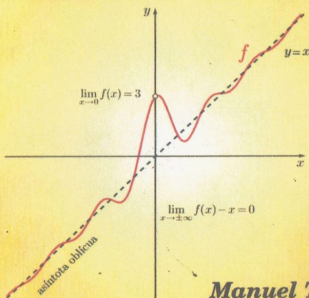


Cálculo Diferencial

con aplicaciones

$$f(x) = x + \frac{\text{sen}(3x)}{x}, \quad x \neq 0$$



**Manuel Toribio
Ruth Medina**



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS**

Serie de Matemática

Cálculo Diferencial
con
Aplicaciones

Manuel Toribio C.
Ruth Medina A.

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias

CÁLCULO DIFERENCIAL CON APLICACIONES

Ira. edición: 1000 Ejemplares

Mayo del 2009

© DERECHOS RESERVADOS

AUTORES: Manuel Toribio Cangana
Ruth Medina Aparcana

EDITOR: UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
Av. Tupac Amaru N°210-Rímac, Apartado 31-139
Telefax: 4810824, Lima - Perú.

Prohibida la reproducción total o parcial de este libro, sin el permiso previo y por escrito de los autores.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional
del Perú N°: 2008-00372
I.S.B.N: 978-9972-9775-7-2

Impreso en los Talleres Gráficos de la:
Imprenta: **MOSHERA S.R.L.**
Jr Tacna 2975 - Lima 31
Telefax: 567-9299.

Dedicatoria

*Dedicamos este trabajo a nuestros hijos:
Gustavo Fabrizio y Carlos Andres
por haberles robado el invaluable tiempo
de estar con ellos para escribir esta obra.*

Contenido

1	Lógica Básica	1
1.1	Conceptos Básicos	2
1.2	Equivalencia Lógica	5
1.3	Cuantificadores	7
1.3.1	Cuantificadores Universal y Existencial	7
1.3.2	Negación de Cuantificadores	8
1.4	Implicación Lógica	10
1.5	Reglas de Inferencia y Demostraciones	11
1.6	Ejercicios Resueltos	14
1.7	Ejercicios Propuestos	18
2	Los Números Reales	25
2.1	Axiomas de Cuerpo	25
2.2	El Axioma de Orden	30
2.3	El Axioma del Supremo	36
2.4	Principio de Inducción Matemática	44
2.5	Ejercicios Resueltos	45
2.6	Ejercicios Propuestos	49
3	Funciones Reales	55
3.1	Definición y Ejemplos	55
3.2	Tipos de Funciones	64
3.3	Imagen y Preimagen	67
3.4	Funciones Monótonas	70
3.5	Operaciones con Funciones	71
3.6	Composición de Funciones	74
3.7	La Inversa de una Función	77

3.8	Ejercicios Resueltos	80
3.9	Ejercicios Propuestos	86
Sucesiones de Números Reales		93
4.1	Definición y Ejemplos	93
4.2	Límite de Sucesiones	95
4.3	Sucesiones Monótonas	104
4.4	Ejercicios Resueltos	108
4.5	Ejercicios Propuestos	112
Límites de funciones		119
5.1	El Concepto de Límite	119
5.2	Propiedades del Límite	125
5.3	Los Infinitos y el Límite	135
5.3.1	Límites Infinitos	135
5.3.2	Límites en el Infinito	139
5.3.3	Límites Infinitos en el Infinito	144
5.4	Asíntotas	147
5.5	Ejercicios Resueltos	152
5.6	Ejercicios Propuestos	158
Continuidad		165
6.1	Continuidad y Discontinuidad	165
6.2	Propiedades Básicas	172
6.3	El Teorema del Valor Intermedio	176
6.4	El Teorema de los Valores Extremos (T.V.E)	180
6.5	Continuidad de la Función Inversa	185
6.6	Ejercicios Resueltos	186
6.7	Ejercicios Propuestos	192
Derivadas		197
7.1	Nociones Básicas sobre Derivación	197
7.2	Álgebra de las derivadas	206
7.3	Regla de la cadena	209
7.4	Derivada de la Función Inversa	212
7.5	Derivación Implícita	216
7.6	Ejercicios Resueltos	221
7.7	Ejercicios Propuestos	227

8	Aplicaciones de la Derivada	231
8.1	El Teorema del Valor Medio TVM	231
8.2	Criterio de la 1ra y 2da Derivada	239
8.3	Convexidad y Concavidad	244
8.4	Los Polinomios de Taylor	253
8.5	Ejercicios Resueltos	260
8.6	Ejercicios Propuestos	267
	Bibliografía	273

Prólogo

La presente obra está dirigida a los estudiantes de ciencias e ingeniería, que con seguridad les servirá como libro de texto así como de referencia suplementaria.

En esta primera edición, cada uno de los capítulos aquí considerados, han sido abordados de modo eficaz y claro; además de incluir una buena dosis de problemas resueltos y propuestos. Entre otros, temas como el de funciones reales, sucesiones, límites, continuidad y derivadas han sido enfocados con un gran rigor analítico y al mismo tiempo con la simplicidad y claridad al alcance de los estudiantes de ingeniería, así como de otras disciplinas afines.

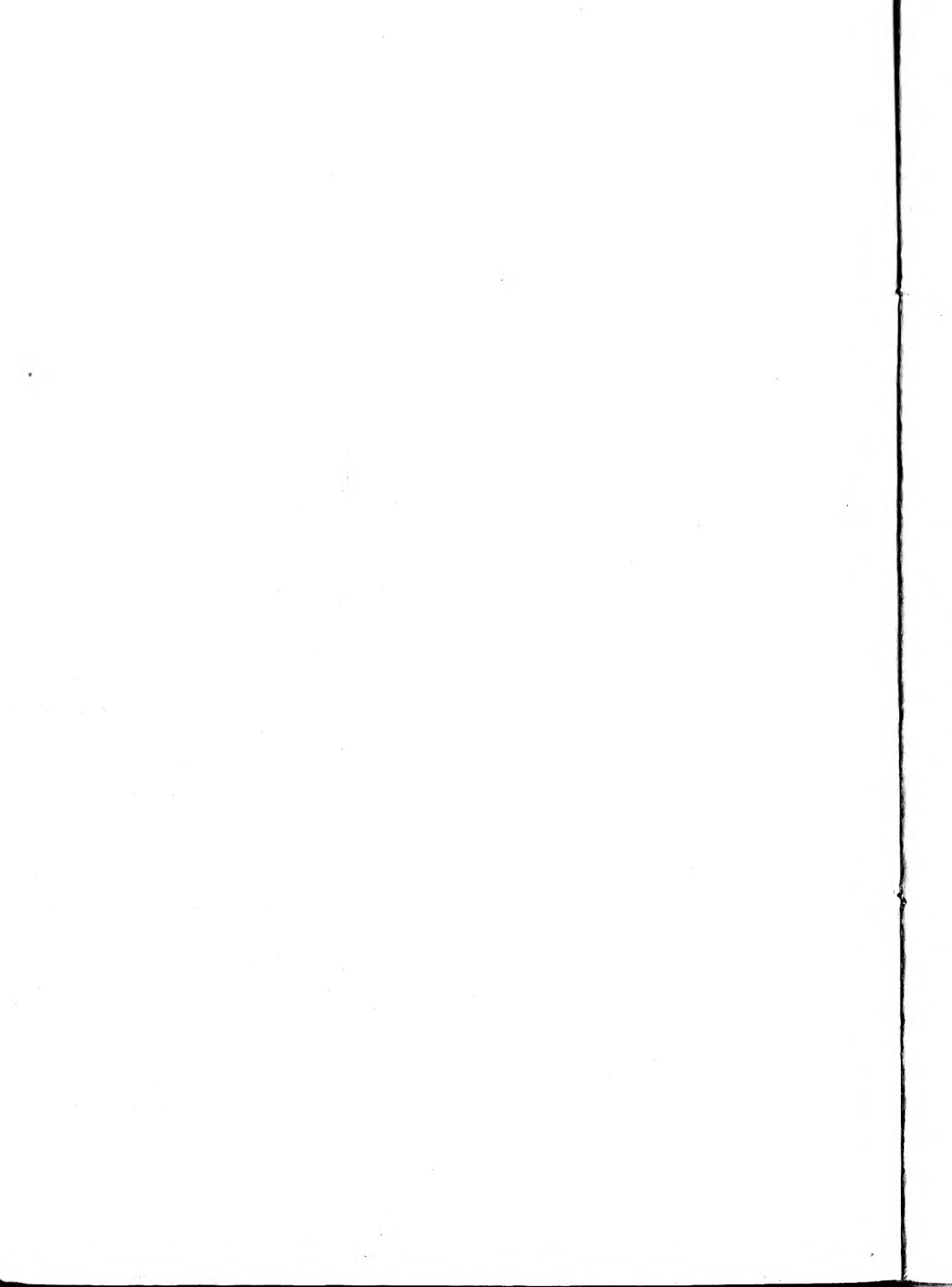
En la obra se da una particular y especial importancia a la formulación y solución de los problemas, lo que conduce a que el lector corrobore y disfrute de lo que teóricamente se postula. De este modo la presente obra establece marcadas diferencias en relación a la literatura existente en la materia.

Creo que la Universidad Nacional de Ingeniería tiene un gran potencial para lograr una nutrida gama en publicaciones, con este convencimiento no escatimé esfuerzos en persuadir al profesor Manuel Toribio Cangana para que se decidiera a terminar y publicar esta obra, que estoy seguro, será de gran utilidad y provecho a los estudiantes universitarios en cursos de matemática de los primeros semestres.

La actividad académica universitaria de un docente, debe pasar por su dedicación a la producción intelectual, y en el caso del profesor M. Toribio, no me queda más que felicitarlo y agradecerle por esta obra que prestigia a la Facultad de Ciencias y la UNI.

Debo también felicitar a la profesora Ruth Medina Aparcana por su aporte y contribución en la realización del presente libro. Finalmente, invocar a los docentes de Ciencias e Ingeniería de nuestra Universidad, continuar este ejemplo en bien de nuestra institución. Estoy convencido que toda iniciativa de esta naturaleza debe ser apoyada de modo que *publicar nuestra producción intelectual*, se haga entre nosotros un hábito.

Dr. Pedro Canales García
Decano FC- UNI



Capítulo 1

Lógica Básica

El hombre ha cuestionado su existencia y su circunstancia desde el momento en que emergió la llamada conciencia del yo.

A partir de ese día, estuvo consciente de que en su mente permanecían imágenes representativas de las cosas, aunque éstas hubiesen dejado de estimular sus sentidos.

Lo anterior debió haber provocado una inmensa alegría a nuestros antepasados, al darse cuenta de que podían pensar en el ser querido sin estar presente éste, comunicar por medio de signos lingüísticos sus experiencias a las generaciones venideras; pero quizá también sintieron temor, duda y vacilación frente a preguntas tales como: ¿Es completa la idea que tengo de este fenómeno?, ¿es verdadero el juicio que hago de estas personas?, ¿es válido el orden en que he desarrollado mis ideas?. Éstas son algunas preguntas que a todos nos inquietan, especialmente a aquel que intenta arrancar y hacer suyo el orden o lógica bajo el cual se expresan los fenómenos de nuestro entorno.

A pesar de lo difícil que es lograr una respuesta satisfactoria a las preguntas anteriormente formuladas, el hombre se ha entregado a la tarea de estudiar las reglas que lo lleven a proceder con orden, con facilidad y sin error en el trabajo de la razón, surgiendo, a partir de Aristóteles, el estudio de la lógica como una inmensa esperanza capaz de desentrañar el misterio de la perspectiva humana.

En este capítulo se pretende que el estudiante se familiarice con los métodos de razonamiento matemático, utilizando las reglas más elementales de inferencia. La tarea principal de la lógica es la formalización y sistematización

de los métodos válidos de razonamiento; a la lógica no le compete pronunciarse sobre la verdad o falsedad de los enunciados, sólo le interesa establecer en qué casos la verdad de las premisas implica la verdad de las conclusiones.

1.1 Conceptos Básicos

Definición 1.1.1 Se llama **proposición lógica** a toda expresión que tiene la cualidad de ser o bien verdadera o bien falsa, pero no ambas a la vez.

Veamos algunos ejemplos:

1. 151 es un número primo, es una proposición verdadera.
2. $\sqrt{2}$ es un número racional, es una proposición falsa.
3. Buenos Aires es la capital de Argentina, es una proposición verdadera.
4. Plutón es un planeta, es una proposición falsa.
5. Carlos Marx escribió La Iliada, es una proposición falsa.
6. La luna no es un satélite, es una proposición falsa.
7. Hoy es lunes y mañana es jueves, es una proposición falsa.

La expresión "2 divide a x " no es una proposición, pues no sabemos qué valor toma x . Por ejemplo, si x es un número par, será una proposición verdadera; en cambio, si x es un número impar, ésta será una proposición falsa.

Las proposiciones se denotan con las letras p, q, r, s, t , etc. Dada una o más proposiciones, se pueden construir otras utilizando los términos de enlace *y*, *no* y *o*, llamados **conectivos lógicos** y denotados por \wedge , \sim y \vee , respectivamente. La **negación** de la proposición p , denotada por $\sim p$, es una proposición (que se lee no p), mientras que $p \wedge q$ (que se lee p y q) y $p \vee q$ (que se lee p o q) son llamados la **conjunción** y la **disyunción** de las proposiciones p y q . Los valores de verdad de estas proposiciones se dan en las siguientes tablas:

p	$\sim p$	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V
F	V	F	F	F	F

Observaciones:

- 1.- Los conectivos \wedge y \vee no establecen ninguna relación (en el sentido matemático) entre las proposiciones p y q , sino que tanto $p \wedge q$ como $p \vee q$ son nuevas proposiciones obtenidas a partir de las proposiciones p y q .
- 2.- Existen otros conectivos que se derivan de los anteriores, que por su importancia tienen nombres propios. Éstos son el condicional y el bicondicional, que en seguida pasamos a explicar.

Definición 1.1.2 El condicional de las proposiciones p y q (denotada por $p \rightarrow q$) se define como la proposición compuesta $\sim p \vee q$, es decir

$$p \rightarrow q \stackrel{def}{\equiv} (\sim p) \vee q$$

y se lee "si p , entonces q ".

A la proposición p se le llama **antecedente** y a la proposición q se le llama **consecuente**. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Al igual que en la conjunción y en la disyunción, el conectivo \rightarrow no establece ninguna relación (en el sentido matemático) entre las proposiciones p y q , sino que $p \rightarrow q$ es una nueva proposición obtenida a partir de las proposiciones p y q . Por ejemplo,

Si 1 es primo entonces 2 es par

es una proposición verdadera. ¿Por qué?

Existen otras maneras de leer la condicional $p \rightarrow q$. Por ejemplo, se puede decir que

p es una condición suficiente para q , o que
 q es una condición necesaria para p

Definición 1.1.3 El bicondicional de las proposiciones p y q (denotada por $p \leftrightarrow q$) se define como la proposición compuesta $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, es decir

$$p \leftrightarrow q \stackrel{def}{\equiv} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

y se lee “ p si y sólo si q ”. Su tabla de verdad es

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Al igual que en los casos anteriores, el conectivo \leftrightarrow no establece ninguna relación entre p y q , sino que $p \leftrightarrow q$ es una nueva proposición, obtenida a partir de las proposiciones p y q . Otra forma de leer la bicondicional $p \leftrightarrow q$ es

p es una condición necesaria y suficiente para q .

Una **fórmula lógica** es una expresión que contiene un número finito de variables proposicionales: p, q, r , etc., y un número finito de operaciones lógicas: $\vee, \wedge, \sim, \rightarrow$, etc., en una correcta combinación.

El valor de verdad de una fórmula lógica dependerá de los valores de verdad de las variables proposicionales que intervienen en la misma y el número de combinaciones que tengamos en una tabla de verdad dependerá del número de variables proposicionales que lo determinan, siendo en general igual a 2^n , donde n es el número de proposiciones que intervienen. Por ejemplo la tabla de verdad de la fórmula lógica

$$(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r$$

tiene $2^3 = 8$ combinaciones posibles.

Definición 1.1.4 Una **tautología** (contradicción) es una fórmula lógica que siempre es verdadera (falsa), es decir, su valor de verdad es independiente de los valores de verdad de las proposiciones simples que lo determinan. Si una fórmula lógica no es ni una tautología ni una contradicción se llamará una **contingencia**.

Ejemplos de Tautologías:

1. $p \vee \sim p$
2. $\sim(\sim p) \leftrightarrow p$
3. $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
4. $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$
5. $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
6. $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

7. $[p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow \sim p$

8. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

9. $[(p \wedge \sim r) \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

10. $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \vee q)] \rightarrow (r \vee s)$

Verificar que cada una de estas 10 fórmulas lógicas son efectivamente tautologías (vea el ejercicio 3 en la sección de ejercicios resueltos). El lector principiante debe verificar la mayoría de éstas.

Damos ahora un concepto que sí relaciona proposiciones, llamado equivalencia lógica, que de inmediato pasamos a estudiar.

1.2 Equivalencia Lógica

Definición 1.2.1 Se dice que dos proposiciones p y q son **lógicamente equivalentes** (lo que denotamos por $p \equiv q$) si la bicondicional $p \leftrightarrow q$ es una tautología, es decir

$$p \equiv q \text{ si y sólo si } p \leftrightarrow q \text{ es una tautología}$$

Observación.- La relación de equivalencia (lógica) satisface tres propiedades que caracterizan la definición general de relación de equivalencia. Éstas son:

1. Propiedad Reflexiva

$$p \equiv p \text{ para toda proposición } p.$$

2. Propiedad Simétrica

$$\text{Si } p \equiv q, \text{ entonces } q \equiv p.$$

3. Propiedad Transitiva

$$\text{Si } p \equiv q \text{ y } q \equiv r, \text{ entonces } p \equiv r.$$

A continuación se da una lista de equivalencias importantes que muchas veces son conocidas como leyes lógicas.

Leyes Lógicas

Dadas las proposiciones lógicas p , q y r , se tienen las siguientes leyes lógicas:

1. *Ley de Idempotencia*

$$p \vee p \equiv p \quad , \quad p \wedge p \equiv p.$$

2. *Ley Asociativa*

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \quad , \quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r).$$

3. *Ley Conmutativa*

$$p \vee q \equiv q \vee p \quad , \quad p \wedge q \equiv q \wedge p.$$

4. *Ley Distributiva*

$$\begin{aligned} p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{aligned}$$

5. *Leyes de D'Morgan:*

$$\begin{aligned} \sim (p \wedge q) &\equiv (\sim p \vee \sim q) \\ \sim (p \vee q) &\equiv (\sim p \wedge \sim q). \end{aligned}$$

6. *Ley del Contrarrecíproco*

$$(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p).$$

7. *Leyes del Complemento*

$$\begin{aligned} p \vee \sim p &\equiv \text{Tautología} \\ p \wedge \sim p &\equiv \text{Contradicción} \\ \sim(\sim p) &\equiv p \end{aligned}$$

8. *Leyes de la Identidad*

$$\begin{aligned} p \vee \text{Contradicción} &\equiv p \\ p \vee \text{Tautología} &\equiv \text{Tautología} \\ p \wedge \text{Contradicción} &\equiv \text{Contradicción} \\ p \wedge \text{Tautología} &\equiv p \end{aligned}$$

9. *Leyes del Condicional*

$$\begin{aligned} p \longrightarrow q &\equiv (\sim p) \vee q \\ \sim (p \longrightarrow q) &\equiv p \wedge \sim q \end{aligned}$$

10. *Leyes de Absorción*

$$\begin{aligned} (i) \quad p \wedge (p \vee q) &\equiv p & , & \quad (ii) \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ (iii) \quad \sim p \wedge (p \vee q) &\equiv \sim p \wedge q & \quad y & \quad (iv) \quad \sim p \vee (p \wedge q) \equiv \sim p \vee q \end{aligned}$$

La relación de equivalencia lógica \equiv permite simplificar algunas fórmulas lógicas, ya que toda proposición puede sustituirse por otra equivalente; para ilustrar esta idea vea los ejercicios resueltos 4, 5 y 6.

1.3 Cuantificadores

1.3.1 Cuantificadores Universal y Existencial

La expresión

$$x > 0$$

no siempre es una proposición, puesto que no sabemos qué valor toma x . Por ejemplo, para $x =$ "Manzana", la expresión no tiene ningún sentido, pero sí lo tiene si tomamos valores numéricos adecuados para la variable x : si $x = 2$, la expresión es una proposición verdadera; si $x = -5$, la expresión es una proposición falsa.

Definición 1.3.1 Sea A un conjunto no vacío. Una **función lógica** sobre el conjunto A es una expresión p que depende de x (lo que denotamos por $p = p(x)$) tal que a cada elemento a del conjunto A asigna un único calificativo a la expresión $p(a)$, que puede ser verdadero o falso (pero no ambos a la vez). Esto es, $p(a)$ es una proposición lógica para todo $a \in A$.

Por ejemplo, la expresión inicial " $x > 0$ ", es una función lógica sobre el conjunto de los números reales.

Sea $p = p(x)$ una función lógica sobre un conjunto A y \mathcal{V} el conjunto de todos los valores x para los cuales $p(x)$ es verdadero, es decir

$$\mathcal{V} = \{ x \in A / p(x) \}$$

El conjunto \mathcal{V} es el conjunto de validez de la función lógica p . Evidentemente

$$\phi \subseteq \mathcal{V} \subseteq A.$$

Cuantificador Universal.- Si $\mathcal{V} = A$, es decir,

$$\{ x \in A / p(x) \} = A,$$

el enunciado $p(x)$ es verdadero para todo elemento de A . Escribimos en este caso

$$(\forall x \in A) p(x) \quad \text{ó} \quad \forall x \in A, p(x)$$

y decimos

“para todo $x \in A$ se cumple $p(x)$.”

