ASIMOV

Ejercicios Resueltos

Análisis Matemático
Ingeniería-Exactas

Práctica 9
Integrales

(Segunda Parte)

Ejercicios 18-22
y Problemas

$3.00

D

5-96
35M
ROSA

PRACTICA 9
Integrales (Continuación)

Ej. 18) Aplique la integración por partes . . .

Ahora veremos el método de integración por partes. Este se basa en la regla de diferenciación del producto, recordemos que esta es

$$(u.v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

De acá podemos despejar uno de los dos sumandos, por ejemplo el segundo, y obtenemos

$$u \cdot v' = (u.v)' - v \cdot u' \implies \int u \cdot v' = \int (u.v)' - \int u' \cdot v = uv - \int u' \cdot v$$

La idea es que transformamos el problema de integrar a $u \cdot v'$ en el de integrar $u' \cdot v$ ... y esperar que esta integral sea más sencilla. Hagamos el primer inciso con todo detalle para ilustrar este método.

5-96

a) Tenemos que calcular

$$\int x \ln x dx \tag{1}$$

Claramente con el método de sustitución no vamos a ninguna parte. Probemos con partes. Más adelante discutiremos como elegir u y v', por ahora conformémonos con tomar $u = \ln x$, $v' = x$; tenemos que calcular u' y v. Lo primero es fácil, lo segundo involucra en el fondo integrar v'. En nuestro caso tenemos

$$\begin{aligned} u = \ln x \quad &\implies \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' = x \quad &\implies \quad v = \frac{x^2}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

Y la integral queda

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{x}_{v'} dx = \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} dx$$

Y la última igualdad es una "papa" pues

$$\int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C \tag{3}$$

5-96

Luego

$$\int x \ln x dx = \boxed{\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C}$$

Repasemos lo hecho. En (1) tenemos la integral que nos piden y ahí la parte delicada es darse cuenta de quien es u y quien v', estos deben ser elegidos de modo tal que cuando aplicamos el método la integral que nos queda por calcular sea, al menos en principio, más simple.

Otro problema que aparece es que tenemos que poder integrar con relativo poco esfuerzo a v' si no estamos fritos, esto lo hicimos en el segundo renglón de (2).

Por último hay que poner bien el resultado. A veces algunos se marean y ponen como resultado sólo la integral que calculan al final y se olvidan de uv (en nuestro ejemplo $x^2/2 \ln x$.

Ahora veamos como elegir quien es u y quien es v'. La regla que usaremos es mnemotécnica, se llama ILPET y nos dice cual de las funciones es u, es decir la **que no esta derivada**. El nombre de la regla significa

I = inversa
L = logarítmica
P = potencial
E = exponencial
T = trigonométrica

y nos da un orden de prioridad en la elección. En el ejemplo que dimos antes, el integrando está formado por una función logarítmica y una potencial (x). Como en ILPET la 'L' está antes que la 'P' elegimos la logarítmica como la función sin derivar (la u) y la otra como la derivada. Si nos hubiesen pedido

$$\int \operatorname{sen} x e^x dx$$

En el integrando aparece una exponencial y una trigonométrica. Como el ILPET la 'E' de exponencial está antes que la 'T' de trigonométrica, elegimos como u a $u = e^x$, y $v' = \operatorname{sen} x$.

Todo lo anterior forma la parte básica del método; este además tiene varios trucos que vamos a ver a medida que los necesitemos. Sigamos con los otros incisos

b) Tenemos que calcular una integral definida. El procedimiento es igual al que hacíamos cuando aplicábamos el método de sustitución, primero hallamos las primitivas y después usamos la regla de Barrow.

Para calcular las primitivas aplicamos partes; y vamos a utilizar un truco bastante común en este método. Si observamos el integrando, notamos que tenemos sólo una función ($\ln x$) en vez de un producto, o sea que en principio no tenemos entre que escoger quién es u y quien es v'. El truco consiste entonces en considerar al integrando como $\ln x = 1 \cdot \ln x$, es decir como el producto de la función constante 1 y la función $\ln x$. De acuerdo con la regla ILPET, como logarítmica está antes que potencia (consideramos $1 = x^0$), tomamos a 1 como función derivada y a $\ln x$ como función sin derivar, entonces

$$u = \ln x \implies u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \implies v = x$$

Por lo tanto,

$$\int \ln x dx = \int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{\ln x}_{u} dx = \underbrace{x}_{v} \underbrace{\ln x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} dx =$$

$$= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C$$

Y ahora calculamos la integral definida:

$$\int_1^e \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^e = e \ln e - e - (1 \ln 1 - 1) = e - e - 0 + 1 = \boxed{1}$$

c) La integral es

$$\int x \operatorname{sen} x dx$$

Como en ILPET, la 'p' está antes que la 't', elegimos como función sin derivar a x (la potencial) y como derivada a la trigonométrica ($\operatorname{sen} x$), entonces

$$u = x \implies u' = 1$$
$$v' = \operatorname{sen} x \implies v = -\cos x$$

Entonces

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v'} dx = \underbrace{x}_{u} (\underbrace{-\cos x}_{v}) - \int \underbrace{1}_{u'} (\underbrace{-\cos x}_{v}) dx = -x \cos x + \int \cos x dx =$$

$$\boxed{-x\cos x + \operatorname{sen} x + C}$$

d) Es parecido al anterior, tomamos como función sin derivar a x y como función derivada a e^x, luego

$$u = x \implies u' = 1$$
$$v' = e^x \implies v = e^x$$

Entonces

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - \int e^x dx = \boxed{xe^x - e^x + C}$$

e) Como en el inciso b), acá también aparece sólo una función en el integrando, así que usamos el truco de multiplicar por 1, entonces

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x dx$$

Dado que $\operatorname{arctg} x$ es una función inversa (la de la $\operatorname{tg} x$) y que 'i' es la primera letra de ILPET, tomamos a $\operatorname{arctg} x$ como la función sin derivar y a 1 como la función derivada, entonces

$$u = \operatorname{arctg} x \implies u' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$v' = 1 \implies v = x$$

Y la integral queda

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx \qquad (*)$$

Y el problema ahora es resolver la integral que está a la derecha. Si la miramos bien, vemos que la derivada del denominador es $2x$ y que en el numerador tenemos una x ... así que lo más conveniente en este caso es aplicar el método de sustitución. Entonces

$$t = 1 + x^2 \implies dt = 2xdx \implies \frac{1}{2}dt = xdx$$

Luego

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{t}\frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

Y si reemplazamos en $(*)$, nos queda

$$\boxed{\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C}$$

f) En este caso nos conviene reescribir el integrando para que sea más claro lo que hay que hacer; dado que

$$\frac{x}{e^x} = xe^{-x} \implies \int \frac{x}{e^x}dx = \int xe^{-x}dx$$

Y resolvemos esta última integral. Tomamos como función sin derivar a x y como derivada a e^{-x}, entonces

$$\begin{aligned} u =& x \implies u' = 1 \\ v' =& e^{-x} \implies v = -e^{-x} \end{aligned}$$

