

Práctica 7 - Estudio de Funciones

Ejercicio 1

En la práctica anterior se han estudiado los importantes teoremas llamados globalmente TEOREMAS DEL VALOR MEDIO, que son los de ROLLE, LAGRANGE y CAUCHY. A partir de dichos teoremas se han extraído una seguidilla de conclusiones *fantásticas*. La que explotaremos a continuación para resolver el presente ejercicio es en concreto la siguiente:

“Sea $f(a, b) : \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces:

Si $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$: Entonces $f(x)$ es *estrictamente creciente* sobre el (a, b) .

Si $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$: Entonces $f(x)$ es *creciente* sobre el (a, b) .

Si $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b)$: Entonces $f(x)$ es *estrictamente decreciente* sobre el (a, b) .

Si $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$: Entonces $f(x)$ es *decreciente* sobre el (a, b) .”

Estudiemos pues en todos los casos el signo de la derivada para concluir acerca de la monotonía.

(a)

$$f'(x) = 7x^6 + 35x^4 + 4 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Como se puede apreciar sin ningún esfuerzo, al ser las potencias de x que aparecen *todas pares* es imposible que la cuenta nos de negativa. Por lo tanto $f(x)$ debe ser *estrictamente creciente*.

(b)

Con la presente función hay que tener cuidado pues hay un punto donde la misma no resulta derivable: $x = 0$. Lo que habrá que hacer es estudiar su monotonía en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$, por separado, a partir del signo de la derivada. Y *si tenemos suerte* es probable que se comporte igual en ambos intervalos con lo que se podrá inferir su monotonía en general.

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} < 0 \forall x \neq 0$$

Pero entonces efectivamente $f'(x) < 0$ en los intervalos indicados, con lo que se puede concluir que $f(x)$ resulta estrictamente decreciente en los mismos y por consiguiente en todo su dominio.

Idea muy interesante

Hay una idea *muy interesante* que puede ser explotada para resolver el presente ítem sin necesidad de apelar al signo de la derivada ni a ningún concepto sofisticado. Se trata de un muy sencillo teorema que pocos tienen en cuenta a la hora de resolver problemas:

“Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ inversible. Entonces tanto $f(x)$ como $f^{-1}(x)$ tienen el mismo comportamiento en lo que respecta al crecimiento.

Dem: Supongamos *s.p.g* que $f(x)$ es *estrictamente creciente*⁷³ y sea $x < y$. Queremos ver que entonces $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$. Como $f(f^{-1}(x)) = x < y = f(f^{-1}(y))$ entonces al ser $f(x)$ *estrictamente creciente* es necesario que se verifique $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$.

■”

Teniendo en cuenta esta interesante proposición, como $f(x)$ es la función inversa de $y = (2 - x)^3$, la cual es trivial comprobar que es estrictamente decreciente — *pues es un simple corrimiento de $y = -x^3$* —, entonces se tiene que $f(x)$ debe ser también estrictamente decreciente.

⁷³Es importante observar que una función inversible *debe* ser estrictamente monótona.

(c)

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} > 0 \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$$

Pero entonces concluimos que $f(x)$ debe ser estrictamente creciente.

(d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + x^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} \\ &= \frac{3(\sqrt[3]{x})^2 - 4\sqrt[3]{x} + 3}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

Pero el signo de $f'(x)$ depende *únicamente* del numerador de la expresión de más arriba ya que el denominador es siempre positivo. Estudiemos el signo del primero. Teniendo en cuenta que:

$$3(\sqrt[3]{x})^2 - 4\sqrt[3]{x} + 3 = 3y^2 - 4y + 3 \leftarrow y = \sqrt[3]{x}$$

Como $y = \sqrt[3]{x}$ tiene esencialmente el mismo signo que x podemos inferir que $f'(x) = f'(y^3)$ tendrá el mismo signo que $3y^2 - 4y + 3$. Pero la anterior cuadrática en y tiene discriminante⁷⁴ $b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = -8 < 0$, razón por la cual la misma no tiene raíces reales. Pero entonces su signo es constante y para averiguarlo podemos evaluarla en cualquier punto, por ejemplo en $y = 0$, donde la misma vale 3. Pero entonces $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$.

Luego: Debe ser $f(x)$ estrictamente creciente. ■

(e)

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 3 = -3 \cdot (x - 1)^2$$

Es evidente que $f'(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, razón por la cual $f(x)$ será monótona decreciente. ■

⁷⁴El discriminante de una cuadrática no es más que la expresión dentro de la raíz cuadrada en la conocida fórmula para sus raíces: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Es evidente que si el discriminante nos da negativo entonces la misma no tendrá ninguna raíz real.

Ejercicio 2

Al final del ejercicio en la página 486 cuentan con una detallada explicación del método básico a seguir — *utilizando las herramientas colectadas hasta ahora* — para determinar los intervalos de crecimiento de una función $f(x)$. Como dicho método se utilizará para resolver el presente, sería recomendable a aquel alumno que no lo conozca aún la consulta de dicha sección.

(a)

Tengamos en cuenta que $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Como:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

y teniendo en cuenta $f(x)$ es derivable con continuidad en *todo su dominio*⁷⁵ el conjunto de puntos críticos queda:

$$C_f = \{-1, 1\}$$

Ahora confeccionamos la tabla teniendo en cuenta los dos intervalos del dominio, lo que en la misma se reflejará agregando el punto adicional $x = 0$. Se tiene que:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
f'	$f'(-\epsilon) - 1$ +	$f'(-\epsilon^{-1}) - 1$ -	$f'(\epsilon^{-1}) - 1$ -	$f'(\epsilon) - 1$ +
f	\nearrow	\searrow	\searrow	\nearrow

(b)

En este caso $f(x)$ es derivable con continuidad en su dominio, el cual son todos los números reales.

$$f'(x) = 2(x-1)e^{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow C_f = \{1\}$$

Confeccionemos ahora la tabla para determinar los intervalos de crecimiento.

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
f'	$f'(0) - 1$ -	$f'(2) - 1$ +
f	\searrow	\nearrow

⁷⁵No debe olvidar el alumno que cuando uno hace este tipo de afirmaciones siempre se refiere al dominio de la función. Suena chocante decir que $f(x)$ sea continua en *todos lados* pues se aprecia a simple vista que en $x = 0$ la función no está definida, pero lo cierto es que donde lo está la función se comporta *muy bien*.

(c)

Aquí el dominio de $f(x)$ son todos los reales y la misma es derivable con continuidad en su dominio.

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow C_f = \{-1\}$$

Confeccionemos ahora la tabla para determinar los intervalos de crecimiento.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
f'	$f'(-2) = -e^{-2} \quad -$	$f'(0) = 1 \quad +$
f	↘	↗

(d)

Aquí el dominio de $f(x)$ son todos los reales y la misma es derivable con continuidad en su dominio.

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2e^{-x} = e^{-x}x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0$$

$$\Rightarrow C_f = \{-2, 0\}$$

Confeccionemos ahora la tabla para determinar los intervalos de crecimiento.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
f'	$f'(-3) = 3e^{-3} \quad +$	$f'(-1) = -e^{-1} \quad -$	$f'(1) = 3e^{-1} \quad +$
f	↗	↘	↗

(e)

El dominio de $f(x)$ se nos impone restringirlo al intervalo $(-\pi, 6\pi)$ razón por la cual los puntos críticos los buscaremos dentro del mismo y no consideraremos ningún otro del dominio de definición de la misma.

$$f'(x) = \cos(x) \Rightarrow C_f = \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi \right\}$$

Como ven nos quedan unos cuantos intervalos, sin embargo dada la periodicidad de la función $\sin(x)$ será suficiente con conocer su comportamiento en los primeros hasta haber cubierto el $(-\pi, \pi)$. En los restantes se repetirá todo, lo cual nos evitará la necesidad de evaluar la derivada en un punto interior a los mismos. La tabla completa queda:

	$(-\pi, -\frac{\pi}{2})$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$	$(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$	$(\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2})$	$(\frac{9\pi}{2}, 6\pi)$
f'	$<$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
f	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$

(f)

Tengamos presente que $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$.

$$f'(x) = \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Rightarrow C_f = \{e^{-1}\}$$

Confeccionemos ahora la tabla para determinar los intervalos de crecimiento.

	$(0, e^{-1})$	$(e^{-1}, +\infty)$
f'	$r'(e^{-2}) - 1 = -1$	$r'(1) - 1 = +$
f	\searrow	\nearrow

(g)

En este caso el dominio de la función está determinado por aquellos números reales para los cuales el denominador de la función sea distinto de cero. Por lo tanto $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{\neq -\frac{3}{2}}$. En su dominio la misma es derivable con continuidad.

$$f'(x) = \frac{-(2x+3) - 2(1-x)}{(2x+3)^2} = \frac{-5}{(2x+3)^2} < 0 \forall x \in \mathbb{R}_{\neq -\frac{3}{2}}$$

Confeccionemos ahora la tabla para determinar los intervalos de crecimiento.

	$(-\infty, -\frac{3}{2})$	$(-\frac{3}{2}, +\infty)$
f'	$-$	$-$
f	\searrow	\searrow

Advertencia: No vayan a creer que por el hecho de ser ambos intervalos de decrecimiento la función resulta *globalmente* decreciente. Sería un error muy grave tener aquella creencia ya que por ejemplo en este ejemplo si hacen la cuenta verán que $-2 < -1$ y sin embargo $f(-2) = -3 < f(-1) = 2$ lo cual contradice el hecho de que sea la misma *globalmente* decreciente. Lo que ocurre es que en $x = -\frac{3}{2}$ la función presenta una asíntota vertical donde a la izquierda de dicha asíntota la función tiende a $-\infty$ mientras que a la derecha a $+\infty$. Si visualizan la situación podrán apreciar que el salto producido por

la función en dicho punto es la causa por la que ocurre dicho fenómeno, ya que de esta manera puede ser $f(x)$ decreciente en cada uno de los intervalos sin serlo en forma global.

(h)

Ahora el dominio de la función son todos los reales ya que el denominador jamás puede anularse. Su derivada existe en todo punto y es continua.

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow C_f = \{-1, 1\}$$

$> 0 \forall x$

Confeccionemos ahora la tabla para determinar los intervalos de crecimiento.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
f'	$f'(-2) = -\frac{3}{25}$	$-$	$f'(2) = -\frac{3}{25}$
f	↘	↗	↘

(i)

Debemos excluir del dominio de $f(x)$ al -1 y al 1 pues en ellos se anula el denominador. Sin embargo en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ la función resulta derivable con continuidad.

$$f'(x) = \frac{(x^2-1) - 2x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{(1+x^2)}{(x^2-1)^2} < 0 \forall x \in \text{Dom}(f)$$

Confeccionemos ahora la tabla para determinar los intervalos de crecimiento.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
f'	↘	-	-
f	↘	↘	↘

Advertencia: Un comentario similar al del punto (g) se aplica a continuación. No vayan a creer que la función $f(x)$ es globalmente decreciente por el hecho de serlo en cada uno de los intervalos de más arriba. Los saltos producidos en las asíntotas producen este tipo de fenómenos que permiten a una función ser decreciente en cada subintervalo de definición de su dominio sin serlo *globalmente*.

(j)

Aquí el dominio de nuestra función es el intervalo $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = \ln^2(x) + 2 \cancel{x} \frac{\ln(x)}{\cancel{x}} = \ln(x) \cdot (\ln(x) + 2)$$

Observen como para identificar bien los ceros de $f'(x)$ conviene tenerla escrita factorizada como producto de expresiones sencillas, pues sabemos que si una función está escrita de esta forma, entonces sus ceros estarán en los ceros de cada factor por separado. En este tipo de cálculos desarrollar las expresiones al máximo es *nefasto* ya que uno pierde por completo la visión de las raíces. Por eso, se recomienda fuertemente al alumno que contenga sus impulsos naturales de desarrollar los paréntesis para dejar que las expresiones tengan la forma descrita más arriba.

De esta manera podemos observar fácilmente que:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^{-2} \Leftrightarrow C_f = \{e^{-2}, 1\}$$

Confeccionemos ahora la tabla para determinar los intervalos de crecimiento.

	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, 1)$	$(1, +\infty)$
f'	$f'(e^{-3}) - 3$ +	$f'(e^{-1}) - 1$ -	$f'(e) - 3$ +
f	↗	↘	↗

Método para determinar los Intervalos de Crecimiento

Dos magníficas herramientas unen sus fuerzas para ayudarnos a resolver este ejercicio. Por un lado sabemos que si $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$ entonces $f(x)$ debe ser estrictamente creciente sobre el mismo; mientras que si es negativa estrictamente decreciente. Sin embargo, determinar si $f'(x)$ es positiva o negativa a los seres humanos nos es posible físicamente para una cantidad finita de puntos. Nadie irá a esperar que para determinar la positividad de $f'(x)$ sobre el (a, b) evaluemos los infinitos puntos y cuando terminemos concluyamos que $f(x)$ era efectivamente creciente. Tampoco sería correcto evaluar una cantidad finita de puntos y concluir que $f'(x)$ debe mantener su signo pues *ya nos hemos convencido* de que ésto es así luego de evaluar tantos puntos.

Es decir lo primero es imposible a nivel físico mientras que lo segundo es incorrecto. ¿En qué condiciones se les ocurre podríamos evaluar un único punto de $f'(x)$ y a partir de su signo concluir sobre el crecimiento de $f(x)$ sobre *todo* el intervalo? La respuesta es evidente: si $f'(x)$ fuera *continua* en el (a, b) y supiéramos que $f'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ entonces por el TEOREMA DE BOLZANO la misma debería mantener su signo constante en dicho intervalo. Éste último teorema en conjunción con la primera idea van a ser el *dúo dinámico* de este ejercicio.

Teniendo en cuenta que para tener éxito en la aplicación del criterio antes descrito necesitamos *partir* el dominio de $f(x)$ en subintervalos consecutivos que verifique que en cada uno de ellos $f(x)$ es derivable y su derivada mantiene su signo, los pasos a seguir serían los siguientes:

1. Estudiar el dominio de $f(x)$ y escribirlo como una unión de intervalos. Realizar los pasos siguientes a cada uno de estos intervalos.
2. Digamos que (a, b) es uno de los intervalos del paso anterior. No tenemos aún garantía de que $f'(x)$ mantenga su signo en este intervalo — ni siquiera de que exista en todos sus puntos. Por eso debemos determinar el conjunto de PUNTOS CRÍTICOS de $f(x)$ en dicho intervalo:

$$C_f = \{x \in (a, b) : f'(x) = 0 \vee \nexists f'(x) \vee f'(x) \text{ no es continua.}\}$$

De esta forma, si fuera: $C_f = \{a = a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n = b\}$. Entonces tendremos garantía de que en cada $(a_i, a_{i+1})_{1 \leq i < n}$ será el signo de $f'(x)$ constante y por lo tanto $f(x)$ monótona en cada subintervalo.

3. Elegir un punto arbitrario $x_i \in (a_i, a_{i+1})_{1 \leq i < n}$ y computar el valor de $f'(x_i)$. Si el mismo fuera positivo se tendrá que $f(x)$ es creciente en (a_i, a_{i+1}) mientras que si el mismo fuera negativo la misma será decreciente. Para hacer este paso de una manera ordenada es recomendable la confección de una tabla como esta:

	(a_1, a_2)	(a_2, a_3)	\dots	(a_{n-1}, a_n)
f'	+	-	\dots	+
f	\nearrow	\searrow	\dots	\nearrow

■

Ejercicio 3

(a)

Es claro que tenemos que establecer que la función $k(t)$ es estrictamente creciente. Pero:

$$k'(t) = \frac{24e^t(3e^t + 1) - 72e^t \cdot e^t}{(3e^t + 1)^2} = \frac{24e^t(3e^t + 1 - 3e^t)}{(3e^t + 1)^2} = \frac{24e^t}{(3e^t + 1)^2} > 0 \forall t$$

Pero entonces efectivamente $k(t)$ resulta estrictamente creciente y por lo tanto cuanto más persista Aníbal más va a adelgazar.

(b)

Sabiendo que $k(t)$ es estrictamente creciente para estudiar cual es el máximo que puede llegar a adelgazar Aníbal debemos calcular el límite para $t \rightarrow +\infty$ de $k(t)$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{24e^t}{e^t(3 + \frac{1}{e^t})} - 6 = \frac{24}{3} - 6 = 8 - 6 = 2$$

De esta manera podemos determinar que no importa cuanto persista en la dieta el mismo jamás podrá adelgazar más que $2Kg$. ■

Ejercicio 4

Sabemos que para que una función $f(x)$ derivable en un entorno de $x = 0$ pueda tener un extremo local es condición *necesaria* que $f'(0) = 0$. Por desgracia dicha condición no es *suficiente*⁷⁶, razón por la cual si llegara a ocurrir que efectivamente $f'(0) = 0$ habrá que hacer un estudio de crecimiento en torno a dicho punto para poder determinar si el mismo es o no es un extremo local.

Advertencia: Aquellos que aún no tengan en claro el procedimiento para hacer un estudio de los intervalos de crecimiento de una función pueden consultar una explicación del mismo en la resolución al EJERCICIO 2 de esta práctica en la página 486.

(a)

$$f'(x) = 3 \sin^2(x) \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k'\pi : k, k' \in \mathbb{Z}$$

Pero entonces si consideramos el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ conteniendo a $x = 0$ tenemos *certeza* de que el único punto crítico de $f(x)$ en dicho intervalo es $x = 0$. Podemos hacer una tabla ahora para estudiar el crecimiento de la misma en dicho intervalo.

	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	$x = 0$	$(0, \frac{\pi}{2})$
f'	$f'(-\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 0$	+	$f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 0$
f	\nearrow	No es un extremo local.	\nearrow

La tabla nos muestra en forma contundente que $f(x)$ tiene que ser estrictamente creciente en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, razón por la cual debemos concluir que $x = 0$ no es un extremo local de la función.

(b)

$$f'(x) = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x) = x \cdot (2 \sin(x) + x \cos(x))$$

⁷⁶ Como en el caso de $f(x) = x^3$ donde $f'(0) = 0$ pero $x = 0$ no es en lo absoluto un extremo local.

Claramente $f'(0) = 0$. Si suponemos $x \neq 0$ entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \sin(x) + x \cos(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \sin(x) = -x \cos(x) \\ &\Leftrightarrow 2 \tan(x) = -x \\ &\Leftrightarrow 2 \tan(x) + x = 0 \end{aligned}$$

Es conveniente observar en este punto que $\tan(x) > 0 \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ y por lo tanto si x está en dicho intervalo será $2 \tan(x) + x > 0$. En contrapartida como $\tan(x) < 0 \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ entonces si x está en dicho intervalo será $2 \tan(x) + x < 0$.

Pero esto nos muestra que el único cero de $f'(x)$ en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ debe ser $x = 0$. Teniendo en cuenta que $f'(x)$ es continua, podemos hacer una tabla para estudiar el crecimiento de $f(x)$ en el mencionado intervalo. Como $f'(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4}(-\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) > 0$ y $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) > 0$, entonces nos queda:

	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	$x = 0$	$(0, \frac{\pi}{2})$
f'	$f'(-\frac{\pi}{4}) > 0$	+	$f'(\frac{\pi}{4}) > 0$
f	\nearrow	No es un extremo local.	\nearrow

Como podrán apreciar resulta imposible que $f(x)$ tenga un extremo local en $x = 0$.

(c)

$$f'(x) = -2 \cos(x) \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k'\pi : k, k' \in \mathbb{Z}$$

Pero lo anterior implica trivialmente que en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ el único cero de la derivada es $x = 0$. Podemos ahora hacer una tabla para estudiar el crecimiento de $f(x)$ en dicho intervalo y decidir sobre la posibilidad de que $x = 0$ sea o no un extremo local.

	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	$x = 0$	$(0, \frac{\pi}{2})$
f'	$f'(-\frac{\pi}{4}) = 1$	+	$f'(\frac{\pi}{4}) = -1$
f	\nearrow	MÁXIMO LOCAL	\searrow

(d)

$$f'(x) = 8x^7 \rightarrow \begin{cases} < 0 & , \text{ si } x < 0 \\ > 0 & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Pero entonces es claro que $f(x)$ decrece hasta el cero y luego es creciente, razón por la cual $x = 0$ debe ser un MÍNIMO LOCAL. ■

Ejercicio 5

Indicaciones y advertencias: El procedimiento de este ejercicio no es muy diferente de aquel utilizado en el EJERCICIO 2. Primero se hace un estudio de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, para lo cual se puede proceder como en el mencionado ejercicio, pudiendo consultar si lo desean el método para ello al final de la resolución del mismo en la página 486. Los candidatos a ser extremos locales serán sin duda los extremos de los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Sin embargo, hay que tener especial cuidado antes de arriesgar una conclusión pues por ejemplo en la siguiente situación:

	(a, b)	$x = b$	(b, c)
f'	+		-
f	\nearrow	¿?	\searrow

Es muy común concluir sin pensarlo que en $x = b$ $f(x)$ tiene un MÁXIMO LOCA, pues el razonamiento *obvio* que se suele hacer es que si la función *crece* hasta $x = b$ para luego *decrecer* desde b hasta c , debe tener en b un máximo local.

Es Correcto: Si b fuera un punto de continuidad de $f(x)$ han hecho una correcta conclusión.

¡Cuidado!:

- La función puede no estar siquiera definida en $x = b$. Por ejemplo en el caso de que en dicho punto hubiera una asíntota vertical. Un ejemplo común lo hallan en $f(x) = \frac{1}{x}$ que es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$ aunque ni siquiera tiene sentido en $x = 0$ y con menos razón tendrá en dicho punto un máximo local.
- La función puede estar definida en $x = b$ sin ser continua en dicho punto. La libertad para ubicar el valor de $f(b)$ sin estar *atados a la continuidad* puede hacer que la misma no presente en lo absoluto un máximo local, razón por la cual antes de arribar a una conclusión habrá que hacer algún tipo de análisis, el cual dependerá del caso particular en estudio.