El símbolo \forall se llama cuantificador universal.

Cuantificador Existencial.- Si $\mathcal{V} \neq \phi$, entonces \mathcal{V} posee por lo menos un elemento. Escribimos en este caso

$$(\exists x \in A) p(x) \quad \text{ó} \quad \exists x \in A / p(x)$$

y decimos:

“existe un $x \in A$ tal que $p(x)$ ” o

“para algún $x \in A$, $p(x)$ ” o

“para al menos un $x \in A$, $p(x)$ ”.

El símbolo \exists se llama cuantificador existencial.

1.3.2 Negación de Cuantificadores

Si $\mathcal{V} \subsetneq A$, entonces $\mathcal{V}^c = \{ x \in A / \sim p(x) \}$ (el complemento de \mathcal{V}) es un conjunto no vacío; así

$$\sim (\mathcal{V} = A) \equiv (\mathcal{V}^c \neq \phi).$$

Simbólicamente,

$$\sim (\forall x \in A, p(x)) \equiv \exists x \in A / \sim p(x).$$

Análogamente se concluye que

$$\sim (\exists x \in A / p(x)) \equiv \forall x \in A, \sim p(x).$$

El lector está obligado a llegar a esta conclusión.

Ejemplo.-

Negar la siguiente proposición:

Todos los alumnos de Cálculo Diferencial tendrán una nota ≥ 10 .

Solución:

Denotando por A al conjunto de todos los alumnos del curso, y considerando la función lógica

$$p(x) : "x \text{ tendrá una nota } \geq 10"$$

el enunciado es de la forma

$$\forall x \in A, p(x)$$

así que la negación es

$$\exists x \in A / \sim p(x)$$

esto es, "al menos un alumno del curso Cálculo Diferencial tendrá una nota < 10 " (¡será desaprobado!).

Nota.- Aclaremos que las proposiciones

$$\forall x \in A, \exists y \in A / p(x, y),$$

$$\exists y \in A / \forall x \in A, p(x, y)$$

son distintas.

(la expresión $p(x, y)$ es una función lógica definida en $A \times A$).

En efecto: la primera proposición $\forall x \in A, \exists y \in A / p(x, y)$ se lee

"para todo x en A , existe un y en A (que depende de x) tal que $p(x, y)$."

Esta proposición será verdadera si para cada x elemento del conjunto A que se tome, sea posible encontrar algún elemento y del conjunto A (en general variando de acuerdo a x) de manera que $p(x, y)$ sea verdadera.

Como ejemplo, tomemos $H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x > 0 \text{ y } y > 0\}$, y la función lógica definida sobre H por

$$p(x, y) : "y < x".$$

Dado $x > 0$, tomando $y = \frac{x}{2} > 0$, vemos que $y < x$, esto es $p(x, y)$ es verdadera. Por lo tanto la primera proposición

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}^+ / p(x, y),$$

es verdadera.

Consideremos ahora la segunda proposición $\exists y \in A / \forall x \in A, p(x, y)$ que se lee como

“existe algún y en A tal que para todo x en $A, p(x, y)$ ”.

Para que esta proposición sea verdadera basta encontrar algún elemento y del conjunto A de tal forma que tomando todos y y cada uno de los elementos x de A (independientemente de y) la expresión $p(x, y)$ sea una proposición verdadera; en particular para la función lógica definida sobre $H = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

$$p(x, y) : "y < x"$$

la proposición $\exists y \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in \mathbb{R}^+, p(x, y)$ es falsa, puesto que si suponemos que existe un $y_0 \in A$ (dado) tal que

$$\forall x > 0, y_0 < x$$

tomando $x_0 = \frac{1}{2}y_0 > 0$, concluimos que

$$x_0 < y_0 < x_0$$

lo cual obviamente es un absurdo.

Para concluir esta sección vea los ejercicios resueltos 7, 8, 9 y 10.

Damos ahora un segundo concepto que también relaciona proposiciones, la implicación lógica. Este es un concepto muy importante a la hora de hacer las demostraciones en matemática.

1.4 Implicación Lógica

Definición 1.4.1 Se dice que la proposición p **implica lógicamente** la proposición q (lo que denotamos por $p \implies q$) si la condicional $p \rightarrow q$ es una tautología, es decir

$$p \implies q \text{ si y sólo si } p \rightarrow q \text{ es una tautología}$$

Observación 1.- Las propiedades que satisfacen la implicación lógica son las siguientes:

1. Propiedad Reflexiva

$$p \implies p$$

2. Propiedad Transitiva

Si $p \implies q$ y $q \implies r$, entonces $p \implies r$

3. Propiedad Antisimétrica

Si $p \implies q$ y $q \implies p$, entonces $p \equiv q$

Observación 2.- Si \mathbb{T} denota una tautología y p es cualquier proposición (verdadera o falsa), entonces $p \rightarrow \mathbb{T}$ es una tautología. Así, tenemos que

$$p \implies \mathbb{T}.$$

Es decir, un enunciado tautológico se deduce de cualquier enunciado (verdadero o falso). Por ejemplo: si $1 = 0$, por simetría $0 = 1$ y, por transitividad, se concluye que $1 = 1$; por lo tanto, $1 = 0 \implies 1 = 1$.

Observación 3.- Si \mathbb{F} denota una contradicción y p es cualquier proposición (verdadera o falsa), entonces $\mathbb{F} \rightarrow p$ es una tautología. Así, tenemos que

$$\mathbb{F} \implies p.$$

Es decir, de un enunciado contradictorio se puede deducir cualquier enunciado. Por esta razón, una teoría que contiene axiomas contradictorios conducen necesariamente a paradojas (¿Qué es una paradoja?). Por ejemplo, si en \mathbb{Z} (conjunto de los Números Enteros) admitimos como "axioma" a

$$\text{si } ab = ac \text{ entonces } b = c$$

se tiene por ejemplo que $1 = 2$, pues como $1 \times 0 = 2 \times 0$, aplicando el "axioma" en mención, se concluye que $1 = 2$.

Observación 4.- Para efectos de una demostración, la relación $p \implies q$ se llama argumento válido, en cambio si $p \rightarrow q$ no es una tautología, se dice que es una falacia.

1.5 Reglas de Inferencia y Demostraciones

Sabemos que si el antecedente en una implicación lógica es verdadero, el consecuente también lo es. Este hecho se usa en las demostraciones deductivas; así

"Se empieza con la conjunción de un conjunto de proposiciones que se llaman premisas o hipótesis, luego haciendo uso de las reglas de inferencia (que a continuación se dan) se logra obtener otras proposiciones llamadas conclusiones o tesis".

El paso lógico de las premisas a la conclusión se llama deducción o demostración. Así, de premisas verdaderas se obtienen conclusiones verdaderas, siempre que se utilicen correctamente las reglas de inferencia que pasamos a enumerar.

Reglas de Inferencia

1. Modus Ponens (MP)

$$\frac{p \rightarrow q}{\frac{p}{q}}$$

2. Modus Tollens (MT)

$$\frac{p \rightarrow q}{\frac{\sim q}{\sim p}}$$

3. Doble Negación (DN)

$$\frac{p}{\sim \sim p}$$

4. Simplificación Conjuntiva

$$\frac{p \wedge q}{p}$$

5. Adjunción (Adj)

$$\frac{p}{\frac{q}{p \wedge q}}$$

6. Silogismo Hipotético (SH)

$$\frac{p \rightarrow q}{\frac{q \rightarrow r}{p \rightarrow r}}$$

7. Adición (Ad)

$$\frac{p}{p \vee q}$$

8. Simplificación Disyuntiva

$$\frac{p \vee p}{p}$$

9. Silogismo Disyuntivo (SD)

$$\frac{p \rightarrow r}{\frac{q \rightarrow s}{\frac{p \vee q}{r \vee s}}}$$

10. Conmutativas

$$\frac{p \wedge q}{q \wedge p}$$

11. Modus Tollendo Ponens (MTP)

$$\frac{p \vee q}{\frac{\sim p}{q}}$$

12. Bicondicionales

$$\frac{p \leftrightarrow q}{p \rightarrow q}$$

Ejemplo.- Dadas las proposiciones p, q, r y s , demostrar $r \wedge s$ si se tienen las siguientes hipótesis:

- 1) $p \longrightarrow \sim q$
- 2) q
- 3) $\sim p \longrightarrow r \wedge s$.

Solución:

- 4) $\sim(\sim q)$ de 2, por doble negación
- 5) $\sim p$ de 1 y 4(M.T)
- 6) $r \wedge s$ de 3 y 5 (M.P)

Teorema 1.5.1 Dadas las proposiciones p, q y r , se tiene que

$$(i) p \implies q$$

$$(ii) (p \wedge \sim q) \implies (r \wedge \sim r)$$

son lógicamente equivalentes.

Demostración:

$$\begin{aligned} (p \wedge \sim q) \implies (r \wedge \sim r) &\equiv \sim(p \wedge \sim q) \vee (r \wedge \sim r) \equiv \sim p \vee q \vee \mathbb{F} \\ &\equiv \sim p \vee q \equiv p \implies q. \end{aligned} \quad \square$$

Cuando se prueba la validez de (i) utilizando directamente las reglas de inferencia, como en el ejemplo anterior, se dice que estamos frente a una **demostración directa**; pero cuando probamos la validez de (i) probando la validez de (ii), estamos frente a una **demostración indirecta** o por el absurdo. A continuación damos dos ejemplos sobre demostraciones indirectas.

Ejemplo 1.- Si $a^2 + b^2 = 0$ pruebe que $a = b = 0$.

Solución:

Supongamos que $a^2 + b^2 = 0$ y ($a \neq 0$ o $b \neq 0$), entonces

$(a^2 + b^2 = 0 \wedge a \neq 0)$ o $(a^2 + b^2 = 0 \wedge b \neq 0)$, luego

$0 = a^2 + b^2 > 0 \vee 0 = a^2 + b^2 > 0$, lo cual obviamente es una contradicción, y esto concluye la demostración.

Ejemplo 2.- Si $|a| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, probar que $a = 0$.

Solución:

Si suponemos que $a \neq 0$, tomando $\varepsilon = |a| > 0$ tenemos que $|a| < |a|$

(contradicción). Por lo tanto el valor de a debe ser cero.

Para finalizar este capítulo dejamos al lector una lista de ejercicios desarrollados y una lista de ejercicios propuestos (a desarrollar) para consolidar su aprendizaje.

1.6 Ejercicios Resueltos

1. Sean p y r dos proposiciones falsas y q una proposición verdadera. Determine el valor de verdad de la proposición

$$(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim r \vee p).$$

Solución:

$$\begin{array}{ccccccc} (\sim p & \wedge & \sim q) & \rightarrow & (\sim r & \vee & p) \\ V & & F & & V & & F \\ & & F & & & & V \\ & & & & V & & \end{array}$$

Respuesta: Verdadera.

2. Deducir el valor de verdad de las proposiciones p y q , si r es una proposición falsa y $[p \rightarrow (\sim q \vee r)] \wedge \sim [q \vee (p \leftrightarrow \sim r)]$ es verdadera.

Solución:

De la segunda hipótesis es fácil ver que la proposición $[q \vee (p \leftrightarrow \sim r)]$ es falsa, luego q y $(p \leftrightarrow \sim r)$ son ambas falsas; como r es falsa (y por tanto $\sim r$ verdadera) se concluye que la proposición p debe ser falsa.

Respuesta: p y q son falsas.

3. Pruebe que la proposición

$$[p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow \sim p$$

es una tautología.

Solución:

p	q	[p → (q ∧ ~ q)]	→	~ p
V	V	F	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Esta es una de las 10 tautologías que se pide demostrar líneas atrás.

4. Demuestre la verdad de las siguientes equivalencias lógicas, conocidas como *Leyes de Absorción*:

(i) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

(iii) $\sim p \wedge (p \vee q) \equiv \sim p \wedge q$

(ii) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

(iv) $\sim p \vee (p \wedge q) \equiv \sim p \vee q$

Solución de (i):

p	q	p	∧	(p∨q)	↔	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F
F	F	F	F	F	V	F

La solución de (ii), (iii) y (iv) son completamente análogas (¡no necesita hacerlo!).

5. Usando las leyes lógicas, simplificar la siguiente proposición:

$$[(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge \sim (\sim p \rightarrow \sim q)] \vee (p \rightarrow \sim q)$$

Solución:

$$\begin{aligned} & [(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge \sim (\sim p \rightarrow \sim q)] \vee (p \rightarrow \sim q) \equiv \\ & [(p \rightarrow q) \wedge \sim (q \rightarrow p)] \vee (p \rightarrow \sim q) \equiv \\ & [(\sim p \vee q) \wedge q \wedge \sim p] \vee (\sim p \vee \sim q) \equiv \\ & (\sim p \wedge q) \vee \sim p \vee \sim q \equiv \\ & \sim p \vee \sim q \equiv \\ & \sim (p \wedge q). \end{aligned}$$

6. Usando las leyes lógicas, simplificar la siguiente proposición:

$$\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim (q \rightarrow p).$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 & \sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim (q \rightarrow p) \equiv \\
 & [\sim (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)] \wedge [\sim (q \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)] \equiv \\
 & [\sim p \vee q \vee (q \wedge \sim p)] \wedge [\sim q \vee p \vee (p \wedge \sim q)] \equiv \\
 & (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv \\
 & (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv \\
 & (p \leftrightarrow q).
 \end{aligned}$$

7. Negar la siguiente proposición:

$$\forall x \in A, p(x) \wedge \exists y \in B / q(x).$$

Solución.-

$$\begin{aligned}
 & \sim (\forall x \in A, p(x) \wedge \exists y \in B / q(x)) \equiv \\
 & \sim (\forall x \in A, p(x)) \vee \sim (\exists y \in B / q(x)) \equiv \\
 & (\exists x \in A / \sim p(x)) \vee (\forall y \in B, \sim q(x)).
 \end{aligned}$$

8. Negar la siguiente proposición:

$$\forall x, \exists y / \forall z p(x, y, z).$$

Solución.-

$$\sim [\forall x \exists y / \forall z p(x, y, z)] \equiv \exists x / \forall y \exists z / \sim p(x, y, z)$$

9. Hallar $\sim p$ si

$$p \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / \forall x \in D_f (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Solución:

$$\sim p \equiv \exists \varepsilon_0 > 0 / \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in D_f / 0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon_0.$$

10. Negar la siguiente proposición:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \rightarrow |a_n| < \varepsilon).$$

Solución:

$$\begin{aligned}
 & \sim [\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \rightarrow |a_n| < \varepsilon)] \equiv \\
 & \exists \varepsilon > 0 / \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} / \sim (n \geq n_0 \rightarrow |a_n| < \varepsilon) \equiv \\
 & \exists \varepsilon > 0 / \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \wedge |a_n| \geq \varepsilon).
 \end{aligned}$$

11. Dadas las proposiciones f, g y h , demostrar f si se tienen las siguientes hipótesis:

- 1) $g \rightarrow h$
- 2) $\sim g \rightarrow \sim \sim f$
- 3) $\sim h$.

Solución:

- 4) $\sim g$ de 1 y 3 (M.T)
- 5) $\sim \sim f$ de 2 y 4 (M.P)
- 6) f de 5 (D.N)

12. Dadas las proposiciones p, q, r, s y t , demostrar $s \wedge t$ si se tienen las siguientes hipótesis:

- 1) $\sim (p \vee \sim r)$
- 2) $q \vee p$
- 3) $r \rightarrow s$
- 4) $(q \wedge s) \rightarrow (t \wedge s)$.

Solución:

- 5) $\sim p \wedge r$ de 1 (Morgan)
- 6) $\sim p$ de 5 (Simplificación)
- 7) r de 5 (Simplificación)
- 8) q de 2 y 6 (M.T.P)
- 9) s de 3 y 7 (M.P)
- 10) $q \wedge s$ de 8 y 9 (Adjunción)
- 11) $t \wedge s$ de 4 y 10 (M.P)
- 12) $s \wedge t$ de 11 (conmutativa)

13. Dadas las proposiciones p, q, r, s, t y u , demostrar $\sim p$ si se tienen las siguientes hipótesis:

- 1) $r \rightarrow \sim p$
- 2) $(r \wedge s) \vee t$
- 3) $t \rightarrow (q \vee u)$
- 4) $\sim q \wedge \sim u$.

Solución:

- 5) $\sim (q \vee u)$ de 4 (Morgan)
- 6) $\sim t$ de 3 y 5 (M.T)
- 7) $r \wedge s$ de 2 y 6 (M.T.P)
- 8) r de 7 (Simplificación)
- 9) $\sim p$ de 1 y 8 (M.P)

14. Demostrar que $x - y \neq 2$ si:

- 1) $\sim(x > y \wedge x + y > 7)$
- 2) $x \not> y \rightarrow x < 4$
- 3) $x + y \not> 7 \rightarrow x < 4$
- 4) $x - y = 2 \rightarrow x \not< 4$.

Solución:

- 5) $x \not> y \vee x + y \not> 7$ de 1 (Morgan)
- 6) $x < 4 \vee x < 4$ de 2,3 y 5 (S.D)
- 7) $x < 4$ de 6 (Simplificación)
- 8) $x - y \neq 2$ de 4 y 7 (M.T).

15. Si n es un entero positivo y n^2 es par, pruebe que n es par.

Solución:

Supongamos que n^2 es par y n es impar, es decir n^2 es par y $n = 2k - 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$.

Por lo tanto $n^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2k_1 + 1$, donde $k_1 = (4k^2 - 4k) \in \mathbb{Z}$, es decir n^2 es impar (¡absurdo!). Así n debe ser par.

16. Pruebe que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Solución:

Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional, entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ para $a, b \in \mathbb{Z}$ primos entre sí; luego, $a^2 = 2b^2$, de donde tenemos que a es par, puesto que a^2 lo es.

Si suponemos que $a = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$, de la igualdad $a^2 = 2b^2$ podemos concluir que $b^2 = 2k^2$, es decir, b^2 es par, y por lo tanto b es par. Así, a y b no serían primos entre sí (evidentemente una contradicción). Esto concluye nuestra prueba.

1.7 Ejercicios Propuestos

1. Sean p y q dos proposiciones lógicas. Si $p \wedge q \equiv p$ y $p \vee \sim q$ es una tautología, pruebe que $p \equiv q$.
2. Si p, q, r, s, t y w son proposiciones lógicas tales que $(p \rightarrow r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$ es verdadera y $\sim w \rightarrow \sim s$ es falsa, determine el valor de verdad de

$$(w \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \sim t).$$

3. Demuestre que $\{\} \subseteq A$ para cualquier conjunto A .
4. Sean A, B conjuntos dados. Si $A \subseteq B$, pruebe que $B^c \subseteq A^c$. (X^c es el complemento del conjunto X respecto a un conjunto universal).
5. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < 0, y > 0\}$ y la función lógica en A definida por

$$p(x, y) : y \leq -\frac{1}{x}$$

Hallar el valor de verdad de:

- (a) Para todo $x < 0$, existe $y > 0$ tal que $p(x, y)$.
 - (b) Existe un $x < 0$ tal que, para todo $y > 0$, $p(x, y)$.
 - (c) Para todo $x < 0$, para todo $y > 0$, $p(x, y)$.
 - (d) Existe $x < 0$ y existe $y > 0$ tal que $p(x, y)$.
6. Verificar que para probar la equivalencia de las proposiciones p, q, r y s es suficiente demostrar las siguientes implicaciones lógicas:

$$p \Rightarrow q, \quad q \Rightarrow r, \quad r \Rightarrow s, \quad s \Rightarrow p$$

7. Escribir formalmente la negación de la siguiente proposición, "para todo número racional r existe un número entero n tal que $n \leq r < n + 1$ ". (La respuesta no es, $\exists r \in \mathbb{Q} \forall n \in \mathbb{Z} \mid n \geq r > n + 1$).
8. Justificar los siguientes razonamientos lógicos:

$p \vee \sim q$ $\sim q \leftrightarrow r$ $\hline p \vee \sim r$ $\therefore p.$	$p \wedge (p \vee q)$ $(p \vee q) \rightarrow r$ $\hline r \rightarrow s$ $\therefore s.$
---	---

9. Dadas las proposiciones P, Q y R , pruebe que

- (1) $R \rightarrow \sim Q$
- (2) $Q \vee P$
- (3) $R \wedge \sim P$.

no pueden ser axiomas de ninguna teoría.

(Sugerencia: usando las reglas de inferencia debe llegar a una contradicción.)

10. Dadas las proposiciones p y q , definimos $p \triangle q \equiv \sim (p \leftrightarrow q)$. Pruebe que

$$p \triangle (q \triangle r) \equiv (p \triangle q) \triangle r$$

11. Completar con "suficiente o necesario" según corresponda:

- (a) Para que el polinomio $x^2 - 1$ sea igual a cero es que x sea 1.
 (b) Para que el polinomio $x^2 - 1$ sea igual a cero es que x sea 1 ó -1.
 (c) Para que el valor absoluto de x sea 5 es que x sea -5.

