4^{00}

VERDE
47M
S8

ASIMOV

EJERCICIOS RESUELTOS

ANALISIS I

(Exactas – Ingenieria).

UNIDAD 8

TEOREMA DE TAYLOR.

POLINOMIO DE TAYLOR. EXPRESION DEL RESTO.
PROBLEMAS DE APROXIMACION. PROB. VARIOS.

F

S8
000518

S8

PRACTICA 8

POLINOMIO DE TAYLOR

Ej. 18 Considere la función ...

Si $f(x) = \ln(x+1) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

$\Rightarrow f''(x) = -1(1+x)^{-2} \Rightarrow f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$.

Evaluo todas estas derivadas en $x=0$:

$f(0) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0$

$f'(0) = \dfrac{1}{1+0} = 1$

$f''(0) = \dfrac{-1}{(1+0)^2} = -1$

$f'''(0) = \dfrac{2}{(1+0)^3} = 2$.

formemos el siguiente polinomio:

$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\dfrac{x^2}{2} + f'''(0)\dfrac{x^3}{6} =$

$P_3(x) = 0 + 1 \cdot x + (-1)\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2}{6}x^3 = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

Comprobemos lo que nos piden:

$P_3(0) = 0 - \dfrac{0^2}{2} + \dfrac{0^3}{3} = 0 = f(0)$

$P_3'(x) = 1 - x + x^2 \Rightarrow P_3'(0) = 1 - 0 - 0^2 = 1 = f'(0)$

$P_3''(x) = -1 + 2x \Rightarrow P_3''(0) = -1 + 2.0 = -1 = f''(0)$

$P_3'''(x) = 2 \Rightarrow P_3'''(0) = 2 = f'''(0)$. //

Ej. 2: Calcule el polinomio . . .

(a) Tenemos que llegar hasta la 4 derivada. (orden 4)

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{-2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$ $\qquad f''(0) = 2$

$f'''(x) = \frac{-3(1-x)^2(-1).2}{(1-x)^6} = \frac{3.2}{(1-x)^4}$ $\qquad f'''(0) = 3.2 = 6$

$f^{IV}(x) = \frac{-4(1-x)^3(-1).6}{(1-x)^8} = \frac{4.6}{(1-x)^5}$ $\qquad f^{IV}(0) = 4.6 = 24$

Construimos ahora el polinomio:

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{6} + f^{IV}(0)\frac{x^4}{24}$$

$$\boxed{P_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4}$$

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x \rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \rightarrow f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow f^{IV}(0) = 0$

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{6} + f^{IV}(0)\frac{x^4}{24}$$

$$P_4(x) = 0 + 1.x + 0\frac{x^2}{2} + (-1)\frac{x^3}{6} + 0\frac{x^4}{24} \Rightarrow$$

$$\boxed{P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}}$$

(c) Vamos ahora un orden más : $f^{(5)}(x) = \cos x \Rightarrow$

$$f^{5}(0) = 1 \Rightarrow \boxed{P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}}$$

(d) $f(x) = \cos x \rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x \rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x \rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow f'''(0) = 0$

$f^{4}(x) = \cos x \rightarrow f^{4}(0) = 1$

$f^{5}(x) = -\operatorname{sen} x \rightarrow f^{5}(0) = 0$

$$P_5(x) = 1 + 0x + (-1)\frac{x^2}{2} + 0\frac{x^3}{3!} + 1.\frac{x^4}{4!} + 0.\frac{x^5}{5!}$$

$$\boxed{P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}}$$

(e) Ahora el desarrollo es en $x_0 = 1 \Rightarrow$ las derivadas van evaluadas en $x_0 = 1$

$f(x) = \ln x \rightarrow f(1) = 0$

$f'(x) = 1/x \rightarrow f'(1) = 1$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f''(1) = -1$$

$$f^3(x) = \frac{-2x(-1)}{x^4} = \frac{2}{x^3} \rightarrow f^3(1) = 2$$

$$f^4(x) = \frac{-3x^2 \cdot 2}{x^6} = -\frac{6}{x^4} \rightarrow f^4(1) = -6$$

formemos ahora el polinomio recordando que el desarrollo es en torno a uno

$$P_4(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2} + f^3(1)\frac{(x-1)^3}{3!} + \cdots$$

$$P_4(x) = 0 + 1.(x-1) - 1\frac{(x-1)^2}{2} + 2\frac{(x-1)^3}{3!} - 6\frac{(x-1)^4}{4!}$$

$$\boxed{P_4(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}}$$

(f) $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x} \rightarrow f(4) = 2$

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x})^3} \rightarrow f''(4) = \frac{-1}{32}$$

$$f^3(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2} = \frac{3}{8}\frac{1}{(\sqrt{x})^5} \rightarrow f^3(4) = \frac{3}{256}$$

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{32}\frac{(x-4)^2}{2} + \frac{3}{256}\frac{(x-4)^3}{3!}$$

$$\boxed{P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3}$$

(g) $f(x) = e^x \rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \rightarrow f''(0) = 1$

Y en general la n-esima derivada de e^x es e^x

$\Rightarrow f^n(x) = e^x \rightarrow f^n(0) = 1$; podemos escribir ahora el polinomio:

$$P_{10}(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f^3(0)\frac{x^3}{3!} + f^4(0)\frac{x^4}{4!} + f^5(0)\frac{x^5}{5!}$$
$$+ f^6(0)\frac{x^6}{6!} + f^7(0)\frac{x^7}{7!} + f^8(0)\frac{x^8}{8!} + f^9(0)\frac{x^9}{9!} + f^{10}(0)\frac{x^{10}}{10!}$$

$$\boxed{P_{10}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!}}$$

(h) $f(x) = (1+x)^6 \rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = 6(1+x)^5 \quad f'(0) = 6$

$f''(x) = 6.5(1+x)^4 \quad f''(0) = 30$

$f^3(x) = 6.5.4(1+x)^3 \quad f^3(0) = 120$

$f^4(x) = 6.5.4.3(1+x)^2 \quad f^4(0) = 360$

$f^5(x) = 6.5.4.3.2.(1+x) \quad f^5(0) = 720$

$f^6(x) = 6.5.4.3.2.1. \quad f^6(0) = 720$

$$P_6(x) = 1 + 6x + 30\frac{x^2}{2} + 120\frac{x^3}{3!} + 360\frac{x^4}{4!} + 720\frac{x^5}{5!} + 720\frac{x^6}{6!}$$

$$P_6(x) = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

Ej. 3: Compruebe que el polinomio ...

El problema solo nos muestra la generalización del item (f) del ejercicio 2. El polinomio hasta grado 10 era:

$$P_{10}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!}$$

Y en general si llegamos a orden n tendremos:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$$ Condensando la escritura con el simbolo de sumatoria.-

---

Ej. 4: Obtenga el polinomio ...

(a) $f = \dfrac{1}{1-x} \rightarrow f(0) = 1$

$f' = \dfrac{1}{(1-x)^2} \rightarrow f'(0) = 1$

$f^2 = \dfrac{2}{(1-x)^3} \rightarrow f^2(0) = 2$

$$f^3(x) = \frac{6}{(1-x)^4} \rightarrow f^3(0) = 6 = 3!$$

$$f^4(x) = \frac{24}{(1-x)^5} \rightarrow f^4(0) = 24 = 4!$$

Podemos ahora generalizar las derivadas de $f(x)$ y sus respectivos valores en $x=0$:

$$f^n(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \rightarrow f^n(0) = n!$$

Por lo tanto el polinomio de orden n será:

$$P_n(x) = 1 + x + 2\frac{x^2}{2} + 3!\frac{x^3}{3!} + 4!\frac{x^4}{4!} + \cdots + n!\frac{x^n}{n!}$$

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n$$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k}$$

(b) $f = \cos x$, $f' = -\operatorname{sen} x$, $f^2 = -\cos x$; $f^3 = \operatorname{sen} x$

