{5} = \frac{6 \cdot \frac{5}{6}}{5} = 1 = g(0)$$

Concluimos pues que $g(x)$ es continua en $x = 0$.

(b)

Resta ahora estudiar su derivabilidad. Como de costumbre apelaremos al COCIENTE INCREMENTAL.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(6h) - 2}{5h} - 1 \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6h) - 2 - 5h}{5h^2} \\ &\stackrel{(L'Hosp.)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6f'(6h) - 5}{10h} \\ &\stackrel{(L'Hosp.)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{36f''(6h)}{10} \end{aligned}$$

Usamos que f'' es cont. en 0

$$= \frac{36f''(0)}{10} = \frac{36 \cdot \frac{5}{10}}{10} = 18$$

Así: $\exists g'(0) = 18$.

■

Problema 3

Tengamos en cuenta que $f(0) = 3$. Si pudiéramos probar que $f(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$ entonces habríamos demostrado lo que se nos pide, ya que sería $\forall x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 3 > 1$.

Teniendo en cuenta que:

$$f(x) = e^{(5x + \cos(2x)) \cdot \ln(3)} + 8x + \ln((4x + 1)^{-2})$$

entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{(5x + \cos(2x)) \cdot \ln(3)} \cdot (5 - 2 \sin(2x)) \ln(3) + 8 + \frac{-8(4x + 1)^{-3}}{(4x + 1)^{-2}} \\ &= e^{(5x + \cos(2x)) \cdot \ln(3)} \cdot (5 - 2 \sin(2x)) \ln(3) + 8 \underbrace{- \frac{8}{(4x + 1)}}_{> 0 \forall x > 0} \\ &> 0 \quad (\forall x > 0 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Pero habiendo probado que $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$ entonces sabemos que la misma resultará estrictamente creciente en $(0, +\infty)$. Y como $f(0) = 3$ ya nunca podrá volver a bajar para valer 1.

Así: Debe ser $f(x) \neq 1 \forall x \in \mathbb{R}$.

■

Problema 4

(a)

Estudiar si una cierta función es monótona a menudo es equivalente a estudiar el signo de su derivada para comprobar que el mismo no varía en el dominio indicado — claro que para esto debe ser $f(x)$ derivable. En el caso de la función del enunciado la misma lo es para todo $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{4^2}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} > 0$$

Pero entonces no hay duda que la misma debe ser estrictamente creciente y con ello monótona.

(b)

Como $f(x)$ es estrictamente monótona entonces es trivial que la misma resulta inyectiva, pues si $x \neq y$ entonces es claro que debe ser $x < y$ o $x > y$. En el primer caso deberá ser $f(x) < f(y)$ con lo que en particular $f(x) \neq f(y)$. En el segundo caso ocurre al revés $f(y) < f(x)$ pero es claro que también $f(x) \neq f(y)$. Por lo tanto del hecho de suponer $x \neq y$ podemos concluir $f(x) \neq f(y)$, pero esto último quiere decir que la función debe ser inyectiva — como queríamos demostrar.

Habiendo probado la inyectividad tenemos que determinar $I = \text{Im}(f)$ ya que como bien sabemos $f^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

Así: $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es inversible con $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$.

Tengamos en cuenta que como $f'(x) > 0 \forall x > 0$ entonces en particular la misma no se anula nunca. $f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1$. Teniendo en cuenta que $f'(1) = 5$ y usando el TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA, debe ser entonces $f^{-1}(x)$ derivable en todo \mathbb{R} con:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$$

■

Problema 5

Llamemos $f(x)$ a la función del enunciado.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{px^{p-1} - p}{2(x-1)} \\ &\stackrel{\text{(L'Hosp.)}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{p(p-1)x^{p-2}}{2} \\ &= \frac{p(p-1)}{2} \end{aligned}$$

Pero entonces:

$$\begin{aligned} \frac{p(p-1)}{2} &= 3 \\ \Leftrightarrow p^2 - p &= 6 \\ \Leftrightarrow p^2 - p - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \\ \Leftrightarrow p &= \frac{1 \pm 5}{2} \end{aligned}$$

Así: Los posibles valores para p son:

$$p = \frac{1 \pm 5}{2}$$

■

Problema 6

Si usamos la sugerencia que nos dan en el enunciado, podemos aplicar el TEOREMA DEL VALOR MEDIO con el intervalo $[-2, 5]$ para obtener la existencia de un $c \in (-2, 5)$ con la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{e^{-200 \cdot 5} \cdot f(5) - e^{-200 \cdot (-2)} \cdot f(-2)}{5 - (-2)} = g'(c) \\ &\Leftrightarrow -200e^{-200c} \cdot f(c) + e^{-200c} \cdot f'(c) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-200c} \cdot (-200f(c) + f'(c)) = 0 \\ &\Leftrightarrow f'(c) = 200f(c) \end{aligned}$$

Pero aquello último es precisamente lo que se quería demostrar.