12. Simplificar la siguiente fórmula lógica:

$$\sim [(p \wedge q) \vee \sim (p \wedge \sim q)] \rightarrow q.$$

13. Si $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- (a) $\exists x \in P / (3x - 5) \in P$
 (b) $\forall x \in P \exists y \in P / x + y = 7$.
 (c) $\exists x \in P / \forall y \in P, x - y > 0$.
 (d) $\forall x \in P, \forall y \in P, x + y \leq 10$

14. Determine los siguientes conjuntos:

- (a) $M = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3 \rightarrow x < 5\}$
 (b) $N = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \leftrightarrow x = 0\}$
 (c) $P = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 4 = 0 \leftrightarrow (x + 2)^2 = 0\}$

15. Simplificar las siguientes fórmulas lógicas:

- (a) $[(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$.
 (b) $[(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)] \wedge \sim (p \wedge q)$.
 (c) $[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee \sim (p \vee r)]$

16. De la falsedad de $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)$, deducir el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

(a) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$.

(b) $[(\sim r \vee q) \wedge q] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$.

(c) $(p \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$.

17. Dadas las proposiciones p y q , se define $p \nabla q \equiv p \wedge \sim q$. ¿A cuál de las siguientes proposiciones es equivalente $p \rightarrow \sim q$?

(a) $\sim (p \nabla q)$

(c) $\sim [p \nabla (\sim q)]$

(e) $p \nabla (\sim q)$

(b) $(\sim p) \nabla (\sim q)$

(d) $(\sim p) \nabla q$

18. Utilizando el método de demostración por el absurdo, comprobar la validez de los siguientes argumentos:

(a)

(b)

(c)

$$q \rightarrow p$$

$$q \vee s$$

$$\frac{\sim s}{\sim p}$$

$$\therefore p$$

$$p \wedge q$$

$$\frac{\sim p \rightarrow q}{\sim q}$$

$$\therefore \sim q$$

$$p$$

$$\frac{(\sim p \vee \sim s) \rightarrow (\sim p \wedge \sim s)}{\sim s}$$

$$\therefore s$$

19. Verificar la validez del siguiente razonamiento:

Si 6 es impar entonces 4 no divide a 7

9 no es primo o 4 divide a 7

pero 9 es primo

Por lo tanto 6 es par

20. Cuál de las siguientes proposiciones

p : No ingresar al estadio o pagar 100 soles, y ser socio.

q : Pagar 100 soles o ser socio, y no ingresar al estadio.

r : Pagar 100 soles y ser socio, o no ingresar al estadio.

es equivalente a

“Es necesario pagar 100 soles y ser socio para ingresar al estadio”?

21. Concluir que $x = 1$ si se tienen las siguientes premisas:

- 1) $\sim (z < 3 \vee x > y) \wedge y = 2$
- 2) $x \neq y \vee x = 1$
- 3) $x > z \rightarrow x > y$
- 4) $x \neq z \rightarrow x < y$.

22. (a) Si $C \neq \phi$. Pruebe que $A \times C = B \times C$ es condición necesaria para que $A = B$.

(b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Si n^2 es múltiplo de 7, pruebe que n también lo es.

(c) Negar la siguiente proposición:

“Para todo numero real x existe un número entero k tal que $k + 1 > x \geq k$ ”.

23. Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$ un subconjunto de los números reales y sea $a \in \mathbb{R}$. Negar la siguiente proposición

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} / |x_n - a| < x \forall n \geq n_0.$$

24. ¿Cuál(es) de los esquemas formales siguientes son reglas de inferencia? ¡Justifique su respuesta!

(a)

$$\begin{array}{l} p \vee r \\ q \leftrightarrow s \\ \hline \sim p \vee q \\ \hline \therefore r \vee s \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim q \\ \hline p \rightarrow \sim r \\ \hline \therefore r \wedge s \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow \sim q \\ t \rightarrow \sim r \\ \hline \sim q \rightarrow t \\ \hline \therefore p \rightarrow (\sim r \vee s) \end{array}$$

25. Sean $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ y $B = \{x \in A / x < 5 \iff x \geq 7\}$, Indique el valor de verdad de:

(a) $\forall X \subset A \rightarrow B \cap X = \phi$.

(b) $\exists X \subset A \wedge \exists Y \subseteq B / X \cap Y = \phi$.

(c) $\exists D \subset A / B \cup D = A$.

26. Dados los conjuntos $A = \{-2, 0, 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / (x - 1) \in A\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- (a) $\forall x \in A \exists y \in B / x + y \in B$.
- (b) $\exists x \in A / \forall y \in B x + y \in A$.
- (c) $\exists X \in \mathcal{P}(A) \exists Y \in \mathcal{P}(B) / X \neq \phi, Y \neq \phi \text{ y } X \Delta Y = \{1, 2\}$.

27. Para una proposición cualquiera p se define: $V(p) = 1$ si p es verdadero, y $V(p) = 0$ si p es falso.

- (a) Pruebe que $V(\sim p) = 1 - V(p)$.
- (b) Pruebe que $V(p \vee q) = V(p) + V(q) - V(p)V(q)$.
- (c) Encuentre una fórmula para $V(p \longrightarrow q)$.

28. Indicar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta:

- (a) $\mathcal{P}(A) - A = \phi \iff A = \phi$.
- (b) $\mathcal{P}(A) - \{A\} \neq \phi$.
- (c) Se $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$ entonces $\mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(A)$.

29. Sean A y B subconjuntos de U . Pruebe que $C_U(A \cup B) = C_U A \cap C_U B$ ($C_U X$ indica el complemento del conjunto X respecto al conjunto universal U).

30. Expresar en términos de cuantificadores:

- (a) Sea X un subconjunto de \mathbb{R} tal que cualquiera que sea b en X tenemos que para los x en \mathbb{R} cuya distancia a b es menor que algún $\varepsilon_b > 0$ tenemos que x está en X .
- (b) Sea X un subconjunto de \mathbb{R} tal que para algún b en X y para cualquier $\varepsilon > 0$ tenemos que existe x en \mathbb{R} con distancia a b menor que ε y que no está en X .
- (c) ¿Qué relación hay entre a y b ?

Capítulo 2

Los Números Reales

El sistema de los números reales es un conjunto no vacío denotado por \mathbb{R} , provisto de las operaciones de adición y multiplicación, de una relación de orden, y de una propiedad de completitud; así, \mathbb{R} es axiomáticamente definido como un **cuerpo ordenado y completo**.

El método axiomático de introducción a los números reales proporciona una base breve y adecuada para el estudio del cálculo diferencial e integral.

A continuación se estudian sistemáticamente los axiomas de cuerpo, el axioma de orden y el axioma de completitud.

2.1 Axiomas de Cuerpo

A1) *Propiedad asociativa.*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{y} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

A2) *Existencia del neutro aditivo y neutro multiplicativo.*

$$\exists 0 \in \mathbb{R} / \forall a \in \mathbb{R}: \quad a + 0 = 0 + a = a$$

$$\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} / \forall a \in \mathbb{R}: \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

El elemento 0 se llama *cero*, y el elemento 1 se llama *uno*.

A3) *Existencia del inverso aditivo e inverso multiplicativo.*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists (-a) \in \mathbb{R} / \quad a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists a^{-1} \in \mathbb{R} / a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$$

A4) *Propiedad conmutativa.*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a \text{ y } a \cdot b = b \cdot a$$

A5) *Propiedad distributiva.*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Por satisfacer estas cinco propiedades, se dice que el conjunto de los números reales con la adición y multiplicación es un **cuerpo**. En general, cualquier conjunto con dos operaciones que satisfaga estas cinco propiedades se llama cuerpo. Por ejemplo, el conjunto \mathbb{Q} de los números racionales y el conjunto \mathbb{C} de los números complejos también son cuerpos (en este texto no estudiaremos a los números complejos). Anotamos aquí, sin justificación alguna, que existen infinitos conjuntos que tienen la categoría de cuerpo. Mas aún, existen muchos cuerpos finitos.

Existen otras dos operaciones sobre el conjunto de los números reales que no se incluyen explícitamente en los axiomas (pues son consecuencias de éstos), a saber, la sustracción y la división. Éstas se definen como sigue.

Definición 2.1.1 Para todo a y b en \mathbb{R}

$$a - b = a + (-b) \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \quad (\text{si } b \neq 0).$$

Debe quedar claro que todas las demás propiedades algebraicas (es decir, donde no intervienen desigualdades) son consecuencias de estos cinco axiomas y de las definiciones que acabamos de dar. A modo de ejemplo se enuncian y demuestran las siguientes proposiciones:

Proposición 2.1.1

1. El cero es único.
2. El opuesto de todo número real es único.
3. $a = -(-a)$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
4. *Ley de cancelación de la suma,*

Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$

Prueba.

1. Supongamos que 0 y $0'$ son "dos" ceros de \mathbb{R} , entonces

$$\begin{aligned} 0' &= 0' + 0 && \text{(definición del } 0) \\ &= 0 + 0' && \text{(conmutatividad)} \\ &= 0 && \text{(definición del } 0') \end{aligned}$$

2. Sea $a \in \mathbb{R}$ y sean x, y "dos" opuestos de a en \mathbb{R} , entonces

$$\begin{aligned} x &= x + 0 && \text{(definición del } 0) \\ &= x + (a + y) && (a + y = 0) \\ &= (x + a) + y && \text{(asociatividad)} \\ &= 0 + y && (x + a = 0) \\ &= y && \text{(definición del } 0) \end{aligned}$$

3. Como $(-a) + a = 0$ y el opuesto de $(-a)$ es único, entonces

$$-(-a) = a.$$

4. Supongamos que $a + c = b + c$, entonces:

$$\begin{aligned} a &= a + 0 && \text{(definición del } 0) \\ &= a + (c + -c) && \text{(A2)} \\ &= (a + c) + (-c) && \text{(asociatividad)} \\ &= (b + c) + (-c) && \text{(hipótesis)} \\ &= b + (c + -c) && \text{(asociatividad)} \\ &= b + 0 && \text{(A2)} \\ &= b && \text{(definición del } 0) \end{aligned}$$

Proposición 2.1.2

1. El uno es único.
2. El inverso de todo número real no nulo, es único.
3. Si $a \neq 0$, entonces $a = (a^{-1})^{-1}$.
4. *Ley de cancelación del producto,*

Si $a \cdot b = c \cdot b$ y $b \neq 0$, entonces $a = c$

Prueba. Ejercicio para el lector, es análogo a la proposición 2.1.1

Proposición 2.1.3

1. Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0$
2. Para todo $a \in \mathbb{R}$, $-a = (-1) \cdot a$.
3. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.
4. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$ab = 0 \text{ si y sólo si } a = 0 \text{ ó } b = 0.$$

5. Si $a, b, x \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, entonces

$$ax + b = 0 \text{ si y sólo si } x = -a^{-1}b.$$

Prueba.

1. $a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + [a + (-a)] = [a \cdot 0 + a \cdot 1] + (-a) = a \cdot [0 + 1] + (-a) = a \cdot 1 + (-a) = a + (-a) = 0$.
2. $(-1) \cdot a + a = (-1) \cdot a + 1 \cdot a = [(-1) + 1] \cdot a = 0 \cdot a = 0$.
Por lo tanto, $-a = (-1) \cdot a$.
3. Como $a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot [b + (-b)] = a \cdot 0 = 0$, entonces $-(ab) = a(-b)$. Análogamente, como $a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$, se tiene que $-(ab) = (-a)b$. Por lo tanto, $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.
4. Sean a y b dos números reales tales que $a \cdot b = 0$. Si $a = 0$, no hay nada que probar. Si $a \neq 0$ debemos probar que $b = 0$; en efecto:

$$b = 1 \cdot b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0$$

El recíproco es consecuencia inmediata de 1.

5. Supongamos que $x = -a \cdot b^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} ax + b &= a(-a^{-1}b) + b = -a(a^{-1}b) + b \\ &= -(aa^{-1})b + b = -1 \cdot b + b \\ &= -b + b = 0. \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $ax + b = 0$, entonces

$$\begin{aligned} ax + b &= (-b) + b \\ ax &= -b. \end{aligned}$$

Así, $x = 1 \cdot x = (a^{-1}a)x = a^{-1}(ax) = (a^{-1})(-b) = -a^{-1}b$. □

El ítem 4 y el ítem 5 de la proposición que acabamos de demostrar se usan en el desarrollo de las *ecuaciones cuadráticas* y las *ecuaciones de primer grado*.

Subconjuntos notables de los números reales:

- El axioma A2 asegura la existencia del número 1, y como en \mathbb{R} se tiene la operación de adición, tenemos que:

$$1 \in \mathbb{R}, \quad 1 + 1 = 2 \in \mathbb{R}, \quad 2 + 1 = 3 \in \mathbb{R}, \dots, \quad (n - 1) + 1 = n \in \mathbb{R}, \dots$$

Este conjunto así determinado, es denotado por

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

y se llama conjunto de los *números naturales*, note además que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.

- El axioma A3 asegura que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un único (prop 2.1.1) elemento $-n \in \mathbb{R}$, y el axioma A2 asegura la existencia del $0 \in \mathbb{R}$, luego el conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

es llamado el conjunto de los *números enteros*, además $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

- El axioma A3 asegura que para cada $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ existe un único (prop 2.1.2) elemento $k^{-1} = \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$, luego el número denotado por $\frac{m}{n}$ y definido por $\frac{m}{n} = mn^{-1} \in \mathbb{R}$. Así el conjunto

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} / m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

es llamado el conjunto de los *números racionales*, y se satisfacen las siguientes relaciones $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

- Al final de la sección 1.6 del capítulo 1 hemos demostrado que $\sqrt{2}$ no es racional, esto nos permite afirmar que el conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es no vacío, este conjunto se llama conjunto de los *números irracionales* y se le denota por \mathbb{I} , es decir

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

Otros ejemplos de números irracionales son $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{2}, \dots$, $\sqrt{2} + \sqrt{5}, \dots, \sqrt{p}$ (si p es un primo positivo), π, e , etc. Si bien conocemos mas números racionales que irracionales, la verdad es que existen muchos mas irracionales que racionales, estas justificaciones le corresponden al análisis matemático (después de cálculo integral). Más precisamente el conjunto de los números irracionales es un conjunto no enumerable, mientras que el conjunto de los números racionales si es un conjunto enumerable (este concepto será brevemente explicado en el siguiente capítulo).

2.2 El Axioma de Orden

En esta sección caracterizaremos a \mathbb{R} como un cuerpo ordenado, para lo cual admitimos como axioma la existencia de un subconjunto de los números reales, que llamaremos el conjunto de los reales positivos. Esto nos permitirá ordenar a los números reales.

Axioma de Orden

Existe un subconjunto no vacío \mathbb{P} del conjunto de los números reales tal que:

- $\exists \rightarrow \text{Positivos}$
- i) Si $a, b \in \mathbb{P}$, entonces $a + b \in \mathbb{P}$ y $ab \in \mathbb{P}$.
 - ii) $0 \notin \mathbb{P}$.
 - iii) Si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces $a \in \mathbb{P}$ o $-a \in \mathbb{P}$.

En el item iii) de este axioma la disyunción es excluyente, pues si a es un número real no nulo y se tiene que $a \in \mathbb{P}$ y $-a \in \mathbb{P}$, $0 = a + (-a) \in \mathbb{P}$ por el item i), lo que contradice el item ii) de la definición de \mathbb{P} .

Definición 2.2.1 (La relación de orden menor)

Si a y b son números reales cualesquiera, decimos que a es menor que b , y lo denotamos por $a < b$, si $(b - a) \in \mathbb{P}$, es decir

$$a < b \text{ si y sólo si } (b - a) \in \mathbb{P}$$

$$b > a \iff a < b$$

Observación.- Note que

$$0 < a \text{ si y sólo si } a = (a - 0) \in \mathbb{P}$$

o sea decir,

$$\mathbb{P} = \{a \in \mathbb{R} / 0 < a\}$$

Por esta razón, el conjunto \mathbb{P} es llamado conjunto de los números reales positivos. En adelante, este conjunto será denotado por \mathbb{R}^+ .

Definición 2.2.2 Si a, b y c son números reales cualesquiera, decimos que:

1. a es mayor que b , y escribimos $a > b$ si y sólo si $b < a$.
2. a es menor o igual que b , y escribimos $a \leq b$ si y sólo si

$$a < b \text{ o } a = b.$$

3. $a < b < c$ si y sólo si $a < b$ y $b < c$

En el último ítem de esta definición, se pueden reemplazar las desigualdades estrictas por \leq ; así, de manera análoga se tienen definidas $a < b \leq c$, $a \leq b < c$ y $a \leq b \leq c$.

Teorema 2.2.1

1. *Ley de tricotomía.* Si a y b son números reales cualesquiera, una y sólo una de las siguientes relaciones se cumple:

$$a < b, \text{ o } a = b, \text{ o } a > b.$$

2. *Ley transitiva.*

$$\text{Si } a < b \text{ y } b < c, \text{ entonces } a < c.$$

3. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.
4. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$.

Prueba.

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $b - a = 0$ ó $b - a \neq 0$, luego

$$b - a = 0 \text{ ó } b - a \in \mathbb{P} \text{ ó } -(b - a) \in \mathbb{P}.$$

$$\text{Así, } a = b \text{ o } a < b \text{ o } b < a.$$

2. Por la hipótesis tenemos que $b-a \in \mathbb{P}$ y $c-b \in \mathbb{P}$, luego $(b-a)+(c-b) \in \mathbb{P}$, es decir $c-a \in \mathbb{P}$. Por lo tanto $a < c$.
3. Como $(b+c) - (a+c) = b-a \in \mathbb{P}$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$, entonces $a+c < b+c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.
4. Por la hipótesis tenemos que $b-a \in \mathbb{P}$ y $c \in \mathbb{P}$, luego $bc - ac = (b-a)c \in \mathbb{P}$, es decir $ac < bc$. \square

En la siguiente proposición se demuestran las propiedades más importantes de las desigualdades. Muchas de ellas se conocen y usan antes de ingresar a la universidad, sin embargo muy pocas veces se ha meditado sobre por qué funcionan perfectamente.

Proposición 2.2.2 Para a, b y c en \mathbb{R} se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$.
2. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
3. Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$ ($\because 1 > 0$).
4. $a = 0$ si y sólo si $a^2 = 0$.
5. Si $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$.
6. Si $a < b < 0$, entonces $a^2 > b^2$.
7. $a > 0$ si y sólo si $a^{-1} > 0$.
8. $a < 0$ si y sólo si $a^{-1} < 0$.
9. $0 < a < b$ si y sólo si $a^{-1} > b^{-1}$.
10. $a < b < 0$ si y sólo si $a^{-1} > b^{-1}$.
11. $ab > 0$ si y sólo si $(a > 0$ y $b > 0)$ ó $(a < 0$ y $b < 0)$.
12. $ab < 0$ si y sólo si $(a > 0$ y $b < 0)$ ó $(a < 0$ y $b > 0)$.

Prueba. Es este caso daremos la prueba de algunas de ellas. Las demás se dejan como ejercicio para el lector.

1. Tenemos que $b-a \in \mathbb{P}$ y $(-c) \in \mathbb{P}$, entonces $ac - bc = (b-a)(-c) \in \mathbb{P}$, luego $a \cdot c > b \cdot c$.

2. Como $(b - a) \in \mathbb{P}$ y $(d - c) \in \mathbb{P}$, entonces $(b + d) - (a + c) = [(b - a) + (d - c)] \in \mathbb{P}$, por lo tanto $a + c < b + d$.
3. Si $a \neq 0$, entonces $a > 0$ ó $-a > 0$. Si $a > 0$, entonces $a^2 = a \cdot a > 0 \cdot a = 0$. Si $-a > 0$, entonces $a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0 \cdot (-a) = 0$. Por lo tanto $a^2 > 0$.
5. Por la hipótesis tenemos que $(b - a) > 0$ y $(b + a) > 0$, y como $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$, concluimos que $a^2 < b^2$.
7. Supongamos que $a > 0$ y $a^{-1} < 0$, entonces $a \cdot a^{-1} < a \cdot 0$, es decir $1 < 0$, lo cual es obviamente un absurdo (pues $1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$ por el item (3)).
Recíprocamente, si $a^{-1} > 0$, entonces $a = (a^{-1})^{-1} > 0$.
9. Si $0 < a < b$, entonces $a^{-1} \cdot b^{-1} > 0$, luego multiplicando a la primera desigualdad por este número positivo tenemos que $(a^{-1}b^{-1}) \cdot 0 < (a^{-1}b^{-1}) \cdot a < (a^{-1}b^{-1}) \cdot b$, es decir $0 < b^{-1} < a^{-1}$, o equivalentemente

$$a^{-1} > b^{-1} > 0$$

Recíprocamente, si $a^{-1} > b^{-1} > 0$, entonces $0 < (a^{-1})^{-1} < (b^{-1})^{-1}$, es decir $0 < a < b$.

11. Supongamos que $ab > 0$, luego $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Si $a > 0$ ($\therefore a^{-1} > 0$), entonces $b = a^{-1} \cdot (ab) > a^{-1} \cdot 0 = 0$. Si $a < 0$ ($\therefore a^{-1} < 0$), entonces $b = a^{-1} \cdot (ab) < a^{-1} \cdot 0 = 0$.
Recíprocamente, si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $ab > 0$. Pero si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $ab = (-a)(-b) > 0$.