$f^4 = \cos x \Rightarrow$ Podemos generalizar que: $f^n(x) =$ senos si el orden es impar y cosenos si es par, es decir:

$$f^n(x) = \begin{cases} (-1)^k \cos x & \text{si } n = 2k \quad \text{con } k \geq 0 \\ (-1)^{k+1} \operatorname{sen} x & \text{si } n = 2k+1 \quad \text{con } k \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^n(0) = \begin{cases} (-1)^k \cos 0 & \text{si } n = 2k \quad \text{con } k \geq 0 \\ (-1)^{k+1} \operatorname{sen} 0 & \text{si } n = 2k+1 \quad \text{con } k \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f^n(0) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n=2k \quad \text{con } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } n=2k+1 \quad \text{con } k \geq 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$P_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\boxed{P_{2k}(x) = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}$$

(c) Muy parecido al anterior: $f = \operatorname{sen} x$, $f' = \cos x$

$f^2 = -\operatorname{sen} x$, $f^3 = -\cos x$, $f^4 = \operatorname{sen} x$ entonces:

$$f^n = \begin{cases} (-1)^k \operatorname{sen} x & \text{si} \quad n = 2k \quad \text{con } k \geq 0 \\ (-1)^k \cos x & \text{si} \quad n = 2k+1 \quad \text{con } k \geq 0 \end{cases}$$

$$f^n(0) = \begin{cases} (-1)^k \operatorname{sen} 0 & \text{si} \quad n = 2k \quad \text{con } k \geq 0 \\ (-1)^k \cos 0 & \text{si} \quad n = 2k+1 \quad \text{con } k \geq 0 \end{cases}$$

$$f^n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=2k \\ (-1)^k & \text{si } n=2k+1 \end{cases}$$ Solo sobreviven los términos "impares".

Entonces:

$$P_n(x) = 1.x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\boxed{P_{2k+1}(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

Nota: La sumación debe llegar hasta $n \Rightarrow$ el valor de k debe llegar hasta: $2k+1 = 1 \Rightarrow$
$2k = n-1 \rightarrow k = \frac{n-1}{2}$

(d) $f = e^{-x}$; $f' = -e^{-x}$; $f^2 = +e^{-x}$; $f^3 = -e^{-x}$,

$f^4 = e^{-x}$ ... Notamos que todas las derivadas son de la forma e^{-x}, las pares "positivas" y las impares "negativas" $\Rightarrow$

$$f^n(x) = \begin{cases} (-1)^{k2} e^{-x} & \text{si } n = 2k \text{ con } k \geq 0 \\ (-1)^{2k+1} e^{-x} & \text{si } n = 2k+1 \text{ con } k \geq 0 \end{cases}$$

Evaluemos en $x=0$:

$$f^n(0) = \begin{cases} (-1)^{2k} = 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ (-1)^{2k+1} = -1 & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

formemos el polinomio entonces:

$$P_n(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!}}$$

(e) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$; $f'(x) = \frac{-2x(-1)}{(1-x^2)^2}$;

$f^2(x) = \frac{2(1+4x^2)}{(1-x^2)^3}$; cada vez son más complicados $\Rightarrow$ Veamos la forma que va teniendo el polinomio; formémoslo hasta orden 2:

$f(0)=1$, $f'(0)=0$; $f''(0)=2$ $\Rightarrow P_2(x)=1+2\frac{x^2}{2} \Rightarrow$

$P_2(x)=1+x^2$. Si recordamos el desarrollo hecho para la función $f=\frac{1}{1-x}$ (en el 4) (a)) era:

Si $f=\frac{1}{1-x}$ $\Rightarrow P(x)=1+x+x^2+\cdots$ realizamos la siguiente sustitución: " $x \to x^2$ " con lo cual

$f=\frac{1}{1-x} \longrightarrow f=\frac{1}{1-x^2}$ que es nuestra funcion

$P(x)=1+x+x^2 \longrightarrow P(x)=1+x^2+x^4+\cdots$
que debe ser nuestro desarrollo $\Rightarrow$ Usaremos este truco cada vez que podamos: " Mediante sustitución de desarrollos conocidos, obtendremos otros nuevos".

finalmente: $P(x)=\sum_{k=0}^{n/2} x^{2k}$

(f) $f=\cosh x$, $f'=\operatorname{senh} x$; $f^2=\cosh x$; $f^3=\operatorname{senh} x$ y siguen alternandose, evaluemos en $x=0 \Rightarrow$

$f(0)=1$, $f'(0)=0$; $f^2(0)=1$, $f^3(0)=0$ etc $\Rightarrow$ sólo tendremos los términos pares en el desarrollo:

$$P_{2k}(x)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$P_{2k=n}(x) = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(f) $f(x) = \operatorname{arctg} x \rightarrow f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow f'(0) = 1$$

$$f^2(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \rightarrow f^2(0) = 0$$

$$f^3(x) = \frac{-2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3} \rightarrow f^3(0) = -2$$

$$f^4(x) = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \rightarrow f^4(0) = 0$$

$$f^5(x) = \frac{(24-72x^2)(1+x^2)-4(24x-24x^3)}{(1+x^2)^5} \rightarrow f^5(0) = 24 = 4!$$

Vemos que solo sobreviven los términos impares, y que en general $f^n(0) = (n-1)!\,(-1)^k$, van alternando de signo.

formemos el polinomio:

$$P(x) = x - 2\frac{x^3}{3!} + 4!\frac{x^5}{5!} - 6!\frac{x^7}{7!} \dots$$

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

generalizamos en una sumatoria:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^{k+1}$$

(h) $f = \ln(1+x)$; $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$; $f^2(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$;

$f^3(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$; $f^4(x) = \dfrac{-6}{(1+x)^4}$; $f^5(x) = \dfrac{24}{(1+x)^5}$

Podemos entonces generalizar la n-esima derivada:

$$f^n(x) = \frac{(n-1)!(-1)^n}{(1+x)^n} \rightarrow f^n(0) = (n-1)!$$

El polinomio es: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^k(0) \dfrac{x^k}{k!}$ con lo cual:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k-1)!\, x^k}{k!}(-1)^k \Rightarrow$$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}(-1)^k$$

Quitamos el término con $k=0$; que era el 1º ya que dicho término vale cero ($f(0) = \ln(1) = 0$).

$\boxed{\text{Ej. 5: Considere el polinomio ...}}$

(a) Calculemos las derivadas de f hasta orden 6:

$f(x) = Q(x) = x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 3x - 2 \Rightarrow Q(0) = -2$

$Q'(x) = 4x^3 - 24x^2 - 8x + 3 \rightarrow Q'(0) = 3$

$Q''(x) = 12x^2 - 48x - 8 \rightarrow Q''(0) = -8$

$Q^3(x) = 24x - 48 \rightarrow Q^3(0) = -48$

$Q^4(x) = 24 \rightarrow Q^4(0) = 24$

$Q^5(x) = 0 \rightarrow Q^5(0) = 0$

$Q^6(x) = 0 \rightarrow Q^6(0) = 0$

Ahora calculemos los polinomios:

$P_0(x) = -2$

$P_1(x) = -2 + 3x$

$P_2(x) = -2 + 3x - \frac{8}{2!}x^2 = -2 + 3x - 4x^2$

$P_3(x) = -2 + 3x - 4x^2 - \frac{48}{3!}x^3 = -2 + 3x - 4x^2 - 8x^3$

$P_4(x) = -2 + 3x - 4x^2 - 8x^3 + \frac{24}{4!}x^4 = -2 + 3x - 4x^2 - 8x^3 + x^4 \equiv Q$

$P_5(x) = P_4(x) + \frac{0}{5!}x^5 = P_5(x) = Q(x)$

$P_6(x) = P_5(x) + \frac{0}{6!}x^6 = P_5(x) = P_4(x) = Q(x)$

(b) En general lo que ocurre es lo siguiente:
Si $f(x)$ es una función polinómica de grado n, $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, ----, $P_{n-1}(x)$ van dando aproximaciones de $f(x)$ cada vez más precisas, al llegar a $P_n(x)$ se reconstruye la función original: o sea $f(x) = P_n(x)$, y para ordenes mayores que n = grado de f todos los polinomios de Taylor son

iguales a $f(x)$. En este problema entonces tenemos que:

$$P_{20}(x) = Q(x) = x^{20} + x^{19} + x^3 + x^2 + x + 1 .$$

Ej. 68 Considere el polinomio...