Aplicamos partes y obtenemos

$$\int xe^{-x}dx = x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} + (-e^{-x}) + C =$$

$$\boxed{-xe^{-x} - e^{-x} + C}$$

g) Nos piden que calculemos una integral definida. Primero calculamos la integral indefinida y después usamos Barrow.
Para calcular

$$\int x^3\cos x\,dx$$

Tomamos como función sin derivar a x^3 y como derivada a $\cos x$, entonces

$$\begin{aligned} u = x^3 &\implies u' = 3x^2 \\ v' = \cos x &\implies v = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

y

$$\int x^3\cos x\,dx = x^3\operatorname{sen} x - \int 3x^2\operatorname{sen} x\,dx = x^3\operatorname{sen} x - 3\int x^2\operatorname{sen} x\,dx \qquad (*)$$

Obviamente ahora nos resta calcular $\int x^2\operatorname{sen} x\,dx$, por la forma del integrando lo mejor es volver a aplicar partes, entonces

$$u = x^2 \implies u' = 2x$$
$$v' = \operatorname{sen} x \implies v = -\cos x$$

y por lo tanto,

$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx = x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx$$

Reemplazamos en $(*)$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\int x^3 \cos x dx =& x^3 \operatorname{sen} x - 3\left(-x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx\right) = \\ =& x^3 \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x - 6\int x \cos x dx\end{aligned} \qquad (**)$$

Es triste pero no nos queda más remedio que volver a aplicar partes por tercera vez para calcular la última integral. Tomamos

$$u = x \implies u' = 1$$
$$v' = \cos x \implies v = \operatorname{sen} x$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx =& x \operatorname{sen} x - \int 1 \cdot \operatorname{sen} x dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = \\ =& x \operatorname{sen} x - (-\cos x) + C = x \operatorname{sen} x + \cos x + C\end{aligned}$$

Reemplazamos en $(**)$ y finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}\int x^3 \cos x dx =& x^3 \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x - 6(x \operatorname{sen} x + \cos x + C) = \\ =& x^3 \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x - 6x \operatorname{sen} x - 6 \cos x + C\end{aligned}$$

Y todavía nos falta calcular la integral definida, por suerte esto es fácil:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^3 \cos x dx =& (x^3 \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x - 6x \operatorname{sen} x - 6 \cos x)\Big|_0^\pi = \\ =& \pi^3 \operatorname{sen} \pi + 3\pi^2 \cos \pi - 6\pi \operatorname{sen} \pi - 6 \cos \pi - (-6 \cos 0) = \\ =& -3\pi^2 + 6 + 6 = \boxed{-3\pi^2 + 12}\end{aligned}$$

h) Este es parecido al d) y al f), y lamentablemente también al g), vamos a volver a tener que hacer partes tres veces ... Empecemos
Tengo el producto de una potencia y una exponencial, así que tomamos como función sin derivar a x^3, pór lo tanto

$$\begin{aligned} u =& x^3 \implies u' = 3x^2 \\ v' =& e^{2x} \implies v = \frac{e^{2x}}{2} \end{aligned}$$

Entonces

$$\int x^3 e^{2x} dx = x^3 \frac{e^{2x}}{2} - \int 3x^2 \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{x^3 e^{2x}}{2} - \frac{3}{2} \int x^2 e^{2x} dx \qquad (*)$$

Volvemos a aplicar partes para calcular $\int x^2 e^{2x} dx$.
De nuevo

$$\begin{aligned} u =& x^2 \implies u' = 2x \\ v' = e^{2x} \implies v =& \frac{e^{2x}}{2} \end{aligned}$$

Luego

$$\int x^2 e^{2x} dx = x^2 \frac{e^{2x}}{2} - \int 2x \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x} dx$$

Reemplazamos en $(*)$ y nos queda

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{2x} dx =& \frac{x^3 e^{2x}}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x} dx \right) \\ =& \frac{x^3 e^{2x}}{2} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{2} \int x e^{2x} dx \end{aligned} \qquad (**)$$

Y volvemos a aplicar partes,

$$\begin{aligned} u = x \implies u' = 1 \\ v' = e^{2x} \implies v = \frac{e^{2x}}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int x e^{2x} dx =& x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \\ =& \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \frac{e^{2x}}{2} + C = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos en $(**)$ y finalmente obtenemos

$$\int x^3e^{2x}dx = \frac{x^3e^{2x}}{2} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{2}\left(\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}\right) + C$$

$$= \boxed{\frac{x^3e^{2x}}{2} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C}$$

i) Esta integral es similar a la hecha en e) y vamos a usar el mismo truco. Consideramos

$$\int \arccos x dx = \int 1 \cdot \arccos x dx$$

Y tomamos

$$u = \arccos x \implies u' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v' = 1 \implies v = x$$

Entonces

$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \int x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (*)$$

Y ahora aplicamos el método de sustitución para calcular la última integral, dado que $(1-x^2)' = -2x$, tomamos

$$t = 1 - x^2 \implies dt = -2xdx \implies -\frac{1}{2}dt = xdx$$

Luego

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{-1/2}{\sqrt{t}}dt = -\int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Reemplazamos en $(*)$ y las primitivas son

$$\boxed{\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C}$$

j) Como siempre, primero calculamos la integral indefinida y para esto vamos a recurrir a un truco clásico. Presten atención por que requiere de cierta sutileza.

Primero, por la regla ILPET, tenemos que

$$\begin{aligned} u &= e^x &\implies u' &= e^x \\ v' &= \operatorname{sen} x &\implies v &= -\cos x \end{aligned}$$

Entonces

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = -\cos x e^x - \int (-\cos x) e^x dx = -\cos x e^x + \int \cos x e^x dx$$

Volvemos a aplicar la regla en la última integral y tenemos

$$\begin{aligned} u &= e^x &\implies u' &= e^x \\ v' &= \cos x &\implies v &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int \cos x e^x dx = \operatorname{sen} x e^x + \int \operatorname{sen} x e^x dx = \operatorname{sen} x e^x - \int \operatorname{sen} x e^x dx$$

¡Y volvemos a obtener la integral que teníamos que calcular originalmente!
Para ver exactamente cual es la situación escribamos como nos queda todo:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen} x e^x dx &= -\cos x e^x + \left(\operatorname{sen} x e^x - \int \operatorname{sen} x e^x dx \right) = \\ &= -\cos x e^x + \operatorname{sen} x e^x - \int \operatorname{sen} x e^x dx \end{aligned}$$

Como están las cosas, si prestamos atención vemos que podemos pasar de miembro la integral del lado derecho de la igualdad, ¡este es el truco de este inciso!, obtenemos

$$\int \operatorname{sen} x e^x dx + \int \operatorname{sen} x e^x dx = -\cos x e^x + \operatorname{sen} x e^x \implies$$

$$2 \int \operatorname{sen} x e^x dx = -\cos x e^x + \operatorname{sen} x e^x \implies$$

$$\int \operatorname{sen} x e^x dx = \frac{-\cos x e^x + \operatorname{sen} x e^x}{2} + C$$

Y ahora calculamos la integral definida:

$$\int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x dx = \left(\frac{-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2} \right) \Bigg|_0^\pi =$$

$$= \frac{-e^\pi \cos \pi + e^\pi \operatorname{sen} \pi}{2} - \left(\frac{-e^0 \cos 0 + e^0 \operatorname{sen} 0}{2} \right) = \boxed{\frac{e^\pi + 1}{2}}$$

Ej. 19) Si llamamos ...