(a)

Teniendo en cuenta que $f'(x) = 4x^3$ y la misma resulta negativa en los $x < 0$ y positiva en los $x > 0$ se concluye en forma inmediata que $f(x)$ debe

ser creciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. Como la función en cuestión es continua en $x = 0$ debe tener en dicho punto un MÍNIMO LOCAL — que será también absoluto por cierto.

(b)

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$$

De lo anterior concluimos que $C_f = \{-1, 0, 1\}$ ⁷⁷. Podemos ahora confeccionar una tabla para estudiar los intervalos de crecimiento:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
f'	$f'(-2) = -24$ -	$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ +	$f'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ -	$f'(2) = 24$ +
f	↘	↗	↘	↗

Como $\{-1, 0, 1\}$ son puntos de continuidad de $f(x)$ sencillamente por ser $f(x)$ continua en todos los números reales, podemos concluir que la misma presenta:

- Un Mínimo Local en $x = -1$ y $x = 1$.
- Un Máximo Local en $x = 0$.

(c)

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Podemos concluir entonces que $C_f = \{1\}$ y teniendo en cuenta que la misma tiene dominio \mathbb{R} hacer la tabla correspondiente:

	$(-\infty, 1)$	$x = 1$	$(1, +\infty)$
f'	$f'(0) = 1$ +		$f'(2) = -e^{-2}$ -
f	↗	MÁXIMO LOCAL	↘

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $x = 1$ es un punto donde $f(x)$ es continua, se concluye que la misma tiene un único EXTREMO LOCAL en $x = 1$ el cual es un máximo.

⁷⁷ Observen la importancia de escribir la expresión de $f'(x)$ en forma lo más factorizada posible para poder detectar sin complicaciones sus ceros. La mayoría de los principiantes hacen justamente lo contrario, generándose incontables complicaciones a la hora de calcular los PUNTOS CRÍTICOS.

(d)

Tengamos en cuenta que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}} - 2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Observen que $f(x)$ no es derivable en $x = 0$, razón por la cual dicho punto — que $\in \text{Dom}(f)$ — habrá que contarlos en $C_f = \{0, 1\}$.

	$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, 1)$	$x = 1$	$(1, +\infty)$
f'	$f'(-1) = -4$ -		$f'(\frac{1}{8}) = -2$ +		$f'(8) = -1$ -
f		Mín. Loc.		Máx. Loc.	

Así: $f(x)$ tiene un MÍNIMO LOCAL en $x = 0$ y un MÁXIMO LOCAL en $x = 1$.

(e)

En este caso $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>0}$ debido a la presencia del $\ln(x)$.

$$f'(x) = \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_f = \{e^{-1}\}$$

Hacemos ahora la tabla como de costumbre:

	$(0, e^{-1})$	$x = e^{-1}$	$(e^{-1}, +\infty)$
f'	$f'(e^{-2}) = -1$ -		$f'(e) = 2$ +
f		MÍN. LOC.	

Así: $f(x)$ tiene un MÍNIMO LOCAL en $x = e^{-1}$.

(f)

En este caso $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>0}$ debido a la presencia del $\ln(x)$.

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x = x(2\ln(x) + 1) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad C_f = \left\{e^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

Observen que *ni se nos debe ocurrir* considerar $x = 0$ como raíz de $f'(x)$ ya que en dicho punto la función no tiene sentido. Hacemos ahora la tabla como de costumbre:

	$(0, e^{-\frac{1}{2}})$	$x = e^{-\frac{1}{2}}$	$(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$
f'	$f'(e^{-1}) = -1$	-	$f'(e) = 3$
f	\searrow	Mín. Loc.	\nearrow

Así: $f(x)$ tiene un MÍNIMO LOCAL en $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

(g)

Aquí $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$\Rightarrow C_f = \{0, 2\}$$

Podemos con esta información confeccionar la tabla:

	$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, 2)$	$x = 2$	$(2, +\infty)$
f'	$f'(-1) = -3e^2$	-	$f'(1) = e^{-1}$	+	$f'(3) = -3e^{-3}$
f	\searrow	Mín. Loc.	\nearrow	Máx. Loc.	\searrow

Así: $f(x)$ tiene un MÍNIMO LOCAL en $x = 0$ y un MÁXIMO LOCAL en $x = 2$.

(h)

Como el denominador de $f(x)$ jamás se anula entonces $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

$$\Rightarrow C_f = \{-1, 1\}$$

Con estos datos podemos hacer ahora la tabla:

	$(-\infty, -1)$	$x = -1$	$(-1, 1)$	$x = 1$	$(1, +\infty)$
f'	$f'(-2) = \frac{3}{20}$	+	$f'(0) = -1$	-	$f'(2) = \frac{3}{20}$
f	\nearrow	Máx. Loc.	\searrow	Mín. Loc.	\nearrow

Así: $f(x)$ tiene un MÁXIMO LOCAL en $x = -1$ y un MÍNIMO LOCAL en $x = 1$.

(i)

Es análogo a (e) pues debe haber un error de impresión. Consulten el mismo en la página 494.

(j)

Aquí ocurre que ni -1 ni 1 están en el dominio de $f(x)$, el cual es $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1) - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} < 0 \forall x \in \text{Dom}(f)$$

Así: Al no tener puntos críticos $f(x)$ no puede tener extremos locales.

(k)

$$f'(x) = \frac{-20 \sin(x) \cos(x)}{(1 + \sin^2(x))^2} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi \right\}$$

$$\Rightarrow C_f = \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi \right\}$$

Observación: Recuerden que los puntos críticos deben mirarse en el *interior* del dominio de la función, razón por la cual si bien la fórmula de $f'(0)$ también se anula en $x = 0$ y $x = \pi$, dichos puntos no nos interesan. Claro que esto último no quiere decir que $f(x)$ no pueda tener un EXTREMO LOCAL en un borde si su dominio es un intervalo cerrado $[a, b]$.

Hagamos ahora la tabla acostumbrada:

	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
f'	-	+	-	+
f	\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow

Luego: De la información de la tabla podemos concluir que:

$x = 0$: Es un MÁXIMO LOCAL de $f(x)$.

$x = \frac{\pi}{2}$: Es un MÍNIMO LOCAL de $f(x)$.

$x = \pi$: Es un MÁXIMO LOCAL de $f(x)$.

$x = \frac{3}{2}\pi$: Es un MÍNIMO LOCAL de $f(x)$.

$x = 2\pi$: Es un MÁXIMO LOCAL de $f(x)$.

(1)

Aquí $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-5, 5\}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2 - 25) - 2x(x^2 + 100)}{(x^2 - 25)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 50x - 2x^3 - 200x}{(x^2 - 25)^2} \\ &= \frac{-250x}{(x^2 - 25)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ &\Rightarrow C_f = \{0\} \end{aligned}$$

Con estos datos podemos hacer ahora la tabla:

	$(-\infty, -5)$	$x = -5$	$(-5, 0)$	$x = 0$	$(0, 5)$	$x = 5$	$(5, +\infty)$
f'	+		+		-		-
f	\nearrow	$\notin \text{Dom}(f)$	\nearrow	Mín. Loc.	\searrow	$\notin \text{Dom}(f)$	\searrow

Así: $f(x)$ tiene un MÁXIMO LOCAL en $x = 0$.

(m)

Aquí $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{\leq 4}$ ya que sino la expresión dentro de la raíz cuadrada se haría negativa.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{4-x} - \frac{x}{2\sqrt{4-x}} = \frac{2(4-x) - x}{2\sqrt{4-x}} = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} \\ \Rightarrow f'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \\ &\Rightarrow C_f = \left\{ \frac{8}{3} \right\} \end{aligned}$$

Procedemos ahora a realizar la tabla:

	$(-\infty, \frac{8}{3})$	$x = \frac{8}{3}$	$(\frac{8}{3}, 4)$	$x = 4$
f'	$f'(0) = 2$	+	$f'(3) = -\frac{1}{2}$	-
f	\nearrow	MÁX. LOC.	\searrow	Mín. LOC.

Observación: No debemos olvidar que $x = 4 \in \text{Dom}(f)$ a la hora de catalogar los EXTREMOS LOCALES.

Luego:

$x = \frac{8}{3}$: Es un MÁXIMO LOCAL de $f(x)$.

$x = 4$: Es un MÍNIMO LOCAL de $f(x)$.

(n)

Recordemos — como tantas veces se ha hecho — la definición de $g(x)^{h(x)} = e^{h(x) \cdot \ln(g(x))}$. Teniendo en cuenta ésto último nos queda:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= e^{x \cdot \ln^2(x)} \leftarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>0} \\ f'(x) &= e^{x \cdot \ln^2(x)} \cdot \left(\ln^2(x) + 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= e^{x \cdot \ln^2(x)} \cdot \ln(x) \cdot (\ln(x) + 2) \\ \Rightarrow f'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = e^{-2} \vee x = 1 \\ &\Rightarrow C_f = \{e^{-2}, 1\} \end{aligned}$$

Podemos ahora hacer la tabla según la información recolectada:

	$(0, e^{-2})$	$x = e^{-2}$	$(e^{-2}, 1)$	$x = 1$	$(1, +\infty)$
f'	$f'(e^{-2}) > 0$	+	$f'(e^{-1}) < 0$	-	$f'(e^2) > 0$
f	\nearrow	Máx. Loc.	\searrow	Mín. Loc.	\nearrow

Luego:

$x = e^{-2}$: Es un MÁXIMO LOCAL de $f(x)$.

$x = 1$: Es un MÍNIMO LOCAL de $f(x)$.

(o)

Aquí $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(2-x)^2 - 2x^2 = 2x((2-x)^2 - 2x) \\ &= 2x(4 - 2x + x^2 - 2x) = 2x(x^2 - 4x + 4) \\ &= 2x(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \\ &\Rightarrow C_f = \{0, 2\} \end{aligned}$$

Podemos ahora hacer la tabla según la información recolectada:

	$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, 2)$	$x = 2$	$(2, +\infty)$	
f'	$f'(-1) = -2$	-	$f'(1) = 2$	+	$f'(3) = 6$	+
f	\searrow	Mín. Loc.	\nearrow	No es EXT. LOC.	\nearrow	

Luego: El único EXTREMO LOCAL que tiene $f(x)$ es $x = 0$ el cual es un mínimo.

(p)

Aquí $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Sin embargo $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}_{\neq 0}$ como se podrá apreciar a continuación.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(1-x) - x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2 - 5x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2 - 5x) \\ &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow C_f = \left\{ \frac{2}{5} \right\} \end{aligned}$$

Podemos ahora hacer la tabla según la información obtenida:

	$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, \frac{2}{5})$	$x = \frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}, +\infty)$	
f'	$f'(-1) = -\frac{5}{3}$	-	$f'(\frac{1}{5}) > 0$	+	$f'(1) = -1$	-
f	\searrow	$\notin \text{Dom}(f)$	\nearrow	MÁX. LOC.	\searrow	

Luego: El único EXTREMO LOCAL que tiene $f(x)$ es $x = \frac{2}{5}$ el cual es un máximo.

(q)

Al tratarse de una función definida en forma partida, su derivada habrá que calcularla en cada intervalo del dominio separadamente utilizando la fórmula que le corresponde a cada.

Tengamos en cuenta que:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 6 \quad \text{mientras que} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

razón por la cual no puede resultar $f(x)$ continua en $x = 2$ —ni mucho menos derivable—. Como $x = 2 \in \text{Dom}(f)$ y en dicho punto la misma no es derivable, tendremos que incluir al mismo en el conjunto de PUNTOS CRÍTICOS.

Si $x \neq 2$ $f(x)$ es derivable obteniéndose:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 2 & , \text{ si } x < 2 \\ 1 & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

Es claro que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, razón por la cual $C_f = \{\frac{1}{2}, 2\}$.

Procedemos ahora a hacer la tabla acostumbrada:

	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$x = \frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 2)$	$x = 2$	$(2, +\infty)$
f'	$f'(\frac{0}{2}) = -2$	-	$f'(\frac{1}{2}) = -2$	+	$f'(3) = 1$
f	\searrow	MÍN. LOC.	\nearrow	No es EXT. LOC.	\nearrow

Así: El punto $x = \frac{1}{2}$ es el único EXTREMO LOCAL de $f(x)$, el cual es un mínimo.

(r)

Nuevamente se trata de una función definida en forma partida, pero en este caso la misma resulta continua en $x = 1$ como fácilmente se puede constatar, siendo el valor $f(1) = 1$.

Observación: A la hora de calcular los PUNTOS CRÍTICOS en una función cuya definición es partida en $x_0 \in \text{Dom}(f)$ — que es continua en x_0 —, aparece la necesidad de estudiar la existencia de $f'(x_0)$ y la continuidad de $f'(x)$ en tal punto — en caso de que exista. Todo este arduo trabajo únicamente para decidir si $x_0 \in C_f$ o no, lo cual tendrá sólo la repercusión en nuestra tabla de si lo agregamos o no. La pregunta es obvia: *¿Por qué no agregarlo y listo?*; la respuesta es más que obvia: *¡Obvio!*. No vale la pena tomarse todas estas molestias para decidir si agregar o no un punto a una tabla la cual nos dará igualmente la información que necesitamos si lo agregamos de todas formas. Por eso la recomendación en estos casos es que no pierdan tiempo y agreguen x_0 a la tabla. Como dice el refrán: *“Lo que abunda no daña.”*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ si } x < 1 \\ 2(x - 2) & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Como $f'|_{\mathbb{R} \setminus \{1\}}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$ podemos concluir que $C_f \subseteq \{0, 1, 2\}$. Observen que si adoptamos el criterio de la observación deberemos ser coherentes con nuestra *despreocupación* por lo que ocurre en $x = 2$ razón

por la cual utilizamos el " \subseteq " en lugar del " $=$ " — aunque el lector que desee comprobarlo puede ver que en este caso particular sí vale el igual.

Con estos datos podemos hacer ahora la tabla:

	$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, 1)$	$x = 1$	$(1, 2)$	$x = 2$	$(2, +\infty)$
f'	-		+		-		+
f	\searrow	MÍN. LOC.	\nearrow	MÁX. LOC.	\searrow	MÍN. LOC.	\nearrow

Así: $f(x)$ tiene un MÍNIMO LOCAL en $x = 0$ y $x = 2$ y un MÁXIMO LOCAL en $x = 1$.

■

Ejercicio 6

Comencemos por aclarar que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Como sabemos que un punto interior x_0 ⁷⁸ del dominio de una función derivable que sea un EXTREMO LOCAL de la misma debe verificar $f'(x) = 0$, entonces los *candidatos* para k serán aquellos que hagan $f'(2) = 0$ — *observen que esta cuenta depende fuertemente del valor de k .*

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - 2x(x + k)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2kx + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Pero entonces:

$$f'(2) = -\frac{(4k + 3)}{25} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}$$

Para éste último valor nos queda:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + \frac{3}{2}x + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}}{2} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -\frac{1}{4} \\ r_2 = 2 \leftarrow \text{Es un punto crítico.} \end{cases}$$

Como ven, efectivamente nos queda que $x = 2 \in C_f$. Nos resta determinar si hay un extremo en dicho punto para lo cual estudiaremos la tabla acostumbrada.

	$(-\infty, -\frac{1}{4})$	$x = -\frac{1}{4}$	$(-\frac{1}{4}, 2)$	$x = 2$	$(2, +\infty)$
f'	-		+		-
f	\searrow	MIN. LOC.	\nearrow	MÁXIMO LOCAL	\searrow

Luego: El valor de k para que la función tenga un EXTREMO LOCAL en $x = 2$ es $k = -\frac{3}{4}$, pudiéndose determinar que en dicho extremo habrá un MÁXIMO LOCAL.

⁷⁸Recordemos que x_0 es un punto interior de $A \subseteq \mathbb{R}$ si y sólo si $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$. Es decir existe un intervalo abierto contenido en A que contiene al punto x_0 .

Nos resta ahora analizar si $x = 2$ es un máximo absoluto o no, lo cual podemos hacer utilizando la información de la tabla para *figurarnos* en que región podría llegar a haber elementos del dominio cuyas imágenes fueran más grandes que $f(2)$. Por ejemplo como la función es decreciente en $(-\infty, -\frac{1}{4})$ es de esperar que en dicho intervalo los valores más grandes de la misma se encuentren haciendo tender $x \rightarrow -\infty$. Por otra parte dado que en $(-\frac{1}{4}, 2)$ la función es creciente y en $(2, +\infty)$ la misma es decreciente no vamos a esperar que en dichos intervalos haya valores de la misma más grandes que $f(2)$. Si se piensa al gráfico de la función como una región montañosa con cumbres y valles podríamos decir que en $x = -\frac{1}{4}$ hay un valle mientras que en $x = 2$ hay una cumbre.

Por las razones anteriormente expuestas nos convencemos de que si hay posibilidad para $f(x)$ de tomar valores estrictamente más grandes que $f(2)$, entonces debe hacerlo en dirección hacia el $-\infty$. Estudiemos entonces el límite correspondiente que nos dará la idea de cual es el mayor valor — *asintóticamente hablando* — que podría llegar a tomar la misma en dicha dirección. Si el mismo supera a $f(2)$ tendremos que descartar al mismo como máximo absoluto; mientras que si es menor o igual que $f(2)$ éste último será absoluto.

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overset{=0}{x} \left(1 + \frac{k}{x} \right)}{\underset{-\infty}{x} \cdot \left(x + \frac{1}{x} \right)} = 0$$

Bueno pero $L = 0 = f(2)$ razón por la cual habremos de decidir que $x = 2$ efectivamente es un máximo absoluto.

Así: En $x = 2$ la función $f(x)$ presenta un MÁXIMO ABSOLUTO. ■

Ejercicio 7

Con la información del enunciado se puede construir la siguiente tabla que a partir de la información del signo de la derivada en los intervalos descriptos puede inferir — *vía el correspondiente teorema acerca del crecimiento según el signo de la derivada que pueden consultar en la página 486*— como serán los intervalos de crecimiento y de decrecimiento para la misma.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$(0, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, +\infty)$
f'	+	-	-	+	-
f	↗	↘	↘	↗	↘

Como puede observarse en la tabla anterior, nos queda:

En $x = -1$: Se tiene un MÁXIMO LOCAL.

En $x = -\frac{1}{2}$: No puede haber un EXTREMO LOCAL ya que en el $(-1, 0)$ la misma es decreciente.

En $x = 0$: Se tiene un MÍNIMO LOCAL.

En $x = \frac{3}{2}$: Se tiene un MÁXIMO LOCAL. ■

Ejercicio 8

Al final de la resolución del ejercicio podrán encontrar una serie de indicaciones sobre cómo obtener las ecuaciones para los distintos tipos de asíntotas así como también las advertencias para evitar los errores más comunes en el cálculo de las mismas.

(a)

Asíntotas Horizontales

Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x+3+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+3+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})} = +\infty$$

Luego: La función $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales

El único punto donde puede llegar a haber una asíntota vertical es claramente $x = 1$. Podemos estudiar los límites laterales en dicho punto para poder dilucidar lo que ocurren en el mismo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 1} = +\infty$$

Por lo tanto debemos concluir que hay una asíntota vertical en $x = 1$ donde la función tiende a $-\infty$ por izquierda y a $+\infty$ por derecha.

Asíntotas Oblicuas

Veamos primero lo que pasa en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 1$$

Pero entonces debemos concluir que $m = 1$. Tenemos que estudiar la existencia de b para el valor de m hallado.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 1} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + 3x + 1 - \cancel{x^2} + x}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(4 + \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 4 \end{aligned}$$

Pero entonces concluimos que $\exists b = 4$. Como existen tanto m como b entonces $f(x)$ presenta una asíntota oblicua en $-\infty$ de ecuación $y = x + 4$.

Veamos ahora lo que pasa en $+\infty$:

Observe el lector que si en el paso anterior cambiamos en los límites calculados $-\infty$ por $+\infty$ obtendríamos los mismos resultados, razón por la cual se debe concluir que $f(x)$ también tiene una asíntota oblicua en $+\infty$ con ecuación igual a la anterior $y = x + 4$.

Así: Las conclusiones generales son:

Asíntotas Horizontales:

En $-\infty$: No posee pues diverge a $-\infty$.

En $+\infty$: No posee pues diverge a $+\infty$

Asíntotas Verticales:

En $x = 1$: Que por izquierda tiende a $-\infty$ y por derecha a $+\infty$.

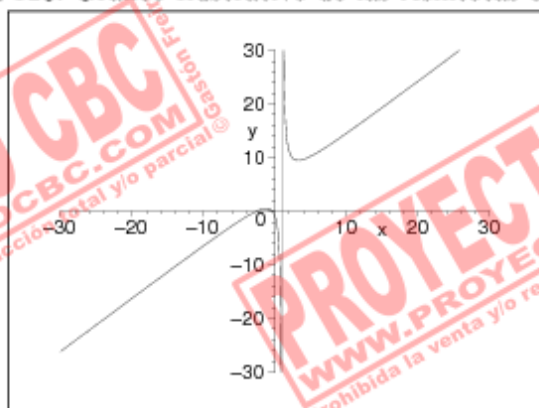
Asíntotas Oblicuas:

En $-\infty$: Una de ecuación $y = x + 4$.

En $+\infty$: Una de ecuación $y = x + 4$.

Gráfico Ilustrativo: A continuación presentamos un gráfico en el cual se podrá apreciar las características de la función $f(x)$ según las conclusiones obtenidas.

Figura 128: Gráfico Ilustrativo de las Asíntotas de $f(x)$



(b)

Asíntotas Horizontales

Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \underbrace{e^x \cdot \sin(x)}_{\text{acotado}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^x \cdot \sin(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(1 + \overbrace{\left(\frac{e^x}{x} \right) \cdot \sin(x)}^{-\infty \text{ oscilando entre } +\infty \text{ y } -\infty} \right)$$

oscila entre -1 y 1

$$= \infty \text{ oscilando entre } +\infty \text{ y } -\infty$$

Luego: La función $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales

No hay ningún punto donde exista la posibilidad de que $f(x)$ presente una asíntota vertical, razón por la cual se concluye que no debe haber de las mismas.