□

Definición 2.2.3 Valor Absoluto

Se llamará valor absoluto del número real a al número denotado por $|a|$ y definido por

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos: $|\pi| = \pi$, $|x^2| = x^2$, $|x^2 + x + 1| = x^2 + x + 1$ (¿Por qué?),

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3 \\ 3 - x, & x < 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad |\sin x| = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi] \\ -\sin x, & x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

Proposición 2.2.3 *Propiedades del valor absoluto:*

1. Para todo número real a , $|a| \geq 0$.
2. $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0$.
3. Para todo número real a , $-|a| \leq a \leq |a|$.
4. $|ab| = |a||b|$.
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, si $b \neq 0$
6. *Desigualdad triangular.*

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \text{ Para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

7. $|x| = a$ si y sólo si $a \geq 0$ y ($x = a$ o $x = -a$).
8. $|a| = |b|$ si y sólo si ($a = b$ o $a = -b$).
9. $|x| \leq a$ si y sólo si $a \geq 0$ y $-a \leq x \leq a$.
10. $|x| \geq a$ si y sólo si $x \leq -a$ o $x \geq a$.
11. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
12. $|a| \leq |b|$ si y sólo si $(b - a)(a + b) \geq 0$.

Prueba. Los items 1, 2 y 3 son consecuencias inmediatas de la definición de valor absoluto.

4. Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, claramente se tiene que $|ab| = ab = |a||b|$. Si $a < 0$ y $b < 0$, tenemos que $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$. Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $|ab| = -ab = (-a)b = |a||b|$. Análogamente, si $a > 0$ y $b < 0$, $|ab| = -ab = a(-b) = |a||b|$.

6. Dados los números reales a y b , se tiene que $a + b > 0$ ó $a + b < 0$, luego aplicando el item 3 tenemos que

$$|a + b| = a + b \leq |a| + |b| \quad \text{o} \quad |a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|.$$

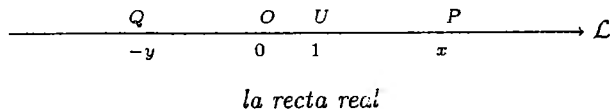
11. Como $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$, entonces $|a| - |b| \leq |a - b|$. Análogamente, $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$. Luego $-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$, y aplicando la propiedad 9. se concluye que

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

La prueba de los items 5, 7, 8, 9, 10 y 12 son buenos ejercicios para el lector serio y responsable (como usted). \square

La Recta Real

Los números reales se pueden representar por medio de puntos de una recta, como se muestra en la figura.



La dirección positiva (hacia la derecha) se indica mediante una flecha. Elegimos un punto de referencia arbitrario O , llamado *origen* que corresponde al número real 0 . Elegida una unidad de medida, cada número positivo x se representa por el punto P , que se encuentra a x unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-y$ ($y > 0$) se representa mediante el punto Q , que se localiza a y unidades a la izquierda del origen. De esta manera, todo número real se representa por medio de un punto de la recta, y todo punto de la recta corresponde exactamente a un número real.

La correspondencia establecida permite interpretar geoméricamente la relación de orden *menor que*, a saber:

$a < b$ significa que a está a la izquierda de b .

Definimos a continuación los subconjuntos de la recta real conocidos como intervalos.

Definición 2.2.4 Los Intervalos Finitos

Si a y b son dos números reales tales que $a \leq b$, llamaremos:

1. *Intervalo cerrado de extremos a y b* , al conjunto denotado y definido por

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

2. *Intervalo abierto de extremos a y b* , al conjunto denotado y definido por

$$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

3. *Intervalo abierto por la izquierda de extremos a y b* , al conjunto denotado y definido por

$$\langle a, b \rangle := \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

4. *Intervalo abierto por la derecha de extremos a y b* , al conjunto denotado y definido por

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

Definición 2.2.5 Los Intervalos Infinitos

Si a es un número real cualquiera, denotamos y definimos los siguientes intervalos infinitos:

$$1. [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}.$$

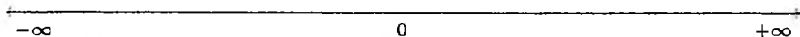
$$2. \langle a, +\infty \rangle = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}.$$

$$3. \langle -\infty, a \rangle = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}.$$

$$4. \langle -\infty, a \rangle = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}.$$

Observación.- Muchas veces necesitamos escribir a \mathbb{R} como un "intervalo", esto es:

$$\mathbb{R} = \langle -\infty, +\infty \rangle.$$



El conjunto de los números racionales \mathbb{Q} cumple todos los axiomas de un cuerpo ordenado, entonces surge la siguiente interrogante: *¿Cuál es la diferencia entre los números racionales y los números reales?* La respuesta a esta interrogante se da en la siguiente sección.

2.3 El Axioma del Supremo

Precisamente en esta sección haremos notar la diferencia entre \mathbb{Q} y \mathbb{R} , y estudiaremos tres resultados importantes, a saber: el principio Arquimedeo, la existencia del máximo entero y la propiedad de densidad de los racionales e irracionales sobre los reales, como consecuencia natural del axioma del supremo.

por lo tanto

$$a < \frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n} < b.$$

De donde $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ es el número racional buscado. \square

Corolario 2.3.4 Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\forall \varepsilon > 0 \exists r_\varepsilon \in \mathbb{Q} / |x - r_\varepsilon| < \varepsilon$.

Prueba. Dado $\varepsilon > 0$ existe $r_\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tal que:

$$x - \varepsilon < r_\varepsilon < x + \varepsilon$$

de donde $-\varepsilon < r_\varepsilon - x < \varepsilon$, por tanto $|x - r_\varepsilon| < \varepsilon$.

Corolario 2.3.5 Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\forall n \in \mathbb{N} \exists r_n \in \mathbb{Q} / |x - r_n| < \frac{1}{n}$.

Prueba. Basta aplicar el corolario anterior para $\varepsilon = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.3.6 Existencia de $\sqrt{2}$

Existe un único número real positivo x tal que $x^2 = 2$.

Prueba. El conjunto $S = \{ y \in \mathbb{R}^+ / y^2 \leq 2 \}$ es no vacío (pues $1 \in S$) y está acotado superiormente por 2 (en caso contrario existe $s \in S$ tal que $2 < s$, pero esto implicaría que $4 < s^2 \leq 2$, lo cual es un absurdo), luego por el axioma del supremo existe el supremo de este conjunto S que denotaremos por x ($\because x > 1$).

La propiedad de tricotomía nos dice que

$$x^2 < 2 \quad \text{ó} \quad x^2 > 2 \quad \text{ó} \quad x^2 = 2.$$

Probaremos que $x^2 = 2$, en efecto:

(i) Si $x^2 < 2$, entonces $\exists n \in \mathbb{N} / \frac{1}{n} < \underbrace{\frac{2 - x^2}{2x + 1}}_{>0}$ (Prop. Arquimed.).

Luego

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{2x + 1}{n} < x^2 + (2 - x^2) = 2,$$

lo cual implica que $x + \frac{1}{n} \in S$ (¡contradicción!).

Definición 2.3.3 Sea X un subconjunto no vacío de \mathbb{R} . Un número real β se llama *ínfimo* de X si β es la mayor de todas las cotas inferiores de X . Si denotamos por $\inf X$ al ínfimo de X , tenemos que:

$$\beta = \inf X \iff \begin{cases} i) & \beta \leq x \quad \forall x \in X \\ ii) & \text{Si } m \leq x \quad \forall x \in X, \text{ entonces } m \leq \beta. \end{cases}$$

Proposición 2.3.2 Si X es un subconjunto no vacío de \mathbb{R} , se cumple que:

$$\beta = \inf X \iff \begin{cases} i)' & \beta \leq x \quad \forall x \in X \\ ii)' & \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in X / \beta \leq x_0 < \beta + \varepsilon. \end{cases}$$

Prueba. La prueba de esta proposición la encargamos al lector, puesto que es idéntica a la demostración de la proposición anterior.

Ejemplo 1.- Si $X = [a, b]$, es fácil ver que

$$\inf X = a \quad \text{y} \quad \sup X = b.$$

En este ejemplo observamos que $\sup X \notin X$, mientras que $\inf X \in X$. Es decir, el supremo y/o el ínfimo de un conjunto puede no pertenecer al conjunto en mención.

Ejemplo 2.- Muestre que $\sup A = \frac{1}{2}$, si

$$A = \left\{ \frac{1}{1+n^2} ; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

En efecto: Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geq 1$, entonces $n^2 + 1 \geq 2$. Luego $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{2}$, y así $\frac{1}{2}$ es cota superior del conjunto A . Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 = \frac{1}{2} \in A$ tal que $\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$. Por lo tanto

$$\sup A = \frac{1}{2}.$$

El ínfimo de este conjunto es cero. Sin embargo, en este momento no es posible dar una prueba rigurosa de esta afirmación (vea el ejercicio resuelto 4 de este capítulo) ya que requiere el uso del principio Arquimedeo, que a su vez es una consecuencia del axioma del supremo que pasamos estudiar.

Axioma del Supremo "Todo subconjunto no vacío de \mathbb{R} acotado superiormente posee un supremo."

Este axioma caracteriza a \mathbb{R} como un cuerpo ordenado y completo. En seguida demostraremos tres resultados trascendentes que son consecuencias inmediatas de este axioma. Estos son el principio Arquimediano, la existencia del máximo entero y la densidad de los racionales.

Teorema 2.3.3 Principio Arquimediano

Sean a y b dos números reales. Si $a > 0$, existe un número natural n_0 tal que

$$a \cdot n_0 > b$$

Prueba. Supongamos que $n \cdot a \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego el conjunto $A = \{na/n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente por b , entonces por el axioma del supremo, existe $\alpha = \sup A$. Por la proposición anterior, tomando $\epsilon = a > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - a < n_0 \cdot a \leq \alpha$, entonces

$$\alpha < (n_0 + 1)a \text{ y } (n_0 + 1)a \in A$$

lo cual implica que $\alpha < (n_0 + 1)a \leq \alpha$, evidentemente una contradicción. Por lo tanto $\exists n_0 \in \mathbb{N} / a \cdot n_0 > b$. □

Corolario 2.3.1 Si $x \in \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_0$.

Prueba. Si $x \leq 0$, basta tomar $n_0 = 1$. Si $x > 0$, aplicando la propiedad Arquimediana, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < 1 \cdot n_0 = n_0$

Corolario 2.3.2 Si $y \in \mathbb{R}^+$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < y$.

Prueba. Es inmediato del corolario 2.3.1, tomando $x = \frac{1}{y}$.

Corolario 2.3.3 Si $x \in \mathbb{R}$, existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m < x < n$.

Prueba. Por el corolario 2.3.1, existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $x < p$ y $-q < x$, luego $-q < x < p$. El resultado se concluye tomando $m = -q$ y $n = p$

Ejemplo 3.- Si $X = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$, demuestre que:

$$\inf X = 0 \text{ y } \sup X = 1.$$

En efecto: Como $0 \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, 0 es una cota inferior de X . Ahora para $\varepsilon > 0$, por el corolario 2.3.2 existe $x_0 = \frac{1}{n_0} \in X$ tal que $0 \leq x_0 < 0 + \varepsilon$. Así, $\inf X = 0$.

Por otro lado, como $\frac{1}{n} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, 1 es una cota superior de X . Además, dado $\varepsilon > 0$ existe $x_0 = 1 \in X$ tal que $1 - \varepsilon < x_0 \leq 1$. Así, $\sup X = 1$.

Teorema 2.3.4 Existencia del máximo entero

Para cada x número real, existe un único entero k tal que $k \leq x < k + 1$.

Prueba.

Existencia. Por el corolario 2.3.3, existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $r < x < s$, luego si $t = (s - r) \in \mathbb{N}$, entonces $r < x < r + t$. Sea t_0 el menor número natural tal que $r < x < r + t_0$ (la existencia de tal t_0 queda garantizada por el principio del buen orden).

Si $t_0 = 1$, entonces $r < x < r + 1$ y la prueba termina; pero si $t_0 > 1$, definiendo $k = (r + t_0 - 1)$ tenemos que $k \in \mathbb{Z}$ y $r + t_0 = k + 1$. Por otro lado, como t_0 es el menor número natural tal que $x < r + t_0$, tenemos que $\sim (x < r + t_0 - 1)$, o equivalentemente $x \geq (r + t_0 - 1) = k$. Por lo tanto

$$k \leq x < k + 1.$$

Unicidad. Supongamos que existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$m \leq x < m + 1 \quad \text{y} \quad n \leq x < n + 1.$$

Si $m < n$ (sin pérdida de generalidad), entonces $m < n \leq x < m + 1$, luego $m < n < m + 1$, y por lo tanto $0 < (n - m) < 1$ con $(n - m) \in \mathbb{Z}$ (¡Absurdo!).
□

Teorema 2.3.5 Densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R}

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a < b$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$.

Prueba. Por la propiedad Arquimediana, existe un número natural n tal que $\frac{1}{n} < b - a$, luego

$$a + \frac{1}{n} < b$$

y por el teorema 2.3.4 existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m - 1 \leq an < m$, o bien $\frac{m-1}{n} \leq a < \frac{m}{n}$, de donde

$$a < \frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n},$$

por lo tanto

$$a < \frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n} < b.$$

De donde $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ es el número racional buscado. \square

Corolario 2.3.4 Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\forall \varepsilon > 0 \exists r_\varepsilon \in \mathbb{Q} / |x - r_\varepsilon| < \varepsilon$.

Prueba. Dado $\varepsilon > 0$ existe $r_\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x - \varepsilon < r_\varepsilon < x + \varepsilon$$

de donde $-\varepsilon < r_\varepsilon - x < \varepsilon$, por tanto $|x - r_\varepsilon| < \varepsilon$.

Corolario 2.3.5 Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\forall n \in \mathbb{N} \exists r_n \in \mathbb{Q} / |x - r_n| < \frac{1}{n}$.

Prueba. Basta aplicar el corolario anterior para $\varepsilon = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.3.6 Existencia de $\sqrt{2}$

Existe un único número real positivo x tal que $x^2 = 2$.

Prueba. El conjunto $S = \{y \in \mathbb{R}^+ / y^2 \leq 2\}$ es no vacío (pues $1 \in S$) y está acotado superiormente por 2 (en caso contrario existe $s \in S$ tal que $2 < s$, pero esto implicaría que $4 < s^2 \leq 2$, lo cual es un absurdo), luego por el axioma del supremo existe el supremo de este conjunto S que denotaremos por x ($x > 1$).

La propiedad de tricotomía nos dice que

$$x^2 < 2 \quad \text{ó} \quad x^2 > 2 \quad \text{ó} \quad x^2 = 2.$$

Probaremos que $x^2 = 2$, en efecto:

(i) Si $x^2 < 2$, entonces $\exists n \in \mathbb{N} / \frac{1}{n} < \underbrace{\frac{2 - x^2}{2x + 1}}_{>0}$ (Prop. Arquimed.).

Luego

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{2x + 1}{n} < x^2 + (2 - x^2) = 2,$$

lo cual implica que $x + \frac{1}{n} \in S$ (¡contradicción!).

(ii) Si $x^2 > 2$, por la propiedad Arquimediana

$$\exists m \in \mathbb{N} / \frac{1}{m} < \frac{x^2 - 2}{2x} \quad \text{y} \quad \frac{1}{m} < x$$

lo cual implica que

$$2 < x^2 - \frac{2x}{m} \quad \text{y} \quad 0 < x - \frac{1}{m}.$$

Por otro lado, siendo $x = \sup S$, existe $s_0 \in S / x - \frac{1}{m} < s_0 \leq x$ entonces

$$2 < x^2 - \frac{2x}{m} < x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} = \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 < s_0^2,$$

luego $2 < s_0^2$ y $s_0 \in S$, evidentemente una contradicción.

Por lo tanto

$$x^2 = 2.$$

Para la unicidad, supongamos que a y b son números reales positivos tales que $a^2 = 2$ y $b^2 = 2$, entonces $(a - b)(a + b) = 0$, lo cual implica que $a = b$.
□

En general, si $a \geq 0$ existe un único $b \geq 0$ tal que $b^2 = a$. Este único b será llamado *raíz cuadrada* de a , y lo denotaremos por $b = \sqrt{a}$. En particular $x = \sqrt{2}$ y debe estar claro que $1 < \sqrt{2} < 2$.

Proposición 2.3.7 Densidad de \mathbb{I} en \mathbb{R}

Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x < y$, existe $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que $x < \alpha < y$.

Prueba. Como $x < y$ tenemos que

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}, \text{ luego existe } r \in \mathbb{Q} \text{ tal que } \frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto

$$x < r\sqrt{2} < y.$$

donde $r\sqrt{2}$ es irracional! (¡Justifíquelo!). □

Más sobre la densidad.

Sean A y B dos subconjuntos de \mathbb{R} . Decimos que A es denso en B si $A \subseteq B$ y entre dos elementos del conjunto B existe por lo menos un elemento del conjunto A . Por ejemplo, ya hemos visto que los números racionales y

los números irracionales son densos en \mathbb{R} . Por otro lado, es fácil ver que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{Q} , que \mathbb{R} es denso en \mathbb{R} (basta ver que si $a < b$, entonces $a < \frac{a+b}{2} < b$) y que $\mathbb{Q} - \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{Q} - \mathbb{R}$, sin embargo \mathbb{Z} no es denso en \mathbb{Z} (diga usted porqué).

Podemos afirmar también que entre dos números racionales existe un número irracional, y que entre dos números irracionales existe un número racional (¡claramente!).

El axioma del supremo también es conocido como *el axioma de completitud*. Precisamente en los dos siguientes resultados usamos este nombre para el axioma del supremo. Estos resultados nos permiten entender porqué \mathbb{R} es un cuerpo ordenado y **completo**.

Teorema 2.3.8 \mathbb{Q} no es completo.

Prueba. Supongamos que \mathbb{Q} es completo, luego como el conjunto

$$A = \{r \in \mathbb{Q} / r < \sqrt{2}\}$$

es no vacío y acotado superiormente por 2 (¿Porqué?), existe

$$\alpha = \sup A \in \mathbb{Q}.$$

$\alpha \neq \sqrt{2}$, puesto que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Si $\alpha < \sqrt{2}$, entonces existe $r_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha < r_0 < \sqrt{2}$, luego $r_0 \in A$, y así $\alpha < r_0 \leq \alpha$ (¡contradicción!). Si $\sqrt{2} < \alpha$, entonces existe $r_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $\sqrt{2} < r_1 < \alpha$, luego $r \leq r_1$ para todo $r \in A$, por tanto $\alpha \leq r_1 < \alpha$ (¡absurdo!). Por lo tanto, el conjunto de los números racionales \mathbb{Q} no es completo. \square

Proposición 2.3.9 El conjunto $\mathbb{R} - \{a\}$ no es completo.

Prueba. Supongamos que $\mathbb{R} - \{a\}$ es completo (hipótesis auxiliar), entonces el conjunto $C = \{y \in \mathbb{R} - \{a\} / y < a\}$ es no vacío y está acotado superiormente por $(a+1) \in \mathbb{R} - \{a\}$, luego por la hipótesis auxiliar existe $\alpha \in \mathbb{R} - \{a\}$ tal que $\alpha = \sup C$.

Si $\alpha < a$, entonces $\alpha < \frac{\alpha+a}{2} < a$, luego α no es cota superior de C (¡contradicción!). Si $a < \alpha$, entonces como $a < \frac{\alpha+a}{2} < \alpha$, lo cual implica que $y < \frac{\alpha+a}{2}$ para todo $y \in C$, es decir $\frac{\alpha+a}{2}$ es cota superior de C , entonces $\alpha \leq \frac{\alpha+a}{2} < \alpha$ (¡contradicción!). Por lo tanto $\mathbb{R} - \{a\}$ no es completo. \square

Para finalizar este capítulo presentamos una herramienta importante para demostrar muchos teoremas, proposiciones o fórmulas matemáticas, esta es el ...

2.4 Principio de Inducción Matemática

Una de las propiedades más importantes de los números naturales \mathbb{N} es el principio de inducción matemática. Este principio se usa para demostrar proposiciones que dependen de n ($n \in \mathbb{N}$).

Principio de Inducción Matemática PIM

Si X es un subconjunto de \mathbb{N} tal que:

- i) $1 \in X$
- ii) $(n+1) \in X$, si $n \in X$

Entonces $X = \mathbb{N}$.

Este principio es una verdad evidente, puesto que por (i) $1 \in X$ y aplicando sucesivamente (ii) se concluye que $2 = (1+1) \in X$, $3 = (2+1) \in X$, $4 = (3+1) \in X, \dots$; y así se tiene que $\mathbb{N} \subseteq X$ por tanto $X = \mathbb{N}$. Sin embargo, ésto no pretende ser una demostración del principio de inducción matemática, más bién una manera coloquial (no matemática) de entender este principio.

Ejemplo.- Pruebe que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución.-

Sea $X = \left\{ n \in \mathbb{N} / \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \right\} \subseteq \mathbb{N}$. Evidentemente $1 \in X$.

Supongamos ahora que $n \in X$, es decir

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{hipótesis inductiva})$$

Debemos probar que $(n+1) \in X$. En efecto:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \left[\sum_{k=1}^n k \right] + (n+1) \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $X = \mathbb{N}$; es decir,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Esta prueba ha sido desarrollada con todo detalle con la finalidad de entender e ilustrar el uso correcto del principio de inducción matemática, pero en la práctica la forma de utilizarlo es mucho más dinámica, como veremos en los primeros ejercicios resueltos que a continuación se dan.

2.5 Ejercicios Resueltos

1. Pruebe que

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solución. Probaremos que $n < 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$. En efecto: si $n = 1$, entonces $1 < 2^1$. Supongamos que el resultado se cumple para $n \in \mathbb{N}$, es decir $n < 2^n$ (Hipótesis Inductiva), entonces $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n = n + n \geq n + 1 \implies 2^{n+1} > n + 1$. Por lo tanto $n < 2^n \forall n \in \mathbb{N}$.