■

Problema 7

En este problema hay que ser *muy pero muy cuidadosos* ya que en ningún momento se nos ha dicho que la función $h(x)$ sea derivable. De la misma sólo se nos dijo que es continua, por ende no debemos ponernos creativos y tratar de derivar $h(x)$ o alguna otra función que implique derivar la anterior. No obstante, sabemos de la misma que es estrictamente creciente.

Antes de continuar debemos ver unos resultados auxiliares con respecto a funciones estrictamente crecientes. Probaremos una serie de *lemitas*⁷² que serán de gran utilidad para resolver el ejercicio con la generalidad que el mismo demanda:

1. LEMITA: Si $f(x)$ es estrictamente creciente y $k \in \mathbb{R}$, entonces $g(x) = f(x) + k$ es también estrictamente creciente.

Dem: Sea $x < y$, queremos ver que entonces $g(x) < g(y)$. Pero $f(x) < f(y) \Rightarrow f(x) + k < f(y) + k \Rightarrow g(x) < g(y)$, con lo que $g(x)$ resulta también estrictamente creciente.

2. LEMITA: Si $f(x)$ es estrictamente creciente y $h(x)$ es estrictamente creciente, entonces $f \circ h(x)$ es a su vez estrictamente creciente.

Dem: Sea $x < y \Rightarrow h(x) < h(y) \Rightarrow f(h(x)) < f(h(y)) \Rightarrow f \circ h(x) < f \circ h(y)$. Pero ésto último quiere decir que $f \circ h(x)$ es estrictamente creciente.

3. LEMITA: Si $f(x)$ y $g(x)$ son estrictamente crecientes entonces $(f + g)(x)$ también lo es.

Dem: Sea $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ y $g(x) < g(y) \Rightarrow f(x) + g(x) < f(y) + g(y) \Rightarrow (f + g)(x) < (f + g)(y)$. Pero entonces resulta $(f + g)(x)$ estrictamente creciente.

Bueno, ya estamos suficientemente armados como para atacar al problema sin miedo de sucumbir ante él.

Consideremos la función $f(x) = 2^{h(x)-5} + 3x - \sin(x)$. Nos concentraremos en probar el hecho de que $f(x)$ es estrictamente creciente. Para hacer ésto pensaremos a $f(x) = g(x) + r(x)$ siendo $g(x) = 2^{h(x)-5}$ y $r(x) = 3x - \sin(x)$ y probaremos por separado que ambas son estrictamente crecientes, con lo que en virtud del LEMITA 3 resultará $f(x)$ estrictamente creciente.

⁷² Los lemas son proposiciones que por sí mismas a lo mejor no tienen demasiado interés, pero que servirán como auxiliares para demostrar otros resultados más importantes.

PROBLEMA 7 PRÁCTICA 6 - TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Veamos que $g(x)$ es estrictamente creciente: Sabemos que $h(x)$ lo es, entonces por el LEMITA 1 resulta que $h(x) - 5$ también lo es. Como 2^x es estrictamente creciente, por una aplicación directa del LEMITA 2 se tiene que $g(x) = 2^x \circ (h(x) - 5)$ será también estrictamente creciente.

Veamos que $r(x)$ es estrictamente creciente: Para analizar ésta última utilizaremos métodos mas ortodoxos, ya que la misma es derivable. Como $r'(x) = 3 - \cos(x) > 0 \forall x$ entonces vale lo que afirmamos.

Así: Hemos probado que $f(x)$ es estrictamente creciente. Como $f(0) = 2^{h(0)-5} > 0$ entonces se concluye que $f(x) > 0$ para todo $x \geq 0$. Pero esto último es lo mismo que afirmar:

$$2^{h(x)-5} + 3x > \sin(x) \quad \forall x \geq 0$$

Y lo anterior implica trivialmente lo que se nos pedía probar.