(a) $f(x) = (1+x)^n \quad \rightarrow \quad f(0) = 1$

$f'(x) = n(1+x)^{n-1} \quad \rightarrow \quad f'(0) = n$

$f^2(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \quad \rightarrow \quad f^2(0) = n(n-1)$

$f^3(x) = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3} \quad \rightarrow \quad f^3(0) = n(n-1)(n-2)$

$\vdots$

$f^{n-1}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))(1+x)^{n-(n-1)} =$

$= n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1)(1+x)^{n-n+1} =$

$= n(n-1)(n-2)\dots(1)(1+x)^1 = n!\,(1+x)$

$f^n(x) = n! \quad \rightarrow \quad f^n(0) = n!$

El polinomio queda:

$$P_n(x) = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} + \dots + n!\frac{x^n}{n!}$$

Notemos que: $1 = \binom{n}{0}$, $n = \binom{n}{1}$, $n(n-1) = 2!\binom{n}{2}$;

$$n(n-1)(n-2) = 3!\binom{n}{3} \quad , \ldots , \quad n! = n!\binom{n}{n}$$

Entonces el polinomio queda:

$$P_n(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + 2!\binom{n}{2}\frac{x^2}{2!} + 3!\binom{n}{3}\frac{x^3}{3!} + \ldots + n!\binom{n}{n}\frac{x^n}{n!}$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

(b) como $(a+b)^n = a^n\left(1+b/a\right)^n$ podemos usar el desarrollo anterior con $x = b/a$

$$(a+b)^n = a^n\left(1+b/a\right)^n = a^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (b/a)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{b^k}{a^k} \cdot a^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

Ej. 7: Si el polinomio de Taylor ...

sabemos que: $P(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + f^2(2)\frac{(x-2)^2}{2} + \ldots + f^n(2)\frac{(x-2)^n}{n!}$

Entonces el $P_5(x)$:

$$P_5(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + f^2(2)\frac{(x-2)^2}{2} + f^3(2)\frac{(x-2)^3}{3!} + f^4(2)\frac{(x-2)^4}{4!} +$$

$$+ f^5(2)\,\frac{(x-2)^5}{5!}$$

(a) Observando el polinomio notamos que:

$$\frac{f^4(2)}{4!} = 3 \rightarrow f^4(2) = 3.4!$$

$$\frac{f^3(2)}{3!} = 0 \rightarrow f^3(2) = 0$$ (No aparece el término $(x-2)^3$).

(b) <u>NO</u> se puede conocer el valor de $f^6(2)$ porque no nos dan un polinomio de grado 6. No aparece el término $(x-2)^6$.

(c) Como $n=7$

$$P_7(x) = (x-2)^5 + 3(x-2)^4 + 3(x-2)^2 - 8$$

$$\Rightarrow \frac{f^6(2)}{6!} = 0 \rightarrow f^6(2) = 0$$

Ej. 8: Si el polinomio de Taylor ...

(a) Tenemos que el polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 5$ es:

$$P(x) = \underbrace{3}_{f(5)} \underbrace{-}_{f'(5)} (x-5) + \underbrace{9}_{\frac{f''(5)}{2!}}(x-5)^2$$

$$\therefore \begin{cases} f(5) = 3 \\ f'(5) = -1 \\ f''(5) = 9.2 = 18 \end{cases}$$

(a) si $g(x) = \dfrac{2}{4 - f(5x)}$ → El polinomio de Taylor de orden 2 en $x=1$ es:

$$P(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{g''(1)}{2}(x-1)^2$$

$$g(1) = \frac{2}{4-f(5)} = \frac{2}{4-3} = 2$$

$g'(1)$ ⇒ busco $g'(x) = \dfrac{+5 \cdot f'(5x)}{(4-f(5x))^2}$ → $g'(1) = \dfrac{5 \cdot f'(5)}{(4-f(5))^2} =$

$$= \frac{5\cdot(-1)}{(4-3)^2} = -5$$

ahora $g''(x) = \dfrac{25 \cdot f''(5x)(4-f(5x))^2}{[(4-f(5x))^2]^2} - \dfrac{2(4-f(5x))(-1)\cdot(f'(5x)\cdot 5)^2}{[(4-f(5x))^2]^2}$ →

$$g''(1) = \frac{25 f''(5)(4-f(5))^2 + 2(4-f(5))(f'(5)\cdot 5)^2}{(4-f(5))^4}$$

$$= \frac{25 \cdot 18 (1)^2 + 50(1)(1)}{1} = 500$$

Entonces: $\boxed{P(x) = 2 - 5(x-1) + 250(x-1)^2}$

(b) Es como el anterior, el polinomio de Taylor de orden 2 de $h(x)$ en $x=5$ es:

$$P(x) = h(5) + h'(5)(x-5) + \frac{h''(5)}{2}(x-5)$$ ⇒

$h(x) = (1+x^2)\, f(x)$

$h'(x) = 2x \cdot f(x) + f'(x)(1+x^2)$

$h''(x) = 2 f(x) + 2x f'(x) + f''(x)(1+x^2) + 2x f'(x)$

Entonces: $h(5) = (1+5^2)\, f(5) = 26 \cdot 3 = 78$

$h'(5) = 10 \cdot f(5) + f'(5) \cdot 26 = 4$

$h''(5) = 6 + 180 + 18 \cdot 26 - 10 = 644$

Entonces: $P(x) = 78 + 4(x-5) + 322(x-5)^2$

Ej. 9: Los polinomios de Taylor ...

Tenemos que el polinomio de Taylor de orden 4 en $x=2$ de $f(x)$ es:

$P(x) = -2 + 3(x-2) - 3(x-2)^2 + (x-2)^3$ entonces:

$f(2) = -2$; $\frac{f'(2)}{1!} = 3 \to f'(2) = 3$, $\frac{f''(2)}{2!} = -3 \to f''(2) = -6$,

$\frac{f^3(2)}{3!} = 1 \to f^3(2) = 6$; $f^4(2) = 0$

Para la función $g(x)$ tenemos $Q(x) = 5 + 12(x-2) + (x-2)^2 - 7(x-2)^4$

$g(2) = 5$, $g'(2) = 12$, $g''(2) = 2$, $g^3(2) = 3! \cdot 0 = 0$;

$g^4(2) = 4!\,(-7) = -168$

buscamos el polinomio de Taylor de orden 2 en $x=2$ siendo $t(x) = f(x).g(x)$.

$t(x) = g(x).f(x) \rightarrow t(2) = -10$

$t'(x) = g'.f + f'.g \rightarrow t'(2) = 12(-2) + 3.5 = -9$

$t''(x) = g''.f + f'.g' + f''.g + g'.f' \rightarrow t''(2) = 38$

$$\boxed{P_t(x) = -10 - 9(x-2) + \frac{38}{2}(x-2)^2}$$

buscamos ahora el polinomio de la función $s = f/g$:

$s = f/g$

$S' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$

$$S'' = \frac{(f'g - g'f)'g^2 - 2gg'(f'g - g'f)}{(g^2)^2}$$

$$S'' = \frac{f''g \cancel{+g'f'} - g''f \cancel{-f'g'} - 2g^2f'g' + 2gfg'^2}{(g^2)^2}$$

Entonces: $S(2) = -2/5$; $S'(2) = 39/25$; $S''(2) = -4706/625$

$$\boxed{P_s(x) = -2/5 + 39/25\,(x-2) - 4706/625\,\frac{(x-2)^2}{2}}$$

Ej. 10: Considere la función...