2. *Desigualdad de Bernoulli.* Si $a > -1$ pruebe que

$$(1 + a)^n \geq 1 + na, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solución. Si $n = 1$, entonces $(1 + a)^1 \geq 1 + 1 \cdot a$. Supongamos que la desigualdad de Bernoulli se cumpla para $n \in \mathbb{N}$, es decir

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad (\text{Hipótesis Inductiva}),$$

veamos que esta desigualdad se cumple para $n + 1$. En efecto

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)(1 + a)^n \geq (1 + a)(1 + na) = 1 + na + a + na^2 \geq 1 + na + a = 1 + (n + 1)a.$$

Por lo tanto

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. *Desigualdad de Cauchy-Schwarz.* Si a_1, \dots, a_n y b_1, \dots, b_n son números reales cualesquiera, pruebe que

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

Solución. Como $(a_k x + b_k)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } \forall 1 \leq k \leq n$, entonces

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$\underbrace{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)}_A x^2 + 2 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)}_B x + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)}_C \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Así, tenemos que $Ax^2 + 2Bx + C \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se desea probar que $B^2 \leq AC$. En efecto:

Si $A = \sum a_k^2 = 0$, entonces $a_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$. Luego $B = \sum a_k b_k = 0$, así el resultado se cumple trivialmente.

Si $A \neq 0$, como $Ax^2 + 2Bx + C \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tomando en particular $x = -\frac{B}{A}$, tenemos que

$$0 \leq A \left(-\frac{B}{A}\right)^2 + 2B \left(-\frac{B}{A}\right) + C = \frac{B^2}{A} - \frac{2B^2}{A} + C = -\frac{B^2}{A} + C.$$

De donde se concluye que

$$B^2 \leq AC.$$

4. Encontrar el supremo y el ínfimo del conjunto

$$A = \left\{ \frac{1}{1+n^2} / n \in \mathbb{N} \right\}$$

Solución.

- Como $n^2 \geq 1$, $n^2 + 1 \geq 2$, luego $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto $\frac{1}{2}$ es cota superior de A .

Por otro lado, si $\varepsilon > 0$, $\exists x_0 = \frac{1}{2} \in A$ tal que $\frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$.

$$\therefore \sup A = \frac{1}{2}.$$

- Como $0 < \frac{1}{n^2+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, 0 es cota inferior de A .

Ahora sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, debemos demostrar que $\exists x_0 \in A$ tal que $0 \leq x_0 < \varepsilon$. En efecto:

si $\varepsilon \geq 1$, entonces $\exists x_0 = \frac{1}{2}$ tal que $0 \leq \frac{1}{2} < \varepsilon$. Si $\varepsilon < 1$, por la propiedad Arquimediana $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \leq n_0$, de donde se concluye que $0 \leq \frac{1}{n_0^2+1} < \varepsilon$

$$\therefore \inf A = 0.$$

5. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y $A + B = \{a + b / a \in A, b \in B\}$. Si A y B son acotados superiormente, pruebe que existe $\sup(A + B)$ y

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Solución. Si $x \in A + B$, existen $a \in A$ y $b \in B$ tal que $x = a + b \leq \sup A + \sup B$, luego el conjunto $A + B$ está acotado superiormente por $\sup A + \sup B$, por lo tanto existe $\sup(A + B)$. Más aún

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, $\exists a_0 \in A$ y $\exists b_0 \in B$ tales que

$$\begin{aligned} \sup A - \frac{\varepsilon}{2} &< a_0 \\ \sup B - \frac{\varepsilon}{2} &< b_0 \end{aligned}$$

Luego $\sup A + \sup B - \varepsilon < a_0 + b_0 \leq \sup(A + B)$. Por lo tanto $\sup A + \sup B < \sup(A + B) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Así, $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$, con lo que se sigue el resultado.

6. Si $x < y + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, pruebe que $x \leq y$.

Solución.

Supongamos que $x > y$. Luego tomando $\varepsilon = x - y > 0$ tenemos que $x < y + (x - y)$, es decir $x < x$ (¡ Absurdo !). Por lo tanto $x \leq y$.

7. Sean A, B subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} , B acotado superiormente. Si $a \leq b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$, pruebe que A está acotado superiormente y $\sup A \leq \sup B$.

Solución. Como $a \leq b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$, entonces $a \leq \sup B, \forall a \in A$. Luego el conjunto A está acotado superiormente (por $\sup B$). Como $\sup A$ es la menor de todas las cotas superiores, concluimos que

$$\sup A \leq \sup B$$

8. Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^+ con $\inf A > 0$.

Si $B = \{\frac{1}{a} / a \in A\}$, pruebe que B está acotado superiormente y

$$\sup B = \frac{1}{\inf A}.$$

Solución. Sea $\alpha = \inf A$.

- Como $\alpha \leq a \quad \forall a \in A$, $\frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{a} \quad \forall a \in A$, luego $\frac{1}{\alpha} \geq b \quad \forall b \in B$. Así $\frac{1}{\alpha}$ es una cota superior para B .
- Suponga que $b \leq M \quad \forall b \in B$, entonces $\frac{1}{\alpha} \leq M \quad \forall a \in A$, luego $\frac{1}{M} \leq a \quad \forall a \in A$, y como $\inf A = \alpha$ concluimos que $\frac{1}{M} \leq \alpha$, por lo tanto $M \geq \frac{1}{\alpha}$. Luego hemos probado:
 - (i) $b \leq \frac{1}{\alpha} \quad \forall b \in B$.
 - (ii) Si $b \leq M \quad \forall b \in B$ entonces $\frac{1}{\alpha} \leq M$.
 es decir $\sup B = \frac{1}{\alpha}$.

9. Si $|x - x_0| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}, 1 \right\}$ y $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)}$, pruebe que

$$|xy - x_0y_0| < \varepsilon$$

Solución. Tenemos que

$$|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)}$$

y

$$|x - x_0| < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}, 1 \right\}$$

luego se tiene que

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}$$

y

$$|x - x_0| < 1$$

De esta última desigualdad, usando que $||x| - |x_0|| < |x - x_0|$ se sigue que

$$|x| < |x_0| + 1$$

Ahora

$$\begin{aligned} |xy - x_0y_0| &= |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| \\ &\leq |xy - xy_0| + |xy_0 - x_0y_0| \\ &= |x||y - y_0| + |y_0||x - x_0| \\ &< (|x_0| + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)} + |y_0| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

10. Pruebe que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es un número irracional.

Solución.

Supongamos que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$. Elevando al cuadrado y despejando $\sqrt{6}$ tenemos que

$$\sqrt{6} = \frac{1}{2}(r^2 - 5) \in \mathbb{Q}$$

entonces existen $n, m \in \mathbb{Z}$ primos entre sí tales que $\sqrt{6} = \frac{n}{m}$, luego

$$6m^2 = n^2.$$

Así, n^2 es par, por tanto n también es par, es decir $n = 2u$, $u \in \mathbb{Z}$. Reemplazando en $6m^2 = n^2$ y simplificando, $3m^2 = 2u^2$, luego m^2 es par, por tanto m es par, es decir $m = 2v$, $v \in \mathbb{Z}$. De esto concluimos que m y n no son primos entre sí (¡Contradicción!).

2.6 Ejercicios Propuestos

- Si α es un número irracional y r es número racional no nulo, pruebe que $r + \alpha$ y $r \cdot \alpha$ son números irracionales.
- Si x e y son números irracionales, ¿se puede concluir que $x + y$ y xy son irracionales? ¡Justifique su respuesta!
- Pruebe que $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ son dos números irracionales.
- Sean a, b, c y d números racionales tales que $ad - bc \neq 0$. Si x es irracional, pruebe que $\frac{ax + b}{cx + d}$ también es irracional.
- Sean a y b dos enteros positivos. Pruebe que $\sqrt{2}$ está entre las dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a+2b}{a+b}$.
- Resolver cada una de las inecuaciones siguientes:

(a) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{2-x} > 0$

(c) $\sqrt{x^2 - 2x - 15} > x + 1$

(b) $\sqrt{3x+1} < x - 1$

(d) $\sqrt{x - \sqrt{2x+3}} < 1$

- Hallar el conjunto solución de cada una de las inecuaciones siguientes:

$$(a) |x^2 + 2x - 3| \leq 2(1 - x) \quad (c) |3x - 1| + |x + 4| \geq |4x + 3|.$$

$$(b) x^2 - 3x + 1 \geq |x + 3|. \quad (d) |2x - 5| + 3 > |x| + 2|x - 1|.$$

8. Si a, b y r son números reales fijos tales que $a < b$ y $r > 0$, demostrar que $a < \frac{a + br}{1 + r} < b$.

9. Si $x \in (0, 1)$, pruebe que $\frac{2x}{x + 3} < \frac{2}{3}$

10. Si $|x - 2| < \frac{1}{4}$, pruebe que $\left| \frac{2}{2x - 3} \right| < 3$

11. Si $|x + 3| < \frac{1}{2}$, pruebe que $\left| \frac{3}{x + 4} \right| < 6$

12. Si $|x| < \frac{1}{2}$, pruebe que $\left| \frac{x}{x + 1} \right| < 1$

13. Usando la desigualdad de Bernoulli, demuestre que si $c > 1$, entonces $c^n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

14. Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ donde b, d son positivos, pruebe que $\frac{a + c}{b + d}$ está entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$.

15. Si $x > 0, b > 0$ y $a \neq b$, demostrar que $\frac{a - x}{b + x}$ está entre 1 y $\frac{a}{b}$.

16. Dada la inecuación cuadrática $ax^2 + bx + c \leq 0$ con $a > 0$, demostrar que:

(a) Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces $CS = \emptyset$.

(b) Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $CS = \{-\frac{b}{2a}\}$.

(c) Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces $CS = [r, s]$.

$$\text{donde } r = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y } s = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

17. Dada la inecuación cuadrática $ax^2 + bx + c \geq 0$ con $a > 0$, demostrar que:

- (a) Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces $CS = \mathbb{R}$.
- (b) Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $CS = \mathbb{R}$.
- (c) Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces $CS = \langle -\infty, r \rangle \cup [s, +\infty)$.
donde r y s son los definidos en el problema 16.

18. Dada la inecuación cuadrática $ax^2 + bx + c < 0$ con $a > 0$, demostrar que:

- (a) Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces $CS = \phi$.
- (b) Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $CS = \phi$.
- (c) Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces $CS = \langle r, s \rangle$.
donde r y s son los definidos en el problema 16.

19. Dada la inecuación cuadrática $ax^2 + bx + c > 0$ con $a > 0$, demostrar que:

- (a) Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces $CS = \mathbb{R}$.
- (b) Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $CS = \mathbb{R} - \{\frac{-b}{2a}\}$.
- (c) Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces $CS = \langle -\infty, r \rangle \cup (s, +\infty)$.
donde r y s son los definidos en el problema 16.

20. Si $-\frac{7}{9} < a < 1$, resolver la inecuación

$$(1 - a^2)x^2 + (1 - a)x^2 + 2 > 0$$

21. Si $|x - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|y - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, pruebe que

$$|(x + y) - (a + b)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |(x - y) - (a - b)| < \varepsilon$$

22. Si $0 < a < b$, demuestre que $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$

23. Si x e y son dos números reales no ambos nulos, demuestre que:

- (a) $x^2 + xy + y^2 > 0$
- (b) $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 > 0$

24. Si $a > 0$ y $b < 0$, demuestre que $\frac{a}{b} < \frac{a}{b-a}$

25. Si a y b son números reales positivos tales que $a + b = 1$, demostrar que $ab \leq \frac{1}{4}$.

26. Si $R < r < 0$, determinar la condición que debe cumplir el número d para que sea válida la desigualdad

$$0 < \frac{d^2 + R^2 + r^2}{2dR} < 1$$

27. Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ un conjunto en el cual $x_i \neq x_j$ siempre que $i \neq j$. Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $|x_k - a| < \frac{1}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, demuestre que X es un conjunto acotado.
28. Dados los números reales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, demuestre que existen α, α', β y $\beta' \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ tales que

$$\alpha + \beta \leq \alpha_k + \beta_k \leq \alpha' + \beta' \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq n.$$

29. Si A y B son dos subconjuntos acotados de \mathbb{R} y c es un número real fijo, pruebe que $A+B = \{x+y / x \in A, y \in B\}$ y $cA = \{cx / x \in A\}$ son también acotados.

30. Hallar el mayor número m tal que:

(a) $m \leq x^2 + 2x + 4$ para todo x real.

(b) $m \leq 4x^2 + 12x + 11$ para todo x real.

31. Hallar el menor número M tal que:

(a) $1 + 4x - x^2 \leq M$ para todo x real.

(b) $3 - 8x^2 - 8x \leq M$ para todo x real.

32. Sea A un subconjunto de \mathbb{R} no vacío y acotado inferiormente. Si $-A = \{-x / x \in A\}$, pruebe que $-A$ está acotado superiormente y que $\sup(-A) = -\inf A$.

33. Sea A un subconjunto no vacío y acotado de \mathbb{R} . Para $c \in \mathbb{R}$ definimos $cA = \{cx / x \in A\}$. Si $c > 0$, pruebe que:

(a) $\sup(cA) = c \sup A$.

(b) $\inf(cA) = c \inf A$.

¿Qué ocurre si $c < 0$? ¡Justifique su respuesta!

34. Hallar el supremo e ínfimo de cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) $A = \{2, -1, -10, 4\}$

(b) $B = \{1 - \frac{1}{n^2} / n \in \mathbb{N}\}$

(c) $C = \{\text{sen}(\frac{n\pi}{2}) / n = 0, 1, 2, \dots\}$

(d) $D_a = \{\text{sen}^n(a) / n \in \mathbb{N}\}$ donde $a \in [0, \pi] - \{0, \pi, \frac{\pi}{2}\}$.

35. Sean A y B subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} y definamos $A \cdot B = \{x \cdot y / x \in A, y \in B\}$. Si A y B son acotados, pruebe que $A \cdot B$ es acotado y

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

36. Si X es un subconjunto de \mathbb{R} no vacío y acotado inferiormente, pruebe que X posee un ínfimo y que $\inf(X) = -\sup(-X)$, donde $-X = \{-x / x \in X\}$.

37. Sea X un subconjunto no vacío de \mathbb{R} y $a \in \mathbb{R}$. Si a es cota superior de X y $a \in X$, pruebe que $a = \text{Sup } X$

38. Sea X un subconjunto no vacío de \mathbb{R} y $a \in \mathbb{R}$. Si a es cota inferior de X y $a \in X$, pruebe que $a = \text{Inf } X$.

39. Sean X e Y subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} . Si $X \subseteq Y$ e Y está acotado superiormente, pruebe que existe $\sup X$ y

$$\sup X \leq \sup Y.$$

40. Sean X e Y subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} . Si $X \subseteq Y$ y Y está acotado inferiormente, pruebe que existe $\inf X$ e

$$\inf X \geq \inf Y.$$

41. Hallar el supremo e ínfimo (si existen) de cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) $X = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leq 5\}$

(c) $X = \left\{ \frac{1}{1+n^2} / n \in \mathbb{N} \right\}$

(b) $X = \left\{ \frac{1}{1+x^2} / x \in \mathbb{R} \right\}$.

(d) $X = \left\{ \frac{x-1}{x-2} / x > 2 \right\}$

42. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R} - \langle -1, 1 \rangle$ acotado inferiormente. Si $B = \{ \frac{1}{x} / x \in A \}$, pruebe que B está acotado superiormente y

$$\sup B = (\inf A)^{-2}.$$

43. Sean X y Y subconjuntos de números reales. Si definimos

$$Z = \{ z / z = x - y, x \in X, y \in Y \}$$

Demuestre que $\sup Z = \sup X - \inf Y$.

44. Sea A un subconjunto acotado del intervalo $\langle -\infty, 0 \rangle$. Si

$$B = \left\{ \frac{2x-3}{x-2} / x \in A \right\} \quad \text{pruebe que} \quad \inf B = \frac{2 \sup A - 3}{\sup A - 2}.$$

45. Demostrar la verdad de las siguientes proposiciones:

(a) $4^n - 1$ es divisible por 3 para todo $n \geq 1$.

(b) $n^3 + 2n$ es divisible por 3 para todo $n \geq 1$.

(c) $\sum_{k=1}^n k(k!) = (n+1)! - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

46. Demostrar por inducción:

(a) $\sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

(b) $\sum_{i=1}^n 3^i = \frac{3}{2}(3^n - 1)$.

47. Demuestre que

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \left(\frac{2n+3}{2^n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

48. Si $A \subseteq \langle -\infty, 0 \rangle$ y $B = \{ -5x / x \in A \}$, pruebe que existe $\inf B$ y que $\inf B = -5 \sup A$.

49. Sea $A = \{ x \in \mathbb{R} / 3 < x \leq 127 \}$. Si $B = \{ -2x / x \in A \}$, pruebe que $\sup B = -2 \inf A$.

50. Sean $a, a_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Si $a_0 \neq 0$ y $|a - a_0| < \min \left\{ \frac{|a_0|}{2}, \frac{\varepsilon |a_0|^2}{2} \right\}$, pruebe que $a \neq 0$ y $\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{a_0} \right| < \varepsilon$.

Capítulo 3

Funciones Reales

Uno de los conceptos de mayor trascendencia en matemática es el de *función*. En este capítulo exponemos los hechos elementales sobre funciones reales y ésto constituirá la base apropiada para estudiar las funciones en un contexto más general.

3.1 Definición y Ejemplos

Sean A y B conjuntos no vacíos, que llamaremos dominio y codominio respectivamente, entenderemos por función de A en B a toda regla que hace corresponder a cada elemento del dominio un único elemento del codominio. Más precisamente, una función es un conjunto de pares ordenados tales que la primera componente pertenece al conjunto A y la segunda al conjunto B , es decir un subconjunto de $A \times B$, de modo que todo elemento de A sea primera componente de un solo par ordenado y sólo uno.

Usualmente, los signos que indican funciones son f, g, h , etcétera. Así, para denotar que f es una función de A en B , se escribe

$$f : A \rightarrow B$$

y se lee " f es una función o aplicación de A en B ", o bien " f es una función con dominio A y codominio B ".

En particular, si $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y f es la regla de correspondencia definida por

$$f(x) = x^2 \quad \forall x \in A$$

se tiene que

$$f = \{ (-1, 1); (0, 0); (1, 1); (2, 4) \}.$$

Observamos aquí las siguientes situaciones: elementos distintos de A pueden tener la misma imagen en B , como ocurre con 1 y -1 , cuyas imágenes son 1; además, puede darse que algunos elementos de B no tengan un antecedente (o preimagen) en A , es decir que pueden existir en B elementos que no sean correspondientes de ningún elemento de A , como ocurre con 2 y 3.

Definición 3.1.1 Dados los conjuntos no vacíos A y B , se dice que f es una **función** o aplicación de A en B si f es un subconjunto de $A \times B$ que satisface las siguientes condiciones de existencia y unicidad:

(i) Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

(ii) Si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$, entonces $b = c$.

Definición 3.1.2 Si f es una función de A en B , el **dominio (rango)** de f denotado por D_f (R_f) es el conjunto de las primeras (segundas) coordenadas de los elementos de f , esto es:

$$D_f = A$$

$$R_f = \{y \in B / (x_0, y) \in f \text{ para algún } x_0 \in A\}$$

La condición (ii) nos dice que a todo elemento del dominio de f le "corresponde" un único elemento de su rango. Si $(x, y) \in f$, se dice que y es la imagen de x a través de f , lo cual se acostumbra escribir $y = f(x)$, es decir

$$(x, y) \in f \iff y = f(x)$$

Por ser f un conjunto, puede estar determinado por extensión, es decir, como un conjunto de pares ordenados, o bien por comprensión, dando su dominio y la ley de correspondencia $y = f(x)$ que permita asignar a cada elemento del dominio su respectiva imagen.

Notación.- Si f es una función de A en B con regla de correspondencia $y = f(x)$ será denotado así

$$\begin{array}{l} f : A \longrightarrow B \\ x \longmapsto y = f(x) \end{array}$$

Ejemplo 1.- Sea $A = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$, $B = \mathbb{R}$ conjunto de los números reales y $f : A \rightarrow B$ definida por $f(a) = \frac{1}{|a|} + 1 \quad \forall a \in A$, entonces:

$$f = \left\{ \left(-2, \frac{3}{2}\right); (-1, 2); (1, 2); \left(2, \frac{3}{2}\right); \left(3, \frac{4}{3}\right) \right\} \subsetneq A \times B$$

$$D_f = \{-2, -1, 1, 2, 3\} = A$$

$$R_f = \left\{ \frac{3}{2}, 2, \frac{4}{3} \right\} \subsetneq B$$

Ejemplo 2.- Sea H el conjunto de todos los hombres del planeta.

- (i) Si $Ed : H \rightarrow \mathbb{Z}$ es definida por $Ed(x) =$ "edad de x ", entonces Ed es una función, con dominio H y rango R_f (¡acotado!, superiormente por 150 e inferiormente por 0).
- (ii) $h : H \rightarrow H$ definida por $h(x) =$ "hermano de x " no es una función, por cuanto x puede tener más de un hermano o no tenerlo.
- (iii) Si $p : H \rightarrow H$ es definida por $p(x) =$ "padre de x ", entonces p sí es una función.