Este ejercicio es una generalización de los items d) y h) del ejercicio anterior. Según vimos para calcular esas integrales hay que usar partes y en el segundo caso hay que emplear este método tres veces (noten que ahora sólo tenemos e^x, no e^{2x}). Si prestamos atención a h) vemos que cada vez que aplicamos partes nos queda una integral que tiene la misma forma, la única diferencia es que en cada paso baja en 1 el exponente de x. Es en este sentido que nos hablan de una *fórmula de reducción*, reducimos el cálculo de nuestra integral al del cálculo de una más simple donde la simpleza en este caso es que el exponente de x sea uno menos que el de la integral original, de este modo, si aplicamos la fórmula de reducción n veces habremos calculado la integral.
Lo que tenemos que hacer para resolver este ejercicio es ver que pasa cuando aplicamos el método de integración por partes a la integral

$$\int x^n e^x dx$$

Antes de empezar, veamos la notación para comprender a qué debemos llegar. Nos dicen que

$$I_n = \int x^n e^x dx$$

Lo realmente importante en este caso es que el subíndice de la I coincide con el exponente de x. De esta manera, lo que tenemos que probar es que

$$\int_0^1 x^n e^x dx = e - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx$$

Como las integrales que nos proponen son integrales definidas, primero calculamos la indefinida y después aplicamos la fórmula de Barrow.
Para integrar, dado que el integrando está compuesto por una potencia (x^n) y una exponencial (e^x), hacemos

$$\begin{aligned} u &= x^n \implies u' = nx^{n-1} \\ v' &= e^x \implies v = e^x \end{aligned}$$

entonces

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - \int nx^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

¡Observen que la integral de la derecha es exactamente I_{n-1}!

Y ahora aplicamos Barrow (o sea $\int_a^b uv' = uv\,\Big|_a^b - \int_a^b u'v$)

$$\int_0^1 x^n e^x dx = x^n e^x \,\Big|_0^1 - \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = 1^n e^1 - 0^n e^0 - n\int_0^1 x^{n-1} e^x dx =$$

$$= e - n\int_0^1 x^{n-1} e^x dx = e - I_{n-1}.$$

que es lo que teníamos que probar.

Ej. 20) Demuestre las siguientes . . .

Esencialmente lo que vamos a hacer es lo mismo que en el ejercicio anterior, noten que ya hicimos b) con $n = 3$ en el ejercicio 18) g).

En realidad acá se deslizaron unos errores, el enunciado correcto sería:
Sean

$$I_n = \int x^n \operatorname{sen} x dx \qquad \text{y} \qquad J_n = \int x^n \cos x dx$$

Entonces valen las fórmulas:

$$I_n = -x^n \cos x + nJ_{n-1} \qquad \text{y} \qquad J_n = x^n \operatorname{sen} x - nI_{n-1}$$

a) Tenemos que

$$I_n = \int x^n \operatorname{sen} x dx \qquad \text{y} \qquad J_{n-1} = \int x^{n-1} \cos x dx$$

Aplicamos partes para I_n:

$$u = x^n \implies u' = nx^{n-1}$$
$$v' = \operatorname{sen} x \implies v = -\cos x$$

Entonces

$$\underbrace{\int x^n \operatorname{sen} x dx}_{I_n} = x^n(-\cos x) - \int nx^{n-1}(-\cos x)dx = -x^n \cos x + n\underbrace{\int x^{n-1} \cos x dx}_{J_{n-1}}$$

Por lo tanto

$$I_n = -x^n \cos x + nJ_{n-1}$$

b) El procedimiento es exactamente el mismo que el del inciso anterior

$$u = x^n \implies u' = nx^{n-1}$$
$$v' = \cos x \implies v = \operatorname{sen} x$$

Luego

$$\underbrace{\int x^n \cos x dx}_{J_n} = x^n \operatorname{sen} x - \int nx^{n-1} \operatorname{sen} x dx = x^n \operatorname{sen} x - n \underbrace{\int x^{n-1} \operatorname{sen} x dx}_{I_{n-1}}$$

Por lo tanto

$$J_n = x^n \operatorname{sen} x - nI_{n-1}$$

Ej. 21) La función f . . .

La clave de este ejercicio es darse cuenta que en la integral que tenemos que calcular aparece f derivada y $\cos x$ mientras que en la que nos dan de dato está f sin derivar y aparece $\operatorname{sen} x$ que es, salvo el signo la derivada de $\operatorname{sen} x$. Esta situación es ideal para usar partes.
Entonces

$$u = \cos x \implies u' = -\operatorname{sen} x$$
$$v' = f' \implies v = f$$

Por lo tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi/2} f'(x) \cos x dx = f(x) \cos x \Big|_{-\pi}^{\pi/2} - \int_{-\pi}^{\pi/2} f(x)(-\operatorname{sen} x) dx =$$
$$= f(x) \cos x \Big|_{-\pi}^{\pi/2} + \int_{-\pi}^{\pi/2} f(x) \operatorname{sen} x dx \qquad (*)$$

Por hipótesis,

$$\int_{-\pi}^{\pi/2} f(x) \operatorname{sen} x dx = 4 \qquad \text{y} \qquad f(-\pi) = 3$$

Si reemplazamos en $(*)$, nos queda

$$\int_{-\pi}^{\pi/2} f'(x)\cos x\,dx = f(\pi/2)\cos\pi/2 - \underbrace{f(-\pi)}_{3}\underbrace{\cos(-\pi)}_{-1} + 4 = 0 + 3 + 4 = \boxed{7}$$

Ej. 22) Halle las primitivas de . . .