Nos dan $f(x) = \ln(x+1)$, $P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$; ambas son funciones continuas en el cerrado $[0,x]$ y derivables en el abierto $(0,x)$; sea $h(x) = f(x) - P(x)$ y $\varphi(x) = x^4$ $\Rightarrow$ h y φ satisfacen las hipótesis del teorema de Cauchy $\Rightarrow$

$$\frac{h(x) - \overset{\nearrow 0}{h(0)}}{x^4 - 0} = \frac{h'(x_1)}{4x_1^3} = \frac{\frac{1}{x_1+1} - (1 - 2/_2 x_1 + \frac{3}{3}x_1^2)}{4x_1^2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{f(x) - P(x)}{x^4} = \frac{\frac{1}{x_1+1} - 1 + x_1 - x_1^2}{4x_1^2}$$

$$= \frac{\frac{1 - (x_1+1) + x_1(x_1+1) - x_1^2(x_1+1)}{x_1+1}}{4x_1^2}$$

$$= \frac{\cancel{1} - \cancel{x_1} \cancel{-1} + \cancel{x_1^2} + \cancel{x_1} - x_1^3 - \cancel{x_1^2}}{4x_1^2(x_1+1)}$$

$$\frac{f(x) - P(x)}{x^4} = \frac{-x_1^3}{4x_1^3 + 4x_1^2}$$

tanto numerador y denominador de esta última expresión cumplen las mismas hipótesis $\Rightarrow$ se aplica a ellas nuevamente el teorema.

$$\frac{f(x)-P(x)}{x^4} = \frac{h(x)}{x^4} = \frac{h'(x_1)}{4x_1^3} = \frac{h''(x_2)}{12x_2^2} \quad \text{con } x_1 \in (0,x) \quad \text{con } x_2 \in (0,x_1)$$

Y mediante la aplicación sucesiva de este teorema tenemos:

$$\frac{f(x)-P(x)}{x^4} = \frac{h''(x_2)}{12x_2^2} = \frac{h'''(x_3)}{24x_3} = \frac{h''''(c)}{24} \quad \text{con } x_3 \in (0,x_2) \quad c \in (0,x_3)$$

veamos esta última derivada:

$$h^4(x) = f^4(x) - P^4(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} - 0 \Rightarrow h^4(x) = f^4(x) \Rightarrow$$

$h^4(c) = f^4(c)$. Con lo cual: $\dfrac{f-P}{x^4} = \dfrac{f^4(c)}{24}$

Y esto nos muestra que:

$$\boxed{f(x) = P(x) + f^4(c)\,\frac{x^4}{4!}}$$

Este último término es lo que se llama el "Resto"

$\boxed{\text{Ej. 11: Encuentre la expresión ...}}$

Resto

Si f es una función, y P_n su polinomio de Taylor de grado n en x_0 entonces:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Ezelrengo para T!

donde $R_n(x) = f^{n+1}(\xi)\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ donde ξ esta entre x y x_0 ($\xi \in (x_0,x)$ ó $\xi \in (x,x_0)$).

R_n se llama <u>resto</u> ó <u>error</u>

(a) $P_4(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$

Como $f(x) = e^x \rightarrow f^n(x) = e^x \ \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow$

$R_4(x) = \dfrac{f^5(\xi)}{5!}x^5 = \dfrac{e^{\xi}.x^5}{120}$ donde ξ está entre 0 y x

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$

$f'(x) = -(1-x)^{-1-1}(-1) = (1-x)^{-2}$

$f''(x) = (-2)(1-x)^{-2-1}(-1) = 2(1-x)^{-3}$

$f^3(x) = 2(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 6(1-x)^{-4}$

$f^4(x) = (-4)6(1-x)^{-5}(-1) = 24(1-x)^{-5}$

$f^5(x) = 24(-5)(1-x)^{-6}(-1) = 120(1-x)^{-6}$

$f^6(x) = (-6)120(1-x)^{-7} = 720(1-x)^{-7}$

$\therefore R_5(x) = \dfrac{\cancel{720}(1-\xi)^{-7}}{\cancel{6!}}.x^6 = \dfrac{x^6}{(1-\xi)^7}$ con $\xi \in (0,x)$

(c) Si derivamos sucesivamente tendremos que:

$f^4(x) = \operatorname{sen} x$; $f^5(x) = \cos x$; $f^6(x) = -\operatorname{sen} x$; con esta última derivada logramos $R_5(x)$:

$$R_5(x) = f^6(\xi)\frac{x^6}{6!} = -\operatorname{Sen}(\xi)\frac{x^6}{6!} \quad ; \quad \xi \in (0,x)$$

(d)

$$R_6(x) = f^7(\xi)\frac{x^7}{7!} \Rightarrow \text{busquemos } f^7(x):$$

$f^7(x) = -\operatorname{Cos} x$ (ver el ejercicio anterior)

$$R_6(x) = -\operatorname{Cos}(\xi)\frac{x^7}{7!} \quad \text{con} \quad \xi \in (0,x)$$

Si comparamos c) y d) vemos que:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_6(x)$$

$$\Rightarrow R_5(x) = R_6(x)$$

$$\Rightarrow -\operatorname{Sen}(\xi)\frac{x^6}{6!} = -\operatorname{Cos}(\xi')\frac{x^7}{7!} \quad \text{Con } \xi, \xi' \in (0,x)$$

$$\Rightarrow 7\operatorname{Sen}(\xi)\,x^6 = \operatorname{Cos}(\xi')\,x^7$$

(e) debemos hallar la 4º derivada del log:

$f = \ln x$

$f' = 1/x \rightarrow f'' = -1/x^2 \rightarrow f^3(x) = 2/x^3 \rightarrow f^4(x) = -6/x^4$

$$R_3(x) = f^4(\xi)\frac{(x-1)^4}{4!} = -\frac{6}{\xi^4}\frac{(x-1)^4}{4!} \quad \text{con } \xi \in (1,x)$$

(f) $R_8(x) = f^9(\xi)\frac{x^9}{9!}$ $\Rightarrow$ hay que lograr la novena derivada del $\operatorname{arctg} x$. En el ejercicio 4) (g) se logro la 5º, a partir de ahi segui hasta la 9º.

Ej. 12: Considere la función ...

(a) $P_4(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f^3(0)\frac{x^3}{3!} + f^4(0)\frac{x^4}{4!}$

$f(0) = \cos 0 = 1$
$f'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$
$f''(0) = -\cos 0 = -1$
$f^3(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$
$f^4(0) = \cos 0 = 1$

$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$

(b) $R_4(x) = f^5(\xi)\frac{x^5}{5!} = \operatorname{sen}(\xi)\frac{x^5}{5!}$ con $\xi \in (0, x)$

evaluamos en $x = 1/2$:

$R_4(1/2) = \operatorname{sen}(\xi)\frac{(1/2)^5}{5!} = \frac{\operatorname{sen}(\xi)}{32 \cdot 120} = \frac{\operatorname{sen}(\xi)}{3840}$

(c) $f(1/2) = \cos(1/2) = 0{,}87758256$

$P(1/2) = 1 - \frac{(1/2)^2}{2} + \frac{(1/2)^4}{4!} = 0{,}877604$

$f(1/2) - P(1/2) = -2{,}1 \cdot 10^{-5} \sim 0{,}00002$

(d) $\left|R_4(1/2)\right| = \left|\frac{\operatorname{sen}(\xi)}{3840}\right| \leq \frac{1}{3840} = 0{,}00026 < 0{,}0003$

Comparando con (c): $\left|f(1/2) - P(1/2)\right| < \left|R_4(1/2)\right| < 0{,}0003$

Ej. 13: Se quiere aproximar...