Algunas veces, al conjunto A se le llama conjunto de partida y al conjunto B conjunto de llegada. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$, es decir, si f es una función de A en \mathbb{R} , se dice que f es una función real de variable real. Ahora daremos más ejemplos de

Funciones Reales de Variable Real

Ejm 3. La función Identidad en $A \subseteq \mathbb{R}$ denotada por Id_A , es la función definida por $Id_A(x) = x$ para todo $x \in A$, es decir

$$Id_A : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

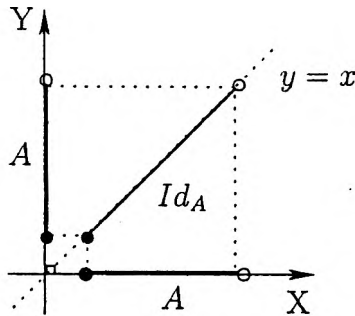
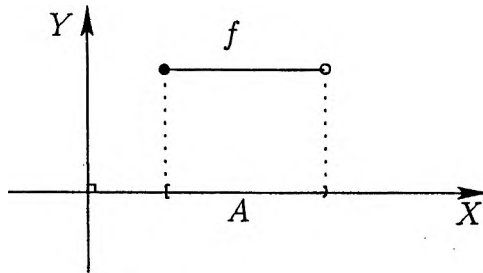
$$x \longmapsto y = Id_A(x) = x \quad \forall x \in A$$

Ejm 4. La función Constante k en $A \subseteq \mathbb{R}$ es la función f definida por $f(x) = k$ para todo $x \in A$, es decir

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto y = f(x) = k \quad \forall x \in A$$

En particular: cuando $k = 0$, es decir $f(x) = 0 \quad \forall x \in A$, se llama **función nula** en A .

Figura 3.1: La función Identidad en A Figura 3.2: La función constante en A

Ejm 5. La *función Afín* es la función f definida por $f(x) = mx + k$ para todo x en \mathbb{R} (con m y k constantes fijas), es decir

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x) = mx + k \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

En particular cuando $k = 0$, es decir

$$f(x) = mx \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

se llama *función lineal*. Observamos que para $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ arbitrarios $f(\alpha x + \beta y) = m(\alpha x + \beta y) = \alpha mx + \beta my = \alpha f(x) + \beta f(y)$, así

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall \alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$$

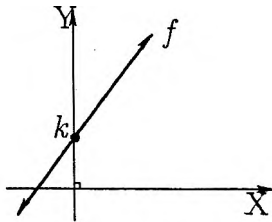


Figura 3.3: La función Afín

Ahora es fácil comprobar que: $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ y $f(x - y) = f(x) - f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ejm 6. La función Valor Absoluto es la función f definida por $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

y su gráfico es

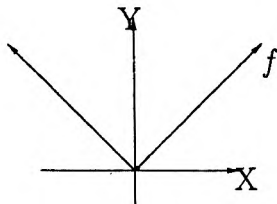


Figura 3.4: donde $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = [0, +\infty)$.

Ejm 7. La función de Dirichlet es la función f definida por $f(x) = 1$ cuando x es racional y $f(x) = 0$ cuando x es irracional, es decir

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

y su gráfico se muestra en la Figura 3.5

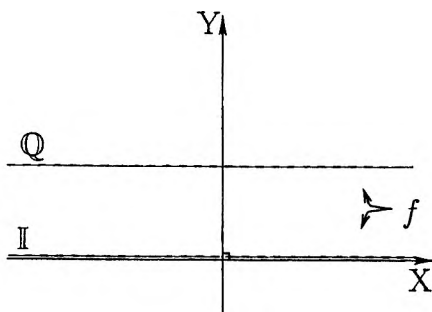


Figura 3.5: donde $D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \{0, 1\}$.

Ejm 8. La función *Característica de A*, donde A es un subconjunto propio y no vacío de \mathbb{R} , es la función denotada por χ_A y definida por $\chi_A(x) = 1$ cuando $x \in A$ y $\chi_A(x) = 0$ cuando $x \notin A$, es decir

$$\begin{aligned} \chi_A: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Para entender mejor a este tipo de funciones, dejamos aquí dos ejercicios no complicados al lector responsable.

Ejercicios.-

1. Sean A, B subconjuntos no vacíos de \mathbb{R} . Si $\chi_A = \chi_B$, pruebe que $A = B$.
2. Pruebe que para toda función $f: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ con rango $\{0, 1\}$, existe un subconjunto no vacío A de \mathbb{R} tal que $f = \chi_A$.

Ejm 9. La función "*pi*" de Euler es la función denotada y definida por $\pi(x) =$ número de primos positivos $\leq x$ para todo $x > 0$, es decir

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \pi(x) = \text{"número de primos positivos } \leq x\text{"} \end{aligned}$$

Este ejemplo nos muestra una función cuya regla de correspondencia no tiene una fórmula conocida hasta nuestros días (usando funciones elementales). El comportamiento de $\pi(x)$ ha sido objeto de un intenso estudio por muchos matemáticos ilustres a partir del siglo dieciocho. La inspección de tablas

de los números primos condujeron a Gauss (1792) y a Legendre (1798) a conjeturar que la función $\pi(x)$ es asintótico a la función $\frac{x}{\log x}$, esto es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

Tal conjetura fue demostrada en 1896 por Hadamard y se conoce como el *teorema del número primo*; la demostración de Hadamard usa la teoría de funciones de variable compleja y propiedades de la función zeta de Riemann. Una demostración elemental (para los entendidos) fue hallada recién en 1949 por A. Selberg y P. Erdős (estas son notas del libro *Introducción a la Teoría Analítica de Números* de T.M APASTOL).

Ejm 10 La *función Máximo Entero*, cuya existencia y buena definición están probadas en el capítulo anterior, es la función denota por $[]$ y definida por $[x] = n$ cuando $n \leq x < n + 1$, es decir

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x) = [x] = n \quad \text{si } n \leq x < n + 1$$

y su gráfico es

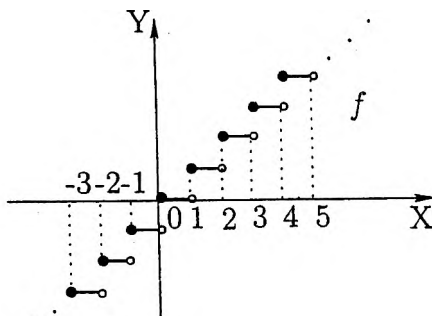
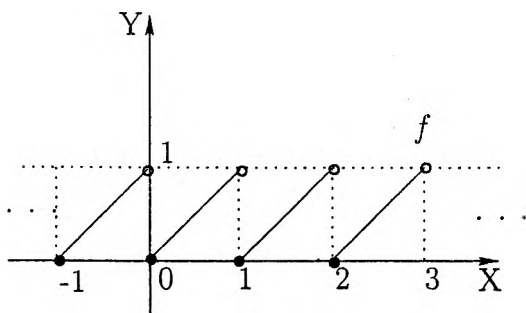
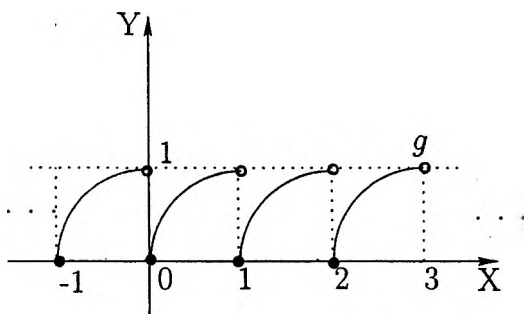


Figura 3.6: donde $D_{[]} = \mathbb{R}$ y $R_{[]} = \mathbb{Z}$.

Usando esta función es posible definir otras funciones, por ejemplo si $f(x) = x - [x] \forall x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = \sqrt{x - [x]} \forall x \in \mathbb{R}$, el lector debe comprobar que sus gráficos son los mostrados en las dos siguientes figuras:

Figura 3.7: $f(x) = x - [x]$.Figura 3.8: $g(x) = \sqrt{x - [x]}$.

Definición 3.1.3 Sea f una función real de variable real con dominio D_f . Se dice que f está *acotada* si su rango está acotado, o equivalentemente

f está acotada si y sólo si $\exists M > 0 / |f(x)| \leq M \quad \forall x \in D_f$.

Ejemplo 1. La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ está acotada, puesto que

$$|f(x)| = \left| \frac{x}{1+|x|} \right| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2. Las funciones *seno* y *coseno* son acotadas, puesto que

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 \quad \text{y} \quad |\operatorname{cos} x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definición 3.1.4 Sea f una función real de variable real con dominio D_f . Se dice que la función f es *par* si y sólo si

1. $x \in D_f$ y $-x \in D_f$
2. $f(-x) = f(x) \forall x \in D_f$

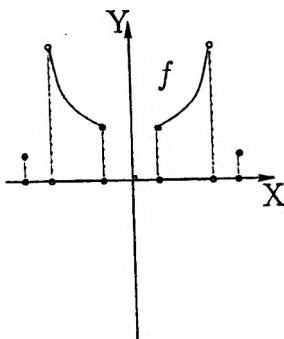


Figura 3.9: f es una función Par.

Definición 3.1.5 Sea f una función real de variable real con dominio D_f . Se dice que la función f es *impar* si y sólo si

1. $x \in D_f$ y $-x \in D_f$
2. $f(-x) = -f(x) \forall x \in D_f$

Ejemplos:

1. La función $f(x) = x^{2n} \forall x \in \mathbb{R}$ es par, y la función $f(x) = x^{2n+1} \forall x \in \mathbb{R}$ es impar.
2. La función $f(x) = (x|x| + \frac{1}{x}) \operatorname{sen} x^2 \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ es impar.

En efecto:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle \text{ y}$$

$$f(-x) = \left(-x|-x| + \frac{1}{-x} \right) \operatorname{sen} (-x)^2 = -f(x).$$

3. Sea f una función con dominio $D_f = [-L, L]$. Pruebe que:

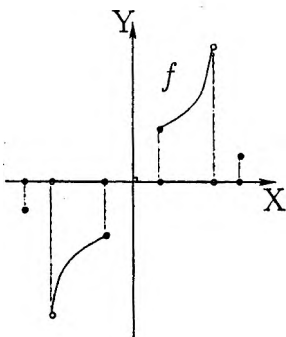


Figura 3.10: f es una función Impar.

- a) $F : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \forall x \in D_f$ es par.
- b) $G : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \forall x \in D_f$ es impar.

Solución: Para ambos casos, $D_F = [-L, L] = D_G$ y

$$F(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = F(x); \text{ análogamente } G(-x) = -G(x)$$

Este ejemplo nos permite demostrar que toda aplicación de $[-L, L]$ en \mathbb{R} se puede expresar como la suma de una función par con una función impar (vea la lista de ejercicios propuestos al final de este capítulo).

3.2 Tipos de Funciones

Para una función $f : A \rightarrow B$. Si ocurre que, elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas en el codominio, la función se llamará función inyectiva o uno a uno. Por otra parte, si todo elemento del codominio es imagen de algún elemento del dominio, la función se llamará sobreyectiva o suryectiva. Y cuando ocurran ambas situaciones simultáneamente, la función se llamará función biyectiva o correspondencia biunívoca.

Definición 3.2.1 Si el rango de la función $f : A \rightarrow B$ es igual al conjunto de llegada (es decir $R_f = B$), se dice que f es **sobreyectiva**. Equivalentemente

$$f : A \rightarrow B \text{ es sobreyectiva} \iff [\forall y \in B \exists x \in A / y = f(x)]$$

Definición 3.2.2 Una función $f : A \rightarrow B$ es **inyectiva** si elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas, es decir

$$f : A \rightarrow B \text{ es inyectiva} \iff [\forall x, y \in A : x \neq y \implies f(x) \neq f(y)]$$

o equivalentemente

$$f : A \rightarrow B \text{ es inyectiva} \iff [\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \implies x = y]$$

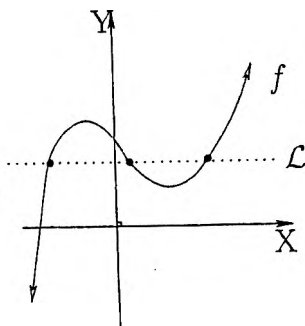


Figura 3.11: f no es inyectiva.

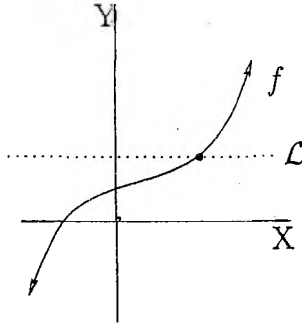
Definición 3.2.3 Una función $f : A \rightarrow B$ se llama **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Ahora veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.- Pruebe que la función afín $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es $f(x) = mx + k$ con $m \neq 0$ es sobreyectiva.

Solución:

Sea $y \in \mathbb{R}$ (fijo, arbitrario). Debemos demostrar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = y$. En efecto: si tomamos $x_0 = \left(\frac{y-k}{m}\right) \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(x_0) = m \left(\frac{y-k}{m}\right) + k = y$; es decir la función f es sobreyectiva.

Figura 3.12: f si es inyectiva.

Ejemplo 2.- Sea f una función real de variable real definida por $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 9}$ para todo $x \geq 3$. Pruebe que f es inyectiva.

Solución:

Sean $x, y \geq 3$ tales que $f(x) = f(y)$.

- Si $x = 3$, entonces $6 = 2y + \sqrt{y^2 - 9}$, luego

$$\sqrt{y-3} [2\sqrt{y-3} + \sqrt{y+3}] = 0$$

y como $y \geq 3$, tenemos que $y = 3$.

- Si $x > 3$, entonces $2x + \sqrt{x^2 - 9} = 2y + \sqrt{y^2 - 9}$, luego

$$2(x-y) = \frac{(y-x)(y+x)}{\sqrt{y^2-9} + \sqrt{x^2-9}}$$

y como $y \geq 3$ tenemos que $x = y$.

Así, concluimos que f es inyectiva.

Ejemplo 3.- Pruebe que la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

Es biyectiva.

Solucion:

Aclaremos que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ y $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.

(i) f es sobreyectiva:

$$\text{Si } k \geq 0, \text{ existe } n = (2k + 1) \in \mathbb{N} \text{ tal que } f(n) = \frac{(2k + 1) - 1}{2} = k.$$

$$\text{Si } k < 0, \text{ existe } n = (-2k) \in \mathbb{N} \text{ tal que } f(n) = -\frac{(-2k)}{2} = k.$$

(ii) f es inyectiva:

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ con la misma paridad, tales que $f(m) = f(n)$

$$\text{Si } m \text{ y } n \text{ son impares, tenemos que } \frac{m-1}{2} = \frac{n-1}{2}, \text{ luego } m = n.$$

$$\text{Si } m \text{ y } n \text{ son pares, tenemos que } \frac{-m}{2} = \frac{-n}{2}, \text{ luego } m = n.$$

Por lo tanto, de (i) y (ii), la función f es biyectiva.

Observación.- El último ejemplo muestra que \mathbb{N} y \mathbb{Z} son conjuntos equipotentes, es decir, tienen la misma "cantidad" de elementos. Todos los conjuntos con los que \mathbb{N} es equipotente son llamados *conjuntos enumerables*. No es difícil probar que \mathbb{Q} es un conjunto enumerable. Anotamos también sin justificación alguna, que el conjunto de los números irracionales \mathbb{I} no es enumerable; esto nos dice que existen más números irracionales que racionales, aún cuando se conozcan más racionales que irracionales (esto será estudiado en el curso de análisis I).

3.3 Imagen y Preimagen

Definición 3.3.1 Sea f una función real de variable real con dominio D_f y sea $A \subseteq D_f$. El conjunto

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\}$$

se llama *Imagen de A*.

Observamos que la imagen del dominio de una función es igual a su rango, es decir $f(D_f) = R_f$. Observe también que

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A / y = f(x)$$

Proposición 3.3.1 Sea f una función real de variable real con dominio D_f y sean $A, B \subseteq D_f$:

1. Si $A \subseteq B$ entonces $f(A) \subseteq f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Prueba. Ejercicio para el lector. □

Observación .- En 3. no siempre se da la igualdad, es decir existen $A, B \subseteq D_f$ para alguna función f tal que $f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B)$. Por ejemplo si $f(x) = x^2$, $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3\}$ tenemos que $f(A \cap B) = \{0, 1\}$ y $f(A) \cap f(B) = \{0, 1, 4\} \cap \{0, 1, 4, 9\} = \{0, 1, 4\}$. Por lo tanto

$$f(A \cap B) \subsetneq f(A) \cap f(B).$$

Definición 3.3.2 Sea f una función real de variable real con dominio D_f y sea $B \subseteq \mathbb{R}$. El conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in D_f / f(x) \in B\}$$

se llama *Preimagen de B*.

Observación.-

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

Ejemplo 1. Dada la función $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, hallar

$$f^{-1}((-\infty, -1]) \quad \text{y} \quad f^{-1}((-1, 1]).$$

Veamos:

$$x \in f^{-1}((-\infty, -1]) \iff f(x) \in (-\infty, -1] \iff f(x) \leq -1 \iff x^2 \leq -1$$

Por lo tanto

$$f^{-1}((-\infty, -1]) = \phi.$$

Análogamente

$$x \in f^{-1}((-1, 1]) \iff f(x) \in (-1, 1] \iff -1 < x^2 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1$$

Por lo tanto

$$f^{-1}((-1, 1]) = [-1, 1].$$

Proposición 3.3.2 Sea f una función real de variable real con dominio D_f y sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$:

1. Si $A \subseteq B$ entonces $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.
2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
4. $f^{-1}(C_X A) = C_Y(f^{-1}(A))$.

Prueba. Ejercicio obligatorio para el lector □

Esta proposición nos dice que la imagen inversa de una función tiene un buen comportamiento respecto al álgebra de la teoría de conjuntos; este hecho será usado en cursos avanzados para definir y/o generalizar muchos conceptos matemáticos, como por ejemplo los conceptos de función continua, función medible y muchos otros más.

Ejemplo 2.- Si consideramos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$f^{-1}(f([0, 1])) = f^{-1}([2, 5]) = [-1, 1] \text{ y}$$

$$f(f^{-1}([0, 5])) = f([-1, 1]) = [2, 5].$$

En este ejemplo vemos que

$$[0, 1] \subsetneq f^{-1}(f([0, 1])) \text{ y } f(f^{-1}([0, 5])) \subsetneq [0, 5]$$

Precisamente la siguiente proposición nos da las condiciones necesarias y suficientes para que se cumplan las igualdades.

Proposición 3.3.3 Sea f una función real de variable real con dominio D_f , entonces:

1. $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad \forall A \subseteq D_f$
2. $A = f^{-1}(f(A)) \quad \forall A \subseteq D_f$ si y sólo si f es inyectiva.
3. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}$.
4. $f(f^{-1}(B)) = B \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}$ si y sólo si f es sobreyectiva.

Prueba. (Vea la lista de ejercicios resueltos.) □

3.4 Funciones Monótonas

Definición 3.4.1 Sea f una función real de variable real con dominio D_f y sea $I \subseteq D_f$. Diremos que:

1. La función f es **creciente** en I si y sólo si para todo $x, y \in I$ tales que $x < y$ se tiene que $f(x) < f(y)$.
2. La función f es **decreciente** en I si y sólo si para todo $x, y \in I$ tales que $x < y$ se tiene que $f(x) > f(y)$.
3. La función f es **no creciente** en I si y sólo si para todo $x, y \in I$ tales que $x < y$ se tiene que $f(x) \geq f(y)$.
4. La función f es **no decreciente** en I si y sólo si para todo $x, y \in I$ tales que $x < y$ se tiene que $f(x) \leq f(y)$.
5. La función f es **monótona** en I si f cumple alguna de las condiciones anteriores.

Ejemplo 1. La función afín $f(x) = mx + k$ es creciente si $m > 0$, y decreciente si $m < 0$.

En efecto:

Veamos el caso $m < 0$. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2$. Como $m < 0$, se tiene que $mx_1 > mx_2$, por tanto $mx_1 + k > mx_2 + k$, es decir $f(x_1) > f(x_2)$. Así, la función f es decreciente en \mathbb{R} .

De manera similar se ve que la función f es creciente en \mathbb{R} si $m > 0$.

Ejemplo 2. Verificar que la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ es creciente en $[\frac{5}{2}, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, \frac{5}{2}]$.

En efecto:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

y

$$\frac{5}{2} \leq a < b \implies 0 \leq a - \frac{5}{2} < b - \frac{5}{2}$$

$$\implies \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 < \left(b - \frac{5}{2}\right)^2$$

$$\implies \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < \left(b - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto $f(a) < f(b)$ siempre que $\frac{5}{2} \leq a < b$, es decir la función f es creciente en $[\frac{5}{2}, +\infty)$. De manera análoga se verifica que la función f es

decreciente en $\langle -\infty, \frac{5}{2} \rangle$.

Ejemplo 3. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x & , x < -1 \\ x & , -1 \leq x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$

es decreciente en $\langle -\infty, -1 \rangle$, creciente en $[-1, 2)$ y no decreciente en $[2, +\infty)$. Pero no podemos afirmar que la función f es no decreciente en $[-1, +\infty)$ (¿por qué?).

Proposición 3.4.1 Sea f una función real de variable real con dominio D_f y sea $I \subseteq D_f$ un intervalo. Si f es creciente o decreciente en I , entonces f es inyectiva en I .