El método de fracciones simples se aplica cuando el integrando es una función racional, es decir es el cociente de dos polinomios. Como el método consta de tres casos, en esta introducción señalaremos algunos hechos generales y a medida que vayamos resolviendo los ejercicios haremos las aclaraciones que corresponda.
Para aplicar este método, del grado del numerador **debe** ser menor que el del denominador; de modo que si esto no ocurre, tenemos que dividir los polinomios. Recordemos que tenemos lo siguiente:
Si P y Q son dos polinomios, entonces existen polinomios C y R tales que

$$P = QC + R \qquad \text{y grado } R < \text{ grado } Q$$

Una vez que conseguimos esto, nos queda

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{C(x)Q(x) + R(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{C(x)Q(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)}dx =$$
$$= \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

De modo que nos queda la integral de un polinomio más la integral de una función donde aplicaremos el método. Ejemplos de este tipos de cuentas son los incisos d), f) y h). Veremos que a veces podemos simplificar en vez de dividir, pero esto ya depende mucho del integrando.
El objetivo del método es escribir a la función racional como suma de funciones más simples; por esto entenderemos funciones racionales cuyos numeradores son polinomios de grado 0 o 1 y cuyos denominadores tienen la forma $(x-a)^k$ o x^2+a. Los casos se clasifican según la factorización del denominador, tenemos

Caso 1: *El denominador tiene todas sus raíces reales y simples.*
En este caso, si $Q(x) = (x-r_1)\cdots(x-r_k)$ al aplicar el método llegamos a que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-r_1} + \cdots \frac{A_k}{x-r_k}\ .$$

donde $r_1, \ldots, r_k$ son las raíces del denominador y $A_1, \ldots, A_k$ son constantes que debemos determinar; notemos que hay tantas constantes como raíces. (Ver por ejemplo los incisos a), b) y c))

Caso 2: *El denominador tiene todas sus raíces reales y al menos una es múltiple.*
Supongamos primero que sólo hay una raíz y que esta es múltiple, entonces $Q(x)$ es de la forma $Q(x) = (x-a)^k$. Al aplicar el método llegamos a que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} \qquad (\star)$$

Con $A_1, \ldots, A_k$ constantes. Notemos que la cantidad de constantes es igual al orden de la raíz a.(Un ejemplo de este tipo es el inciso e))
Si hay más de una raíz múltiple (por ejemplo en el inciso g) y en el h)), tenemos una expresión de la forma del miembro derecho de $(\star)$ por cada una de las raíces múltiples ... Y también puede haber raíces simples. Creo que lo mejor es dar un ejemplo. Si

$$Q(x) = (x-1)(x+5)(x-3)^2(x-6)^3$$

Entonces $r_1 = 1$ y $r_2 = -5$ son raíces simples, $r_3 = 3$ es una raíz múltiple de orden 2 (que es el exponente de $x-3$ en la factorización de Q) y $r_4 = 6$ es una raíz múltiple de orden 3. Entonces tras aplicar el método vamos a llegar a que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5} + \underbrace{\frac{C}{x-3} + \frac{D}{(x-3)^2}}_{3 \text{ es raíz doble}} + \underbrace{\frac{E}{x-6} + \frac{F}{(x-6)^2} + \frac{G}{(x-6)^3}}_{6 \text{ es raíz triple}}$$

Caso 3: *El denominador tiene raíces complejas y son todas simples*
Este caso es algo técnico, sobre todo por lo que hace a los números complejos. Por suerte es posible explicar la mecánica del caso sin que sea necesario profundizar demasiado en que son y como "funcionan" estos números.
Primero, $Q(x)$ va a tener raíces complejas cuando al intentar factorizarlo nos encontramos con un factor de la forma $ax^2 + bx + c$ que no tiene raíces reales (esto ocurría cuando $b^2 - 4ac < 0$). Por ejemplo, si tomamos $x^4 - 1$, tenemos que

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1 = \underbrace{(x^2-1)(x^2+1)}_{\text{usamos diferencia de cuadrados}} = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

Y $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales.
La gran diferencia con los casos anteriores es que cuando tengamos raíces complejas los numeradores que van a aparecer después de aplicar el método en vez de ser

constantes van a ser polinomios de grado 1. Como ejemplo, en el caso anterior va a ser

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\underbrace{\frac{Cx+D}{x^2+1}}_{\text{parte de la raíz compleja}}$$

Ahora veremos en los ejercicios como se resuelve cada caso.

a) Tenemos que calcular

$$\int \frac{4}{(x-1)(x-2)}dx$$

El integrando es el cociente de dos polinomios y el grado del numerador es menor que el del denominador, así que podemos usar fracciones simples. El denominador ya está factorizado, vemos que tiene dos raíces reales distintas (1 y 2) entonces tienen que existir constantes A y B tales que

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

Para hallar estas constantes, primero sacamos en el miembro de la derecha denominador común y después igualamos los numeradores:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)}$$

Entonces debe ser

$$1=(A+B)x-2A-B$$

Para no confundirse, hasta que estén cancheros, conviene completar los polinomios para que tengan el mismo grado, en este caso

$$0x+1=(A+B)x-2A-B$$

Y ahora usamos que para que dos polinomios sean iguales tienen que ser iguales sus coeficientes, entonces

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=-B \\ -2A-B=1 \end{cases} \Longrightarrow B=1 \Longrightarrow A=-1 \text{ y } B=1$$

Y ya conseguimos las constantes, entonces

$$\frac{1}{(x-2)(x-1)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$$

Entonces

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} dx = -\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \boxed{-\ln|x-1| + \ln|x-2| + C}$$

(y si están empezando a sospechar que este método va ser un poco cuentoso ... tienen razón.)

b) Este es similar al anterior. Ahora el denominador tiene tres raíces simples, así que vamos a tener que buscar tres constantes A, B y C tales que

$$\frac{3x-2}{(x+2)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

Sacamos denominador común e igualamos los numeradores

$$\frac{3x-2}{(x+2)(x-2)(x+3)} = \frac{A(x-2)(x+3) + B(x+2)(x+3) + C(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-2)(x+3)}$$
$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (A+5B)x + (-6A+6B-4C)}{(x+2)(x-2)(x+3)}$$

Entonces tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+5B=3 \\ -6A+6B-4C=-2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1/5 \\ C=-11/5 \end{cases}$$

Luego

$$\int \frac{3x-2}{(x-2)(x+2)(x+3)} dx = \int \frac{2}{x+2} + \frac{1/5}{x-2} + \frac{-11/5}{x+3} dx$$

$$= 2\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{11}{5}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \boxed{2\ln|x+2| + \frac{1}{5}\ln|x-2| - \frac{11}{5}\ln|x+3| + C}$$

c) El grado del numerador es menor que el del denominador, así que podemos aplicar fracciones simples directamente. La factorización del denominador es

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

por diferencias de cuadrados.
Como las raíces son dos y distintas, buscamos A y B tales que

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Sacamos denominador común en la expresión de la derecha e igualamos los numeradores, nos queda

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

entonces debe ser

$$2x+1 = (A+B)x + 2A - 2B \implies \begin{cases} 2 = A+B \\ 1 = 2A-2B \end{cases} \implies \begin{cases} A = 5/4 \\ B = 3/4 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{2x+1}{x^2-4}dx = \int \frac{5/4}{x-2} + \frac{3/4}{x+2}dx = \int \frac{5/4}{x-2}dx + \int \frac{3/4}{x+2}dx =$$

$$= \boxed{\frac{5}{4}\ln|x-2| + \frac{3}{4}\ln|x+2| + C}$$

d) En este caso tenemos que el grado del numerador es mayor que el del denominador así que no podemos aplicar el método de fracciones simples directamente. Como dijimos en la introducción primero tenemos que dividir, entonces

$$\begin{array}{r|l} x^3 \ + 0x^2 \ + 2x \ + 0 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -\ x^3 \ + 0x^2 \ - x \quad\quad & x \\ \cline{1-1} 3x \ + 0 & \end{array}$$