(a) $e^{1/3} = P_5(1/3) + R_5(1/3)$

Nos piden que probemos que $|R_5(1/3)| < \frac{1}{174690}$

$R_5(1/3) = \frac{f^6(\xi)\,(1/3)^6}{6!}$ donde $f(x) = e^x$, y $\xi \in (0; 1/3)$

Como $f(x) = e^x \rightarrow f^6(x) = e^x \Rightarrow$

$R_5(1/3) = \frac{e^\xi (1/3)^6}{6!} = \frac{e^\xi}{6!\,3^6}$ Vamos ahora a acotar este error cometido:

$$|R_5(1/3)| = \left|\frac{e^\xi}{6!\,3^6}\right| = \frac{e^\xi}{6!\,3^6} \underset{e<3}{<} \frac{3^\xi}{6!\,3^6} < \frac{3}{6!\,3^6}$$

pues $\xi < 1/3 < 1$. Entonces:

$$|R_5(1/3)| < \frac{3}{6!\,3^6} = \frac{1}{6!\,3^5} = \frac{1}{174960}$$

(b) El error cometido (en módulo) debe ser $< 10^{-8}$

$\Rightarrow |R_n(1/3)| < 10^{-8} \Longrightarrow \frac{e^\xi (1/3)^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-8}$ Comencemos la acotación:

$$\frac{e^\xi (1/3)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3^\xi (1/3)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3\,(1/3)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{3}{(n+1)!\,3^{n+1}} =$$

$$\frac{3}{(n+1)!\, 3^{n+1}} \Rightarrow \left|R_n(1/3)\right| < \frac{1}{(n+1)!\, 3^n}$$

Con $n=5$ se obtiene el caso anterior, para $n=6$:

$$|R_6(1/3)| < \frac{1}{7!\, 3^6} \sim 2{,}7 . 10^{-7} \Rightarrow \text{vamos a un orden más}$$

$$|R_7(1/3)| < \frac{1}{8!\, 3^7} \sim 1{,}1 . 10^{-8}$$

Entonces, hay que tomar un polinomio de grado 7.

Ej: 14 : Utilice el polinomio...

$f(x) = \text{Sen}(x) \rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \text{Cos}(x) \rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\text{Sen}(x) \rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\text{Cos}(x) \rightarrow f'''(0) = -1$

$f^4(x) = \text{Sen}(x) \rightarrow f^4(0) = 0$

$f^5(x) = \text{Cos}(x) \rightarrow f^5(\xi) = \text{Cos}(\xi)$

$$\text{Sen}(1/4) = P_4(1/4) + R_4(1/4)$$

$$P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!} \; , \; R_4(x) = \text{Cos}(\xi)\frac{x^5}{5!} \quad \text{con } \xi \in (0, 1/4)$$

$$\text{Sen}(1/4) = \underbrace{1/4 - \frac{(1/4)^3}{3!}} + R_4(1/4)$$

$\text{Sen}(1/4) \approx 0{,}2474$; Y ahora acotemos el error cometido.

$$|R_4(1/4)| = \left| \cos(\xi) \frac{(1/4)^5}{5!} \right| \leq \frac{(1/4)^5}{5!} \quad \text{pues } |\cos(\xi)| \leq 1$$

Entonces:

$$|R_4(1/4)| \leq \frac{(1/4)^5}{5!} = 8,1 \cdot 10^{-6}.$$

Ej. 15: Considere la función ...

(a) $f(x) = x \ln x \rightarrow f(1) = 0$

$f'(x) = \ln x + 1 \rightarrow f'(1) = 1$

$f''(x) = 1/x \rightarrow f''(1) = 1$

$f^3(x) = -1/x^2 \rightarrow f^3(1) = -1$

$$P_3(x) = (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6}$$

Y ahora daremos la expresión del resto.

$f^4(x) = 2/x^3 \rightarrow f^4(\xi) = 2/\xi^3$

$$R_3(x) = \frac{2}{\xi^3} \frac{(x-1)^4}{4!} \quad \text{con} \quad \xi \in (x,1) \text{ ó } (1,x)$$

(b) $$R_3(1,5) = 2/\xi^3 \frac{(1,5-1)^4}{4!} = \frac{2}{\xi^3} \frac{(0,5)^4}{24} = \frac{1}{\xi^3} \frac{1}{12 \cdot 2^4}$$

$R_3(1{,}5) = \dfrac{1}{192\,\xi^3}$ esta expresión toma su valor más grande cuando ξ toma el más chico posible, como $\xi \in (1, 1{,}5) \Rightarrow$ en $\xi = 1$ el error es máximo, luego:

$$|R_3(1{,}5)| \leq \frac{1}{192} \sim 5.10^{-3}.$$

El error que se comete al aproximar $f(1{,}5)$ por $P(1{,}5)$ es menor o a lo sumo igual a 5.10^{-3}.

Ej. 16: ¿Cuantos términos...

Sabemos que $e^x = P_n(x) + R_n(x)$; queremos hallar un n conveniente.

Ahora bien, si $f(x) = e^x \Rightarrow f^k(x) = e^x$ y como

$$R_n(x) = f^{n+1}(\xi)\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\,x^{n+1} \qquad \xi \in (0, x)$$

o sea que:

$$e^x = P_n(x) + \frac{e^\xi}{(n+1)!}\,x^{n+1}$$

o lo que es lo mismo:

$$e^x - P_n(x) = \underbrace{\frac{e^\xi}{(n+1)!}\,x^{n+1}}_{\text{error de aproximación.}}$$

$$|e^x - P_n(x)| = |R_n(x)| = \left|\frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\,|x|^{n+1}$$

Se trata de despejar n garantizando que

$$\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1} < 10^{-3} \quad \forall x \in [-1,1] \; ; \; \xi \in [-1,1] \; , \text{ como}$$

$x \in [-1,1] \Rightarrow |x| \leq 1$ De modo que:

$$\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}$$ la funcion e^{ξ} es creciente $\Rightarrow$

$e^{-1} < e^{\xi} < e^{1} \; \forall \xi \in [-1,1]$ Luego $\frac{e}{(n+1)!} < 10^{-3}$

$\Rightarrow 10^{3}e < (n+1)! \rightarrow 1000e < (n+1)!$.

Si $n=6$; $(n+1)! = (6+1)! = 7! = 5040 > 3000 > 1000e$

Luego es suficiente con calcular el polinomio de Taylor de orden 6, que tiene 7 términos para aproximar $f(x) = e^{x}$ en el intervalo $[-1,1]$ con un error menor que 10^{-3} (o sea con 3 decimales exactos).

Entonces si $x \in [-1,1]$

$P_6(x) \sim f(x) = e^{x}$ (Y coinciden las 3 primeras cifras decimales de $P_6(x)$ y $f(x)$)

$\therefore e^{1} = e$ y $P_6(1)$ tienen las mismas 3 primeras cifras decimales.

$$\Rightarrow e \sim P_6(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \sim 2{,}718$$

$$\left(\text{Pues } P_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}\right)$$

$\boxed{\text{Ej. 17 \quad Considere la función ...}}$

Generalicemos las derivadas de la función:

$$f(x) = \ln(1+x) \; ; \; f'(x) = \frac{1}{1+x} \; ; \; f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \; ;$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \; ; \; f^{IV}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \; ; \; f^{V}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

Entonces:

$$\underbrace{f^{n}(x) = \frac{(n-1)!\,(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n}}}$$

El término complementario o error es:

$$R_n(x) = f^{n+1}(\xi) \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n-1+1)(-1)^{n+1+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{(-1)^{n+2}}{(1+\xi)^{n+1}} \; \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$ y entonces evaluado en

$X = 0{,}5 \Rightarrow$

$$R_n(0{,}5) = \frac{(-1)^{n+2}}{(1+\xi)^{n+1}} \; \frac{(0{,}5)^{n+1}}{(n+1)}$$ y queremos que el módulo

resulte más chico que 0,001 $\Rightarrow$

$$|R_n(0{,}5)| = \left| \frac{(-1)^{n+2}}{(1+\xi)^{n+1}} \; \frac{(0{,}5)^{n+1}}{(n+1)} \right| = \frac{(0{,}5)^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}\,(n+1)} \quad \text{con } \xi \in (0, 1/2)$$

Mas grande será el error cuanto más chico el denominador ⇒ acoto con $\xi = 0$:

$$\frac{(0,5)^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}\,(n+1)} \leq \frac{(0,5)^{n+1}}{(1+0)^{n+1}\,(n+1)} = \frac{(0,5)^{n+1}}{(n+1)} < 0,001$$

Con $n=7$ se tiene $\frac{(0,5)^8}{8} \sim 0,0005 < 0,001$. Entonces habrá que tomar un polinomio de grado 7.

Ej. 18: ¿Para que valores ...