Prueba. Supongamos que f es decreciente en I y sean $a, b \in I$ tales que $a \neq b$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a < b$, entonces $f(a) > f(b)$, es decir $f(a) \neq f(b)$. \square

3.5 Operaciones con Funciones

Sean f y g funciones reales de variable real y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Si existen los números $f(x)$ y $g(x)$, entonces están bien definidos los números $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\lambda f(x)$ y $\frac{f(x)}{g(x)}$ (si $g(x) \neq 0$). Así, tiene sentido dar la siguiente

Definición 3.5.1 Sean f, g funciones reales de variable real con dominios D_f y D_g respectivamente y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos las funciones:

$$f + g, \quad f - g, \quad fg, \quad \lambda f, \quad \frac{f}{g}$$

de la siguiente manera:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in D_{f+g} = D_f \cap D_g$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in D_{f-g} = D_f \cap D_g$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

$$4. (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in D_{\lambda f} = D_f$$

$$5. \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \setminus \{x : g(x) \neq 0\}$$

Ejemplo.- Dadas las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \text{Sig}\left(\frac{x^2 - 4}{x + 3}\right) \quad \forall x \neq -3, \text{ y } g(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Determine el rango y la gráfica de las funciones f , fg y $(fg)^2$.

Solución.-

(i) Como

$$\text{Sig}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

es claro que el rango de f es el conjunto $R_f = \{-1, 0, 1\}$. Además, tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \langle -3, -2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle \\ 0 & , \quad x \in \{2, -2\} \\ -1 & , \quad x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle -2, 2 \rangle \end{cases}$$

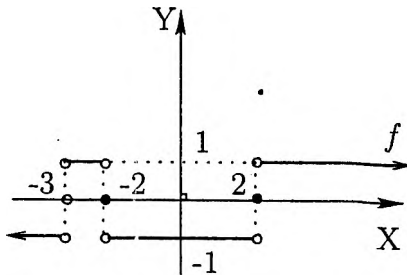


Figura 3.13: $f(x) = \text{Sig}\left(\frac{x^2-4}{x+3}\right)$

(ii) Como

$$(fg)(x) = f(x) \cdot |x| = \begin{cases} |x| & , \quad x \in \langle -3, -2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle \\ 0 & , \quad x \in \{2, -2\} \\ -|x| & , \quad x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle -2, 2 \rangle \end{cases}$$

el rango de fg es el conjunto

$$R_{fg} = \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle -2, 0 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle.$$

(iii) Usando la parte (ii), vemos que

$$(fg)^2(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \neq -2, 2, -3 \\ 0 & , \quad x \in \{-2, 2\} \end{cases}$$

así el rango de esta función es el conjunto $R_{(fg)^2} = \mathbb{R}_{\geq 0} - \{4\}$.

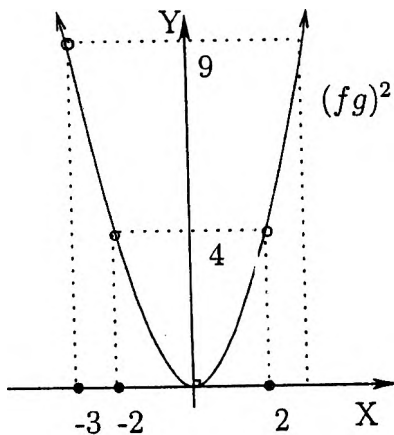


Figura 3.14: La función $(fg)^2$

Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ y sea \mathcal{F} el conjunto de todas las aplicaciones de X en \mathbb{R} , es decir

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es una aplicación}\}.$$

En este conjunto se tienen las siguientes propiedades: $\forall f, g, h \in \mathcal{F}$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

- | | |
|---------------------------------|---|
| 1. $f + g \in \mathcal{F}$. | 5. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta g$ |
| 2. $(f + g) + h = f + (g + h)$ | 6. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$ |
| 3. $f + g = g + f$ | 7. $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$ |
| 4. $\alpha f \in \mathcal{F}$. | 8. $fj \in \mathcal{F}$. |

1. $(fg)h = f(gh)$
2. $fg = gf$
3. $(f + g)h = fh + gh$
4. $(\alpha f)g = f(\alpha g) = \alpha(fg)$

Estas propiedades serán utilizadas en cursos avanzados para caracterizar al conjunto \mathcal{F} según las operaciones que se le adjunte, por ejemplo \mathcal{F} puede ser visto como un grupo abeliano, como un espacio vectorial, como un anillo conmutativo con unidad, como un \mathbb{R} -álgebra, o como un \mathbb{R} -módulo.

3.6 Composición de Funciones

Bajo ciertas condiciones es posible definir, a partir de dos funciones conocidas f y g , una nueva función, llamada la compuesta de f con g , de la siguiente manera. Dada las funciones

$$f: A \rightarrow B \quad \text{y} \quad g: B \rightarrow C$$

donde coinciden el codominio de la primera función con el dominio de la segunda función (en general, es suficiente que el codominio de la primera función este contenido en el dominio de la segunda función).

Nuestro propósito es asignar a cada elemento x de A un único elemento de C , y el camino natural consiste en determinar la imagen de tal elemento x por f , y a continuación obtener la imagen de $f(x) \in B$, por g .

Definición 3.6.1 Dada las funciones $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$, La composición de f con g es la función denotada por $g \circ f$ y definida así

$$\begin{aligned} g \circ f: A &\rightarrow C \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{para todo } x \in A \end{aligned}$$

La función $g \circ f$ puede leerse así: "f compuesta con g", o "g cerito f", o bien "gof". Evidentemente, para comprender este nuevo concepto necesitamos dar una cantidad razonable de ejemplos.

Ejemplo 1.- Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{5, 6\}$ y las funciones $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ definidas así

$$\begin{aligned} f &= \{(1; a), (2; b), (3; d)\} \\ g &= \{(a; 5), (b; 5), (c; 5), (d; 6)\} \end{aligned}$$

Resulta entonces que

$$g \circ f = \{(1; 5), (2, 5), (3; 6)\}.$$

El lector debe notar que no existe $f \circ g$, ya que en este caso el codominio de g es C y el dominio de f es A .

Ejemplo 2.- Dadas las funciones:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = 3x^2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

halle $f \circ g$ y $g \circ f$ (sabiendo que ellos existen).

Solución:

- $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(3x^2 - 1) = 2(3x^2 - 1) = 6x^2 - 2$$

- $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$(g \circ f)(x) = g(2x) = 3(2x)^2 - 1 = 12x^2 - 1$$

Note que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, así de este ejemplo vemos que

$$\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$$

aún cuando ambos tienen el mismo dominio y el mismo codominio.

Observación.- Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales dadas. Si el conjunto

$$D = \{x / x \in A \wedge f(x) \in B\} \neq \emptyset$$

entonces $f : D \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, luego existe la función $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que por abuso de lenguaje llamaremos también *la compuesta de f con g* , donde el conjunto D es su dominio que algunas veces se denota por $D_{g \circ f}$.

Ejemplo 3.- Dada las funciones $g(x) = 3x^2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y $h(x) = \sqrt{x-1} \quad \forall x \geq 1$, hallar $g \circ h$ y $h \circ g$ (si existen).

Solución: Observamos que $D_g = \mathbb{R}$ y $D_h = [1, +\infty)$

$$D_{g \circ h} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1 \wedge \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty).$$

$$(g \circ h)(x) = g(\sqrt{x-1}) = 3(\sqrt{x-1})^2 - 1 = 3x - 4$$

Como $D_{h \circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \wedge 3x^2 - 1 \geq 1\}$
tenemos que

$$D_{h \circ g} = \left\langle -\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right\rangle \cup \left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty \right) \text{ y}$$

$$(h \circ g)(x) = h(3x^2 - 1) = \sqrt{3x^2 - 2}.$$

Ejemplo 4.- Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x} \quad \forall x \geq 0$ y $g(x) = -x^2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, hallar $f \circ g$ y $g \circ f$ si existen.

Solución.- Notamos que

$$x \in D_{f \circ g} \text{ si y sólo si } x \in \mathbb{R} \wedge (-x^2 - 1) \geq 0$$

Esto nos indica que

$$D_{f \circ g} = \emptyset.$$

Por lo tanto, no existe la función $f \circ g$. Por otro lado, es ya fácil ver que

$$(g \circ f)(x) = -x - 1 \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

En este ejemplo vemos que $D_{g \circ f} \neq \mathbb{R}$, es decir, para indicar el dominio de la composición no debe analizarse solamente la regla de correspondencia de la composición, mas bien es necesario *primero determinar el dominio y luego la regla de correspondencia*. \square

Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ y sea \mathcal{B} el conjunto de todas las biyecciones de X en X , es decir

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(X) = \{f : X \rightarrow X / f \text{ es una biyección}\}.$$

En este conjunto se tienen las siguientes propiedades: $\forall f, g, h \in \mathcal{B}$

1. $f \circ g \in \mathcal{B}$.
2. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
3. $Id_X \circ f = f \circ Id_X = f$
4. Para todo $f \in \mathcal{B}$ existe $g \in \mathcal{B}$ tal que $f \circ g = g \circ f = Id_X$

El conjunto B con la operación composición "o" por satisfacer estas cuatro propiedades se dice que tiene la categoría de *grupo* (no conmutativo cuando X tiene mas de dos elementos). En particular, si $X = \{1, 2, 3\}$, es fácil ver que $B(X)$ tiene 6 elementos (vea la lista de ejercicios de esta sección).

Nota.- Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, podemos definir la función $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \forall x \in A$$

entonces $f(x)g(x) = g(x)f(x) = 1 \quad \forall x \in A$. En este caso se dice que g es la *inversa multiplicativa* de f y viceversa.

3.7 La Inversa de una Función

En esta sección estudiaremos la inversa de una función respecto a la operación composición y daremos la condición necesaria y suficiente para que una función sea inversible.

Definición 3.7.1 Dada la función $f : A \rightarrow B$. Se dice que la función $f^* : B \rightarrow A$ es la *inversa de f* si

$$f \circ f^* = Id_B \quad \text{y} \quad f^* \circ f = Id_A.$$

Ejemplos:

1. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = mx + k$ con $m \neq 0$, posee como inversa a la función $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f^*(x) = \frac{1}{m}x - \frac{k}{m}$, puesto que:

$$(f \circ f^*)(x) = f(f^*(x)) = m \left(\frac{1}{m}x - \frac{k}{m} \right) + k = x = Id_{\mathbb{R}}(x) \quad \text{y}$$

$$(f^* \circ f)(x) = f^*(f(x)) = \frac{1}{m}(mx + k) - \frac{k}{m} = x = Id_{\mathbb{R}}(x)$$

es decir

$$f \circ f^* = Id_{\mathbb{R}} \quad \text{y} \quad f^* \circ f = Id_{\mathbb{R}}.$$

En particular, si $f(x) = 3x - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $f^*(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y como $(0, -2), (1, 1) \in f$, entonces $(-2, 0), (1, 1) \in f^*$

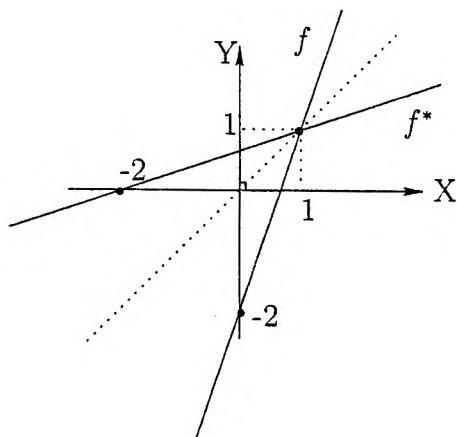


Figura 3.15: f y f^* son simétricos con respecto a la diagonal

2. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$ definida por $f(x) = \frac{x}{1+|x|} \forall x \in \mathbb{R}$, posee como inversa a la función $f^* : \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f^*(x) = \frac{x}{1-|x|} \forall x \in \langle -1, 1 \rangle$, ya que:

$$(f \circ f^*)(x) = \frac{\frac{x}{1-|x|}}{1 + \left| \frac{x}{1-|x|} \right|} = \frac{\frac{x}{1-|x|}}{1 + \frac{|x|}{1-|x|}} = x = Id_{\langle -1, 1 \rangle}(x)$$

y

$$(f^* \circ f)(x) = \frac{\frac{x}{1+|x|}}{1 - \left| \frac{x}{1+|x|} \right|} = \frac{\frac{x}{1+|x|}}{1 - \frac{|x|}{1+|x|}} = x = Id_{\mathbb{R}}(x).$$

Los gráficos de f y f^* se ven en la Figura(3.16).

Observación.- Si g es la función definida por $g(x) = \frac{x}{1-|x|} \forall x \neq \pm 1$, entonces f^* es la restricción de la función g al intervalo $\langle -1, 1 \rangle$ (vea la Figura 3.17).

Proposición 3.7.1 Si $f : A \rightarrow B$ es inversible (es decir, posee inversa), entonces f es biyectiva

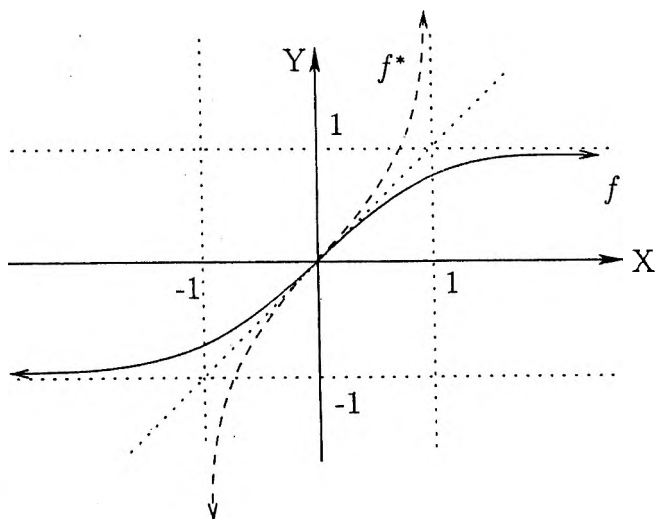


Figura 3.16: f y f^* tienen un único punto común

Prueba: Como f es inversible, existe $f^* : B \rightarrow A$ tal que

$$f \circ f^* = Id_B \quad \text{y} \quad f^* \circ f = Id_A.$$

f es inyectiva: Sean $a_1, a_2 \in A$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$, entonces

$$a_1 = (f^* \circ f)(a_1) = f^*(f(a_1)) \stackrel{\text{hip}}{=} f^*(f(a_2)) = (f^* \circ f)(a_2) = a_2.$$

f es sobreyectiva: Si $b \in B$, tomando $a = f^*(b) \in A$ tenemos que

$$f(a) = f(f^*(b)) = (f \circ f^*)(b) = Id_B(b) = b.$$

Por lo tanto f es sobreyectiva, y por ende f es biyectiva. □

Teorema 3.7.2 Una condición necesaria y suficiente para que una función $f : A \rightarrow B$ sea inversible es que la función f sea biyectiva.

Prueba: Por la proposición anterior, si f es inversible, entonces es biyectiva. Recíprocamente, supongamos que f sea biyectiva, luego para cada $b \in B$ el conjunto $f^{-1}(b)$ es unitario; en efecto: como f es sobreyectiva existe $a \in f^{-1}(b)$, además si $a, a' \in f^{-1}(b)$ entonces $f(a) = b = f(a')$, luego

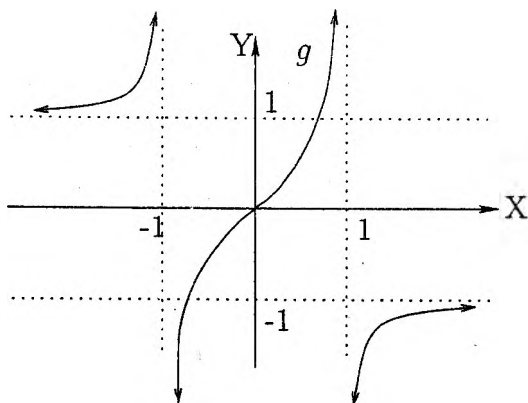


Figura 3.17: $g(x) = \frac{x}{1 - |x|} \quad \forall x \neq \pm 1$

$a = a'$ (pues f inyectiva), así $f^{-1}(b)$ es unitario; luego podemos definir $g : B \rightarrow A$ por $g(b) = a$ si $f(a) = b$. Claramente g está bien definida, además

$$g \circ f = Id_A \quad \text{y} \quad f \circ g = Id_B$$

es decir, f es inversible con $f^* = g$. □

Observación 1.- Si $f : A \rightarrow B$ es biyectiva y $f^* : B \rightarrow A$ es su inversa, entonces

$$\boxed{D_{f^*} = R_f \quad \text{y} \quad R_{f^*} = D_f}$$

Observación 2.- Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función inyectiva, entonces $f : A \rightarrow R_f$ es biyectiva, así por la proposición anterior f es inversible. Por lo tanto

“Una condición suficiente para que la función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sea inversible es que f sea inyectiva”.

3.8 Ejercicios Resueltos

1. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Si A, B son subconjuntos de X , pruebe que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ y muestre un ejemplo donde la inclusión sea propia.

Solución:

Si $y \in f(A \cap B)$ existe $x \in A \cap B$ tal que $y = f(x)$, es decir existe $x \in A$ y $x \in B$ tal que $y = f(x)$, luego $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$. Por lo tanto

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Ahora si $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $A = [-1, 0]$ y $B = [0, 1]$ tenemos que $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$ y $f(A) \cap f(B) = [0, 1] \cap [0, 1] = [0, 1]$, es decir

$$f(A \cap B) = \{0\} \subsetneq [0, 1] = f(A) \cap f(B).$$

2. Sea f una función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \forall x \neq -\frac{d}{c}, \text{ donde } ad - bc \neq 0.$$

Sabiendo que f es inversible, determine su inversa.

Solución: Como f es inversible, existe f^* tal que

$$f \circ f^* = Id \quad \wedge \quad f^* \circ f = Id,$$

de $f \circ f^* = Id$, se tiene que $\frac{af^*(x) + b}{cf^*(x) + d} = x$, luego $af^*(x) + b = cx f^*(x) + dx$, o bien $(-cx + a)f^*(x) = dx - b$. Por lo tanto

$$f^*(x) = \frac{dx - b}{-cx + a} \quad \forall x \neq \frac{a}{c} \tag{3.1}$$

y como

$$f^*(f(x)) = \frac{d\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) - b}{-c\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) + a} = \frac{(ad - bc)x}{(ad - bc)} = x \quad \forall x \neq -\frac{d}{c}.$$

Así la función f^* dada en (3.1), es efectivamente la inversa de f .

3. Si $f : A \rightarrow B$ es una aplicación inyectiva, pruebe que existe una función $g : B \rightarrow A$ sobreyectiva, tal que

$$f(g(y)) = y, \quad \forall y \in f(A).$$

Solución:

Como $f : A \rightarrow B$ es una aplicación inyectiva, entonces $f : A \rightarrow f(A)$ es

una aplicación biyectiva, por tanto existe la aplicación $f^* : f(A) \rightarrow A$ tal que

$$f \circ f^* = Id_{f(A)} \text{ y } f^* \circ f = Id_A.$$

Luego definiendo $g : B \rightarrow A$ por

$$g(y) = \begin{cases} f^*(y) & , \quad y \in f(A) \\ x_0 & , \quad y \in B \setminus f(A) \end{cases}$$

donde x_0 es un elemento de A fijado, tenemos que

$$f(g(y)) = f(f^*(y)) = y, \quad \forall y \in f(A).$$

Si $B = f(A)$ basta tomar $g = f^*$.

4. Sea f una función real definida por $f(x) = \frac{2x-3}{x-2} \quad \forall x \neq 2$.

- Pruebe que f es inyectiva.
- Determine la función f^* .
- ¿Cuál es la relación entre f y f^* ?

Solución:

Observe que $f(x) = 2 + \frac{1}{x-2} \quad \forall x \neq 2$ y $R_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

- $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $2 + \frac{1}{x_1-2} = 2 + \frac{1}{x_2-2}$, lo que muestra que $x_1 = x_2$. Luego f es inyectiva.
- Como $f(f^*(x)) = x$ para todo $x \neq 2$ implica que

$$2 + \frac{1}{f^*(x)-2} = x \quad \forall x \neq 2$$

de donde concluimos que $f^*(x) = \frac{2x-3}{x-2} \quad \forall x \neq 2$.

- Obviamente, tendremos que $f = f^*$

5. Pruebe que la función $f(x) = 4\sqrt{x} - x \quad \forall x \in [0, 1]$ es inyectiva, luego determine la función f^* .

Solución:

Observe que

$$f(x) = 4\sqrt{x} - x = 4 - (\sqrt{x} - 2)^2.$$

Como $0 \leq x \leq 1$, se tiene que $-2 \leq \sqrt{x} - 2 \leq -1$, luego $0 \leq 4 - (\sqrt{x} - 2)^2 \leq 3$, es decir, el rango de f es el intervalo $[0, 3]$.

- (a) *f* es inyectiva: Si $f(x_1) = f(x_2)$, es decir, $4 - (\sqrt{x_1} - 2)^2 = 4 - (\sqrt{x_2} - 2)^2$, entonces $(\sqrt{x_1} - 2)^2 = (\sqrt{x_2} - 2)^2$, de donde $x_1 = x_2$ o bien $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 4$, así $x_1 = x_2$ (puesto que $x_1, x_2 \in [0, 1]$).
- (b) **Cálculo de f^*** : Por otro lado, siendo *f* inyectiva, existe la función $f^* : [0, 3] \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(f^*(x)) = x \quad \forall x \in [0, 3]$, es decir $4 - (\sqrt{f^*(x)} - 2)^2 = x$, de donde $f^*(x) = (2 \pm \sqrt{4-x})^2$, y como $f^*(0) = 0$ (puesto que $f(0) = 0$) concluimos que

$$f^*(x) = (2 - \sqrt{4-x})^2 \quad \forall x \in [0, 3].$$

6. Sea *f* una función real de variable real tal que

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall \lambda, x \in \mathbb{R}.$$

Pruebe que *f* es una **función lineal**, es decir pruebe que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = ax \quad \text{y} \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Solución:

Para cada $x \in \mathbb{R}$ (fijo, arbitrario) tenemos que $f(x) = xf(1)$, luego existe $a = f(1) \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado si $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y).$$

7. Dada la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, pruebe que:

- (a) $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad \forall A \subseteq D$
 (b) $A = f^{-1}(f(A)) \quad \forall A \subseteq D$ si y sólo si *f* es inyectiva.