Por lo tanto

$$x^3 + 2x = x(x^2-1) + 3x$$

Entonces

$$\int \frac{x^3+2x}{x^2-1}dx = \int \frac{x(x^2-1)+3x}{x^2-1}dx = \int \frac{x(x^2-1)}{x^2-1}dx + \int \frac{3x}{x^2-1}dx =$$

$$= \int x dx + \int \frac{3x}{x^2-1}dx$$

Y ahora la primera integral es fácil de calcular y en la segunda, como el grado del numerador es menor que el del denominador, podemos aplicar fracciones simples. Las primitivas de la primera integral son:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Y para la segunda, como las raíces de x^2-1 son distintas pues $x^2-1=(x-1)(x+1)$, buscamos constantes A y B tales que

$$\frac{3x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

sacamos denominador común e igualamos los numeradores, nos queda

$$3x = A(x+1) + B(x-1) = (A+B)x + A - B \implies \begin{cases} 3 = A+B \\ 0 = A-B \end{cases} \implies \begin{cases} A = 3/2 \\ B = 3/2 \end{cases}$$

Luego

$$\int \frac{3x}{x^2-1}dx = \int \frac{3/2}{x-1} + \frac{3/2}{x+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+1} =$$
$$= \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + C$$

Y si juntamos todo obtenemos lo que buscábamos:

$$\boxed{\int \frac{x^3+2x}{x^2-1}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + C}$$

e) El denominador es x^2+2x+1 que se factoriza como

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

Por lo tanto en este caso tenemos que $x=-1$ es una raíz **doble**. En este caso, como vimos en la introducción, buscamos constantes A y B tales que

$$\frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

Y ahora procedemos como antes: Sacamos denominador común e igualamos los numeradores, entonces

$$\frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} = \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2}$$

Entonces

$$1 = Ax + A + B \implies \begin{cases} 0 = A \\ 1 = A + B \end{cases} \implies \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

Luego

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

Y ahora calculamos la última integral, por ejemplo usando sustitución:

$$u = x+1 \implies du = dx \implies$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{x+1} + C$$

Por lo tanto

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+2x+1} = -\frac{1}{x+1} + C}$$

Observación: Si miran lo que acabamos de hacer, van ver que en realidad alcanzaba con transformar x^2+2x+1 en $(x+1)^2$ en la integral original, es decir no hacia falta aplicar fracciones simples. Esto es cierto, de todos modos optamos por el camino más largo ya que este es el primer ejercicio donde aparecen raíces múltiples en el denominador.

f) En este inciso tenemos que tratar con dos cosas: Primero, el grado del numerador es mayor que el del denominador y segundo, el denominador tiene raíces complejas. Para solucionar el primer inconveniente dividimos como hicimos en el ítem d). Obtenemos

$$x^3 = x(x^2+1) - x$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}dx = \int \frac{x(x^2+1)}{x^2+1}dx + \int \frac{-x}{x^2+1}dx =$$

$$= \int x dx + \int \frac{-x}{x^2+1}dx$$

No hay ningún problema para calcular la primera integral:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Y para la segunda usamos fracciones simples (nuevamente esto es innecesario, ya que la derivada de $x^2 + 1$ es $2x$ y tenemos x en el numerador, podemos aplicar el método de sustitución, no obstante continuamos con fracciones simples para ilustrar como funciona este método cuando las raíces no son reales, ¡ es el único caso en que esto ocurre en este ejercicio!)
Claramente el denominador no tiene raíces reales pues no existe ningún número real que satisfaga la igualdad $x^2 + 1 = 0$. Las raíces son $x = i$ y $x = -i$, por lo tanto estamos en presencia de raíces complejas simples. De acuerdo con lo visto en la introducción tenemos que encontrar constantes A y B tales que

$$\frac{-x}{x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2+1}$$

En este caso lo único que tenemos hacer es igualar los numeradores y llegamos a

$$-x = Ax + B \implies \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \end{cases}$$

¡Y llegamos a la misma integral!, realmente este no es un buen ejemplo de como aplicar el método.
Entonces

$$\int \frac{-x}{x^2+1} dx = \int \frac{-1x+0}{x^2+1} dx$$

Y ya no nos queda más remedio que aplicar sustitución. Tomamos

$$u = x^2 + 1 \implies du = 2xdx \implies -\frac{1}{2} du = -xdx$$

Luego

$$\int \frac{-x}{x^2+1} dx = \int \frac{-1/2}{u} du = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \ln|u| + C = -\frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$$

Por lo tanto

$$\int \frac{-x}{x^2+1} dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

Y si juntamos todo lo que tenemos llegamos a que

$$\boxed{\int \frac{x^3}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C}$$

g) El grado del numerador es menor que el del denominador así que podemos aplicar directamente fracciones simples. Si miramos la integral, vemos que el denominador ya esta factorizado y te tiene una raíz triple ($x=0$) y una doble $x=-1$). Como ya aclaramos tenemos entonces que buscar cinco constantes A, B, C, D y E (tres para la raíz $x=0$ y dos para la raíz $x=-1$) tales que

$$\frac{x^2+x+1}{x^3(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}$$

Sacamos denominador común e igualamos los numeradores, entonces

$$\frac{x^2+x+1}{x^3(x+1)^2} = \frac{Ax^2(x+1)^2 + Bx(x+1)^2 + C(x+1)^2 + Dx^3(x+1) + Ex^3}{x^3(x+1)^2} =$$
$$= \frac{(A+D)x^4 + (2A+B+D+E)x^3 + (A+2B+C)x^2 + (B+2C)x + C}{x^3(x+1)^2}$$

Por lo tanto

$$\begin{cases} A+D=0 \\ 2A+B+D+E=0 \\ A+2B+C=1 \\ B+2C=1 \\ C=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \ \ 2 \\ B=-1 \\ C= \ \ 1 \\ D=-2 \\ E=-1 \end{cases}$$

Entonces

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^3(x+1)^2}dx = \int \frac{2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{-2}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}dx =$$
$$=2\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{x^3}dx + -2\frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{(x+1)^2}dx =$$
$$=\boxed{2\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C}$$

h) En este inciso, dado que el grado del numerador es igual al del denominador primero tenemos que dividir y después aplicar fracciones simples (y nuevamente las raíces son múltiples). Entonces, dividimos y llegamos a

$$x^4+1=x^2(x-1)^2+2x^3-x^2+1$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4+1}{x^2(x-1)^2}dx=&\int\frac{x^2(x-1)^2+2x^3-x^2+1}{x^2(x-1)^2}dx=\\=&\int\frac{x^2(x-1)^2}{x^2(x-1)^2}+\frac{2x^3-x^2+1}{x^2(x-1)^2}dx\\=&\int 1dx+\int\frac{2x^3-x^2+1}{x^2(x-1)^2}dx=x+\int\frac{2x^3-x^2+1}{x^2(x-1)^2}dx\qquad(1)\end{aligned}$$