Asíntotas Oblicuas

Veamos primero lo que pasa en $-\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + e^x \sin(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{e^x}{x} \cdot \sin(x) = 1\end{aligned}$$

Pero entonces debemos concluir que $m = 1$. Tenemos que estudiar la existencia de b para el valor de m hallado.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \cancel{x} + e^x \cdot \sin(x) - \cancel{x} = 0$$

Pero entonces concluimos que $\exists b = 0$. Como existen tanto m como b entonces $f(x)$ presenta una asíntota oblicua en $-\infty$ de ecuación $y = x$.

Veamos ahora lo que pasa en $+\infty$:

Usando la Regla de L'Hospital podemos deducir fácilmente que:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

y a partir de ésto último:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^x \sin(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{e^x}{x} \cdot \sin(x) = \infty\end{aligned}$$

Pero entonces al no existir m debemos concluir que es imposible que $f(x)$ presente una asíntota oblicua en $+\infty$.

Así: Las conclusiones generales son:

Asíntotas Horizontales:

En $-\infty$: No posee pues tiende a $-\infty$.

En $+\infty$: No posee pues tiende a ∞ oscilando entre $+\infty$ y $-\infty$.

Asíntotas Verticales: No posee.

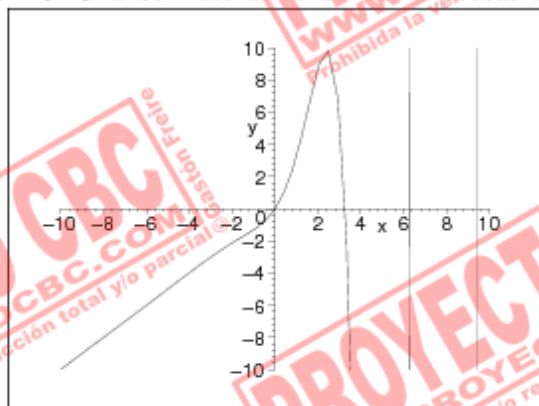
Asíntotas Oblicuas:

En $-\infty$: Una de ecuación $y = x$.

En $+\infty$: No posee.

Gráfico Ilustrativo: A continuación presentamos un gráfico en el cual se podrá apreciar las características de la función $f(x)$ según las conclusiones obtenidas.

Figura 129: Gráfico Ilustrativo de las Asíntotas de $f(x)$



¡Advertencia! No deben confundir las oscilaciones con asíntotas verticales.

(c)

Asíntotas Horizontales

Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) (-)} = 1$$

Luego: La función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 1$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

Asíntotas Verticales

Ahora hay dos puntos donde podría llegar a haber asíntotas verticales: $x = -1$ y $x = 1$. Tendremos que estudiar ambos por separado para decidir lo que ocurre.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{2}$$

Como ven la función no presenta una asíntota vertical en este punto.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = -\infty$$

Vemos entonces que en $x = -1$ la función presenta una asíntota vertical que tiende a $+\infty$ por izquierda y a $-\infty$ por derecha.

Asíntotas Oblicuas

Observen que como hay una asíntota horizontal en $-\infty$ entonces no podrá haber jamás una asíntota oblicua en él. Lo mismo para $+\infty$.

Así: Las conclusiones generales son:

Asíntotas Horizontales:

En $-\infty$: Tiene una de ecuación $y = 1$.

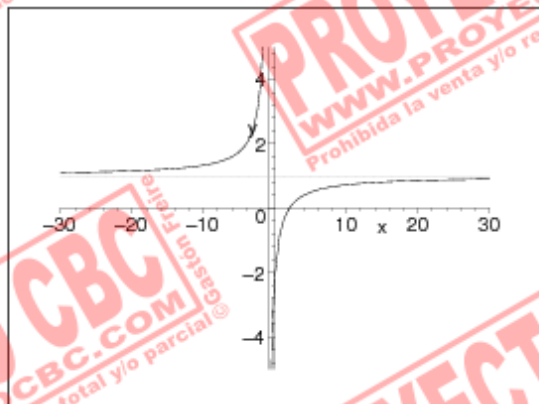
En $+\infty$: Tiene una de ecuación $y = 1$.

Asíntotas Verticales:

En $x = -1$: Que por izquierda tiende a $+\infty$ y por derecha a $-\infty$.

Asíntotas Oblicuas: No posee.

Gráfico Ilustrativo: A continuación presentamos un gráfico en el cual se podrá apreciar las características de la función $f(x)$ según las conclusiones obtenidas.

Figura 130: Gráfico Ilustrativo de las Asíntotas de $f(x)$ 

(d)

Asíntotas Horizontales

Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{\frac{1}{x}} = \pm\infty$$

Luego: La función $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales

El único punto donde puede llegar a haber una asíntota vertical es claramente $x = 0$. Podemos estudiar los límites laterales en dicho punto para poder dilucidar lo que ocurren en el mismo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = +\infty$$

Esta función presenta un caso muy llamativo ya que vemos que en $x = 0$, si bien por izquierda tiende a cero, por derecha presenta una asíntota vertical tendiendo a $+\infty$.

Asíntotas Oblicuas

Veremos que el hecho de tender a $+\infty$ o a $-\infty$ es indistinto en cuanto a los cálculos, razón por la cual podemos analizar los dos casos simultáneamente⁷⁹.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

Pero entonces debemos concluir que $m = 1$. Tenemos que estudiar la existencia de b para el valor de m hallado.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Pero entonces concluimos que $\exists b = 1$. Como existen tanto m como b entonces $f(x)$ presenta una asíntota oblicua en $\pm\infty$ de ecuación $y = x + 4$.

Así: Las conclusiones generales son:

Asíntotas Horizontales:

En $-\infty$: No posee pues diverge a $-\infty$.

En $+\infty$: No posee pues diverge a $+\infty$.

Asíntotas Verticales:

En $x = 0$: Tiene una curiosa asíntota por derecha donde la función tiende a $+\infty$, mientras que por izquierda la función tiende a cero.

Asíntotas Oblicuas:

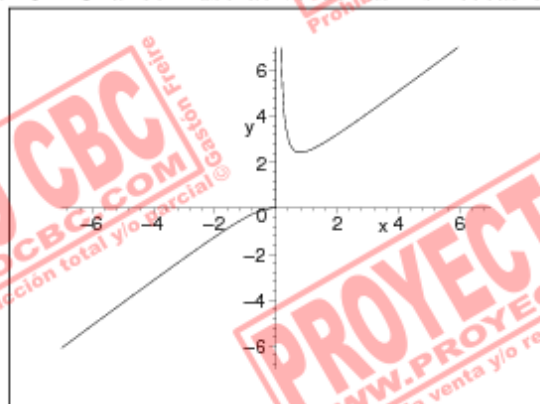
En $-\infty$: Una de ecuación $y = x + 1$.

En $+\infty$: Una de ecuación $y = x + 1$.

⁷⁹ Cuando hagamos esto generalmente quedará claro pues lo indicaremos en los límites poniendo $\pm\infty$ en lugar de $+\infty$ o $-\infty$.

Gráfico Ilustrativo: A continuación presentamos un gráfico en el cual se podrá apreciar las características de la función $f(x)$ según las conclusiones obtenidas.

Figura 131: Gráfico Ilustrativo de las Asíntotas de $f(x)$



(e)

Antes de comenzar observemos que $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (e^{-1}, +\infty)$.

Asíntotas Horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \ln \left(e - \frac{1}{x} \right) = \pm\infty$$

Luego: La función $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales

Los lugares donde puede haber asíntotas verticales son aquí $x = 0$ o bien $x = e^{-1}$. El primero pues se anula el denominador en la expresión $\frac{1}{x}$ y el segundo pues se anula el argumento del logaritmo.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln\left(e - \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{e - \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
 &\stackrel{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{\underbrace{e - \frac{1}{x}}_{\rightarrow 0}} = 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(x)$ no presenta una asíntota vertical en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (e^{-1})^+} x \ln\left(e - \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

Pero entonces $f(x)$ presentará por derecha una asíntota vertical en $x = e^{-1}$ donde la misma tiende a $-\infty$.

Asíntotas Oblicuas

Podemos comprobar fácilmente que el hecho de tender a $\pm\infty$ no afecta la naturaleza de las cuentas que haremos, las cuales sólo dependen de que $|x|$ sea *grande*, razón por la cual analizaremos ambos casos *en paralelo*.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(e - \frac{1}{x}\right) = 1$$

Pero entonces debemos concluir que $m = 1$. Tenemos que estudiar la existencia de b para el valor de m hallado.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln\left(e - \frac{1}{x}\right) - 1}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{e - \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
 &\stackrel{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{\underbrace{e - \frac{1}{x}}_{\rightarrow 0}} = -\frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

Pero entonces concluimos que $\exists b = -\frac{1}{e}$. Como existen tanto m como b entonces $f(x)$ presenta una asíntota oblicua en $\pm\infty$ de ecuación $y = x - \frac{1}{e}$.

Así: Las conclusiones generales son:

Asíntotas Horizontales:

En $-\infty$: No posee pues diverge a $-\infty$.

En $+\infty$: No posee pues diverge a $+\infty$

Asíntotas Verticales:

En $x = e^{-1}$: Donde la función tiende por derecha a $-\infty$.

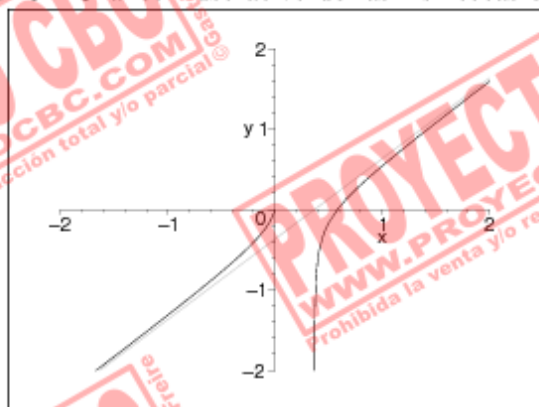
Asíntotas Oblicuas:

En $-\infty$: Una de ecuación $y = x - \frac{1}{e}$.

En $+\infty$: Una de ecuación $y = x - \frac{1}{e}$.

Gráfico Ilustrativo: A continuación presentamos un gráfico en el cual se podrá apreciar las características de la función $f(x)$ según las conclusiones obtenidas.

Figura 132: Gráfico Ilustrativo de las Asíntotas de $f(x)$



(f)

Asíntotas Horizontales

Estudiamos los límites laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 - \sqrt{\frac{-1}{x^2} + 1} \right) = -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \leftarrow \text{Claramente.}$$

Luego: La función $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales

Es claro que no presenta.

Asíntotas Oblicuas

Veamos primero lo que pasa en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + x^2}$$

Tengamos en cuenta ahora que como $x < 0$ entonces $\frac{1}{x} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}}$. Pero con esto la igualdad anterior queda:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \sqrt{\frac{-1}{x^2} + 1} = 1 \end{aligned}$$

Pero entonces debemos concluir que $m = 1$. Tenemos que estudiar la existencia de b para el valor de m hallado.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{1+x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x - \sqrt{1+x^2}} = 0\end{aligned}$$

Pero entonces concluimos que $\exists b = 0$. Como existen tanto m como b entonces $f(x)$ presenta una asíntota oblicua en $-\infty$ de ecuación $y = x$.

Veamos ahora lo que pasa en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1+x^2}$$

Tengamos en cuenta ahora que como $x > 0$ entonces $\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$. Pero con esto la igualdad anterior queda:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 3\end{aligned}$$

Pero entonces debemos concluir que $m = 3$. Tenemos que estudiar la existencia de b para el valor de m hallado.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0\end{aligned}$$

Pero entonces concluimos que $\exists b = 0$. Como existen tanto m como b entonces $f(x)$ presenta una asíntota oblicua en $+\infty$ de ecuación $y = 3x$.

Así: Las conclusiones generales son:

Asíntotas Horizontales:

En $-\infty$: No posee pues diverge a $-\infty$.

En $+\infty$: No posee pues diverge a $+\infty$.

Asíntotas Verticales: No presenta.

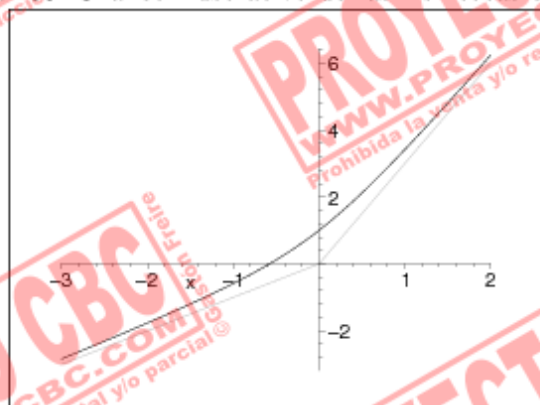
Asíntotas Oblicuas:

En $-\infty$: Una de ecuación $y = x$.

En $+\infty$: Una de ecuación $y = 3x$.

Gráfico Ilustrativo: A continuación presentamos un gráfico en el cual se podrá apreciar las características de la función $f(x)$ según las conclusiones obtenidas.

Figura 133: Gráfico Ilustrativo de las Asíntotas de $f(x)$



Se pueden apreciar en gris claro los gráficos de las asíntotas oblicuas $y = x$ e $y = 3x$.

(g)

Asíntotas Horizontales

Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \leftarrow 0 \text{ por acotado.}$$

Luego: La función $f(x)$ no tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$ tanto en $+\infty$ como en $-\infty$.

Asíntotas Verticales

El único punto donde puede llegar a haber una asíntota vertical es claramente $x = 0$. Pero:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \leftarrow \text{Es un viejo conocido este límite.}$$

Por lo tanto debemos concluir que no hay asíntotas verticales para $f(x)$.

Asíntotas Oblicuas

No puede haber ya que en $\pm\infty$ ya tenemos el lugar ocupado por las asíntotas horizontales.

Así: Las conclusiones generales son:

Asíntotas Horizontales:

En $-\infty$: Tenemos una de ecuación $y = 0$.

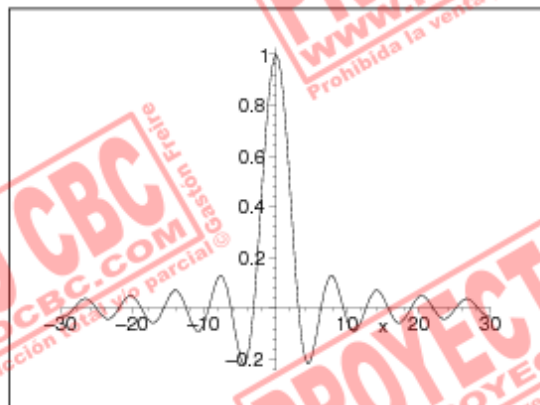
En $+\infty$: Tenemos una de ecuación $y = 0$.

Asíntotas Verticales: No posee.

Asíntotas Oblicuas: No posee.

Gráfico Ilustrativo: A continuación presentamos un gráfico en el cual se podrá apreciar las características de la función $f(x)$ según las conclusiones obtenidas.

Figura 134: Gráfico Ilustrativo de las Asíntotas de $f(x)$



(h)

Asíntotas Horizontales

Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)}{x^2} = \pm\infty$$

Luego: La función $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.**Asíntotas Verticales**El único punto donde puede llegar a haber una asíntota vertical es claramente $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} = +\infty$$

Por lo tanto debemos concluir que hay una asíntota vertical en $x = 0$ donde la función tiende a $+\infty$ tanto por izquierda como por derecha.**Asíntotas Oblicuas**Como el hecho de tender a $+\infty$ o a $-\infty$ no afecta para nada la naturaleza de la cuenta que debemos hacer, podremos contemplar los dos casos *en paralelo*.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)}{x} = 1$$

Pero entonces debemos concluir que $m = 1$. Tenemos que estudiar la existencia de b para el valor de m hallado.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4 - x^3}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^2 + 4}{x^2} = -3 \end{aligned}$$

Pero entonces concluimos que $\exists b = -3$. Como existen tanto m como b entonces $f(x)$ presenta una asíntota oblicua en $\pm\infty$ de ecuación $y = x - 3$.

Así: Las conclusiones generales son:

Asíntotas Horizontales:

En $-\infty$: No posee pues diverge a $-\infty$.

En $+\infty$: No posee pues diverge a $+\infty$

Asíntotas Verticales:

En $x = 0$: Que tanto por izquierda como por derecha tiende a $+\infty$.

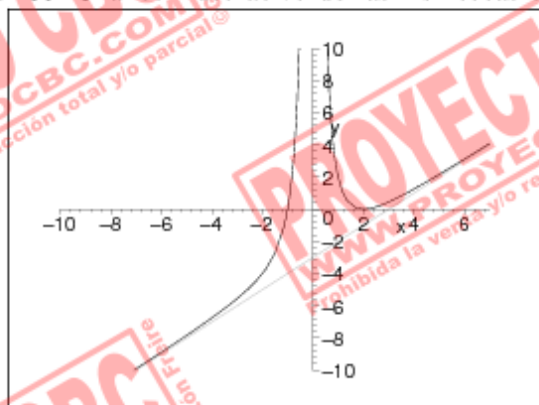
Asíntotas Oblicuas:

En $-\infty$: Una de ecuación $y = x - 3$.

En $+\infty$: Una de ecuación $y = x - 3$.

Gráfico Ilustrativo: A continuación presentamos un gráfico en el cual se podrá apreciar las características de la función $f(x)$ según las conclusiones obtenidas.

Figura 135: Gráfico Ilustrativo de las Asíntotas de $f(x)$



Obtención de las Asíntotas de una función

Los distintos tipos de asíntotas que puede presentar una cierta función $f(x)$ son básicamente tres:

Horizontales: Las ASÍNTOTAS HORIZONTALES son aquellas de ecuación $y = k$ con $k \in \mathbb{R}$ una cierta constante. Los únicos lugares donde puede haber este tipo de asíntotas son en $-\infty$ y $+\infty$. Para determinar la existencia de una de estas asíntotas en realidad el procedimiento es muy simple:

- Determinar la existencia de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = K_1 \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = K_2 \in \mathbb{R}$.
- En caso de existir el primer límite y ser un número real se concluye que $y = K_1$ es una asíntota horizontal para $f(x)$ en $-\infty$. En caso de no existir el primero o dar ∞ se concluye que $f(x)$ no presenta una asíntota horizontal en $-\infty$.
- En caso de existir el segundo límite y ser un número real se concluye que $y = K_2$ es una asíntota horizontal para $f(x)$ en $+\infty$. En caso de no existir el segundo o dar ∞ se concluye que $f(x)$ no presenta una asíntota horizontal en $+\infty$.

Verticales: Las ASÍNTOTAS VERTICALES pueden presentarse únicamente en $x \rightarrow a \in \mathbb{R}$, razón por la cual no tiene ningún sentido buscar las mismas en los infinitos. Las razones más comunes por las que en torno a un punto puede haber una asíntota vertical tiene que ver con:

- Denominadores que se anulan.
- Presencia de logaritmos cuyo argumento tiende a cero.
- Cuando $x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ en funciones como $\tan(x)$, hecho que si se desmenuza un poco evidencia relación más vale con denominadores que se anulan ya que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ y los puntos de la forma antes mencionada corresponden a los ceros del $\cos(x)$.

Supongamos que a es un punto donde ocurre tal cosa. Entonces para decidir si en dicho punto hay una asíntota vertical hay que estudiar los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_- \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_+$$

Si $\exists L_-$ y nos diera $\pm\infty$ deberemos concluir que hay una asíntota vertical $x = a$ que por izquierda tiende a $\pm\infty$. Lo mismo se hace por derecha.

Observación: No es necesario que forzosamente tanto por derecha como por izquierda las asíntotas verticales tengan el mismo comportamiento, habiendo muchos casos posibles incluso algunos raros como el de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ que presenta por derecha una asíntota vertical en $x = 0$ que tiende a $+\infty$, mientras que por izquierda la función tiende a 0.

Oblicuas: Las ASÍNTOTAS OBLICUAS se producen cuando para valores de x tendiendo a $\pm\infty$ la función $f(x)$ adquiere un comportamiento muy peculiar y se *va pegando* a una recta de ecuación $y = mx + b$ — la que diremos será la ecuación de la asíntota oblicua. Tenemos claro que precisar lo que significa *ir pegándose* a una función, lo que motiva la presente:

Definición: Diremos que $f(x)$ presenta una Asíntota Oblicua en $+\infty$ si $\exists m, b \in \mathbb{R}$ tales que la recta de ecuación $y = mx + b$ verifica $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (mx + b) = 0$. La misma definición la copiamos para $-\infty$ haciendo las modificaciones pertinentes.

Tenemos ahora que obtener algún método que permita *identificar* a la recta $y = mx + b$ con las características de la definición, lo que significa encontrar — si es que existen — $m, b \in \mathbb{R}$ con la propiedad enunciada en la definición. A continuación presentamos un método muy sencillo para poder decidir si en $+\infty$ hay o no una asíntota oblicua y en tal caso determinar su ecuación. El mismo método se aplica para estudiar lo que ocurre en $-\infty$ haciendo las adaptaciones *obvias*.

- Primero estudiamos si:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$$

Si el mismo no existe o bien nos diera infinito debemos concluir que no puede haber una asíntota oblicua para $f(x)$ en $+\infty$.

Observación: Observemos que como para que haya posibilidad de que $f(x)$ presente una asíntota oblicua en $+\infty$ — con $m \neq 0$ — es requisito indispensable que la misma sea divergente, razón por la cual si supiéramos que es derivable y contáramos con la información adicional de que

$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$, entonces sabremos por la REGLA DE L'HOSPITAL

que $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$, lo que nos da un método alternativo para la obtención de m si sabemos que $f(x)$ está en las condiciones enunciadas.