■

Problema 8

(a)

Cuando se nos pide probar que una cierta función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *biyectiva* lo que debemos probar es que la misma es *inyectiva* y *sobreyectiva*.

Veamos que $f(x)$ es inyectiva: Es suficiente con probar que la misma es estrictamente monótona, ya que esto implicará automáticamente su inyectividad. Por ejemplo supongamos s.p.g que fuera estrictamente creciente, si $x \neq y$ entonces es claro que debe ser $x < y$ o $x > y$. En el primer caso deberá ser $f(x) < f(y)$ con lo que en particular $f(x) \neq f(y)$. En el segundo caso ocurre al revés $f(y) < f(x)$ pero es claro que también $f(x) \neq f(y)$. Por lo tanto del hecho de suponer $x \neq y$ podemos concluir que $f(x) \neq f(y)$, pero ésto último quiere decir que la función sea inyectiva — *como queríamos demostrar*.

Veamos entonces que la misma es estrictamente monótona:

$$f'(x) = 4e^{4x} + 5x^4 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Así: $f(x)$ resulta estrictamente creciente — *e inyectiva por ende*.

Veamos que $f(x)$ es sobreyectiva: Tenemos que probar que su imagen son todos los números reales. Pero es trivial comprobar que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \text{im}(f) = \mathbb{R}$$

Observen que hemos usado el TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS para concluir que la imagen de $f(x)$ debe ser todos los números reales a partir del hecho de que lateralmente tiende a $-\infty$ y $+\infty$.

Pero entonces: Hemos demostrado que $f(x)$ es *sobreyectiva*.

Así: Resulta $f(x)$ *biyectiva* y como $f(0) = 3$ es trivial que $f^{-1}(3) = 0$.

(b)

Para resolver esta parte del ejercicio hay que apelar al TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA. Como $f'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, podemos aplicar el mismo para concluir que $f^{-1}(y)$ debe ser derivable con:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Tengamos en cuenta también que $f^{-1}(x)$ es continua razón por la cual $f^{-1}(y) \rightarrow_{y \rightarrow 3} 0$. Podemos entonces aplicar la REGLA DE L'HOSPITAL para resolver el límite que nos piden:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 3} \frac{f^{-1}(y)}{2y - 6} &= \lim_{y \rightarrow 3} \frac{(f^{-1})'(y)}{2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 3} \frac{1}{f' \left(\underset{=0}{f^{-1}(y)} \right)} \\ &= \frac{1}{\underset{=4}{f'(0)}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Así: El límite pedido debe valer $\frac{1}{4}$.

Problema 9

Aquí conviene considerar la función:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^6 + x^4 + x^2 - 12x + 9 \\f'(x) &= 6x^5 + 4x^3 + 2x - 12 \\f''(x) &= 30x^4 + 12x^2 + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}_{\neq 0}\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $f'(x)$ tiene que ser estrictamente creciente. Pero entonces $f'(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Pero ésto último nos dice que $f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}_{\geq 1}$. Si tenemos en cuenta que $f(1) = 0$ entonces deberá ser:

$$\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 1}, f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^6 + x^4 + x^2 + 3 \geq 12x - 6$$

■

Problema 10

Como $f'(x) = 2x - e^{-\frac{1}{3}x}$ es continua y dado que $f'(0,4) < 0$ y $f'(0,5) > 0$ — como podrán comprobar por ustedes mismos —, entonces por el TEOREMA DE BOLZANO tiene que existir $c \in (0,4, 0,5) \subset [0,4, 0,5]$ tal que $f'(c) = 0$.

Tengamos en cuenta que $f''(x) = 2 + \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ razón por la cual resulta $f'(x)$ estrictamente creciente. Pero entonces el único cero de $f'(x)$ debe ser c y de ésta manera tiene que ser:

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 \forall x \in (-\infty, c) & \quad \text{y} & \quad f'(x) > 0 \forall x \in (0, +\infty) \\ \Rightarrow f(x) \searrow \text{ sobre } (-\infty, c) & \quad \text{y} & \quad f(x) \nearrow \text{ sobre } (0, +\infty) \end{aligned}$$

Pero entonces $x = c$ debe ser un *mínimo local*.

■