Y ahora aplicamos el método de fracciones simples para calcular la última integral. Las raíces son $x=0$ y $x=1$, y las dos son dobles, entonces buscamos constantes A, B , C y D tales que

$$\begin{aligned}\frac{2x^3-x^2+1}{x^2(x-1)^2}=&\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}=\\=&\frac{Ax(x-1)^2+B(x-1)^2+Cx^2(x-1)+Dx^2}{x^2(x-1)^2}=\\=&\frac{(A+C)x^3+(-2A+B-C+D)x^2+(A-2B)x+B}{x^2(x-1)^2}\end{aligned}$$

Entonces, igualando el numerador llegamos a

$$\begin{cases}A+C=2\\-2A+B-C+D=-1\\A-2B=0\\B=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}A=2\\B=1\\C=0\\D=2\end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int\frac{2x^3-x^2+1}{x^2(x-1)^2}dx=&\int\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{(x-1)^2}dx=\\=&2\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx+2\int\frac{1}{(x-1)^2}dx=\\=&2\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}+C\end{aligned}$$

Y finalmente reemplazamos en (1) para obtener el resultado

$$\boxed{\int \frac{x^4+1}{x^2(x-1)^2}dx = x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} + C}$$

Prob. 1: La función f satisface . . .

Este ejercicio, y los que siguen, son del tipo «arregleselas como pueda», son un complemento a lo visto anteriormente donde no nos dicen que hay que usar.

En este caso nos dicen que f satisface la ecuación

$$f(x) = 5xf'(x) \qquad (*)$$

Y que $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt = 12$.

Nos piden que calculemos $f(2)$

Dado que el único dato de que disponemos es el valor de la integral (y afortunadamente una de los límites de integración es 2, en valor de x en el que nos piden que evaluemos a f) integramos la igualdad $(*)$. Evidentemente si integramos uno de los miembros de la igualdad debemos integrar el otro, así que

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 5xf'(x)dx \qquad (*)$$

La integral de la izquierda sabemos que da 12, y para tratar de aclarar un poco las cosas en la de la derecha podemos intentar hacer partes, observen que tenemos en el integrando el producto de dos funciones y una de ellas es claramente la derivada de una función; entonces

$$\begin{aligned} u = 5x &\iff u' = 5 \\ v' = f'(x) &\iff v = f(x) \end{aligned}$$

Entonces

$$\int 5xf'(x)dx = 5xf(x) - \int 5f(x)dx = 5xf(x) - 5\int f(x)dx$$

Y como tenemos que trabajar con la integral definida

$$\int_0^2 5xf'(x)dx = 5xf(x)\Big|_0^2 -5\underbrace{\int_0^2 f(x)dx}_{12}$$

Luego

$$\int_0^2 5xf'(x)dx = 5\cdot 2\cdot f(2) - 5\cdot 12 = 10f(2) - 60$$

Si volvemos $(*)$ vemos que

$$12 = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^x 5xf'(x)dx = 10f(2) - 60$$

y despejando $f(2)$ llegamos a

$$f(2) = \frac{12+60}{10} = \boxed{\frac{36}{5}}$$

Prob. 2: Encuentre el polinomio ...

Recordemos que el polinomio de Taylor de orden 3 de una función f en $x=0$ esta dado por la fórmula

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

De modo que en este ejercicio es sólo tenemos que derivar y armar el polinomio. La función que nos dan es:

$$f(x) = \int_0^x (1+t)^3 \ln(1+t)dt$$

Entonces:

$$f(0) = \int_0^0 (1+t)^3 \ln(1+t)dt = 0$$

$$f'(x) = \left(\int_0^x (1+t)^3 \ln(1+t)dt\right)' = (1+x)^3\ln(1+x) \implies f'(0) = 1\cdot \ln 1 = 0$$

$$f''(x) = 3(1+x)^2\ln(1+x) + (1+x)^3\frac{1}{1+x} = (1+x)^2\,(3\ln(1+x)+1)$$

$$\Longrightarrow\ f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = 2(1+x)(3\ln(1+x)+1) + (1+x)^2\left(\frac{3}{1+x}\right) \Longrightarrow f'''(0) = 5$$

Por lo tanto el polinomio de Taylor de orden 3 en $x = 0$ es

$$\boxed{\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}5x^3}$$

Prob. 3: Encuentre una primitiva ...

Tenemos que encontrar una primitiva particular (la que verifica que $g(0) = -3\ln 4$. Lo que podemos hacer entonces es encontrar todas y después ver de todas ellas cual es la que cumple con lo pedido.
Para encontrar todas las primitivas lo único que tenemos que hacer es integrar:

$$\int \frac{e^{3x}}{4+e^{3x}}dx$$

Dado que la derivada de $4+e^{3x}$ es $3e^{3x}$ podemos probar con el método de sustitución:

$$u = 4+e^{3x} \Longrightarrow du = 3e^{3x}dx \Longrightarrow \frac{1}{3}dx = e^{3x}dx$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{e^{3x}}{4+e^{3x}}dx = \int \frac{1/3}{u}du = \frac{1}{3}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|4+e^{3x}| + C$$

Y ahora tenemos que ver cual de todas estas es la que cumple con la condición pedida, es decir de ver cual cumple con $g(0) = -3\ln 4$. Para esto, simplemente reemplazamos x por 0 y despejamos C, entonces, si

$$g(x) = \frac{1}{3}\ln(4+e^{3x}) + C \Longrightarrow g(0) = \frac{1}{3}\ln(4+e^{3.0}) + C \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{3}\ln(4+1)+C=-3\ln 4$$

Luego

$$C=-3\ln 4-\frac{1}{3}\ln 5$$

Por lo tanto la función buscada es

$$\boxed{g(x)=\frac{1}{3}\ln(4+e^{3x})-3\ln 4-\frac{1}{3}\ln 5}$$

Prob. 4: Halle una función . . .