- Suponiendo que ya contamos con $m \in \mathbb{R}$ obtenido en el punto anterior, ahora debemos estudiar si:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = b \in \mathbb{R}$$

Si el límite anterior no existiera o bien nos diera infinito, debemos concluir que $f(x)$ no puede presentar una asíntota oblicua en $+\infty$. Si existe b y es un número real entonces concluimos positivamente que existe una ASÍNTOTA OBLICUA para $f(x)$ en $+\infty$ de ecuación $y = mx + b$.

■

Ejercicio 9

Debido a que tenemos que lidiar con asíntotas oblicuas, sería un buen momento para recordar su definición y procedimiento para hallarlas. Pueden consultarlo si lo desean en la resolución al ejercicio anterior en la página 521.

Averigüemos primero la pendiente:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3 \left(\frac{2}{x} - 1\right)}{x^3}} = -1$$

Pero entonces en ambos casos debe ser $m = -1$. Decidamos ahora si existe la ordenada al origen: b .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} + 1 \right) \end{aligned}$$

Aquí es bueno darse cuenta de hacer un cambio de variables apropiado, digamos:

$$y = \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 1} \Leftrightarrow y^3 + 1 = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = \frac{2}{y^3 + 1}$$

$$y \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} -1$$

Pero entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x &= \lim_{y \rightarrow -1} \frac{2}{y^3 + 1} \cdot (y + 1) \\ &= \lim_{y \rightarrow -1} \frac{2(y+1)}{(y+1)(y^2 - y + 1)} \\ &= \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Luego: Tanto en $+\infty$ como en $-\infty$ nuestra función $f(x)$ tiene una Asíntota Oblicua de ecuación:

$$y = -x + \frac{2}{3}$$

■

Ejercicio 10

Si desean profundizar sobre el método para hallar los distintos tipos de asíntotas para una determinada función, pueden consultar la resolución al EJERCICIO 8 en la página 521.

En este caso buscamos los valores de a y b para que la pendiente m de la asíntota oblicua nos de igual a 2. Para que esto ocurra debería ser:

$$2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{-a} \left(a + \frac{b}{x} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^{-1} \left(1 + \frac{5}{x^2} \right)} = a$$

Pero entonces concluimos que $a = 2$. Ahora debemos estudiar el valor de b tal que la ordenada al origen de nuestra asíntota oblicua nos quede igual a 7. Pero para que esto ocurra debería ser:

$$\begin{aligned} 7 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + bx^2 + 1}{x^2 + 5} - 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + bx^2 - 2x^3 - 10x}{x^2 + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{-b} \left(b - \frac{10}{x} \right)}{x^{-1} \left(1 + \frac{5}{x^2} \right)} = b \end{aligned}$$

Pero entonces concluimos que debe ser $b = 7$.

Así: Para que $y = 2x + 7$ sea asíntota oblicua de $f(x)$ en $-\infty$ deben ser $a = 2$ y $b = 7$.

Ejercicio 11

(a)

Tenemos que averiguar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f'(x)$ para poder decidir sobre los INTERVALOS DE CONCAVIDAD de $f(x)$, ya que sabemos que un intervalo (a, b) donde $f'(x)$ es creciente $\forall x \in (a, b)$ es un intervalo de convexidad para $f(x)$ y uno donde $f'(x)$ sea decreciente será uno de concavidad. Podríamos estudiar los puntos críticos de $f'(x)$:

$$C_{f'} = \{x \in \text{Dom}(f') / f''(x) = 0 \vee \nexists f''(x) \vee f'' \text{ no es continua en } x\}$$

y confeccionar nuestra típica tabla para estudiar crecimiento, la cual ahora nos dará información sobre la concavidad de la función original $f(x)$.

$$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 12x^2 + 18x + 2$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm \sqrt{228}}{24} = \frac{-18 \pm 2\sqrt{57}}{24} = \frac{-9 \pm \sqrt{57}}{12}$$

$$\Rightarrow \text{Hacemos } \begin{cases} x_1 = \frac{-9 - \sqrt{57}}{12} \\ x_2 = \frac{-9 + \sqrt{57}}{12} \end{cases}$$

Tratándose de f'' una función cuadrática con *coeficiente principal positivo*, sabemos que la misma será negativa en el intervalo (x_1, x_2) formado por sus dos raíces y positiva en el complemento de dicho intervalo. La tabla quedaría así:

	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
f''	+		-		+
f'	↗		↘		↗
f	∪	P.I.	∩	P.I.	∪

Conclusiones: $f(x)$ es cóncava en $(-\infty, x_1)$ y $(x_2, +\infty)$, y convexa en (x_1, x_2) teniendo dos puntos de inflexión respectivamente en x_1 y x_2 .

(b)

Procedemos como en el ítem anterior estudiando el crecimiento de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(-1-x^2-2+2x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$$= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Hacemos ahora la tabla usual para estudiar la concavidad:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
f''	-		+		-		+
f'	\searrow		\nearrow		\searrow		\nearrow
f	\cap	P.I.	\cup	P.I.	\cap	P.I.	\cup

Conclusiones: $f(x)$ es cóncava en $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$, y convexa en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(0, \sqrt{3})$, teniendo tres puntos de inflexión respectivamente en $-\sqrt{3}$, 0 y $\sqrt{3}$.

(c)

Procedemos como en el ítem anterior estudiando el crecimiento de $f'(x)$.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

$$= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Hacemos ahora la tabla usual para estudiar la concavidad:

	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$
f''	+		-		+
f'	\nearrow		\searrow		\nearrow
f	\cup	P.I.	\cap	P.I.	\cup

Conclusiones: $f(x)$ es cóncava en $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ y $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$, y convexa en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ teniendo dos puntos de inflexión respectivamente en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(d)

Procedemos como en el ítem anterior estudiando el crecimiento de $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) \\ f''(x) &= -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2) \\ &= 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Hacemos ahora la tabla usual para estudiar la concavidad:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f''	-		+
f'	\searrow		\nearrow
f	\cap	P.I.	\cup

Conclusiones: $f(x)$ es cóncava en $(2, +\infty)$ y convexa en $(-\infty, 2)$ teniendo un único punto de inflexión en $x = 2$.

(e)

Aquí si bien $f(x)$ tiene dominio \mathbb{R} no ocurrirá lo mismo con su derivada que presentará un problema en $x = 2a$ y en $x = 0$. Es importante observar este hecho a la hora de extraer nuestras conclusiones o confeccionar la tabla.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} (2ax^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (4ax - 3x^2) \\ &= \frac{4ax - 3x^2}{3 \cdot \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}} = \frac{-x \cdot (3x - 4a)}{\sqrt[3]{x^2} (2a - x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -\frac{2}{9} \cdot (2ax^2 - x^3)^{-\frac{5}{3}} \cdot (4ax - 3x^2)^2 + \frac{1}{3} \cdot (2ax^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (4a - 6x) \\
 &= \frac{1}{9} \cdot (2ax^2 - x^3)^{-\frac{5}{3}} \cdot (-2x^2(4a - 3x)^2 + 3(4a - 6x)x^2(2a - x)) \\
 &= \frac{1}{9} \cdot (2ax^2 - x^3)^{-\frac{5}{3}} \cdot x^2 \cdot ((12a - 18x) \cdot (2a - x) - 2 \cdot (4a - 3x)^2) \\
 &= \frac{x^2 \cdot (24a^2 - 12ax - 36ax + 18x^2 - 32a^2 + 48ax - 18x^2)}{9 \cdot x^{\frac{10}{3}} (2a - x)^{\frac{5}{3}}} \\
 &= \frac{-8a^2 \cdot x^2}{9 \cdot x^{\frac{10}{3}} (2a - x)^{\frac{5}{3}}} \quad \text{Dom}(f'') = \mathbb{R} - \{0, 2a\}
 \end{aligned}$$

¡Observación Muy Importante! El lector que haya logrado superar el trauma de seguir la cuenta anterior, podrá percatarse de que la misma es sumamente engorrosa. La única razón por la que hemos tenido éxito en realizarla es debido al suficiente cuidado en *no desarrollar los paréntesis y extraer la mayor cantidad de factores comunes*. Es muy frecuente que el alumno que recién comienza *tienda a desarrollar los mismos*, hecho que será nefasto para hallar los puntos críticos en ejemplos como el de más arriba. Por eso nuestra *fuerte* recomendación es que *no lo hagan*.

Podemos ahora confeccionar la tabla usual para extraer nuestras conclusiones. Es importante observar que:

$$\begin{aligned}
 f''(-1) &= \frac{\overbrace{-8a^2}^{<0}}{\underbrace{-9(2a+1)}_{<0}} > 0 \\
 f''(a) &= \frac{-8a^4}{9a^{\frac{10}{3}}a^{\frac{5}{3}}} = \frac{-8a^4}{9a^5} = \frac{-8}{9a} < 0 \\
 f''(3a) &= \frac{\overbrace{-72a^4}^{<0}}{\underbrace{9(3a)^{\frac{10}{3}}(-a)^{\frac{5}{3}}}_{>0}} > 0
 \end{aligned}$$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2a)$	$2a$	$(2a, +\infty)$
f''	+		-		+
f'	↗		↘		↗
f	∪	P.I.	∩	P.I.	∪

Conclusiones: $f(x)$ es cóncava en $(-\infty, 0)$ y $(2a, +\infty)$, y convexa en $(0, 2a)$ teniendo dos puntos de inflexión respectivamente en 0 y $2a$.

(f)

$$f'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x \cdot (2 \ln(x) + 1)$$

$$f''(x) = 2 \ln(x) + \frac{2}{x} + 1 = 2 \ln(x) + 3$$

$$\Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$$

Pero entonces $C_{f'} = \left\{ e^{-\frac{3}{2}} \right\}$ y podemos confeccionar la tabla correspondiente para estudiar la concavidad:

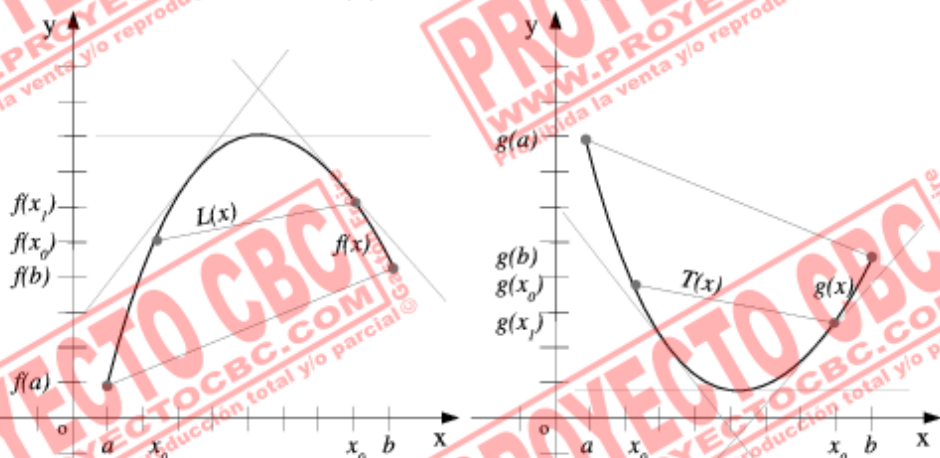
	$(0, e^{-\frac{3}{2}})$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$
f''	-		+
f'	\searrow		\nearrow
f	\cap	P.I.	\cup

Conclusiones: $f(x)$ es cóncava en $(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$ y convexa en $(0, e^{-\frac{3}{2}})$ teniendo un único punto de inflexión en $x = e^{-\frac{3}{2}}$.

Concavidad y Convexidad

Tanto este ejercicio como el que le sigue tienen como objeto que el alumno practique los métodos para hallar los INTERVALOS DE CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD de una cierta función $f(x)$ a partir de criterios que involucran generalmente el estudio del crecimiento de la derivada $f'(x)$ — o lo que es lo mismo — el estudio del signo de $f''(x)$ cuando la misma existe. Clara es la importancia de mencionar que la propiedad de ser cóncava o convexa en un cierto intervalo es independiente de la de ser derivable. Dichas nociones pueden — y de hecho es así como se hace — ser definidas en términos que no involucren en lo absoluto la derivabilidad o continuidad.

La ventaja de hacer las definiciones con independencia de la derivabilidad es que aumenta el alcance de la misma. Por ejemplo una función como $f(x) = |x|$ que no es derivable en $x = 0$ cumple todos los requisitos para

Figura 136: $f(x)$ CONVEXA y $g(x)$ CÓNCAVA.

Se pueden apreciar los gráficos de dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$ de las cuales la primera se dice CONVEXA sobre el (a, b) mientras que la segunda se dice CÓNCAVA sobre el (a, b) .

que *quisiéramos* llamarla cóncava, pero nos sería imposible si la definición aludiera a propiedades de $f'(x)$, la cual no existe en $x = 0$.

Pueden consultar el gráfico en esta página para que ilustre la propiedad que nos gustaría aislar en nuestra definición. Como se puede apreciar en el mismo, hay en principio dos formas de interpretar lo que ocurre en el dibujo, una más general y la otra más restrictiva:

Pensando en términos elementales: Se logra que el alcance de la definición exceda el ámbito de las funciones derivables, pues la misma tendría sentido para funciones no derivables.

La Propiedad de ser Cóncava: Es la de verificar que la cuerda que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ se encuentre por encima del gráfico de $f(x)$ para todo par de puntos $x_0 < x_1 \in [a, b]$.

La Propiedad de ser Convexa: Es la de verificar que la cuerda que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ se encuentre por debajo del gráfico de $f(x)$ para todo par de puntos $x_0 < x_1 \in [a, b]$.

En términos de la derivada: Si nos permitimos hablar de *derivada*, podríamos enunciarlas como sigue, claro que esta definición sería mucho más restrictiva.

La Propiedad de ser Cóncava: Es la de verificar $f'(x)$ creciente sobre el (a, b) . Si nos libramos por completo de nuestras ataduras permitiéndonos hablar de la *derivada segunda* entonces podríamos enunciarla como la de ser $f''(x) > 0 \forall x \in (a, b)$.

La Propiedad de ser Convexa: Es la de verificar $f'(x)$ decreciente sobre el (a, b) . O bien la de ser $f''(x) < 0 \forall x \in (a, b)$.

Ya teniendo en claro las propiedades que queremos aislar viene ahora la disyuntiva: *¿Por cuál definición hemos de decidirnos?* Tal vez la primera sea más general, pero se ve complicada a la hora de trabajar. Por otra parte si bien la segunda es muy práctica a la hora de trabajar, dejaría sin posibilidad alguna de contemplación a importantes funciones como $|x|$, la cual quedaría excluida desde el vamos. Y ahora la más importante pregunta de todas: *¿Coinciden ambas definiciones en el caso de funciones derivables tantas veces como se necesite?*

De las preguntas anteriores la más importante parece la última, pues en caso de que la misma fuera cierta no habría duda alguna sobre la elección de la primer definición. La misma es lo suficientemente general como para abarcar una amplia familia de funciones, y sería muy fácil de chequear su verificación en el caso de estar trabajando con funciones derivables — *al coincidir en dicho caso con la segunda*.

Y la feliz respuesta es que podemos adoptar con toda tranquilidad la primer definición y demostrar que si $f(x)$ fuera derivable las veces que haga falta, entonces la misma coincidiría con la segunda definición. Sin hacer una demostración formal de ésto último — *hecho que excede el marco de esta obra* — presentamos a continuación los enunciados de los resultados típicos que pueden probarse si hemos partido de adoptar la definición más general de CÓNCAVIDAD Y CONVEXIDAD, es decir la primera.

Teorema: Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable. Si f' es creciente entonces f es CÓNCAVA sobre el (a, b) . Si f' es decreciente entonces f es CONVEXA sobre el (a, b) .

Observación: Es importante observar que si f' es *continua* en el (a, b) entonces vale la recíproca del teorema anterior.

Teorema: Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con f' continua sobre el (a, b) . Entonces valen las siguientes equivalencias:

1. f' es creciente si y sólo si f es CÓNCAVA sobre el (a, b) .

2. f' es decreciente si y sólo si f es CONVEXA sobre el (a, b) .

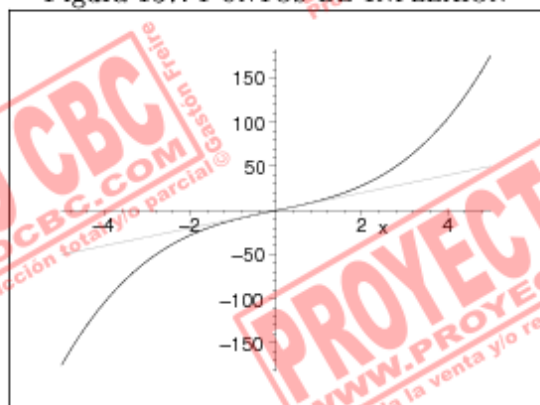
Corolario: Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable. Si $f'' > 0$ sobre el (a, b) entonces f CÓNCAVA en dicho intervalo. Si $f'' < 0$ en el (a, b) entonces f es CONVEXA.

Puntos de Inflexión

Definición: Dada $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$, diremos que x_0 es un PUNTO DE INFLEXIÓN de f si $\exists \delta > 0$ tal que ocurren una de estas dos posibilidades:

1. f es CONVEXA sobre $(x_0 - \delta, x_0)$ y CÓNCAVA sobre $(x_0, x_0 + \delta)$.
2. f es CÓNCAVA sobre $(x_0 - \delta, x_0)$ y CONVEXA sobre $(x_0, x_0 + \delta)$.

Figura 137: PUNTOS DE INFLEXIÓN



Se pueden apreciar el gráfico de una función que tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

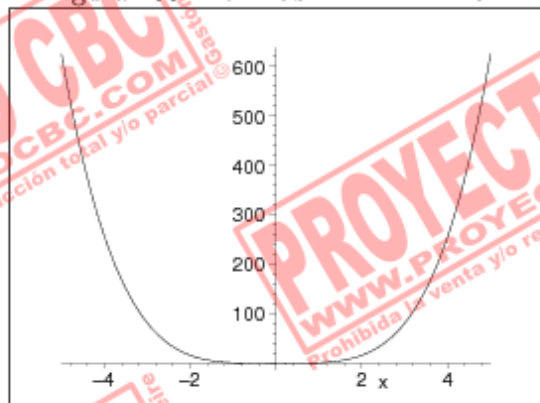
Evidentemente la idea geométrica de los PUNTOS DE INFLEXIÓN es que en ellos a un lado y a otro de la función hay un cambio en la concavidad. Contamos con una importante proposición que nos da un criterio muy útil para determinar si un punto es de inflexión.

Proposición: Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Si x_0 es un punto de inflexión de f , f' es continua en un entorno de x_0 y $\exists f''(x_0)$, entonces debe ser $f''(x_0) = 0$.

¡Observación! La recíproca del teorema anterior *no es cierta*, tal como lo pueden comprobar en el siguiente ejemplo:

- Consideremos $f(x) = x^4$. f es derivable con continuidad sobre todo \mathbb{R} ; $f''(0) = 0$. Sin embargo, $x = 0$ no es un PUNTO DE INFLEXIÓN. Pueden comprobarlo visualmente:

Figura 138: PUNTOS DE INFLEXIÓN



$f(x) = x^4$ no tiene un punto de inflexión en $x = 0$ pese a ser derivable con continuidad y existir $f''(0) = 0$.

¡Cuidado con las Hipótesis! Un ejemplo del cuidado que hay que tener en verificar las hipótesis de los teoremas que vamos a aplicar lo presenta la siguiente situación.

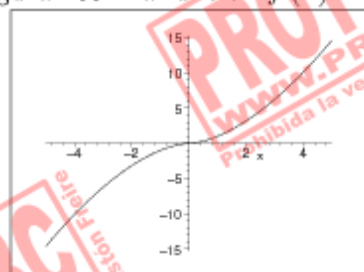
- En relación a la proposición de más arriba; $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$ — ver figura 139 en la página siguiente — pero ni siquiera $\exists f''(0)$ ya que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \infty$$

razón por la cual sería ridículo inferir que entonces debe ser $f''(0) = 0$.

Método Práctico

Pero lo cierto es que los teoremas y proposiciones precedentes nos proporcionarán un excelente método para determinar los INTERVALOS DE CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD así como también los PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Figura 139: La función $f(x) = x^{\frac{6}{5}}$.

La misma es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$ pero su derivada segunda ni siquiera existe en $x = 0$.

Vimos que hay una estrecha relación entre el crecimiento de $f'(x)$ y la concavidad de $f(x)$, siendo posible determinar ésta última a partir de lo primero. Tengan en cuenta que determinar los intervalos de crecimiento de una función es algo que venimos haciendo hasta el cansancio, razón por la cual ya no debería presentarnos ninguna dificultad. Lo que se ha hecho es *reducir* el problema del estudio de la CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD al estudio del crecimiento de f' , tarea para la cual contamos con un arsenal de técnicas.

Por ejemplo supongamos que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y que la misma fuera derivable dos veces. Si por algún método hubiéramos determinado los PUNTOS CRÍTICOS de $f'(x)$ como:

$$C_{f'} = \{x_0 < x_1 < x_2\}$$

entonces a partir de la confección de una simple tabla como:

	$(-\infty, x_0)$	x_0	(x_0, x_1)	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
f''	-		+		-		-
f'	\searrow		\nearrow		\searrow		\searrow
f	\cap	P.I.	\cup	P.I.	\cap	No es P.I.	\cap

A partir de esta información podemos determinar que:

- f es CONVEXA en: $(-\infty, x_0)$ y (x_1, x_2) .
- f es CÓNCAVA en: (x_0, x_1) y $(x_2, +\infty)$.
- f tiene dos puntos de inflexión, a saber: $x = x_0$ y $x = x_1$.

■

Ejercicio 12 — Hay un error en el enunciado

Observación: El enunciado de este ejercicio tiene un error — *como podrán comprobar a continuación*. Las abscisas de los cinco puntos correspondientes a EXTREMOS LOCALES y PUNTOS DE INFLEXIÓN **no son equidistantes**.