(a) Estan aproximando el $\cos x$ por un polinomio de 4º grado ⇒

$$\cos x = P_4(x) + R_4(x) \Rightarrow \cos x - P_4(x) = R_4(x)$$

y queremos que $R_4(x) < 5.10^{-5}$. Busquemos el $R_4(x)$:

$$R_4(x) = \left.\frac{d^5 \cos x}{dx^5}\right|_{x=\xi} \cdot \frac{x^5}{5!} \quad ; \quad \frac{d^5 \cos x}{dx^5} = -\operatorname{sen} x \Rightarrow$$

$$R_4(x) = -\operatorname{sen}(\xi)\,\frac{x^5}{5!} \qquad \text{con } \xi \in (0, x)$$

Como $|-\operatorname{sen}(\xi)| \leq 1 \Rightarrow |R_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!}$ y esto debe ser menor que $0,00005$. Luego $\frac{|x|^5}{5!} < 5.10^{-5} \Rightarrow$

$|x|^5 < 6.10^{-3} \Rightarrow |x| < 0,36$. finalmente $x \in (-0,36; 0,36)$

(b) Están aproximando el $\operatorname{sen} x$ por un polinomio de 1º grado: $\operatorname{sen} x \sim x$ (Recordar que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, es decir que $\operatorname{sen} x = x$ para valores chicos de x)

El resto debe ser < que 0,001. El resto es de orden 2:

$R_1(x) = -\operatorname{sen}(\xi)\,\frac{x^2}{2}$; con $\xi \in (0, x)$ $\Rightarrow$ en módulo:

$|R_1(x)| = \left|-\operatorname{sen}(\xi)\,\frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{|x|^2}{2} < 0{,}001 \Rightarrow$

$|x| < \sqrt{0{,}002}$; $|x| < 0{,}045$; $x \in (-0{,}045 ; 0{,}045)$

PROBLEMAS VARIOS

Prob. 1. Hallar los valores de a y b

$f(x) = a\ln(1+bx) \quad \rightarrow \quad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{ab}{1+bx} \quad \rightarrow \quad f'(0) = ab$

$f''(x) = \frac{-ab^2}{(1+bx)^2} \quad \rightarrow \quad f''(0) = -ab^2$

$\Rightarrow P_2(x) = abx - ab^2\,\frac{x^2}{2} \equiv 2x + \frac{3}{2}x^2$ por la identidad de polinomios tenemos que:

$ab = 2$ y $-\frac{ab^2}{2} = 3/2$] la segunda queda:

$-ab\cdot b = 3$ y usando aquí la 1°: $-a(2) = 3 \Rightarrow$

$\boxed{a = -3/2} \Rightarrow -(-3/2)\,b^2 = 3 \Rightarrow b^2 = 2 \Rightarrow \boxed{b = \pm\sqrt{2}}$

Prob. 2: Considere la función ...

(a) $f(x) = 1 - \text{Sen}(\pi/4\, x) \rightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = -\pi/4\, \text{Cos}(\pi/4\, x) \rightarrow f'(0) = -\pi/4$

$f''(x) = (\pi/4)^2\, \text{Sen}(\pi/4\, x) \rightarrow f''(0) = 0$

$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\dfrac{x^2}{2}$

$P_2(x) = 0 - \pi/4\, x + 0 \rightarrow \boxed{P_2(x) = -\pi/4\, x}$

(b) $f'''(x) = (\pi/4)^3 \text{Cos}(\pi/4\, x) \rightarrow f'''(\xi) = (\pi/4)^3\, \text{Cos}(\pi/4\, \xi)$

$R_2(x) = f'''(\xi)\dfrac{x^3}{3!} = (\pi/4)^3\, \text{Cos}(\pi/4\, \xi)\dfrac{x^3}{3!}$ con $x \in (-1/2, 1/2)$, $\xi \in (0, x)$

$|R_2(x)| = \left|(\pi/4)^3 \text{Cos}(\pi/4\,\xi)\dfrac{x^3}{3!}\right| = (\pi/4)^3\, |\text{Cos}(\pi/4\,\xi)|\, \dfrac{|x|^3}{3!} \Rightarrow$

$|R_2(x)| \leq (\pi/4)^3 \dfrac{|x|^3}{3!}$ pues $|\text{Cos}(\pi/4\,\xi)| \leq 1$; además

$|R_2(x)| \leq (\pi/4)^3 \dfrac{|x|^3}{3!} \leq (\pi/4)^3 \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ pues $|x| \leq 1/2 \Rightarrow$

$$\boxed{|R_2(x)| \leq \frac{\pi^3}{6 \cdot 2^3 \cdot 4^3}}$$ que es lo que se quería probar.

Prob. 3: Considere la función...

(a) Para el polinomio de Taylor de orden 4 necesitamos calcular hasta la derivada cuarta de f.

$$f(x) = 1 + 3x + \operatorname{sen} x \quad \rightarrow \quad f(0) = 1 + 3 \cdot 0 + \operatorname{sen}(0) = 1$$

$$f'(x) = 3 + \cos x \quad \rightarrow \quad f'(0) = 3 + \cos 0 = 3 + 1 = 4$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \quad \rightarrow \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = (-\operatorname{sen} x)' = -\cos x \quad \rightarrow \quad f'''(0) = -1$$

$$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x \quad \rightarrow \quad f^{IV}(0) = 0$$

$$\therefore \; P_4(x) = 1 + 4x - \frac{x^3}{3!} = 1 + 4x - \frac{x^3}{6}$$

(b) Debemos estimar $\left| f(1/3) - P_4(1/3) \right| = \left| R_4(1/3) \right|$

$$R_4(1/3) = \frac{f^{V}(\xi)\,(1/3)^5}{5!} \quad \text{con } \xi \in (0, 1/3)$$

$$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f^{V}(x) = \cos x$$

$$|R_4(1/3)| = \left| \frac{\cos(\xi)\,(1/3)^5}{5!} \right| = \frac{|\cos(\xi)|}{3^5 \cdot 5!} \leq \frac{1}{3^5 \cdot 5!} = \frac{1}{29160}$$

pues $|\cos(\xi)| \leq 1$. finalmente la estimación es:

$$|R_4(1/3)| \leq \frac{1}{29160}.$$

Prob. 4: Calcule aproximadamente ...

Hallemos el polinomio de Taylor de orden 2 en $x=0$ de la función f:

$f(x) = \sqrt{16+x} \longrightarrow f(0) = \sqrt{16} = 4$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{16+x}} \longrightarrow f'(0) = \dfrac{1}{2.4} = \dfrac{1}{8}$

$f''(x) = \dfrac{-1}{4(16+x)\sqrt{16+x}} \longrightarrow f''(0) = \dfrac{-1}{4.16.4} = \dfrac{-1}{256}$

$\Rightarrow P_2(x) = 4 + \dfrac{1}{8}x - \dfrac{1}{256}\cdot\dfrac{x^2}{2} = 4 + \dfrac{1}{8}x - \dfrac{x^2}{512}$

Para hallar $\sqrt{16{,}5}$ basta evaluar $f(0{,}5) = \sqrt{16+0{,}5}$ y este

valor lo estimamos con $P_2(0{,}5)$:

$P_2(0{,}5) = 4 + \dfrac{1}{8}\cdot 0{,}5 - \dfrac{1}{512}(0{,}5)^2 = 4{,}06201$

$\Rightarrow \sqrt{16{,}5} \approx 4{,}06201$.

Para estimar el error: $f'''(x) = \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{1}{(16+x)^{5/2}} \Rightarrow$

$R_2(0{,}5) = f'''(\xi)\cdot\dfrac{(0{,}5)^3}{3!} = \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{1}{(16+\xi)^{5/2}}\cdot\dfrac{(0{,}5)^3}{3!}$ con $\xi \in (0;0{,}5)$

El error cometido es máximo cuando ξ es mínimo ($\xi=0$)

$\Rightarrow |R_2(0{,}5)| < \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{1}{16^{5/2}}\cdot\dfrac{(0{,}5)^3}{3!} \cong 7{,}6\cdot 10^{-6}$.

Prob. 5: Determine un intervalo ...