Tenemos que encontrar una f que cumpla con lo pedido. Tal vez lo más conveniente sea, para empezar, eliminar la integral; esto podemos hacerlo derivando, entonces

$$(x+3)f(x)=x^2+1+\int_1^x f(t)dt \implies ((x+3)f(x))'=\left(x^2+1+\int_1^x f(t)dt\right)'$$
$$\implies f(x)+(x+3)f'(x)=2x+f(x)$$

Podemos cancelar f en ambos miembros y llegamos a

$$(x+3)f'(x)=2x$$

Como $x\in(0,+\infty)$, $x+3\neq 0$ y podemos pasarlo dividiendo, nos queda

$$f'(x)=\frac{2x}{x+3}$$

Y ahora para hallar a f lo único que tenemos que hacer es integrar. Dado que tenemos el cociente de dos polinomios que tienen el mismo grado, así que primero dividimos. Tenemos que

$$2x=2(x+3)-6$$

Por lo tanto

$$\int\frac{2x}{x+3}dx=\int\frac{2(x+3)-6}{x+3}dx=\int\frac{2(x+3)}{x+3}-\frac{6}{x+3}dx=$$
$$=\int 2-\frac{6}{x+3}dx=2\int dx-6\int\frac{dx}{x+3}=2x-6\ln(x+3)+C$$

Así que llegamos a que $f(x) = 2x - 6\ln(x+3) + C$ y lo que nos queda por hacer es determinar la constante C, para esto usamos el dato «$f(1) = 1/2$». Entonces

$$\frac{1}{2} = f(1) = 2 - 6\ln 4 + C \implies C = \frac{1}{2} - 2 + 6\ln 4 = -\frac{3}{2} + 6\ln 4$$

Por lo tanto la función buscada es:

$$\boxed{f(x) = 2x - 6\ln(x+3) + 6\ln 4 - \frac{3}{2}}$$

Prob. 5: Halle una función continua ...

Es parecido al anterior, primero derivamos para tratar de «despejar» a g, entonces

$$1 + \int_0^{\ln x} g(e^t)dt = x^2 + \ln x \implies \left(1 + \int_0^{\ln x} g(e^t)dt\right)' = (x^2 + \ln x)' \implies^*$$

$$g\left(e^{\ln x}\right) \cdot \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x} \implies g(x) = x\left(2x + \frac{1}{x}\right) \implies \boxed{g(x) = 2x^2 + 1}$$

* recordemos que si tenemos una función de la forma $F(x) = \int^{g(x)} f(t)dt$, entonces por la regla de la cadena $F(x) = f(x)g'(x)$

Prob. 6: Pruebe que ...

Este ejercicio es una simple aplicación de la fórmula de cambio de variable que vimos en los ejercicios 16) r), D) y 17).
En este ítem tenemos que probar que

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$$

Dado que el integrando es el mismo es un poco difícil detectar por este lado cual es el cambio de variable, en cambio si miramos las fórmulas y los extremos de integración, tenemos que, de alguna manera

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Entonces probemos con esto, para no confundir las cosas introducimos una nueva variable u y consideramos
Tenemos que $t = 1/u$. Notemos que t es una función decreciente y que:

- Si $u = 1 \longrightarrow t = 1$, si $u = x \longrightarrow t = 1/x$
- Si $t' = -1/u^2$ y $t\colon [x,1] \to [1, 1/x]$ (Como t es decreciente, si $x < 1 \implies 1 < 1/x$). Con la notación de la fórmula del cambio de variable, tenemos que $a = x$, $b = 1$, $c = 1$ y $d = 1/x$.

Si juntamos todo esto, tenemos que:

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = -\int_1^{1/x} \frac{-1/u^2}{1+1/u^2} du = \int_1^{1/x} \frac{1}{u^2+1} du$$

Prob. 7: Considere la función . . .

a) Tenemos que calcular $\int_{e^{-3}}^1 f(x)dx$. Dado que f está dada por una función partida, tenemos que decidir que parte o partes son las que tenemos que utilizar para calcular la integral. Como los extremos de integración son e^{-3} y 1, tenemos que $e^{-3} \leq x \leq 1$ y por lo tanto $f(x) = \dfrac{2\ln x}{3x}$. Entonces

$$\int_{e^{-3}}^1 f(x)dx = \int_{e^{-3}}^1 \frac{2\ln x}{3x} dx$$

Primero buscamos las primitivas:

$$\int \frac{2\ln x}{3x} dx = \frac{2}{3} \int \frac{\ln x}{x} dx$$

Hacemos sustitución con $u = \ln x$, entonces

$$u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \implies$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{2}{3}\int \ln x \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3}\int u du = \frac{2}{3}\frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{3}\ln^2 x + C$$

Y ahora calculamos la integral definida:

$$\int_{e^{-3}}^1 \frac{2\ln x}{3x} dx = \frac{1}{3}\ln^2 x \Big|_{e^{-3}}^1 = \frac{1}{3}\left(ln^2(1) - \ln^2(e^{-3})\right) = \frac{1}{3}(0 - (-3)^2) = \boxed{-3}$$

Ezelrengo para T!

b) Evidentemente, k tiene que ser mayor que 1 pues la integral entre e^{-3} y 1 da -3 y en ese intervalo la función tiene siempre el mismo signo; entonces

$$\int_{e^{-3}}^{k} f(x)dx = \int_{e^{-3}}^{1} f(x)dx + i\int_{1}^{k} \underbrace{f(x)}_{=4} dx \overset{*}{=} -3 + \int_{1}^{k} 4dx = -3 + 4k - 4 = 4k - 7$$

(* usamos que, si $1 \leq x \leq k$, entonces $f(x) = 4$.)
Por lo tanto debe ser

$$4k - 7 = 35 \Longrightarrow 4k = 42 \Longrightarrow \boxed{k = \frac{21}{2}}$$

Prob. 8: Si $I_n = \ \ldots$

Este ejercicio es similar al 19). Lo que queremos probar es la igualdad

$$n\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}dt = \sqrt{2} - (n-1)\int_0^1 \frac{t^{n-2}}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

Para probar esta igualdad, como hicimos antes, vamos a usar partes. Así como están las cosas, no queda claro que tomar como derivada y que como sin derivar; lo que nos conviene es reescribir el integrando:

$$\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int_0^1 t^{n-1}\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

Y ahora tiene mejor aspecto, como $t/\sqrt{t^2+1}$ es la derivada de $\sqrt{t^2+1}$ nos conviene hacer

$$u = t^{n-1} \Longrightarrow u' = (n-1)t^{n-2}$$
$$v' = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \Longrightarrow v = \sqrt{t^2+1}$$

Entonces

$$\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}dt = t^{n-1}\sqrt{t^2+1}\,\Big|_0^1 - (n-1)\int_0^1 t^{n-2}\sqrt{t^2+1}dt =$$

$$= \sqrt{2} - (n-1)\int_0^1 t^{n-2}\sqrt{t^2+1}dt \qquad (*)$$

Todavía no tenemos lo que queremos; lo que podemos hacer es multiplicar y dividir dentro de la integral por $\sqrt{t^2+1}$, entonces

$$\int_0^1 t^{n-2}\sqrt{t^2+1}dt = \int_0^1 t^{n-2}\sqrt{t^2+1}\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int_0^1 \frac{t^{n-2}(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}}dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{t^n+t^{n-2}}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}dt + \int_0^1 \frac{t^{n-2}}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

Y ahora volvemos a $(*)$, nos queda

$$\int \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}dt = \sqrt{2} - (n-1)\left[\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}dt + \int_0^1 \frac{t^{n-2}}{\sqrt{t^2+1}}dt\right] \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}dt + (n-1)\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}dt = \sqrt{2} - (n-1)\int_0^1 \frac{t^{n-2}}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

Luego

$$n\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}dt = \sqrt{2} - (n-1)\int_0^1 \frac{t^{n-2}}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

como queríamos probar.