Como este ejercicio requiere el manejo de las nociones de Convexidad y Concavidad sería recomendable que quien no haya ahondado en las mismas consulte la sección “CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD” en la resolución al ejercicio anterior en la página 531.

En el presente ejercicio necesitamos estudiar el crecimiento y concavidad de f , para lo cual tendremos que estudiar los PUNTOS CRÍTICOS tanto de f como de su derivada y hacer las tablas correspondientes, de las cuales extraeremos nuestras conclusiones.

Observación: No hay problemas de dominio para $f(x)$ ya que por hipótesis es $a > 0$, siendo $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{(x^2 + a) - 2x^2}{(x^2 + a)^2} = \frac{a - x^2}{(x^2 + a)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$$

$$\Rightarrow \quad C_f = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$$

Con esta información presentemos la tabla usual para estudiar el crecimiento de f . Tengamos en cuenta para esto que:

$$f'(-2\sqrt{a}) = \frac{-3a}{(x^2 + a)^2} < 0 \quad \text{y} \quad f'(0) = \frac{a}{(x^2 + a)^2} > 0 \quad \text{y} \quad f'(\sqrt{a}) = \frac{-3a}{(x^2 + a)^2} < 0$$

	$(-\infty, -\sqrt{a})$	$-\sqrt{a}$	$(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$	\sqrt{a}	$(\sqrt{a}, +\infty)$
f'	-		+		-
f	\searrow		\nearrow		\searrow

Conclusiones Parciales: $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{a})$ y $(\sqrt{a}, +\infty)$, y creciente en $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$, teniendo en $-\sqrt{a}$ un MÍNIMO LOCAL y en \sqrt{a} un MÁXIMO LOCAL.

Ahora analicemos el crecimiento de la derivada.

EJERCICIO 12 — HAY UN ERROR EN EL ESTUDIO DE FUNCIONES

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{-2x(x^2+a)^2 - (a-x^2) \cdot 2(x^2+a) \cdot 2x}{(x^2+a)^3} \\
 &= \frac{-2x(x^2+a+2a-2x^2)}{(x^2+a)^3} \\
 &= \frac{2x(x^2-3a)}{(x^2+a)^3} = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{3a}, 0, \sqrt{3a}\} \\
 &\Rightarrow C_f = \{-\sqrt{3a}, 0, \sqrt{3a}\}
 \end{aligned}$$

Armamos ahora la tabla correspondiente para estudiar los intervalos de concavidad:

	$(-\infty, -\sqrt{3a})$	$-\sqrt{3a}$	$(-\sqrt{3a}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3a})$	$\sqrt{3a}$	$(\sqrt{3a}, +\infty)$
f''	-		+		-		+
f'	\searrow		\nearrow		\searrow		\nearrow
f	\cap	P.I.	\cup	P.I.	\cap	P.I.	\cup

Conclusiones Parciales: $f(x)$ es cóncava en $(-\sqrt{3a}, 0)$ y $(\sqrt{3a}, +\infty)$, y convexa en $(-\infty, -\sqrt{3a})$ y $(0, \sqrt{3a})$, teniendo tres puntos de inflexión respectivamente en $-\sqrt{3a}$, 0 y $\sqrt{3a}$.

Conclusiones Finales:

Intervalos de Crecimiento: $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{a})$ y $(\sqrt{a}, +\infty)$, y creciente en $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$.

Extremos Locales: $f(x)$ tiene un MÍNIMO LOCAL en $-\sqrt{a}$ y un MÁXIMO LOCAL en \sqrt{a} .

Intervalos de Concavidad y Convexidad: $f(x)$ es cóncava en $(-\sqrt{3a}, 0)$ y $(\sqrt{3a}, +\infty)$, y convexa en $(-\infty, -\sqrt{3a})$ y $(0, \sqrt{3a})$.

Puntos de Inflexión: $f(x)$ tiene tres puntos de inflexión respectivamente en $-\sqrt{3a}$, 0 y $\sqrt{3a}$.

Observación: Podrán apreciar que los cinco puntos, *entre* EXTREMOS LOCALES y PUNTOS DE INFLEXIÓN, *no son equidistantes*.



Ejercicio 13

Indicaciones

En este punto de la práctica ya contamos con todos los recursos teóricos para — *dada una función f* — poder analizar todos los aspectos de la misma a fin de poder realizar un gráfico bastante aproximado de ella. Más aún hemos practicado en ejercicios anteriores el método para estudiar por separado: *ceros; positividad y negatividad; intervalos de crecimiento y de decrecimiento; extremos locales; asíntotas horizontales, verticales y oblicuas; intervalos de concavidad y convexidad; puntos de inflexión; etc...*

Este ejercicio es para aprender a *unir todos los ingredientes* a fin de poder volcar toda la información obtenida en un gráfico, el cual seguramente será *muy fiel* al aspecto de la función. Con el objeto de establecer un método de trabajo sistemático y ordenado, los items del presente nos guiarán en el proceso de obtención de dicha información.

Observación: Si observan en el enunciado del ejercicio podrán comprobar que primero se nos pide estudiar los extremos locales *determinando si son o no absolutos*, y luego las ecuaciones de las asíntotas. En opinión del escritor y sin que esto niegue la utilidad de seguir el orden propuesto por la guía, si tenemos en cuenta que para determinar si un extremo local es absoluto o no muchas veces necesitamos la información que nos proporcionan las asíntotas, encontraremos más apropiado intercambiar el orden de ejecución entre los puntos (c) y (d). Un ejemplo del por qué de esta postura: si contamos con la información de que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$ en la cual la función diverge a $+\infty$, inmediatamente descartaremos a los máximos locales como *absolutos* ya que jamás podrían serlo al tomar $f(x)$ valores tan grandes como se quiera.

Sobre las raíces de f : Aunque el ejercicio no lo pida a veces — *cuando y sólo cuando salten a la vista fácilmente* — es posible determinar los *ceros o raíces* de f . En dicho caso será *muy recomendable* tenerlos en cuenta a la hora de dibujar ya que es información *relevante* del gráfico de la función. Por lo tanto cuando sea posible y la cuenta lo permita haremos el estudio de los mencionados.

Recomendaciones para graficar: Tengan en cuenta que aunque contemos con toda la información necesaria para realizar el gráfico de la función $f(x)$ con una precisión bastante buena, a veces es posible *marearse* y no saber disponer la misma adecuadamente a la hora de hacer el dibujo. Es

muy común encontrarse con ejemplos donde los alumnos han hecho un *correcto* análisis de los distintos elementos del gráfico, mientras que a la hora de hacer el mismo los resultados son *desastrosos*. Ésto último es una pena ya que la finalidad de coleccionar tanta información tiene como objeto precisamente la confección de dicho gráfico. La *clave* para hacer ésto adecuadamente es:

- Marcar en el plano *todos* los puntos de la forma $(x, f(x))$ si x es un punto que ha sido tenido en cuenta en las distintas tablas que realizamos, tanto la de INTERVALOS DE CRECIMIENTO como la de INTERVALOS DE CONCAVIDAD. La razón de marcarlos es que los mismos son *puntos importantes* del gráfico de la función, ya que en ellos suelen ocurrir los cambios interesantes.
- Marcar también en forma adecuada los puntos que correspondan a raíces de la función, ya que éstos también son *relevantes* para el gráfico de la misma.
- En las asíntotas verticales *no confundir* el infinito al que tiende la función por derecha y por izquierda. Recuerden que inclusive podría tender a un número real por uno de los lados y a infinito por el otro como en el caso de $e^{\frac{1}{x}}$ en $x = 0$ donde la misma por izquierda tiende a cero mientras que por derecha a $+\infty$.
- Dibujar en lo posible respetando los siguientes principios:
 - Empezar desde $-\infty$ y graficar *sólo* hasta el primer punto *marcado* en el gráfico al principio en el primer paso, respetando el crecimiento y la concavidad.
 - Dibujar desde el punto del gráfico en que se encuentran *de corrido* hasta el *inmediato siguiente* también respetando el crecimiento y la concavidad.
 - Recuerden que en un EXTREMO LOCAL $f'(x) = 0$ — si existe — razón por la cual la recta tangente a la función en dicho punto será *horizontal*. Sería bueno que el gráfico *refleje* este hecho.
 - En lo posible traten que se note el cambio de inflexión en los PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Advertencias

Para comprender el desarrollo del presente ejercicio es altamente recomendable que hayan leído — o si aún no lo han hecho que lo hagan — una

serie de secciones dedicadas a explicar propiedades que se utilizarán todo el tiempo en el desarrollo del mismo. Dichas herramientas van desde teoremas elementales como los de BOLZANO y VALORES INTERMEDIOS, hasta otros más sofisticados como los teoremas que relacionan el crecimiento de f con el signo de su derivada f' , teoremas para la determinación de los intervalos de concavidad y convexidad, etc... A continuación enumeraremos las secciones que deberían tener en cuenta para poder comprender lo que sigue:

- La sección “ASÍNTOTAS Y MÉTODOS PARA HALLARLAS” en la página 521.
- La sección “REGLA DE L’HOSPITAL” en la página 452.
- La sección “DERIVADA Y CRECIMIENTO” en la página 428.
- La sección “CRECIMIENTO SEGÚN EL SIGNO DE LA DERIVADA” en la página 479.
- La sección “DETERMINACIÓN DE LOS INTERVALOS DE CRECIMIENTO” en la página 486.
- La sección “CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD” en la página 531.

(1)

(a)

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. En cuanto a su derivada como:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(1-x) - x^{\frac{2}{3}} = \frac{2 \cdot (1-x) - 3x}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{2-5x}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

entonces vemos que el único punto donde la misma tiene problemas es $x = 0$.

Así: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}_{\neq 0}$.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow C_f = \left\{ \frac{2}{5} \right\}$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada. Recordemos que deberemos incluir en la misma al punto $x = 0$ por no pertenecer al dominio de la derivada.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{2}{5})$	$(\frac{2}{5}, +\infty)$
f'	$f'(-1) = -\frac{7}{3}$	$f'(\frac{1}{5}) = \frac{3\sqrt[3]{5}}{5}$	$f'(1) = -1$
f	↘	↗	↘

Luego: $f(x)$ es creciente en $(0, \frac{2}{5})$ y decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(\frac{2}{5}, +\infty)$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Para calcular estas asíntotas debemos estudiar los límites laterales para x tendiendo a $+\infty$ y $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \overbrace{x^{\frac{1}{3}} \cdot x}^{-\pm\infty} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)}_{-1} = \mp\infty$$

Pero esto descarta la posibilidad de que hayan asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales: Es claro que no posee.

Asíntotas Oblicuas: Procedemos de la manera usual.

Para la pendiente m estudiamos la existencia de:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{\frac{1}{3}} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{x} - 1 \right)}{-1} = -\infty$$

Pero entonces no hay posibilidad de que nuestra función tenga asíntotas oblicuas.

Luego: $f(x)$ no posee ningún tipo de asíntota.

(c)

Si observamos la tabla es inmediato que en $x = 0$ f tiene un MÍNIMO LOCAL mientras que en $x = \frac{2}{5}$ tiene un MÁXIMO LOCAL. Observen que al contar con la información de las asíntotas sabemos que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, razón por la cual *ningún* EXTREMO LOCAL tendrá chance de ser absoluto.

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Como⁸⁰:

$$f'(x) = \frac{2 - 5x}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3} \cdot (2 - 5x) x^{-\frac{1}{3}}$$

entonces:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{3} \cdot \left(-5x^{-\frac{1}{3}} + (2 - 5x) \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) x^{-\frac{4}{3}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(-5x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{5}{3}x^{-\frac{4}{3}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}} \right) \\ &\hat{=} -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} \cdot (5x + 1) \leftarrow \text{Quedó muy sencilla.} \\ &= -\frac{2(5x + 1)}{9 \cdot \underbrace{\sqrt[3]{x^4}}_{>0 \forall x \neq 0}} \\ &= 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5} \Rightarrow C_{f'} = \left\{ -\frac{1}{5} \right\} \end{aligned}$$

Observación: Es sumamente importante que se den cuenta lo útil que es dar la forma adecuada a las expresiones antes de comenzar a derivar *para que las cuentas queden sencillas* — y luego del proceso de derivación saber extraer los factores comunes adecuados para que los *ceros de f'' salten a la vista fácilmente*. Recuerden que una de estas cuentas puede volverse *irrealizable* si no observan estas recomendaciones.

⁸⁰ Observen como la expresión de la derivada la acomodamos de forma tal que quede práctica a la hora de volver a derivar, minimizando así la cantidad de cuentas a realizar.

Hacemos ahora la tabla usual a partir de la cual extraeremos la información sobre los INTERVALOS DE CONCAVIDAD y PUNTOS DE INFLEXIÓN:

	$(-\infty, -\frac{1}{5})$	$-\frac{1}{5}$	$(-\frac{1}{5}, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	+		-		-
f'	\nearrow		\searrow		\searrow
f	\cup	P.I.	\cap	No es P.I.	\cap

Luego: Debe ser f **CÓNCAVA** en $(-\infty, -\frac{1}{5})$ y **CONVEXA** en $(-\frac{1}{5}, +\infty)$.

(f)

A partir de la información de la tabla realizada para determinar los INTERVALOS DE CONCAVIDAD es claro que f tiene un único PUNTO DE INFLEXIÓN en $x = -\frac{1}{5}$.

Ceros o Raíces

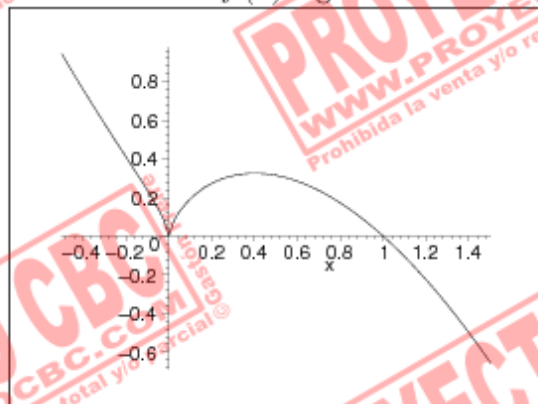
En el caso de la presente función no hay dificultad en calcular sus raíces siendo claro que:

$$x^{\frac{2}{3}} \cdot (1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

(g)

Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección "Indicaciones" el párrafo dedicado a "Recomendaciones para graficar" en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 140: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.

El punto de inflexión en $x = -0,2$ no es muy brusco como en otras funciones.

(2)

(a)

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. En cuanto a su derivada como:

$$f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

entonces vemos que que la misma no presenta ningún tipo de problemas.

Así: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}$.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\Rightarrow C_f = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada, teniendo en cuenta que como $\sin^2(x)$ es una función periódica de período π entonces será suficiente con analizar su comportamiento en el intervalo $(0, \pi)$. Deduciremos el comportamiento de la misma en cualquier otro intervalo a partir de la información colectada para el anterior.

	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
f'	$f'(\frac{\pi}{4}) = -1$	$f'(\frac{3\pi}{4}) = -1$
f	\nearrow	\searrow

Luego: $f(x)$ es creciente en $(0, \frac{\pi}{2})$ y decreciente en $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Debido al carácter periódico del $\sin^2(x)$, al ser dicho período π podemos inferir que $f(x)$ será creciente en cualquier intervalo de la forma $(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, y decreciente en cualquiera de la forma $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Para calcular estas asíntotas debemos estudiar los límites laterales para x tendiendo a $+\infty$ y $-\infty$. Sin embargo es claro que:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin^2(x) \quad \text{y} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin^2(x)$$

Para ver esto podemos usar el CRITERIO DE LAS SUCESIONES — *el cual pueden consultar en la resolución del EJERCICIO 10 de la PRÁCTICA 4 en la página 273.*

Consideremos:

$$a_n = -n\pi \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty \quad \text{y} \quad b_n = \frac{\pi}{2} - n\pi \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$$

Como:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \overbrace{\sin^2(a_n)}^{=0} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \overbrace{\sin^2(b_n)}^{=1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin^2(x)$$

Consideremos:

$$a_n = n\pi \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad \text{y} \quad b_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Como:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overbrace{\sin^2(a_n)}^{=0} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \overbrace{\sin^2(b_n)}^{=1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin^2(x)$$

Pero esto descarta la posibilidad de que hayan asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales: Es claro que no posee.

Asíntotas Oblicuas: Si bien dadas las características de esta función es claro que jamás podrá poseer ASÍNTOTAS OBLICUAS, la misma constituye un interesante ejemplo de como puede existir m como candidato a *posible* pendiente para dicha asíntota sin existir b para la misma.

Para la pendiente m estudiamos la existencia de:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\overbrace{\sin^2(x)}^{\text{acotado}}}{x} = 0 \Rightarrow m = 0$$

Sin embargo como:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin^2(x) - m \cdot x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin^2(x) \leftarrow Y \text{ éste último } \nexists.$$

debemos concluir que no puede existir $b \in \mathbb{R}$ tal que $y = mx + b$ sea una asíntota oblicua para f .

Pero entonces no hay posibilidad de que nuestra función tenga asíntotas oblicuas.

Luego: $f(x)$ no posee ningún tipo de asíntota.

(c)

Si observamos la tabla, como $f(x)$ es creciente en cualquier intervalo de la forma $(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}$ y decreciente en cualquiera de la forma $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}$, es inmediato que la misma verifica:

$$x \text{ es MÁXIMO LOCAL} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$x \text{ es MÍNIMO LOCAL} \Leftrightarrow x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Como $0 \leq \sin^2(x) \leq 1$ y justo en los máximos y mínimos hallados vale la igualdad, es evidente que los mismos son ABSOLUTOS.

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Como:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sin(x) \cos(x) \\ \Rightarrow f''(x) &= 2 \cdot (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \end{aligned}$$

Usando la importante identidad trigonométrica que dice:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

aplicada al caso particular $a = x = b$, se llega fácilmente a que:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \cdot \cos(2x) = 0 \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow C_f &= \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

Hacemos ahora la tabla usual a partir de la cual extraeremos la información sobre los INTERVALOS DE CONCAVIDAD y PUNTOS DE INFLEXIÓN, teniendo en cuenta que como $f''(x)$ es una función periódica de período π será suficiente con analizar la misma restringiéndose al intervalo $(0, \pi)$.

	$(0, \frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$	$\frac{3}{4}\pi$	$(\frac{3}{4}\pi, \pi)$
f''	+		-		+
f'	↗		↘		↗
f	∪	P.I.	∩	P.I.	∪

Luego se tiene que:

Los INTERVALOS DE CONCAVIDAD de $f(x)$ son:

$$\left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right)_{k \in \mathbb{Z}} \quad \left(\frac{3}{4}\pi + k\pi, \pi + k\pi \right)_{k \in \mathbb{Z}}$$

Los INTERVALOS DE CONVEXIDAD de $f(x)$ son:

$$\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi \right)_{k \in \mathbb{Z}}$$

(f)

A partir de la información de la tabla realizada para determinar los INTERVALOS DE CONCAVIDAD es claro que f tiene sus PUNTOS DE INFLEXIÓN en el conjunto $\{\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{3}{4}\pi + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Ceros o Raíces

En el caso de la presente función no hay dificultad en calcular sus raíces siendo claro que:

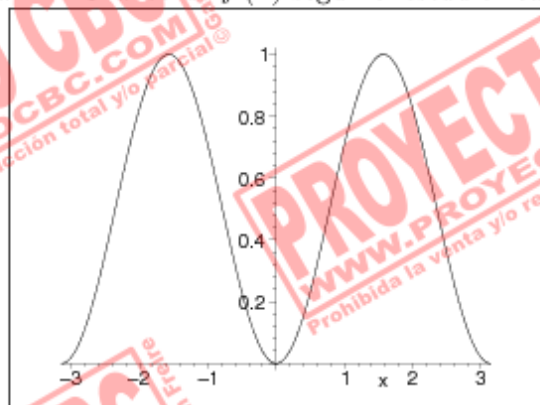
$$\sin^2(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

(g)

Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección “**Indicaciones**” el párrafo dedicado a “**Recomendaciones para graficar**” en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 141: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.



Obviamente el gráfico se repite hacia $+\infty$ y $-\infty$.

(3)

(a)

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ ya que es un sencillo polinomio.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 5 = 5 \cdot (x^4 - 1) \\ &= 5 \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) \leftarrow \text{Diferencia de Cuadrados.} \\ &= 5 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1) \end{aligned}$$

Obviamente al ser la derivada de ésta función un polinomio su dominio es también \mathbb{R} .

Así: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}$.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1) \\ &= 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\} \\ &\Rightarrow C_f = \{-1, 1\} \end{aligned}$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
f'	$f'(-2) = 75$ +	$f'(0) = -5$ -	$f'(2) = 75$ +
f	\nearrow	\searrow	\nearrow

Luego: $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, y decreciente en $(-1, 1)$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Claramente no posee ya que es trivial comprobar que los límites laterales sin infinitos — hecho que ocurre para cualquier polinomio. Observemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Asíntotas Verticales: Es claro que no posee ya que los polinomios no las tienen.

Asíntotas Oblicuas: Procedemos de la manera usual:

Para la pendiente m estudiamos la existencia de:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\overbrace{f(x)}^{+\infty}}{x} = +\infty$$

Pero entonces no hay posibilidad de que nuestra función tenga asíntotas oblicuas.

Luego: $f(x)$ no posee ningún tipo de asíntota.

(c)

Si observamos la tabla es inmediato que en $x = 1$ f tiene un MÍNIMO LOCAL mientras que en $x = -1$ tiene un MÁXIMO LOCAL. Observen que al contar con la información de los LÍMITES LATERALES sabemos que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, razón por la cual *ningún* EXTREMO LOCAL tendrá chance de ser absoluto.

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Como:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot (x^4 - 1) \\ f''(x) &= 20x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ &\Rightarrow C_{f'} = \{0\} \end{aligned}$$

Hacemos ahora la tabla usual a partir de la cual extraeremos la información sobre los INTERVALOS DE CONCAVIDAD y PUNTOS DE INFLEXIÓN:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	-		+
f'	↗		↘
f	∪	P.I.	∩

Luego: Debe ser f CÓNCAVA en $(0, +\infty)$ y CONVEXA en $(-\infty, 0)$.