Buscamos un intervalo $[-a,a]$ tal que si $x \in [-a,a]$ entonces $|R_6(x)| < 10^{-4} = \frac{1}{10.000}$

$$\underbrace{|R_6(x)|}_{|f(x) - P_6(x)|}$$

$R_6(x) = -\cos(\xi)\,\frac{x^7}{7!}$ con $\xi \in (0,x)$, siendo $-\cos x$ la derivada séptima del sen x.

$\Rightarrow |R_6(x)| = \left| -\cos(\xi)\,\frac{x^7}{7!} \right| = |-\cos(\xi)|\,\frac{|x|^7}{7!}$ y como

$|-\cos(\xi)| \leq 1 \Rightarrow |R_6(x)| \leq \frac{|x|^7}{7!}$ y queremos que esto sea menor que $10^{-4} \Rightarrow$

$\frac{|x|^7}{7!} < 10^{-4} \Rightarrow |x|^7 < \frac{7!}{10000} = 0{,}504 \Rightarrow |x| < (0{,}504)^{1/7} \Rightarrow$

$|x| < 0{,}9$. Luego el intervalo buscado es:

$$x \in [-0{,}9\ ,\ 0{,}9]\ .$$

Prob. 6: Calcule el polinomio ...

formemos el polinomio de orden 2 en $x = 0$:

$f(x) = (1+x)^{1/3} \quad \rightarrow \quad f(0) = 1$

$f'(x) = 1/3\,(1+x)^{-2/3} \quad \rightarrow \quad f'(0) = 1/3$

$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot (-\frac{2}{3})(1+x)^{-5/3} \quad \rightarrow \quad f''(0) = -2/9$

$P_2(x) = 1 + 1/3\, x - 2/9 \frac{x^2}{2} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$. Para

estimar el error cometido buscamos $f'''(x)$:

$f'''(x) = -2/9 \cdot (-5/3)(1+x)^{-8/3} = \frac{10}{27}(1+x)^{-8/3} \Rightarrow$

$R_2(x) = f'''(\xi) \frac{x^3}{36} = \frac{10}{27}(1+\xi)^{-8/3} \frac{x^3}{36}$ con $\xi \in (0,x)$ ó $(x,0)$

$R_2(x) = \frac{10\, x^3}{162\, (1+\xi)^{8/3}} \Rightarrow$ necesito el valor mas alto de x y el mas bajo de ξ. Estos son: $x = 1$; $\xi = -1/2 \Rightarrow$

$|R_2(x)| < \left| \frac{10 \cdot 1^3}{162\,(1-1/2)^{8/3}} \right| = \frac{10}{162\, |-1/2|^{8/3}} = \frac{10}{162 \cdot (1/2)^{8/3}}$

$|R_2(x)| < 0{,}4$. Es un error "alto" pero es el mas alto que se puede cometer, dependiendo de los valores de x y ξ.

Prob. 7: Determine los valores ...

formemos el polinomio en gral:

$f(x) = \ln(1+x) + ax^2 + bx \quad \rightarrow \quad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} + 2ax + b \quad \rightarrow \quad f'(0) = 1+b$

$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} + 2a \quad \rightarrow \quad f''(0) = -1+2a$

$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} \quad \rightarrow \quad f'''(0) = 2$

Tenemos hasta el momento el siguiente polinomio:

$P(x) = (1+b)x + (-1+2a)\dfrac{x^2}{2} + 2\dfrac{x^3}{3!} + \dots$

Si quiero que comience con la potencia "más" alta $\Rightarrow$ puedo pedir que $1+b=0 \Rightarrow b=-1$ y $-1+2a=0 \Rightarrow$ $2a=1 \Rightarrow a=1/2$. Con esta elección el polinomio comienza con la potencia cúbica (y ya no podemos anular ningún coeficiente más)

Entonces:

$$\boxed{a = 1/2} \quad y \quad \boxed{b=-1}$$

$P(x) = 2\dfrac{x^3}{3!} + \dots$

Prob. 8: Considere la función ...

(a) $f(x) = \operatorname{sen}(2x) \quad \rightarrow \quad f(\pi/2) = \operatorname{sen}(2\pi/2) = 0$

$f'(x) = 2\cos(2x) \quad \rightarrow \quad f'(\pi/2) = 2\cos(2\pi/2) = -2$

$f''(x) = -2^2 \operatorname{sen}(2x) \quad \rightarrow \quad f''(\pi/2) = -2^2 \operatorname{sen}(2\pi/2) = 0$

$f'''(x) = -2^3 \cos(2x) \quad \rightarrow \quad f'''(\pi/2) = -2^3 \cos(2\pi/2) = 2^3$

$f^{iv}(x) = 2^4 \operatorname{sen}(2x) \quad \rightarrow \quad f^{iv}(\pi/2) = 2^4 \operatorname{sen}(2\pi/2) = 0$

$f^{v}(x) = 2^5 \cos(2x) \quad \rightarrow \quad f^{v}(\pi/2) = 2^5 \cos(2\pi/2) = -2^5$

En general tenemos que:

$$f^n(\pi/2) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=2k \text{ con } k\in\mathbb{N}_0 \\ (-1)^{k+1}\, 2^{2k+1} & \text{si } n=2k+1 \text{ con } k\in\mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$$P(x) = \underbrace{-2(x-\pi/2) + \frac{2^3}{3!}(x-\pi/2)^3 - \frac{2^5}{5!}(x-\pi/2)^5 + \dots}$$

$$\boxed{P(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} (x-\pi/2)^{2k+1}}$$

La suma debe llegar hasta $\frac{n-1}{2}$ pues $2k+1$ debe llegar a n (puesto que $2k+1=n$)

Todos los términos de la suma contienen una derivada del tipo $\cos(2x)$ $\Rightarrow$ para el resto (un orden más de derivación) se tendrá una derivada del tipo $\operatorname{sen}(2x)$ que NO se anula en $x=\xi$. Dicha derivada contendrá un coeficiente 2^{n+1}, entonces el $R_n(x)$ será (prescindiendo del signo):

$$|R_n(x)| = 2^{n+1}|\operatorname{sen}(2\xi)|\left|\frac{(x-\pi/2)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

Ahora evaluamos en $x=\pi/4$

$$|R_n(\pi/4)| = 2^{n+1}|\operatorname{sen}(2\xi)| \frac{|(-\pi/4)|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= 2^{n+1}|\operatorname{sen}(2\xi)| \frac{(\pi/4)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1}}{4^{n+1}} \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}|\operatorname{sen}(2\xi)|$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}|\operatorname{sen}(2\xi)|$$

$$|R_n(\pi/4)| = (\pi/2)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} |\operatorname{Sen}(2\xi)|$$

$$|R_n(\pi/4)| \leq \frac{(\pi/2)^{n+1}}{(n+1)!}$$ acotando el senx, ahora

tomamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(\pi/4)| = \lim_{n\to\infty} \frac{(\pi/2)^{n+1}}{(n+1)!} \sim \frac{\infty}{\infty}$$ esta indeterminado, pero como vimos en la práctica de límites, el factorial crece mucho más rapidamente que la exponencial → tiende a cero (Ver D'alambert)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} |R_n(\pi/4)| = 0}$$

Prob. 9: Considere la función ...