Prob. 9: La función f es continua . . .

Basta ver que la derivada de G es positiva. Tenemos que

$$G'(x) = \left(\frac{1}{5}x + \int_0^{x^3+x}\sqrt{1+f^2(t)}dt\right)' = \frac{1}{5} + \sqrt{1+f^2(x^3+x)}\cdot(3x^2+1)$$

Como $1/5$, $\sqrt{1+f^2(x^3+x)}$ y $3x^2+1>0$ entonces $G'(x)>0$ y la función es estríctamente creciente.

Prob. 10: La función f tiene . . .

Sea P el polinomio de Taylor de f de segundo orden. Tenemos que estimar el error que comentemos al aproximar la integral de f entre 0 y $0,5$ por la integral de P en el mismo intervalo.
Por la fórmula de Taylor sabemos que

$$f(x) = P(x) + R(x), \qquad \text{con } R \text{ el resto de orden } 2$$

Entonces

$$\int_0^{0,5} f(x)dx = \int_0^{0,5} P(x)dx + \int_0^{0,5} R(x)dx \implies \int_0^{0,5} f(x) - P(x)dx = \int_0^{0,5} R(x)dx$$

Así que para estimar el error, basta con estimar $\left|\int_0^{0,5} R(x)dx\right|$
Por propiedades básicas de la integral,

$$\left|\int_0^{0,5} R(x)dx\right| \leq \int_0^{0,5} |R(x)|dx \qquad (*)$$

Es hora de recordar cual es la expresión de $R(x)$. Tenemos que

$$R(x) = \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

Por lo tanto, si reemplazamos en $(*)$ nos queda que

$$\int_0^{0,5} |R(x)|dx = \int_0^{0,5} \left|\frac{f'''(0)}{3!}x^3\right| dx \leq \int_0^{0,5} \frac{1/8}{6}x^3 dx = \frac{1}{48}\int_0^{0,5} x^3 dx =$$

$$\frac{1}{48}\frac{x^4}{4}\Big|_0^{0,5} = \frac{1}{48}\frac{0,5^4}{4} \simeq 0,00033$$

Por lo tanto el error que comentemos es menor que $0,00033$.

Prob. 11: Pruebe que I_n . . .

Ya hicimos varios ejercicios de este tipo. Este en particular me parece que tiene un error, véamos que sucede cuando aplicamos partes
Si tomamos

$$u = \ln^n x \implies u' = n\ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x}$$

$$v' = x^n \implies v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Por lo tanto

$$\int x^n \ln^n x dx = \frac{x^{n+1}\ln^n x}{n+1} - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot n \cdot \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}\ln^n x}{n+1} - \frac{n}{n+1}\int x^n \ln^{n-1}(x)\, dx$$

Y vemos que la última integral **no** es I_{n-1}.
Por otra parte, si calculamos la derivada de $(x^{n+1}\ln^n x)/(n+1) - n/(n+1)\, I_{n-1}$ vemos no nos da $x^n \ln^n x$, así que ...

Prob. 12: ¿Para qué valores de ...

Primero calculemos la integral. Tenemos dos varios casos

$$\int \frac{dx}{x^p} = \int x^{-p} dx = \begin{cases} \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1} & \text{si } p \neq 1 \\ \ln|x| & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

Entonces

$$\int_1^n \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^n = \dfrac{1}{1-p}\left(\dfrac{1}{n^{p-1}} - 1\right) & \text{si } p \neq 1 \\ \ln|x|\Big|_1^n = \ln n & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

Luego, si $p \neq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{n^{p-1}} - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{si } p-1 > 0 \\ \infty & \text{si } p-1 < 0 \end{cases}$$

O, si $p = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$$

Por lo tanto, el límite es finito, y da $1/(p-1)$, si $p>1$.

Prob. 13: Se define la función ...

a) Tenemos que calcular $\Gamma(1)$ y $\Gamma(2)$.
Como

$$\Gamma(1)=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t x^{1-1}e^{-x}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}dx$$

Así que tenemos que hallar primero la primitiva.

$$\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C \implies \int_0^t e^{-x}dx=-e^{-t}+1$$

Por lo tanto,

$$\Gamma(1)=\lim_{t\to+\infty}-e^{-t}+1=\boxed{1}$$

Y lo mismo para calcular $\Gamma(2)$, pero ahora la integral es un poco más complicada

$$\Gamma(2)=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t x^{2-1}e^{-x}dx$$

Así que hay que calcular $\int xe^{-x}dx$. Hacemos partes:

$$\begin{aligned} u=&x \implies u'=1\\ v'=&e^{-x} \implies v=-e^{-x}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int xe^{-x}dx=&x(-e^{-x})-\int(-e^{-x})dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx\\ =&-xe^{-x}+(-e^{-x})+C=-xe^{-x}-e^{-x}+C\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^t xe^{-x}dx=\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)\Big|_0^t=-te^{-t}-e^{-t}-(-1)=-te^{-t}-e^{-t}+1$$

Luego

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-x}dx=\lim_{t\to+\infty}-te^{-t}-e^{-t}+1=\boxed{1}$$

5-96

($\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} 1/e^t = 0$ y, por L'Hospital, $\lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$)

b) Veamos que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$; esto es parecido a lo que hicimos en otros ejercicios al buscar fórmulas de reducción. Busquemos primero que relación hay entre las primitivas y después pasemos al límite.
Tenemos que calcular $\int_0^t x^n e^{-x}dx$. Una vez más optamos por integrar por partes, sean

$$u = x^n \implies u' = nx^{n-1}$$
$$v' = e^{-x} \implies v = -e^{-x}$$

Entonces

$$\int x^n e^{-x}dx = x^n(-e^{-x}) - \int nx^{n-1}(-e^{-x})dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}dx$$

Luego

$$\int_0^t x^n e^{-x}dx = -x^n e^{-x}\Big|_0^t + n\int_0^t x^{n-1}e^{-x}dx = -t^n e^{-t} + n\int_0^t x^{n-1}e^{-x}dx$$

Y pasando al límite, tenemos que

$$\Gamma(n+1) = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t x^n e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\left(-t^n e^{-t} + n\int_0^t x^{n-1}e^{-x}dx\right) =$$

$$= n\lim_{t\to+\infty}\int_0^t x^{n-1}e^{-x}dx = n\Gamma(n)$$

5-96

Por lo tanto, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.
A partir de esto, sale que $\Gamma(n) = (n-1)!$ (hay un pequeño error en la práctica). En efecto, recordemos que $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1$ y veamos como obtenemos esto a partir de la función Γ
Tenemos que

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1 = 1!$$
$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2 = 2!$$
$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3\cdot 2 = 3!$$
$$\vdots$$

Si continuamos, es fácil convencerse de la validez de la fórmula. ($\lim_{t\to+\infty} -t^n e^{-t} = 0$ después de hacer n-veces L'Hospital)

FIN DE LA PRACTICA 9

5-96