(f)

A partir de la información de la tabla realizada para determinar los INTERVALOS DE CONCAVIDAD es claro que f tiene un único PUNTO DE INFLEXIÓN en $x = 0$.

Ceros o Raíces

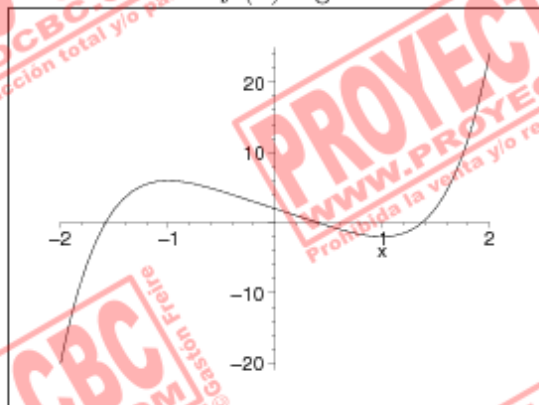
En este caso la determinación de las raíces de f no es para nada trivial. Sabemos que cuando se trata de hallar los ceros de un polinomio de grado mayor o igual a dos, difícilmente tengamos éxito en calcular sus raíces a menos que tengamos al mismo factorizado como producto de polinomios de grado más chico — *y por ende más manejables*. Por lo tanto no determinaremos los ceros de f .

(g)

Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección “**Indicaciones**” el párrafo dedicado a “**Recomendaciones para graficar**” en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 142: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.



Observen que no es para nada evidente la localización de las raíces. Sabemos que hay tres pero no podemos precisar con exactitud cuales son — *si las podríamos haber aproximado por ejemplo con el método de Bolzano*.

(4)

(a)

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. En cuanto a su derivada como:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+4x)e^x + (1+x+2x^2)e^x \\ &= (2x^2+5x+2)e^x \end{aligned}$$

entonces su dominio deben ser todos los números reales.

Así: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}$.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$f'(x) = (2x^2 + 5x + 2)e^x$$

Pero entonces vemos que f' tendrá sus ceros únicamente donde se anule la parábola ya que $e^x > 0 \forall x$. Y como:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = -2 \end{cases} \\ \Rightarrow C_f &= \left\{ -2, -\frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, +\infty)$
f'	$f'(-3) = 5$	$f'(-1) = -1$	$f'(0) = 2$
f	\nearrow	\searrow	\nearrow

Luego: $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2)$ y $(-\frac{1}{2}, +\infty)$, y decreciente en $(-2, -\frac{1}{2})$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Para calcular estas asíntotas debemos estudiar los límites laterales para x tendiendo a $+\infty$ y $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 2 \right)}^{-2} \cdot e^x = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \overbrace{2x^2 + x + 1}^{-+\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{-\infty} \\ &\stackrel{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 1}{-e^{-x}} \\ &\stackrel{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{e^{-x}} = 0 \end{aligned}$$

Luego:

En $-\infty$: f tiene una ASÍNTOTA HORIZONTAL de ecuación $y = 0$.

En $+\infty$: No posee.

Asíntotas Verticales: Es claro que no posee.

Asíntotas Oblicuas: Procedemos de la manera usual haciendo la aclaración de que no consideraremos el estudio de las mismas en $-\infty$, pues al haber una asíntota horizontal no puede haber una oblicua.

Para la pendiente m estudiamos la existencia de:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 2 \right)}^{-2} \cdot e^x}{x} = \pm\infty$$

Pero entonces no hay posibilidad de que nuestra función tenga asíntotas oblicuas.

Luego: $f(x)$ tienen una única asíntota, que es horizontal, de ecuación $y = 0$ en $-\infty$.

(c)

Si observamos la tabla es inmediato que en $x = -\frac{1}{2}$ f tiene un MÍNIMO LOCAL mientras que en $x = -2$ tiene un MÁXIMO LOCAL.

Observemos que como $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ya será imposible que el el máximo sea absoluto.

Tengamos en cuenta que $f(x)$ tiene una ASÍNTOTA HORIZONTAL de ecuación $y = 0$ en $-\infty$ y que $f(0) = 1$. Dado que f es una función CONTINUA en \mathbb{R} , por el TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS sabemos que $(0, 1) \subseteq \text{Im}(f)$. Pero ésto último prueba que hay valores tan cercanos a cero como se quiera en la imagen de nuestra función. Si observamos que $f(-\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} > 0$ resultará imposible que el mínimo $x = -\frac{1}{2}$ sea absoluto.

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Como:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^2 + 5x + 2)e^x \\ \Rightarrow f''(x) &= (4x + 5)e^x + (2x^2 + 5x + 2)e^x \\ &= (2x^2 + 9x + 7)e^x \end{aligned}$$

Nuevamente los ceros de f'' dependen con exclusividad de los de la parábola ya que $e^x > 0 \forall x$. Pero los ceros de la misma están dados por:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 9x + 7 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 56}}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{4} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{7}{2} \\ -1 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow C_{f''} = \left\{ -\frac{7}{2}, -1 \right\} \end{aligned}$$

Hacemos ahora la tabla usual a partir de la cual extraeremos la información sobre los INTERVALOS DE CONCAVIDAD y PUNTOS DE INFLEXIÓN:

	$(-\infty, -\frac{7}{2})$	$-\frac{7}{2}$	$(-\frac{7}{2}, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
f''	+		-		+
f'	\nearrow		\searrow		\nearrow
f	\cup	P.I.	\cap	P.I.	\cup

Luego: Debe ser f CÓNCAVA en $(-\infty, -\frac{7}{2})$ y $(-1, +\infty)$, y CONVEXA en $(-\frac{7}{2}, -1)$.

(f)

A partir de la información de la tabla realizada para determinar los INTERVALOS DE CONCAVIDAD es claro que f tiene dos PUNTOS DE INFLEXIÓN, uno en $x = -\frac{7}{2}$ y otro en $x = -1$.

Ceros o Raíces

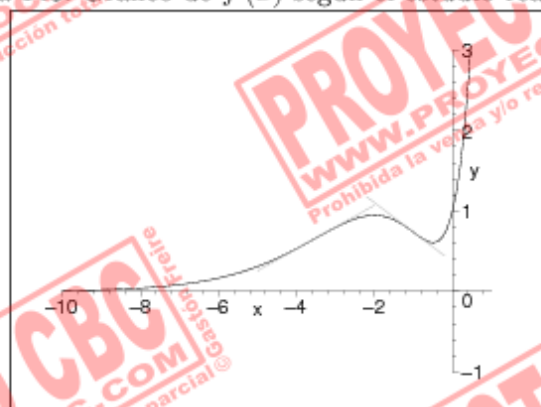
Observemos que las raíces de esta función dependen exclusivamente de las de la parábola $1 + x + 2x^2$ pues e^x es siempre positiva. Pero la anterior parábola tiene discriminante $D = b^2 - 4ac = -7 < 0$ razón por la cual la misma no tiene raíces, y por ende, f tampoco.

(g)

Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección “Indicaciones” el párrafo dedicado a “Recomendaciones para graficar” en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 143: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.



Se observa en el gráfico el máximo en $x = -2$, el mínimo en $x = -\frac{1}{2}$ y los puntos de inflexión en $x = -3,5$ y $x = -1$ respectivamente. No deben confundir la rapidez con que la función diverge con una asíntota vertical, que ya vimos no posee.

(5)

(a)

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ y que la misma es continua en él. Para trabajar con esta función es conveniente definirla por partes:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-(x-3)}{(x-1)^2} & , \text{ si } x \leq 3 \wedge x \neq 1 \\ \frac{x-3}{(x-1)^2} & , \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

Para valores de $x < 3 \wedge x \neq 1$: Su derivada queda:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(x-1)^2 + (x-3) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{x-5}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Para valores de $x > 3$: Una cuenta similar a la de arriba nos muestra que debe ser:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)^2 - (x-3) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{(x-5)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Si $x = 3$: Tenemos que estudiar la derivabilidad de f en $x = 3$ para saber si $3 \in \text{Dom} f'$ o no. Lo haremos a partir del COCIENTE INCREMENTAL mediante los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - \overbrace{f(3)}^{=0}}{h} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-h}{\underbrace{h(2+h)^2}_{-2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - \overbrace{f(3)}^{=0}}{h} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h}{\underbrace{h(2+h)^2}_{-2}} = \frac{1}{2}$$

Pero entonces la derivada queda:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{(x-1)^3} & , \text{ si } x < 3 \wedge x \neq 1 \\ \# & , \text{ si } x = 3 \\ -\frac{(x-5)}{(x-1)^3} & , \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$$

Entonces vemos que hay problemas no sólo en $x = 1$ sino en $x = 3$.

Así: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R} - \{1, 3\}$.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow C_f = \{3, 5\}$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada. Recordemos que deberemos incluir en la misma al punto $x = 1$ por no pertenecer al dominio de la derivada ni de la función.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, 5)$	$(5, +\infty)$
f'	$f'(0) = -5$	$f'(2) = -\frac{3}{8}$	$f'(4) = \frac{1}{27}$	$f'(6) = -\frac{1}{26}$
f	\nearrow	\searrow	\nearrow	\searrow

Luego: $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$ y $(3, 5)$, y decreciente en $(1, 3)$ y $(5, +\infty)$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Para calcular estas asíntotas debemos estudiar los límites laterales para x tendiendo a $+\infty$ y $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x| \cdot \overbrace{\left(1 - \frac{3}{x}\right)}^{-1}}{|x|^y \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}_{-1}} = 0$$

Luego: f tiene dos asíntotas horizontales de ecuación $y = 0$ en $-\infty$ y $+\infty$.

Asíntotas Verticales: Tenemos un candidato en $x = 1$. Como:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{|x-3|}^{-2}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\rightarrow 0^+}} = +\infty$$

entonces es claro que tiene una ASÍNTOTA VERTICAL en dicho punto que por ambos lados tiende a $+\infty$.

Asíntotas Oblicuas: No puede tener ya que en $\pm\infty$ ya tenemos asíntotas horizontales.

Luego: Las conclusiones para las asíntotas son:

En $-\infty$: Una ASÍNTOTA HORIZONTAL de ecuación $y = 0$.

En $+\infty$: Una ASÍNTOTA HORIZONTAL de ecuación $y = 0$.

En $x = 1$: Una ASÍNTOTA VERTICAL que tiende por ambos lados a $+\infty$.

(c)

Si observamos la tabla es inmediato que en $x = 3$ f tiene un MÍNIMO LOCAL mientras que en $x = 5$ tiene un MÁXIMO LOCAL.

Ahora tengamos en cuenta que f tiende a $+\infty$ cuando x tiende a 1 y que $f(3) = 0$. Como f es continua en $(1, 3)$ se sigue por el TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS que $(0, +\infty) \subseteq \text{Im}(f)$, lo que nos muestra que el máximo no puede ser absoluto.

Ahora tengamos en cuenta que en $(-\infty, 1)$ f es creciente. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ se deduce que $\forall x \in (-\infty, 1)$ es $f(x) > 0$. En el intervalo $(1, 5)$ el mínimo valor de f se alcanza en $x = 3$ donde $f(3) = 0$. Como a partir de este momento f comienza a decrecer hasta $+\infty$ y contamos con la información de que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ deducimos que en $(5, +\infty)$ debe ser $f(x) > 0$. Pero entonces $x = 3$ debe ser un MÍNIMO ABSOLUTO.

Así: En $x = 5$ f tiene un MÁXIMO LOCAL que no es absoluto mientras que en $x = 3$ f tiene un MÍNIMO LOCAL que además es absoluto.

Observación: Tengan en cuenta la importancia de contar con la información de las asíntotas y límites laterales a la hora de decidir si los EXTREMOS LOCALES son absolutos o no.

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Ya habíamos estudiado la función derivada la cual era:

$$f'(x) = \begin{cases} f'(x) = \frac{x-5}{(x-1)^3} & , \text{ si } x < 3 \wedge x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & , \text{ si } x = 3 \\ f'(x) = -\frac{(x-5)}{(x-1)^3} & , \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

Ahora tendríamos que estudiar la segunda derivada de f , la cual conviene estudiarla a trozos.

Si $x < 3 \wedge x \neq 1$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x-1)^3 - (x-5)3(x-1)^2}{(x-1)^2 \cdot (x-1)^4} \\ &= \frac{(x-1) - (3x-15)}{(x-1)^4} = \frac{-2x+14}{(x-1)^4} \\ &= -2 \cdot \frac{(x-7)}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

Si $x > 3$:

$$f''(x) = -\left(\frac{x-5}{(x-1)^3}\right)' = 2 \cdot \frac{(x-7)}{(x-1)^4}$$

Concluimos entonces que:

$$f''(x) = \begin{cases} -2 \cdot \frac{(x-7)}{(x-1)^4} & , \text{ si } x < 3 \wedge x \neq 1 \\ 2 \cdot \frac{(x-7)}{(x-1)^4} & , \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

Es inmediato que el único cero de $f''(x)$ es $x = 7$, razón por la cual $C_{f''} = \{3, 7\}$

Hacemos ahora la tabla usual a partir de la cual extraeremos la información sobre los INTERVALOS DE CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, 7)$	7	$(7, +\infty)$
f''	+		+		-		+
f'	\nearrow		\searrow		\searrow		\nearrow
f	\cup	No es P.I.	\cup	P.I.	\cap	P.I.	\cup

Luego: Debe ser f CÓNCAVA en $(-\infty, 1)$; $(1, 7)$ y $(7, +\infty)$, y CONVEXA en $(3, 7)$.

(f)

A partir de la información de la tabla realizada para determinar los INTERVALOS DE CONCAVIDAD es claro que f tiene un PUNTO DE INFLEXIÓN en $x = 3$ y otro en $x = 7$.

Ceros o Raíces

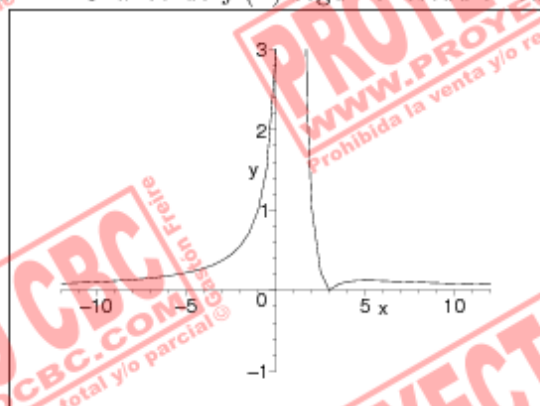
En el caso de la presente función no hay dificultad en calcular sus raíces siendo claro que:

$$\frac{|x - 3|}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

(g)

Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección “**Indicaciones**” el párrafo dedicado a “**Recomendaciones para graficar**” en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 144: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.

Puede apreciarse que f es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, 5)$ y decreciente en $(1, 3) \cup (5, +\infty)$ teniendo un MÍNIMO LOCAL en $x = 3$ y un MÁXIMO LOCAL en $x = 5$. Además f es CÓNCAVA en $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (7, +\infty)$ y CONVEXA en $(3, 7)$, siendo sus PUNTOS DE INFLEXIÓN $x = 3$ y $x = 7$.

Es posible ampliar un poco el gráfico de la función — claro que quedará fuera de escala — a fin de visualizar mejor la parte del mismo correspondiente al intervalo $(3, +\infty)$. El gráfico es el siguiente:

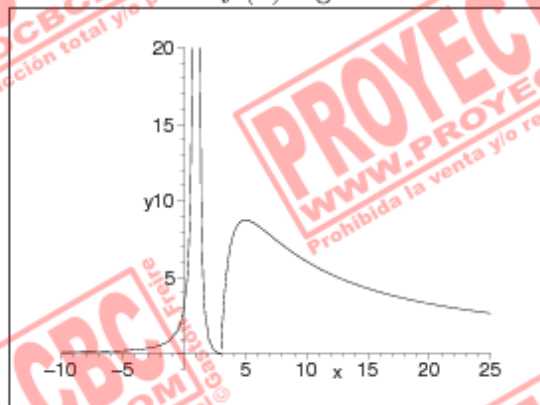
Figura 145: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.

Gráfico amplificado, se pierde la escala pero apreciamos mejor las características del mismo apreciándose bien los cambios en la concavidad y los puntos de inflexión.

(6)

(a)

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>2}$ ya que el argumento del logaritmo y la raíz cuadrada son mayores a cero en dicho dominio. En cuanto a su derivada como:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{5}{x-2} = \frac{\sqrt{x-2} - 10}{2(x-2)}$$

entonces vemos que el dominio de la misma debe ser el mismo que el de f .

Así: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>2} = \text{Dom}(f')$.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x-2} - 10}{2(x-2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 10 \\ &\Leftrightarrow x = 102 \\ &\Rightarrow C_f = \{102\} \end{aligned}$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada. Recordemos que deberemos incluir en la misma al punto $x = 0$ por no pertenecer al dominio de la derivada. +

	(2, 102)	102	(102, +∞)
f'	$f'(6) = -1$ -		$f'(123) = \frac{1}{232}$ +
f	↘	Mínimo Absoluto	↗

Luego: $f(x)$ es creciente en $(2, 102)$ y decreciente en $(102, +\infty)$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Tengamos en cuenta que la única que tiene sentido estudiar es la de $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - \frac{A(x)}{\sqrt{x}} \right)$$

Si vemos que la expresión $A(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ entonces el límite de arriba sería $+\infty$.

Pero:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \ln(x-2)}{\sqrt{x}} \\ &\stackrel{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot \frac{1}{x-2}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^{\frac{1}{2}}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}(10)}{x(1 - \frac{2}{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{\underbrace{\sqrt{x} \left(1 - \frac{2}{x}\right)}_{\rightarrow -1}} = 0 \end{aligned}$$

Pero esto descarta la posibilidad de que hayan asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales: Nuestro candidato es en $x = 2$ y por la derecha.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} - \overbrace{5 \ln(x-2)}^{+\infty} = +\infty$$

Luego: Hay una única ASÍNTOTA VERTICAL en $x = 2$ que por derecha tiende a $+\infty$.

Asíntotas Oblicuas: Veremos una interesante forma de descartar este tipo de asíntotas. La idea es probar que debería ser $m = 0$. Como sabemos que *no hay una asíntota horizontal* entonces tampoco podrá haber una oblicua pues en caso de haberla la misma al tener pendiente nula *debería ser horizontal*, cosa que no puede ser.

Para la pendiente m estudiamos la existencia de:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x} = 5 \cdot \frac{\ln(x-2)}{x}$$

Veremos que cada uno de los términos tiende a cero.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \overbrace{\left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}^{=\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{\sqrt{x}} = 0 \end{aligned}$$

Pero entonces por el razonamiento anterior no hay posibilidad de que nuestra función tenga una asíntota oblicuas en $+\infty$.

Luego: La única asíntota de la función es vertical y ocurre en $x = 2$ donde por derecha tiende a $+\infty$.

(c)

En este caso particular es muy sencillo argumentar que el Mínimo Local de $x = 2$ es absoluto. Como la función es estrictamente decreciente en $(2, 102)$ y estrictamente creciente en $(102, +\infty)$ entonces no hay otra posibilidad.

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Como:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\sqrt{x-2} - 10}{2(x-2)} \\
 f''(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}} \cdot 2(x-2) - (\sqrt{x-2} - 10) \cdot 2}{4(x-2)^2} \\
 &= \frac{(x-2) - \sqrt{x-2} \cdot 2(\sqrt{x-2} - 10)}{4(x-2)^{\frac{5}{2}}} \\
 &= \frac{(x-2) - 2((x-2) - 10\sqrt{x-2})}{4(x-2)^{\frac{5}{2}}} \\
 &= \frac{-(x-2) + 20\sqrt{x-2}}{4(x-2)} \\
 &= -\frac{1}{4} + \frac{5}{\sqrt{x-2}} = 0 \\
 \Leftrightarrow 20 &= \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x = 402
 \end{aligned}$$

Pero entonces hemos determinado:

$$f''(x) = \frac{5}{\sqrt{x-2}} - \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad C_{f'} = \{402\}$$

Observación: Es sumamente importante que se den cuenta lo útil que es dar la forma adecuada a las expresiones antes de comenzar a derivar y luego de hacerlo — *para que las cuentas queden sencillas*. Al momento de estudiar los PUNTOS CRÍTICOS hay que ser muy hábil y aprender los trucos necesarios para poder hacer las cuentas con éxito — *los cuales a menudo dependen de no desarrollar los paréntesis alocadamente*.

Hacemos ahora la tabla usual a partir de la cual extraeremos la información sobre los INTERVALOS DE CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN:

	$(2, 402)$	402	$(402, +\infty)$
f''	+		-
f'	↗		↘
f	∪	P.I.	∩

Luego: Debe ser f CÓNCAVA en $(2, 402)$ y CONVEXA en $(402, +\infty)$.

(f)

A partir de la información de la tabla realizada para determinar los INTERVALOS DE CONCAVIDAD es claro que f tiene un único PUNTO DE INFLEXIÓN en $x = 402$.

Ceros o Raíces

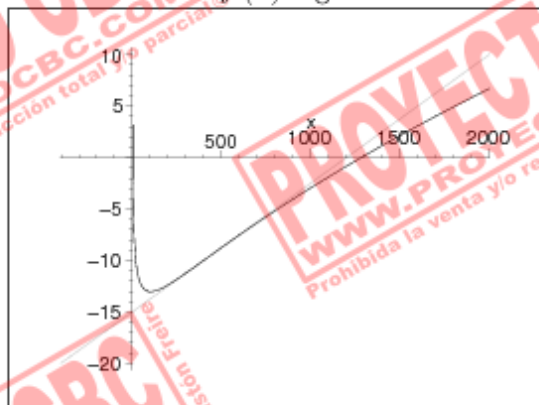
La determinación de las raíces en este caso no será realizable simbólicamente, razón por la cual no las estudiaremos. Sin embargo como $f(2000) > 0$ y $f(102) < 0$, siendo éste último un mínimo absoluto de la función podremos concluir que habrá dos ceros $r_1 \in (2, 102)$ y $r_2 \in (102, 2000)$, cuya aproximación podría hacerse a partir del método de bolzano.