(a) $f(x) = x\, e^{x-2} \to f(2) = 2 . e^0 = 2$

$f'(x) = e^{x-2} + e^{x-2} . x \to f'(2) = 3$

$f''(x) = e^{x-2}(x+2) \to f''(2) = 4$

$f'''(x) = e^{x-2}(x+3) \to f'''(\xi) = e^{\xi-2}(\xi+3)$

$P_2(x) = 2 + 3(x-2) + \frac{4}{2}(x-2)^2 + \dots$

Notamos que $f^{n}(x) = e^{x-2}(x+n)$ y evaluada en $x=2$

$f^{n}(2) = 2+n$. Entonces el polinomio de grado n es:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{k}(2)\,\frac{(x-2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (2+k)\,\frac{(x-2)^k}{k!}$$

(b) Buscamos el Resto:

$$f^{n+1}(x) = e^{x-2}(x+n+1) \rightarrow f^{n+1}(\xi) = e^{\xi-2}(\xi+n+1)$$

con $\xi \in (2,x)$

$$R_n(3) = e^{\xi-2}(\xi+n+1) \cdot \frac{(3-2)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{con } \xi \in (2,3)$$

$$= e^{\xi-2}(\xi+n+1)\,\frac{1}{(n+1)!}$$ una expresión mayor

que esta es cuando ξ toma el valor 3 $\Rightarrow$

$$R_n(3) \leq e^{3-2}\,\frac{(n+4)}{(n+1)!} \leq e\,\frac{(n+4)}{(n+1)!} < 3\,\frac{(n+4)}{(n+1)!}$$

Y una expresión menor es cuando $\xi = 2$ $\Rightarrow$

$$R_n(3) \geq e^{0}\,\frac{(n+3)}{(n+1)!} \geq \frac{(n+3)}{(n+1)!}$$. finalmente:

$$\boxed{\frac{(n+3)}{(n+1)!} \leq R_n(3) \leq \frac{3(n+4)}{(n+1)!}}$$

Ezelrengo para T!

(c) Usamos la propiedad del sandwich:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)}{(n+1)!} \leq \lim_{n\to\infty} R_n(3) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+4)}{(n+1)!}$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} R_n(3) \leq 0$$

Luego: $\boxed{\lim_{n\to\infty} R_n(3) = 0}$

Prob. 10: La función f(x) . . .

$$f(x) = (ax+1)^{1/n} \rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{n}(ax+1)^{1/n-1}\cdot a \rightarrow f'(0) = \frac{a}{n}$$

$$f''(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)(ax+1)^{1/n-2}\cdot a^2 \rightarrow f''(0) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)a^2$$

El polinomio de taylor es:

$$P_2(x) = 1 + \frac{a}{n}x + \frac{a^2}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{x^2}{2}$$ y debe ser igual a:

$$P_2(x) = 1 + 5x - \frac{75}{2}x^2$$

Entonces: $\frac{a}{n} = 5$ (I) ; $\frac{a^2}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right) = -75$ (II)

de(I): $a = 5n \Rightarrow$ en(2): $\frac{(5n)^2}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right) = -75 \Rightarrow$

$$\frac{25n^2}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right) = -75 \Rightarrow n\left(\frac{1}{n}-1\right) = -\frac{75}{25} \Rightarrow 1-n = -3 \Rightarrow$$

$$1+3 = n \rightarrow \{n=4\} \Rightarrow a = 5.4 \rightarrow \{a=20\}$$

Prob. 11: La función f ...

$$f(0)=2$$

$(5x+1)\,f'(x) + f(x) = 1 \rightarrow$ evalúo en $x=0$:

$$(0+1)\,f'(0) + f(0) = 1 \rightarrow f'(0) + 2 = 1 \rightarrow f'(0) = -1$$

Derivo nuevamente:

$5f' + (5x+1)\,f''(x) + f'(x) = 0$ y evalúo en $x=0$:

$$5f'(0) + 1.\,f''(0) + f'(0) = 0 \rightarrow 5.(-1) + f''(0) + (-1) = 0$$

$$f''(0) = 6$$

Derivo nuevamente:

$$6f''(x) + 5f''(x) + (5x+1)\,f'''(x) = 0$$

$$11f''(x) + (5x+1)\,f'''(x) = 0 \rightarrow 11f''(0) + f'''(0) = 0$$

$$11.\,6 + f'''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -66$$

Derivo:

$11f'''(x) + 5f'''(x) + (5x+1)\,f^{IV}(x) = 0$ y evalúo en $x=0 \Rightarrow$

$$11.(-66) + 5(-66) + f^{IV}(0) = 0 \rightarrow f^{IV}(0) = 1056$$

Derivo por última vez:

$$16f^{IV}(x) + 5f^{IV}(x) + (5x+1)\,f^{V}(x) = 0 \rightarrow$$

$$16 f^{iv}(0) + 5 f^{iv}(0) + f^{v}(0) = 0 \rightarrow f^{v}(0) = -22176$$

Ahora formamos el polinomio:

$$P_5(x) = 2 - x + 6\frac{x^2}{2} - 66\frac{x^3}{3!} + 1056\frac{x^4}{4!} - 22176\frac{x^5}{5!}$$

Prob. 12: Considere la función...

Buscamos Taylor de orden 2 en $x = \pi/2$.

$$f(x) = \text{sen}^2 x + \cos x \rightarrow f(\pi/2) = 1$$

$$f'(x) = 2\,\text{sen}\,x \cos x - \text{sen}\,x \rightarrow f'(\pi/2) = -1$$

$$f''(x) = 2\left(\cos^2 x - \text{sen}^2 x\right) - \cos x \rightarrow f''(\pi/2) = -2$$

$$P_2(x) = 1 - (x - \pi/2) - (x - \pi/2)^2$$

(b) Buscamos el error evaluado en $2/5\,\pi$:

$$R_2(x) = f'''(\xi)\,\frac{(x-\pi/2)^3}{3!} \Rightarrow f'''(x) = -8\,\text{sen}\,x \cos x + \text{sen}\,x$$

$$R_2(x) = \left(-8\,\text{sen}(\xi)\cos(\xi) + \text{sen}(\xi)\right)\frac{(x-\pi/2)^3}{3!}$$

$$\left|R_2(x)\right| = \left|-8\,\text{sen}(\xi)\cos(\xi) + \text{sen}(\xi)\right| \frac{|x-\pi/2|^3}{3!}$$

Usemos que $|a+b| \leq |a| + |b| \Rightarrow$

$$|-8 \operatorname{sen}\xi \cos\xi + \operatorname{sen}\xi| \leq |-8 \operatorname{sen}\xi \cos\xi| + |\operatorname{sen}\xi|$$

$$\leq 8 |\operatorname{sen}\xi| |\cos\xi| + |\operatorname{sen}\xi|$$

$$\leq 8 \cdot 1 \cdot 1 + 1 = 9$$

Usando que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos| \leq 1$. Entonces

$$|R_2(x)| \leq 9 \frac{|x - \pi/2|^3}{3!} \Rightarrow |R_2(2/5\pi)| \leq 9 \frac{|2/5\pi - 1/2\pi|^3}{3!}$$

$$\leq 9 (1/10)^3 \frac{\pi^3}{3!} \leq \frac{9\pi^3}{10^3 \cdot 6} = \frac{9\pi^3}{6000}$$

$$|R_2(x)| \leq \frac{9\pi^3}{6000}$$

Prob. 13: Considere la función . . .

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x - 0{,}3x \rightarrow f(\pi) = -0{,}3\pi$

$f'(x) = \cos x - 0{,}3 \rightarrow f'(\pi) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x \rightarrow f''(\pi) = 0$

$$P_2(x) = f(\pi) + f'(\pi) \cdot (x - \pi) + \frac{f''(\pi)}{2} (x - \pi)^2$$

$$P_2(x) = -0{,}3\pi + 0{,}7(x-\pi) + 0\,\frac{(x-\pi)^2}{2}$$

$$\boxed{P_2(x) = -0{,}3\pi + 0{,}7(x-\pi)}$$

(b) $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$ y $f(x) \approx P_2(x)$ siendo $R_2(x)$ el error en la aproximación. Entonces:

$f(x)=0$ es una ecuación que no podemos resolver:

$\operatorname{sen} x - 0{,}3x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 0{,}3x$ (sin solución exacta. Entonces en lugar de resolver $f(x)=0$ resolvamos

$P_2(x) = 0 \Rightarrow -0{,}3\pi + 0{,}7(x-\pi) = 0$

$$0{,}7(x-\pi) = 0{,}3\pi$$

$$x-\pi = \frac{0{,}3\pi}{0{,}7}$$

$$x \approx \frac{0{,}3}{0{,}7}\pi + \pi = (0{,}43+1)\pi$$

$\boxed{x \approx 1{,}43\pi}$ Es un resultado aproximado

No piden que estimemos el error cometido, pero como fin de la práctica podrías intentarlo.

Fin