(g)

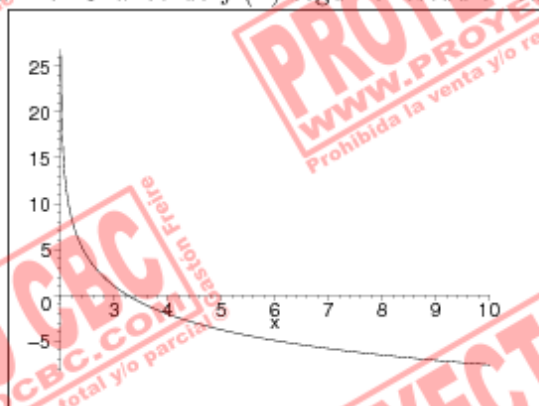
Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección “**Indicaciones**” el párrafo dedicado a “**Recomendaciones para graficar**” en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 146: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.



En este gráfico puede apreciarse tanto el mínimo hallado en $x = 102$ así como el cambio de la concavidad en el punto $x = 402$.

Figura 147: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.

En este gráfico puede apreciarse la primera raíz, que por razones de escala no se veía en el anterior.

(7)

(a)

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. En cuanto a su derivada como:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \beta \cdot \frac{2}{\beta} (x-5)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 1 - 2(x-5)^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

entonces vemos que el único punto donde la misma tiene problemas es 5.

Así: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x-5}} = 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x-5}} &= \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{x-5} &= \frac{1}{8} \\
 \Leftrightarrow x-5 &= 8 \\
 \Rightarrow C_f &= \{5, 13\}
 \end{aligned}$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada. Recordemos que deberemos incluir en la misma al punto $x = 5$ por no pertenecer al dominio de la derivada.

	$(-\infty, 5)$	$(5, 13)$	$(13, +\infty)$
f'	$f'(-3) = 2$ +	$f'(6) = -1$ -	$f'(33) = \frac{1}{2}$ +
f	\nearrow	\searrow	\nearrow

Luego: $f(x)$ es decreciente en $(5, 13)$ y creciente en $(-\infty, 5)$ y $(13, +\infty)$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Para calcular estas asíntotas debemos estudiar los límites laterales para x tendiendo a $+\infty$ y $-\infty$.

Estudiemos de manera auxiliar un límite que será de utilidad:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-5)^{\frac{3}{2}}}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\underbrace{\left(1 - \frac{5}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}_{\rightarrow 1}}{\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{\rightarrow \pm\infty}} = 0
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cdot \left(1 - 3 \cdot \left(\frac{\overbrace{\left(1 - \frac{5}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}_{\rightarrow 1}}{x}\right)\right) = \pm\infty$$

Pero esto descarta la posibilidad de que hayan asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales: Es claro que no posee.

Asíntotas Oblicuas: Procedemos de la manera usual.

Para la pendiente m estudiamos la existencia de:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 - 3 \cdot \overbrace{\left(\frac{(x-5)^{\frac{2}{3}}}{x} \right)^{-0}} = 1$$

Pero entonces debe ser $m = 1$. Ahora estudiemos se existe b .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -3 \cdot \overbrace{\left(\frac{(x-5)^{\frac{2}{3}}}{x} \right)^{-0}} = 0$$

Luego: Tenemos asíntotas oblicuas en cada uno de los infinitos de ecuación $y = x$.

Luego: $f(x)$ posee solamente asíntotas oblicuas en $\pm\infty$ ambas de ecuación $y = x$.

(c)

Si observamos la tabla es inmediato que en $x = 5$ f tiene un MÁXIMO LOCAL mientras que en $x = 13$ tiene un MÍNIMO LOCAL. Observen que al contar con la información de las asíntotas sabemos que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, razón por la cual *ningún* EXTREMO LOCAL tendrá chance de ser absoluto.

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Como:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 2(x-5)^{-\frac{1}{3}} \\ f''(x) &= \frac{2}{3} \underbrace{(x-5)^{-\frac{4}{3}}}_{\geq 0 \forall x \in \text{Dom}(f'')} \geq 0 \end{aligned}$$

entonces sabemos que debe ser f' creciente en todo su dominio.

Luego: Debe ser f CÓNCAVA sobre \mathbb{R} .

(f)

Obviamente no habrá puntos de inflexión si f no cambia su concavidad.

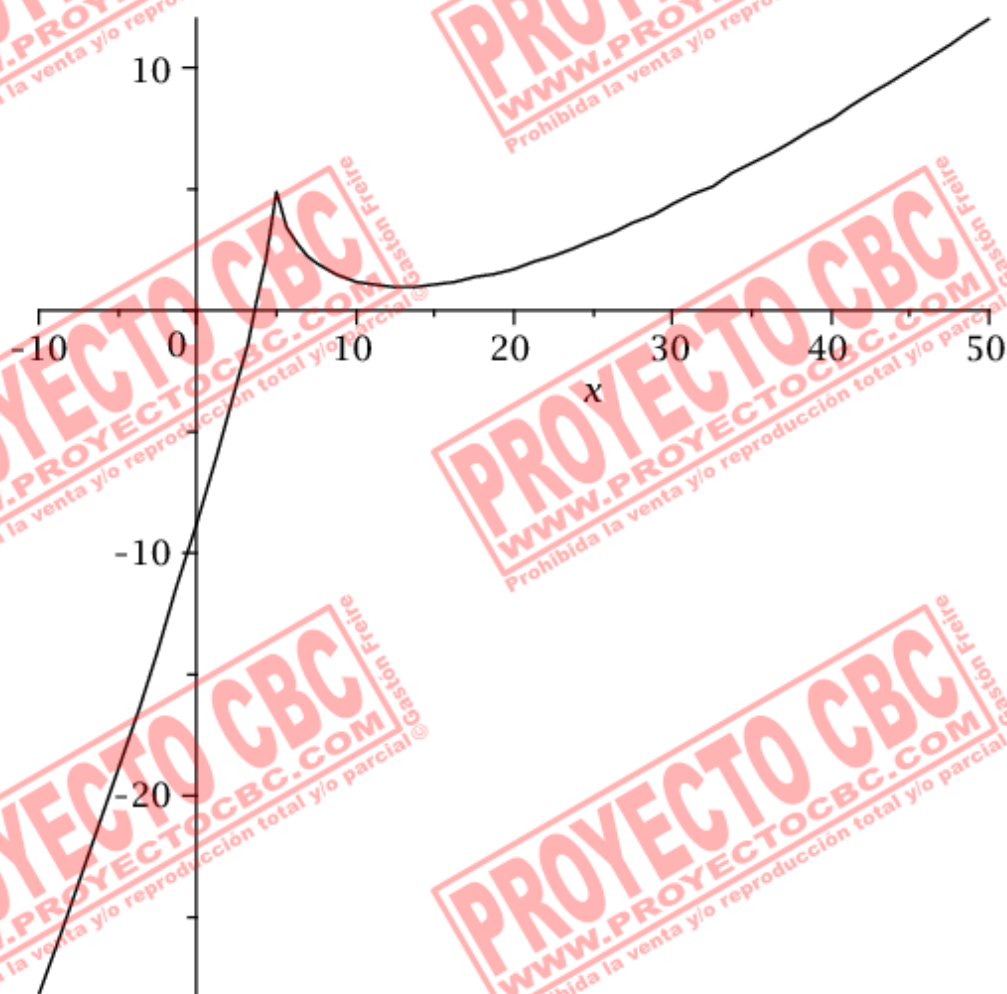
Ceros o Raíces

Tratándose de un polinomio de grado tres, puede llegar a ser problemático lidiar con sus raíces razón por la cual en este caso no las trataremos.

(g)

Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección “**Indicaciones**” el párrafo dedicado a “**Recomendaciones para graficar**” en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 148: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.

La misma tiene un máximo local en $x = 5$ y asíntotas oblicuas en $\pm\infty$ de ecuación $y = x$.

(8)

(a)

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>0}$. En cuanto a su derivada como:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \ln(x) - \frac{x^3}{x} \\ &= x^2 [3 \ln(x) - 1] \end{aligned}$$

entonces su dominio coincide con el de $f(x)$.

Así: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>0}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}_{>0}$.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 [3 \ln(x) - 1] = 0 \\ \Leftrightarrow 3 \ln(x) &= 1 \\ x &= e^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada.

	$(0, e^{\frac{1}{3}})$	$(e^{\frac{1}{3}}, +\infty)$
f'	$f'(1) = -1$	$f'(e) = 2^2$
f	\searrow	\nearrow

Luego: $f(x)$ es decreciente en $(0, e^{\frac{1}{3}})$ y creciente en $(e^{\frac{1}{3}}, +\infty)$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Para calcular estas asíntotas debemos estudiar el límite para x tendiendo a $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \ln(x) = +\infty$$

Pero esto descarta la posibilidad de que hayan asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales: El único candidato a ser asíntota vertical es $x = 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-3}} \stackrel{\text{(L'Hosp)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{3}x^3 = 0\end{aligned}$$

Pero entonces no hay una asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntotas Oblicuas: Procedemos de la manera usual.

Para la pendiente m estudiamos la existencia de:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(x) = +\infty$$

Luego: No hay asíntotas oblicuas.

Luego: $f(x)$ no posee asíntotas.

(c)

Si observamos la tabla es inmediato que en $x = e^{\frac{1}{3}}$ f tiene un MÍNIMO LOCAL — que obviamente es absoluto. Observen que como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ y $f\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{e}{3}$ entonces $\text{Im}(f) = \left[\frac{e}{3}, +\infty\right)$.

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Como:

$$\begin{aligned}f'(x) &= x^2 [3 \ln(x) - 1] \\ f''(x) &= 2x [3 \ln(x) - 1] + x^2 \left[\frac{3}{x}\right] \\ &= 6x \ln(x) + x \\ &= x [6 \ln(x) + 1] = 0 \\ \Leftrightarrow x &= e^{-\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

Si confeccionamos la tabla correspondiente:

	$(0, e^{-\frac{1}{6}})$	$e^{-\frac{1}{6}}$	$(e^{-\frac{1}{6}}, +\infty)$
f''	+		-
f'	\nearrow		\searrow
f	U	P.I.	∩

Luego: Debe ser f CONVEXA sobre $(0, e^{-\frac{1}{6}})$ y CÓNCAVA sobre $(e^{-\frac{1}{6}}, +\infty)$.

(f)

Obviamente el único punto de inflexión será $x = e^{-\frac{1}{6}}$.

Ceros o Raíces

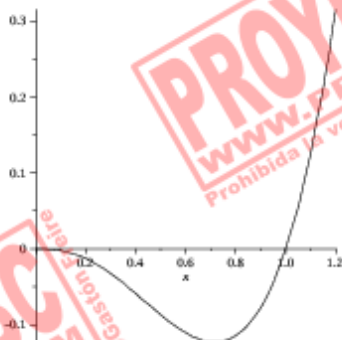
Resulta fácil comprobar que el único cero de $f(x)$ es $x = 1$.

(g)

Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección “**Indicaciones**” el párrafo dedicado a “**Recomendaciones para graficar**” en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 149: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.



El punto de inflexión es $x = e^{-\frac{1}{6}}$; el mínimo absoluto se da en $x = e^{-\frac{1}{3}}$ y el único cero de f es $x = 1$.

(9)

(a)

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>0}$. En cuanto a su derivada como:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln^2(x) + \frac{2x \ln(x)}{x} \\ &= \ln(x) [\ln(x) + 2] \end{aligned}$$

entonces su dominio coincide con el de $f(x)$.

Así: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>0}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}_{>0}$.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x) [\ln(x) + 2] = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^{-2} \end{aligned}$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada.

	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, 1)$	$(1, +\infty)$			
f'	$f'(e^{-3}) = -3$	$+$	$f'(e^{-1}) = -1$	$-$	$f'(e) = 3$	$+$
f	↗		↘		↗	

Luego: $f(x)$ es decreciente en $(e^{-2}, 1)$ y creciente en $(0, e^{-2})$ y $(1, +\infty)$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Para calcular estas asíntotas debemos estudiar el límite para x tendiendo a $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln^2(x) = +\infty$$

Pero esto descarta la posibilidad de que hayan asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales: El único candidato a ser asíntota vertical es $x = 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2(x)}{x^{-1}} \stackrel{(L'Hosp)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln(x)}{-x^{-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2 \ln(x)}{x^{-1}} \stackrel{(L'Hosp)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2}{-x^{-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0\end{aligned}$$

Pero entonces no hay una asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntotas Oblicuas: Procedemos de la manera usual.

Para la pendiente m estudiamos la existencia de:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2(x) = +\infty$$

Luego: No hay asíntotas oblicuas.

Luego: $f(x)$ no posee asíntotas.

(c)

Si observamos la tabla es inmediato que en $x = e^{-2}$ f tiene un MÁXIMO LOCAL mientras que en $x = 1$ la misma tiene un MÍNIMO LOCAL. Utilizando la información de los límites laterales obtenemos $\text{Im}(f) = [0; +\infty)$, razón por la cual el máximo no será absoluto mientras el mínimo sí lo es.

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Como:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \ln(x) [\ln(x) + 2] \\ f''(x) &= \frac{2[\ln(x) + 1]}{x} = 0 \\ \Leftrightarrow &x = e^{-1}\end{aligned}$$

Si confeccionamos la tabla correspondiente:

	$(0, e^{-1})$	e^{-1}	$(e^{-1}, +\infty)$
f''	-		+
f'	\searrow		\nearrow
f	\cap	P.I.	\cup

Luego: Debe ser f CÓNCAVA sobre $(0, e^{-1})$ y CONVEXA sobre $(e^{-1}, +\infty)$.

(f)

Obviamente el único punto de inflexión será $x = e^{-1}$.

Ceros o Raíces

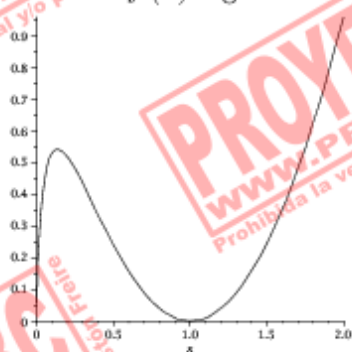
Resulta fácil comprobar que el único cero de $f(x)$ es $x = 1$.

(g)

Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección “**Indicaciones**” el párrafo dedicado a “**Recomendaciones para graficar**” en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 150: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.



El punto de inflexión es $x = e^{-1}$; el mínimo absoluto se da en $x = 1$; tiene un máximo local en $x = e^{-2}$; y el único cero de f es $x = 1$.

(10)

(a)

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. En cuanto a su derivada, tratándose de una función partida:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{8}{(x-1)^2} & , \text{ si } x \leq 0 \\ 3(1-x^2) & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

entonces su dominio coincide con el de $f(x)$.

Así: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}$.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{8}{(x-1)^2} & , \text{ si } x \leq 0 \\ 3(1-x^2) & , \text{ si } x > 0 \end{cases} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada. Recordemos incluir en la misma al punto $x = 0$ pues es el punto en donde la definición de f se parte.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
f'	$f'(-1) = -2$	$f'(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$	$f'(2) = -9$
f	↘	↗	↘

Luego: $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(1, +\infty)$, y creciente en $(0, 1)$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Para calcular estas asíntotas debemos estudiar el límite para x tendiendo a $+\infty$ y $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{x-1} = 8$$

Pero entonces f tiene una asíntota horizontal en $-\infty$ de ecuación $y = 8$.

Asíntotas Verticales: No pueden haber pues el único lugar donde — *en principio* — podría haber problemas es en el denominador de la fórmula de más arriba, el cual se anula en $x = 1$, pero dicha fórmula corresponde al caso $x \leq 0$ razón por la cual jamás pasamos por dicho punto.

Asíntotas Oblicuas: Procedemos de la manera usual.

Para la pendiente m estudiamos la existencia de:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - x^2 = -\infty$$

Luego: No hay asíntotas oblicuas.

Luego: $f(x)$ tiene una única asíntota horizontal en $-\infty$ de ecuación $y = 8$.

(c)

Si observamos la tabla es inmediato que en $x = 1$ f tiene un MÁXIMO LOCAL mientras que en $x = 0$ la misma tiene un MÍNIMO LOCAL. Para determinar en forma fehaciente la $\text{Im}(f)$ debemos estudiar:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x - x^3 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{8x}{x-1} = 0$$

Utilizando la información de los límites laterales así como también los límites anteriores, obtenemos $\text{Im}(f) = (-\infty, 8)$, razón por la cual el mínimo no será absoluto. En cuanto al máximo, como $f(1) = 2$ tampoco resulta ser un máximo absoluto.

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Como:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{8}{(x-1)^2} & , \text{ si } x \leq 0 \\ 3(1-x^2) & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{16}{(x-1)^3} & , \text{ si } x \leq 0 \\ -6x & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

entonces la segunda derivada no se anula jamás. No obstante, como $x = 0$ es un punto donde la definición de f se parte, debemos confeccionar la tabla correspondiente incluyendo como único punto de partición del dominio a $x = 0$:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	-		-
f'	\searrow		\searrow
f	\cap	P.I.	\cap

Luego: Debe ser f CONVEXA sobre \mathbb{R} .

(f)

Obviamente no hay puntos de inflexión.

Ceros o Raíces

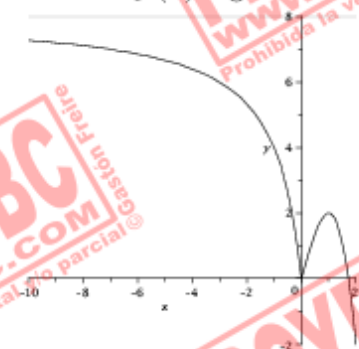
Resulta fácil comprobar que el único cero de $f(x)$ es $x = 0$.

(g)

Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección "Indicaciones" el párrafo dedicado a "Recomendaciones para graficar" en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 151: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.



Tiene un mínimo local en $x = 0$ y un máximo local en $x = 1$. El único cero de f es $x = 0$.

(11)

(a)

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, -1\}$. En cuanto a su derivada como:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(x+3)(x+1) - (3x+11)(2x+4)}{(x+3)^2(x+1)^2} \\ &= -\frac{3x^2 + 22x + 35}{(x+3)^2(x+1)^2} \end{aligned}$$

entonces su dominio coincide con el de $f(x)$.

Así: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3, -1\}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R} - \{-3, -1\}$.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3x^2 + 22x + 35}{(x+3)^2(x+1)^2} = 0 \\ \Leftrightarrow x &= -5 \vee -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada.

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -3)$	$(-3, -\frac{7}{3})$	$(-\frac{7}{3}, -1)$	$(-1, +\infty)$	
f'	$f'(-6) = -\frac{11}{226}$	$-$	$f'(-4) = \frac{8}{9}$	$+$	$f'(-\frac{8}{3}) = -\frac{126}{16}$	$-$
f	\searrow		\nearrow		\searrow	

Luego: $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -5)$; $(-\frac{7}{3}, -1)$ y $(-1, +\infty)$, y creciente en $(-5, -3)$ y $(-3, -\frac{7}{3})$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Para calcular estas asíntotas debemos estudiar el límite para x tendiendo a $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+11}{(x+3)(x+1)} = 0$$

claramente. Pero entonces hay una asíntota horizontal en $-\infty$ y otra en $+\infty$, ambas de ecuación $y = 0$.

Asíntotas Verticales: Los candidatos a ser asíntotas verticales son $x = -3$ y $x = -1$. Los límites laterales en dichos puntos son:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\overbrace{3x+11}^{-2}}{\underbrace{(x+3)(x+1)}_{-0^+ \cdot -2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{\overbrace{3x+11}^{-2}}{\underbrace{(x+3)(x+1)}_{-0^- \cdot -2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\overbrace{3x+11}^{-8}}{\underbrace{(x+3)(x+1)}_{-2 \cdot -0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\overbrace{3x+11}^{-8}}{\underbrace{(x+3)(x+1)}_{-2 \cdot -0^-}} = -\infty$$

Pero entonces no hay una asíntota vertical en $x = -3$ y otra en $x = -1$.

Asíntotas Oblicuas: La presencia de asíntotas horizontales en $\pm\infty$ excluye la posibilidad de estas últimas⁸¹.

Luego: $f(x)$ posee dos asíntotas verticales, una en $x = -3$ y otra en $x = -1$, y asíntotas horizontales de ecuación $y = 0$ en $\pm\infty$.

⁸¹Una sutileza, las asíntotas horizontales pueden ser pensadas como asíntotas oblicuas de pendiente nula, pero según la nomenclatura pautada en el curso, a estas últimas las llamamos asíntotas horizontales.

(c)

Si observamos la tabla es inmediato que en $x = -\frac{7}{3}$ f tiene un MÁXIMO LOCAL, mientras que en $x = -5$ la misma tiene un MÍNIMO LOCAL. Utilizando la información de los límites laterales obtenemos $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, razón por la cual los extremos relativos no son absolutos.

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Como:

$$f'(x) = -\frac{3x^2 + 22x + 35}{(x+3)^2(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6x^3 + 66x^2 + 210x + 214}{(x+3)^3(x+1)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = r = -\frac{4\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4} + 11}{3} \approx -6,405$$

y por lo tanto tiene una única raíz real⁸². Si confeccionamos la tabla correspondiente:

	$(-\infty, r)$	r	$(r, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, +\infty)$
f''	-		+	-	+
f'	\searrow		\nearrow	\searrow	\nearrow
f	\cap	P.I.	\cup	\cap	\cup

Luego: Debe ser f CÓNCAVA sobre $(r, -3)$ y $(-1, +\infty)$, y CONVEXA sobre $(-\infty, r)$ y $(-3, -1)$.

(f)

Obviamente el único punto de inflexión será $x = r$.

Ceros o Raíces

Resulta fácil comprobar que el único cero de $f(x)$ es $x = -\frac{11}{3}$.

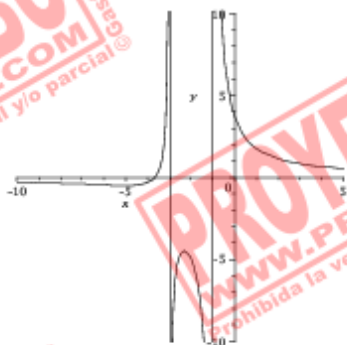
⁸²La determinación de dicha raíz no es trivial. Podríamos decir — según las indicaciones del enunciado — que en este ítem la cuenta no permite la determinación de la concavidad. No obstante estudiaremos la misma sin ahondar demasiado sobre como obtuvimos r .

(g)

Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección “Indicaciones” el párrafo dedicado a “Recomendaciones para graficar” en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 152: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.



El punto de inflexión es $x = -\frac{4\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4+11}}{3}$; el mínimo absoluto se da en $x = -5$; tiene un máximo local en $x = -\frac{7}{3}$; y el único cero de f es $x = -\frac{11}{3}$.

(12)

(a)

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. En cuanto a su derivada:

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2} (1 - 2x^2)$$

entonces su dominio coincide con el de $f(x)$.

Así: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}$.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2} (1 - 2x^2) = 0 \\ \Leftrightarrow x &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0,707 \end{aligned}$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada.

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$			
f'	$f'(-1) = -e^{-1}$	-	$f'(0) = 1$	+	$f'(1) = -e^{-1}$	-
f	↘		↗		↘	

Luego: $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$, y creciente en $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Para calcular estas asíntotas debemos estudiar el límite para x tendiendo a $+\infty$ y $-\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} \\ &\stackrel{\text{(L'Hosp.)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} \\ &\stackrel{\text{(L'Hosp.)}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0 \end{aligned}$$

Pero entonces f tiene una asíntota horizontal en $\pm\infty$ de ecuación $y = 0$.

Asíntotas Verticales: Claramente no pueden haber.

Asíntotas Oblicuas: La presencia de dos asíntotas horizontales descarta la posibilidad de haber asíntotas oblicuas.

Luego: $f(x)$ presenta asíntotas horizontales en $\pm\infty$ de ecuación $y = 0$.

(c)

Si observamos la tabla es inmediato que en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ f tiene un MÁXIMO LOCAL mientras que en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ la misma tiene un MÍNIMO LOCAL. Para determinar $\text{Im}(f)$ calculamos:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}$$

y por lo tanto resulta:

$$\text{Im}(f) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}} \right]$$

Lo último implica naturalmente que tanto el máximo como el mínimo son absolutos.

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Como:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2} (1 - 2x^2) \\ f''(x) &= -2xe^{-x^2} (1 - 2x^2) - 4xe^{-x^2} \\ &= -2xe^{-x^2} (3 - 2x^2) = 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \vee x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1,22 \end{aligned}$$

entonces la tabla correspondiente resulta:

	$(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$	0	$(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$
f''			+		-		+
f'	\searrow		\nearrow		\searrow		\nearrow
f	\cap	P.I.	\cup	P.I.	\cap	P.I.	\cup

Luego: Debe ser f CONVEXA sobre $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ y $(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$, y CÓNCAVA sobre $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$ y $(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$.

(f)

Los puntos de inflexión son $x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ y $x = 0$.

Ceros o Raíces

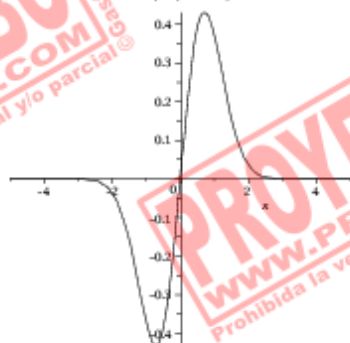
Resulta fácil comprobar que el único cero de $f(x)$ es $x = 0$.

(g)

Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección “Indicaciones” el párrafo dedicado a “Recomendaciones para graficar” en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 153: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.



Tiene un mínimo absoluto en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y un máximo absoluto en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; sus puntos de inflexión son $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ y $x = 0$. El único cero de f es $x = 0$.

(13)

(a)

Observemos que el dominio de f está dado por:

$$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

lo cual se expresa mejor indicando $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$. En cuanto a su derivada:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$$

entonces su dominio no coincide con el de $f(x)$, siendo⁸³ $\text{Dom}(f') = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Así: $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

⁸³Si bien — como función — f' tiene un dominio distinto al de f , jamás debemos confundir este hecho con que f sea derivable más allá de su propio dominio. La función $f(x)$ es derivable en todo su dominio, pero la función derivada tiene un dominio más amplio.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$f'(x) = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \notin \text{Dom}(f)$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada, sabiendo que la misma conservará su signo en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$ respectivamente.

	$(-\infty, -1)$	$(1, +\infty)$
f'	$f'(-2) = -\frac{4}{3} < 0$	$f'(2) = \frac{4}{3} > 0$
f	↘	↗

Luego: $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(1, +\infty)$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Para calcular estas asíntotas debemos estudiar el límite para x tendiendo a $+\infty$ y $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x^2 - 1) = +\infty$$

Pero entonces f no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales: Los candidatos son $x = -1$ — por izquierda — y $x = 1$ — por derecha.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(x^2 - 1) = -\infty = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2 - 1)$$

Luego: Hay dos asíntotas verticales de ecuaciones $x = -1$ y $x = 1$.

Asíntotas Oblicuas: Procedemos de la manera usual.

Para la pendiente m estudiamos la existencia de:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$$

$$\stackrel{\text{(L'Hosp.)}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = 0$$

Pero entonces $m = 0$, lo cual sólo es posible si hubiera asíntotas horizontales, las cuales vimos que no habían.

Luego: No hay asíntotas oblicuas.

Luego: $f(x)$ presenta sólo dos asíntotas verticales, cuyas ecuaciones son $x = -1$ y $x = 1$.

(c)

Si observamos la tabla es inmediato que no pueden haber extremos para esta función, cuya imagen es $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Como:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{x^2-1} \\ f''(x) &= -2 \frac{x^2-1}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{(x^2-1)} \\ &< 0 \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

entonces la segunda derivada es siempre negativa, y por lo tanto f es CONVEXA en todo su dominio.

(f)

Obviamente no hay puntos de inflexión.

Ceros o Raíces

Resulta fácil comprobar que f tiene dos ceros, respectivamente en $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.

(g)

Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección “Indicaciones” el párrafo dedicado a “Recomendaciones para graficar” en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 154: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.



Es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(1, +\infty)$. Es siempre CONVEXA. Sus raíces son $x = \pm\sqrt{2}$.

(14)

(a)

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. En cuanto a su derivada:

$$f'(x) = 4 - 4x^{-\frac{1}{5}} = 4\left(1 - x^{-\frac{1}{5}}\right)$$

entonces su dominio no coincide con el de $f(x)$, pues f no es derivable en $x = 0$.

Así: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$f'(x) = 4 \left(1 - x^{-\frac{1}{5}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada, teniendo presente el hecho de incluir $x = 0$ en la tabla pues es un punto del dominio de f donde la misma no resulta derivable:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$	
f'	$f'(-1) = 3 > 0$	$f'(\frac{1}{2}) \approx -0,59 < 0$	$f'(2) \approx 0,52 > 0$	
f	\nearrow	\searrow	\nearrow	

Luego: $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$ y $(1, +\infty)$, y decreciente en $(0, 1)$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Para calcular estas asíntotas debemos estudiar el límite para x tendiendo a $+\infty$ y $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x - 5x^{\frac{4}{5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x^{\frac{4}{5}}}_{\rightarrow +\infty} \left(4x^{\frac{1}{5}} - 5 \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^{\frac{4}{5}}}_{\rightarrow +\infty} \left(4x^{\frac{1}{5}} - 5 \right) = -\infty$$

Pero entonces f no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales: Claramente no pueden haber.

Asíntotas Oblicuas: Procedemos de la manera usual.

Para la pendiente m estudiamos la existencia de:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 4 - \frac{1}{\sqrt[5]{x}} = 4$$

Para la ordenada al origen b debemos estudiar:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -5x^{\frac{4}{5}} = -\infty$$

Luego: No hay asíntotas oblicuas.

Luego: $f(x)$ no presenta asíntotas de ningún tipo.

(c)

Si observamos la tabla es inmediato que en $x = 0$ f tiene un MÁXIMO LOCAL mientras que en $x = 1$ la misma tiene un MÍNIMO LOCAL. Utilizando la información de los límites laterales obtenemos $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, razón por la cual ni el mínimo ni el máximo serán absolutos.

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Como:

$$f'(x) = 4 \left(1 - x^{-\frac{1}{5}}\right)$$

$$f''(x) = \frac{4}{5} x^{-\frac{6}{5}}$$

entonces la segunda derivada no se anula jamás. No obstante, como $x = 0$ es un punto donde f no es derivable, debemos confeccionar la tabla correspondiente incluyendo como único punto de partición del dominio a $x = 0$:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	+		+
f'	↗		↘
f	∪	P.I.	∪

Luego: Debe ser f CÓNCAVA sobre \mathbb{R} .

(f)

Obviamente no hay puntos de inflexión.

Ceros o Raíces

Como:

$$4x - 5x^{\frac{4}{5}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = 5x^{\frac{4}{5}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^5 x^5 = x^4$$

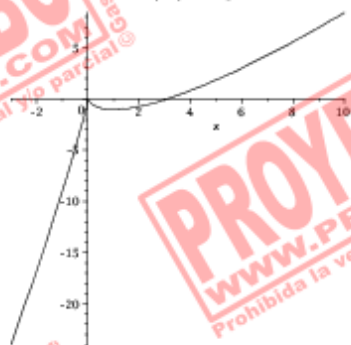
entonces las raíces de f son $x = 0$ y $x = \left(\frac{5}{4}\right)^5 \approx 3,052$.

(g)

Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección “Indicaciones” el párrafo dedicado a “Recomendaciones para graficar” en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 155: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.



Tiene un máximo local en $x = 0$ y un mínimo local en $x = 1$. Sus raíces son $x = 0$ y $x = \left(\frac{8}{4}\right)^5 \approx 3,052$

(15)

(a)

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{\neq 1}$. En cuanto a su derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

entonces su dominio coincide con el de $f(x)$.

Así: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{\neq 1}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}_{\neq 1}$.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=3$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada, teniendo presente el hecho de incluir $x=1$ en la misma pues es un punto no perteneciente al dominio de f .

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$	
f'	$f'(-1) = -\frac{1}{2} < 0$	$f'(\frac{1}{2}) = 5 > 0$	$f'(2) = -4 < 0$	$f'(4) = \frac{16}{27} > 0$	
f	\nearrow	\nearrow	\searrow	\nearrow	

Luego: $f(x)$ es decreciente en $(1, 3)$, y creciente en $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(3, +\infty)$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Para calcular estas asíntotas debemos estudiar el límite para x tendiendo a $+\infty$ y $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = -\infty$$

Pero entonces f no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales: El único candidato es $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

y por lo tanto tenemos una asíntota vertical de ecuación $x=1$, que tanto por derecha como por izquierda tiende a $+\infty$.

Asíntotas Oblicuas: Procedemos de la manera usual.

Para la pendiente m estudiamos la existencia de:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = 1$$

Para la ordenada al origen b debemos estudiar:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x(x^2 - 2x + 1)}{x^2 - 2x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 2\end{aligned}$$

Luego: Tenemos asíntotas oblicuas en $\pm\infty$ de ecuación $y = x + 2$.

Luego: $f(x)$ presenta una asíntota vertical en $x = 1$ y asíntotas oblicuas en $\pm\infty$ de ecuación $y = x + 2$.

(c)

Si observamos la tabla es inmediato que en $x = 3$ f tiene un MÍNIMO LOCAL. Utilizando la información de los límites laterales obtenemos $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, razón por la cual los extremos no serán absolutos.

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Como:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \\ f''(x) &= \frac{3x(x-2)(x-1)^3 - 3x^2(x-3)(x-1)^2}{(x-1)^6} \\ &= \frac{3x[(x-2)(x-1) - x(x-3)]}{(x-1)^4} \\ &= \frac{3x[-3x+5]}{(x-1)^4} = \frac{-9x(x-\frac{5}{3})}{(x-1)^4}\end{aligned}$$

entonces la segunda derivada se anula en $x = 0$ y $x = \frac{5}{3}$. No obstante, como $x = 1$ es un punto no perteneciente al dominio de f , debemos confeccionar la tabla correspondiente incluyendo a éste último:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \frac{5}{3})$	$\frac{5}{3}$	$(\frac{5}{3}, +\infty)$
f''	-		+		+		-
f'	\searrow		\nearrow		\nearrow		\searrow
f	\cap	P.I.	\cup		\cup	P.I.	\cap

Luego: Debe ser f CÓNCAVA sobre $(0, 1)$ y $(1, \frac{5}{3})$, y convexa sobre $(-\infty, 0)$ y $(\frac{5}{3}, +\infty)$.

(f)

Los puntos de inflexión son $x = 0$ y $x = \frac{5}{3}$.

Ceros o Raíces

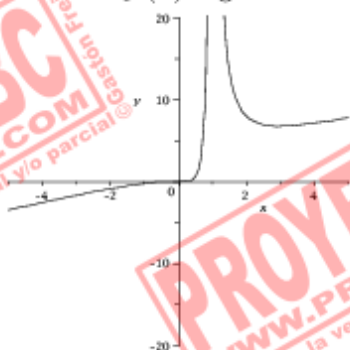
La única raíz de f es $x = 0$.

(g)

Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección “Indicaciones” el párrafo dedicado a “Recomendaciones para graficar” en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 156: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.



Tiene un mínimo local en $x = 3$. Su única raíz es $x = 0$. Tiene puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = \frac{5}{3}$.

(16)

(a)

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{\neq 0}$. En cuanto a su derivada:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} (x - 1)$$

entonces su dominio coincide con el de $f(x)$.

Así: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{\neq 0}$ y $\text{Dom}(f') = \mathbb{R}_{\neq 0}$.

(b)

Como vimos en ejercicios anteriores, tratándose de f' una función continua en su dominio, para estudiar los intervalos de crecimiento de f es de extrema utilidad la determinación de sus PUNTOS CRÍTICOS.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} (x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Ahora podemos realizar la tabla usual para determinar el crecimiento a partir del signo de la derivada, teniendo presente el hecho de incluir $x = 0$ en la misma pues es un punto no perteneciente al dominio de f .

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
f'	$f'(-1) = 2e^{-1} > 0$	$f'(\frac{1}{2}) = -2e^2 < 0$	$f'(2) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} > 0$
f	\nearrow	\searrow	\nearrow

Luego: $f(x)$ es decreciente en $(0, 1)$, y creciente en $(-\infty, 0)$ y $(1, +\infty)$.

(d)

Asíntotas Horizontales: Para calcular estas asíntotas debemos estudiar el límite para x tendiendo a $+\infty$ y $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x}} = -\infty$$

Pero entonces f no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas Verticales: El único candidato es $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{\frac{1}{x^2}} e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} \\ (\text{L'Hosp.}) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \end{aligned}$$

y por lo tanto tenemos una asíntota vertical de ecuación $x = 1$ — por derecha — que tiende a $+\infty$.

Asíntotas Oblicuas: Procedemos de la manera usual.

Para la pendiente m estudiamos la existencia de:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

Para la ordenada al origen b debemos estudiar:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{x^2}} e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} \\ (\text{L'Hosp.}) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

Luego: Tenemos asíntotas oblicuas en $\pm\infty$ de ecuación $y = x + 1$.

Luego: $f(x)$ presenta una asíntota vertical — por derecha — en $x = 0$ y asíntotas oblicuas en $\pm\infty$ de ecuación $y = x + 1$.

(c)

Si observamos la tabla es inmediato que en $x = 1$ f tiene un MÍNIMO LOCAL. Utilizando la información de los límites laterales obtenemos $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{\neq 0}$, razón por la cual el mínimo no será absoluto.

(e)

Pasamos ahora al estudio de la concavidad, para lo cual determinaremos los INTERVALOS DE CRECIMIENTO de la derivada. Sabemos que en aquellos intervalos donde f' resulte creciente la función f será CÓNCAVA, mientras que en aquellos donde sea decreciente, f será CONVEXA.

Como:

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}(x-1)}{x} = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$$

entonces la segunda derivada no se anula jamás. No obstante, como $x = 0$ es un punto no perteneciente al dominio de f , debemos confeccionar la tabla correspondiente incluyendo a éste último:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	-		+
f'	\searrow		\nearrow
f	\cap		\cup

Luego: Debe ser f CÓNCAVA sobre $(0, +\infty)$ y CONVEXA sobre $(-\infty, 0)$.

(f)

Obviamente no hay puntos de inflexión.

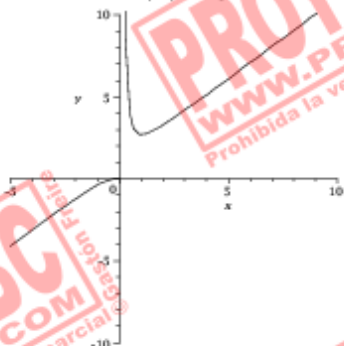
Ceros o Raíces

No tiene raíces.

(g)

Un buen consejo en este momento es que consulten en la sección “**Indicaciones**” el párrafo dedicado a “**Recomendaciones para graficar**” en la página 539. Ahí encontrarán útiles consejos que servirán para no fracasar a la hora de transformar la *cuantiosa* información colectada en un lindo gráfico.

Si respetan las mismas debería haber quedado algo como:

Figura 157: Gráfico de $f(x)$ según el estudio realizado.

Tiene un mínimo local en $x = 1$. No posee raíces ni puntos de inflexión.

■

Ejercicio 14

(a)

Como $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (0, 2)$ y $x \in (3, 4)$ entonces dichos intervalos serán los de crecimiento de f . Análogamente, como $f'(x) \leq 0$ sobre el $(2, 3)$ entonces sobre éste último f será decreciente.

(b)

A partir del punto anterior es fácil comprobar que f tendrá un máximo local en $x = 2$ y un mínimo local en $x = 3$. Como f es creciente en $(0, 2)$ y $(3, 4)$ también tendrá un mínimo local en $x = 0$ y un máximo local en $x = 4$. En cuanto a los puntos de inflexión, es conveniente confeccionar la tabla correspondiente para poder visualizar mejor la información:

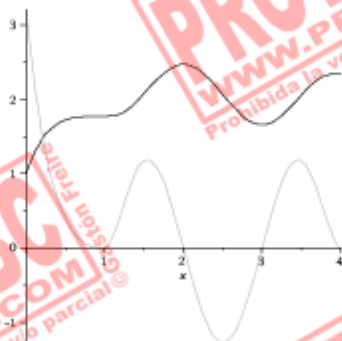
	$(0, 1)$	0	$(1, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$	$\frac{5}{2}$	$(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$	$\frac{7}{2}$	$(\frac{7}{2}, 4)$
f'	\searrow		\nearrow		\searrow		\nearrow		\searrow
f	\cap	P.I.	\cup	P.I.	\cap	P.I.	\cup	P.I.	\cap

Luego: Los puntos de inflexión de f serán $x = 0$; $x = \frac{3}{2}$; $x = \frac{5}{2}$ y $x = \frac{7}{2}$.

(c)

En la figura siguiente puede verse el gráfico de $f'(x)$ — gris — así como también el de $f(x)$ — negro.

Figura 158: Gráfico de $f(x)$ según el gráfico de $f'(x)$.



Las características de $f'(x)$ determinan el comportamiento general de $f(x)$. Al haber fijado $f(0) = 1$ la función f queda por completo determinada.

■

Ejercicio 15

Consideremos la función definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 4 & , \text{ si } x \leq 2 \\ -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 2 & , \text{ si } 2 < x \leq 3 \\ 2 - \frac{3}{x} & , \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

Claramente $f(-2) = 5$ y $f(2) = 3$. Además $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$ como consecuencia trivial de que en dicho intervalo se trata de una recta. Si estudiamos los límites laterales podemos comprobar fácilmente que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{2} + 4 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{3}{x} = 2$$

La continuidad se deduce estudiando los límites laterales en los puntos donde la definición de f se parte:

$$f(2) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} -\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 2 = 3$$

$$f(3) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2 - \frac{3}{x} = 1$$

Luego: f es continua sobre \mathbb{R} .

Para los $x > 3$ vale:

$$f'(x) = \frac{3}{x^2} > 0$$

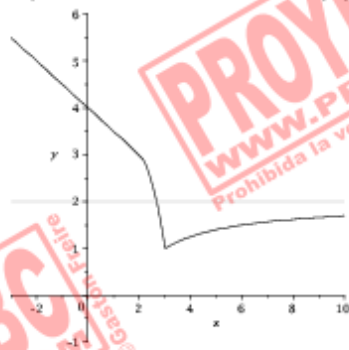
Por último, para ver que f no resulta derivable en $x = 3$ podemos estudiar el cociente incremental por derecha y por izquierda para verificar que el valor de los mismos no coincide. En efecto:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\left(2 - \frac{3}{3+h}\right) - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(1 - \frac{3+h-h}{3+h}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left(\frac{h}{3+h}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{3+h} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\left(-\frac{3}{2}(3+h)^2 + \frac{11}{2}(3+h) - 2\right) - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \left(-\frac{3}{2}h^2 - \frac{7}{2}h\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} -\frac{3}{2}h - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Al no coincidir los límites laterales del cociente incremental entonces $f(x)$ no puede ser derivable en $x = 3$. En cuanto al gráfico de f , por tratarse de funciones muy simples si nos restringimos a cada trozo el mismo resulta ser:

Figura 159: Gráfico de $f(x)$.



Puede observarse que el mismo cumple todos los requisitos pedidos en el enunciado.

■