Solución:

- (a) Si $x \in A$ entonces $f(x) \in f(A)$, equivalentemente $x \in f^{-1}(f(A))$.
 (b) (\implies) Si $f(a_1) = f(a_2)$, aplicando la hipótesis tenemos que

$$\{a_1\} = f^{-1}(f(\{a_1\})) = f^{-1}(\{f(a_1)\}) = f^{-1}(\{f(a_2)\}) = f^{-1}(f(\{a_2\}))$$

por tanto $a_1 = a_2$, es decir, *f* es inyectiva.

(\impliedby) Sólo falta ver que $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$. En efecto: si $x \in f^{-1}(f(A))$, entonces $f(x) \in f(A)$, luego existe $a \in A$ tal que $f(x) = f(a)$, y como *f* es inyectiva tendremos que $x = a \in A$.

8. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función con dominio X , pruebe que:

$$(a) f(f^{-1}(B)) \subseteq B \quad \forall B \subseteq Y$$

$$(b) f(f^{-1}(B)) = B \quad \forall B \subseteq Y \text{ si y sólo si } f \text{ es sobreyectiva.}$$

Solución:

(a) Si $y \in f(f^{-1}(B))$, existe $x \in f^{-1}(B)$ tal que $y = f(x)$. Por lo tanto $y = f(x) \in B$.

(b) Como $Y = f(f^{-1}(Y))$ (por la hipótesis) y $f(f^{-1}(Y)) \subseteq f(X)$, entonces $Y \subseteq f(X)$, es decir $f(X) = Y$. Así f es sobreyectiva. Recíprocamente, solo falta ver que $B \subseteq f(f^{-1}(B))$. En efecto: si $y \in B$, siendo f sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$, luego existe $x \in f^{-1}(B)$ tal que $y = f(x)$. Por lo tanto $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$.

9. Sean f y g las funciones reales definidas por

$$f(x) = 3x + 7 \quad \forall x < 3 \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ 2x & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Determine la función $f \circ g$.

Solución:

$$\begin{aligned} x \in D_{f \circ g} &\iff x \in D_g && \wedge g(x) \in D_f \\ &\iff (x < 0 \vee x \geq 1) && \wedge g(x) < 3 \\ &\iff (x < 0 \wedge g(x) < 3) \vee (x \geq 1 \wedge g(x) < 3) \\ &\iff (x < 0 \wedge -x < 3) \vee (x \geq 1 \wedge 2x < 3) \\ &\iff -3 < x < 0 && \vee 1 \leq x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore D_{f \circ g} = \langle -3, 0 \rangle \cup \left[1, \frac{3}{2} \right)$$

Por otro lado:

$$\text{Si } x \in \langle -3, 0 \rangle, f(g(x)) = f(-x) = 3(-x) + 7 = -3x + 7.$$

$$\text{Si } x \in \left[1, \frac{3}{2} \right), f(g(x)) = f(2x) = 3(2x) + 7 = 6x + 7$$

$$\therefore (f \circ g)(x) = \begin{cases} -3x + 7 & , \quad -3 < x < 0 \\ 6x + 7 & , \quad 1 \leq x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

10. Si f es una función real de variable real tal que

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad y \quad f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R},$$

pruebe que $f = 0$ o que $f = I_{\mathbb{R}}$.

Solución:

De $f(0+0) = f(0) + f(0)$ tenemos que $f(0) = 0$, y de $0 = f(x+(-x)) = f(x) + f(-x)$ tenemos que $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, como $f(1 \cdot 1) = f(1)f(1)$, entonces $f(1)[f(1) - 1] = 0$, por lo tanto $f(1) = 0$ ó $f(1) = 1$. Si $f(1) = 0$ entonces $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) = 0$; así $f = 0$.

Si $f(1) = 1$:

se prueba por inducción que

$$f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y como $f(-n) = -f(n) = -n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$f(k) = k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ahora como $1 = f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = nf(\frac{1}{n})$, $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$, con lo cual se concluye que

$$f(r) = r \quad \forall r \in \mathbb{Q}.$$

Por otro lado si $a > 0$, existe $b > 0$ tal que $a = b^2$, entonces $f(a) = f(b^2) = [f(b)]^2 > 0$ (si $f(b) = 0$ implicaría que $1 = f(1) = f(bb^{-1}) = f(b)f(b^{-1}) = 0$ ¡absurdo!). Por lo tanto

$$\text{Si } a > 0 \text{ entonces } f(a) > 0. \tag{3.2}$$

Ahora si $x < y$ entonces $y - x > 0$, luego $f(y) - f(x) = f(y - x) > 0$. Por tanto

$$\text{Si } x < y \text{ entonces } f(x) < f(y). \tag{3.3}$$

Finalmente si $z \in \mathbb{I}$, por la propiedad de tricotomía

$$f(z) < z \quad \text{ó} \quad f(z) > z \quad \text{ó} \quad f(z) = z.$$

Si $f(z) < z$ existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(z) < r < z$, luego $f(z) < r$ y $r = f(r) < f(z)$, lo cual es un absurdo.

Análogamente si $f(z) > z$ por el mismo procedimiento anterior se llega a una contradicción. De todo esto se concluye que $f(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{I}$. Por lo tanto hemos demostrado que $f = I_{\mathbb{R}}$. □

3.9 Ejercicios Propuestos

1. Trace el gráfico de la función f definida por $f(x) = x^n$ para n par y para n impar. Halle el máximo y/o mínimo (si $a > 0$ y $a < 0$) de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Estudie el comportamiento de $f(x) = x^n \quad \forall x \in [0, 1]$ y $n = 1, 2, 3, \dots$

2. Trace el gráfico de las siguientes funciones:

$$f(x) = \sqrt{|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{-x} \quad \forall x \leq 0,$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & , x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}$$

3. Trace la gráfica de $f(x) = \frac{2}{x} \quad \forall x \neq 0$, $g(x) = \frac{-1}{x} \quad \forall x \neq 0$ y

$$h(x) = \frac{3x-7}{x+1} \quad \forall x \neq -1.$$

¿Puede trazar un gráfico para $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $x \neq \frac{-d}{c}$?

4. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x < -2 \\ -\sqrt{4-x^2} & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ -2x^2+16x-24 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Hallar el rango de esta función y esbozar su gráfica.

5. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ |x-4|+x & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor & \text{si } 6 < x < 9 \end{cases}$$

(a) Expresar f sin que aparezca el valor absoluto ni el máximo entero.

(b) Graficar f e indicar su rango.

6. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función (con dominio \mathbb{R}). Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \neq 0$ y

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall \alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R},$$

pruebe que $f(x) = mx \quad \forall x \in \mathbb{R}$ con $m \neq 0$; luego concluya que el rango de f es \mathbb{R} .

7. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[x + 2] & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 1 - |x| & \text{si } x < -2 \vee x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Graficar f e indicar su rango.

(b) Resolver la ecuación $f(x) = 0$.

8. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{[2x] + 5}$ y $g(x) = |\sqrt{x+1} - 1|$ expresar f y g como la composición de tres funciones.

9. Dada la aplicación $f : D \rightarrow [-9, -1]$ definida por $f(x) = \frac{3+4x}{3-x}$.

(a) Determine el conjunto D .

(b) Pruebe que f es inyectiva.

(c) ¿Es la función f sobreyectiva? (Rpta ¡NO!)

10. Averiguar si las siguientes aplicaciones son: sólo inyectivas, sólo sobreyectivas o biyectivas:

(a) $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{x+1}{x-1} \forall x \neq 1$.

(b) $f : \langle -\infty, 0 \rangle \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2 - 1$.

(c) $f : \langle -1, +\infty \rangle \rightarrow \langle -\infty, 1 \rangle / f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

(d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x \in \langle -\infty, 0 \rangle \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & , x \in \langle 0, +\infty \rangle \end{cases}$

11. Dadas las funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$, probar que si f y g son inyectivas (sobreyectivas o biyectivas), entonces $f \circ g$ también lo es.

12. Dadas las funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, probar que:

(a) Si $g \circ f$ es inyectiva, f es inyectiva.

(b) Si $g \circ f$ es sobreyectiva, g es sobreyectiva.

(c) Si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, g es inyectiva.

13. Dada una aplicación $f : A \rightarrow B$, probar que si existe una aplicación $g : B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = I_A$, entonces f es inyectiva y g es sobreyectiva.

14. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 + 1$. Determinar las preimágenes de los siguientes conjuntos:

$$[-1, 1], \left\langle -\infty, \frac{1}{2} \right], [0, 3], [0, 3) \text{ y } [1, 10],$$

15. Dada la función $f(x) = x|x+1| - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- (a) Graficar f y hallar su rango.
 (b) Determinar en qué parte de su dominio f es creciente o decreciente.
 (c) Determinar el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / f(x) < 0\}$.

16. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } -5 \leq x < -2 \\ \left\lfloor \frac{x+2}{2} \right\rfloor & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 2 - |x-2| & \text{si } 1 \leq x < 5 \end{cases}$$

- (a) Determine el rango de f .
 (b) Determine el conjunto donde f es creciente.
 (c) Determine el conjunto $A = \{x \in D_f / f(x) = 0\}$.
17. Si f es una función decreciente en \mathbb{R}^+ y definimos la función F mediante la relación $F(x) = f\left(\frac{24x}{x+1}\right)$ para todo $x < -1$, probar que F es inyectiva y calcular $F^{-1}(x)$ en función de f^{-1} .
18. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$ es tal que $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ para todo x real, probar que f es biyectiva, luego halle su inversa.

19. Demuestre que la función f definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \quad \text{para todo } x \in [-2; -1]$$

posee inversa, luego halle dicha inversa.

20. Una función es llamada **homográfica** si es de la forma

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{con } ad - bc \neq 0.$$

- (a) Probar que la inversa de una función homográfica también es homográfica.
- (b) ¿Cuál es la condición para que una función homográfica sea igual a su inversa?
21. Determine si las funciones que a continuación se dan, son pares o impares:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & , \quad 1 < x < 2 \\ -x^2 - 2x - 2 & , \quad -2 < x < -1 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 5 & , \quad |x| > 3 \\ -2x - 2 & , \quad -3 < x < -1 \\ 2x - 2 & , \quad 1 < x < 3 \end{cases}$$

22. Muestre que la regla de correspondencia

$$f(x) = \sqrt{x + [-x]} + x[x]$$

define una función par en algún subconjunto D de los reales.

23. Demostrar que:

(a) Si f y g son pares, entonces $f + g$ y fg lo son.

(b) Si f y g son impares, entonces $f + g$ es impar y fg es par.

24. Demostrar que cualquier función $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser expresada de manera única como la suma de una función par y otra impar
25. Pruebe que la función $f(x) = x^2 - 6x + 10 \quad \forall x \geq 0$ es inyectiva y determine su inversa. Rpta. $f^*(x) = 3 + \sqrt{x-1} \quad \forall x \geq 1$
26. Sean A y B subconjuntos no vacíos y propios de \mathbb{R} . Respecto a las funciones características, pruebe que:

$$\mathcal{X}_{A \cap B} = \mathcal{X}_A \cdot \mathcal{X}_B \quad , \quad \mathcal{X}_{A \Delta B} = \mathcal{X}_A + \mathcal{X}_B$$

27. Determine la función afín f , sabiendo que: $f^*(2) = 4$ y $f^*(1) + f^*(-1) = 2$.

$$28. \text{ Sea } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -\sqrt{x-2} & \text{si } 2 \leq x < 6 \\ -2x + 10 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

Determine si f es invertible o no, en caso afirmativo halle f^* .

29. Pruebe que la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 - \sqrt{x^2 + 12x + 27} & \text{si } x < -11 \\ x^2 + 6x + 6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es inversible, luego determine esta inversa.

30. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 6x - 8 & \text{si } x \leq -3 \\ x + 3 & \text{si } -3 < x < 0 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determinar si f es inyectiva. Si no lo es, restringir su dominio para que la nueva función tenga inversa y que su rango sea igual al de f .

31. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2 + \frac{3}{x-1} & \text{si } 2 \leq x < 4 \end{cases}$$

(a) Justifique analíticamente que f es inyectiva.

(b) Halle la función f^* (especificando su dominio y regla de correspondencia).

32. Sea f una función real de variable real tal que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Pruebe que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{Q}$.

33. Dar ejemplos de dos funciones no nulas $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que fg sí sea la función nula.

34. Si $X = \{1, 2, 3\}$, pruebe que el número de biyecciones que se pueden construir de X en X es seis. Encuentre dos biyecciones f, g de X en X tales que $B(X) = \{Id, f, f^2, g, fg, f^2g\}$.

35. Pruebe que $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$. ¿Es verdad que $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$? ¡Justifique su respuesta! (En este ejercicio suponga que todas las composiciones están bien definidas).

36. La función $f : X \rightarrow Y$ induce la función $F : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ definida por $F(A) = f(A)$ para todo $A \subseteq X$. Pruebe que:
- (a) f es inyectiva $\iff F$ es inyectiva.
 - (b) f es suryectiva $\iff F$ es suryectiva.
37. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Si $n(X) = n(Y)$ pruebe que:
 f es biyectiva $\iff f$ es inyectiva $\iff f$ es suryectiva.
38. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Pruebe que:
- (a) f es inyectiva $\iff \exists g : Y \rightarrow X/g \circ f = I_X$.
 - (b) f es suryectiva $\iff \exists h : Y \rightarrow X/f \circ h = I_Y$.
 - (c) f es biyectiva $\iff \exists !g : Y \rightarrow X/g \circ f = I_X$ y $f \circ g = I_Y$.
39. Dada las funciones $h : X \rightarrow Z$ y $g : Y \rightarrow Z$ pruebe que; para que exista por lo menos una función $f : X \rightarrow Y$ tal que $h = g \circ f$ es necesario y suficiente que $h(X) \subseteq g(Y)$. Pruebe además para que f sea única es necesario y suficiente que g sea inyectiva.
40. Dada las funciones $f : X \rightarrow Y$ y $h : Y \rightarrow Z$ pruebe que; para que exista por lo menos una función $g : Y \rightarrow Z$ tal que $h = g \circ f$ es necesario y suficiente que $f(x) = f(x') \implies h(x) = h(x')$. Pruebe además para que g sea única es necesario y suficiente que f sea suryectiva.
41. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Indique los valores de verdad de las siguientes proposiciones:
- (a) El rango de f es $[-1, \frac{1}{3}]$.
 - (b) f es decreciente en $(-1, 1)$.
 - (c) f es creciente en $[-1, 1]$.
- Rpta. VVV.
42. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{6-x}$. Determine la veracidad o falacidad de las siguientes proposiciones:
- (a) El dominio de f es $[0, 6]$.
 - (b) la función f es creciente en su dominio.
 - (c) El rango de f es $[\sqrt[3]{6}, 2\sqrt{2}]$.
- Rpta. VFF.

43. Dada las funciones $f = \{ (-2; 0), (-1; 3), (2; 1), (3; -2), (4; 2), (5; 0) \}$ y $g(x) = x^2 + 2$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Demuestre que la suma de los elementos del rango de $f \circ g$ es -3 .

44. Dada las funciones

$$f(x) = 4|x| - x^2, \forall x \in \langle -8, 1 \rangle \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{1-x} \forall x \in \langle -4, 0 \rangle$$

Demuestre que el rango de $g \circ f$ es el intervalo $(1, \sqrt{5})$.

45. Dada la función $f = \{(1; 0), (2; 5), (3; 6), (7; 7)\}$, demuestre que $f \circ f^* - f^* \circ f = \{(7; 7)\}$.

46. Sea f la función definida por $f(x) = \sqrt{1+x-x^2} - \sqrt{1-x-x^2}$ para todo $x \in [-a, a]$ donde a es el máximo valor posible. Indique el valor de verdad de cada uno de los siguientes proposiciones:

(a) $a^2 + a - 1 = 0$.

(b) $f(a) + f(-a) > 0$.

(c) La función f es par.

Rpta. VFF.

47. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}$ para todo $x \in [a, b]$, pruebe que el rango de f es $[\sqrt{b-a}, \sqrt{2(b-a)}]$.

48. Sea f una función definida por

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sqrt{x^2 + 4x + 20}} \quad \forall x \in [-3, 1].$$

Determine el valor de $24 \text{ máx}(f) + 14 \text{ mín}(f)$.

49. Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x}{ax^2 + b} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, donde $a > 0$ y $b > 0$. Halle el menor valor de k tal que

$$|f(x)| \leq k \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rpta. $\frac{1}{2\sqrt{ab}}$

50. Sea f la función definida por $f(x) = \frac{16}{x^2 - 6x + 13}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Verifique que esta función esta acotada.

(b) Determine el ínfimo y el supremo del rango de f .

(c) ¿Tiene máximo y/o mínimo el conjunto $Im(f)$.

(d) Conociendo el gráfico de la función cuadrática $h(x) = x^2 - 6x + 13$, bosquejar el gráfico de la función f .

Capítulo 4

Sucesiones de Números Reales

En este capítulo estudiaremos un tipo especial de funciones, aquellas que tienen como dominio al conjunto de los números naturales; tales funciones se conocen como sucesiones. Daremos también el concepto de convergencia y límite de sucesiones de números reales convencidos que es la manera más intuitiva y comprensible de introducir la idea de límite, para estudiantes que recién inician su carrera universitaria. Estudiaremos también la convergencia de una suma y de un producto de sucesiones, así como también el comportamiento de los límites frente a la relación de orden. El resultado más importante de este capítulo es que toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente, y converge al supremo del rango de la sucesión.

4.1 Definición y Ejemplos

Definición 4.1.1 Se llama *sucesión de números reales* a toda aplicación \mathcal{X} de \mathbb{N} en \mathbb{R} , es decir

$$\begin{aligned}\mathcal{X} : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \mathcal{X}(n) = x_n.\end{aligned}$$

El término x_n es llamado *término n -ésimo* de la sucesión.

Observación.- Si \mathcal{X} es una sucesión de números reales, entonces el dominio es siempre \mathbb{N} , mientras que el rango es el conjunto

$$\mathcal{R}_{\mathcal{X}} = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$$

Notación.-

Una sucesión \mathcal{X} de números reales será denotado por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ o por $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$; esto es

$$\mathcal{X} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$$

Ejemplos:

1. Si $\mathcal{X} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$, entonces $x_n = \frac{1}{n}$.
2. Si $\mathcal{Y} = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$, entonces $y_n = (-1)^n$.
3. Si $\mathcal{Z} = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (2, 4, 6, 8, \dots)$, entonces $z_n = 2n$.
4. Si $\mathcal{X} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión definida por

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \frac{1}{4}(2x_{n-1} + 3), \quad n \geq 2 \end{cases}$$

entonces sus términos son:

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{4}, x_3 = \frac{11}{8}, \dots$$

Este tipo de sucesiones son conocidas como **sucesiones definidas por recurrencia**.

5. Una sucesión cuyos valores exactos no es muy fácil de calcular es

$$\mathcal{X} = (\sqrt[n]{n})_{n \in \mathbb{N}} = (1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \dots).$$

6. La **Sucesión de Fibonacci**

Supongamos que cada pareja de conejos procrea otra pareja de conejos una vez al mes a partir de su segundo mes de vida. Si se adquiere una pareja de conejos recién nacidos en el mes 0 y nunca ninguno muere, ¿cuántas parejas de conejos habrá en el mes n ?

Sea a_n la cantidad de parejas de conejos que hay en el mes n . Entonces $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2$ (la pareja que había en el mes 1, que ahora

tiene 2 meses de vida, más sus hijos), $a_3 = 2 + 1 = 3$ (las dos parejas que había en el mes 2 más los hijos de las parejas que en el mes 3 tienen al menos 2 meses de vida, que son los conejos que había en el mes 1), $a_4 = 3 + 2 = 5$ (las 3 parejas que había el mes 3 más los hijos de las parejas que en el mes 4 tienen al menos 2 meses de vida, que son los conejos que había en el mes 2). En general, en el mes $n + 1$ la cantidad de conejos será $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ (las a_n parejas que había en el mes n más los hijos de las parejas que en el mes $n + 1$ tienen al menos 2 meses de vida, que son los conejos que había en el mes $n - 1$). Luego la sucesión (a_n) queda definido así

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

es decir

$$A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots).$$

Definición 4.1.2 Operaciones con Sucesiones.

Dadas las sucesiones de números reales $X = (x_n)$, $Y = (y_n)$ y $Z = (z_n)$ con $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y dado $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos las sucesiones

$$X + Y, \quad X \cdot Y, \quad \lambda X \quad \text{y} \quad \frac{X}{Z}$$

de la siguiente manera:

$$X + Y = (x_n + y_n) \qquad X \cdot Y = (x_n y_n)$$

$$\lambda \cdot X = (\lambda x_n) \qquad \frac{X}{Z} = \left(\frac{x_n}{z_n} \right)$$

Ejemplo. Si $X = (2n)$ y $Y = (\frac{1}{n})$, entonces:

$$X \cdot Y = (2, 2, \dots), \quad X + Y = \left(\frac{2n^2 + 1}{n} \right), \quad 5X = (10n) \quad \text{y} \quad \frac{X}{Y} = (2n^2).$$

4.2 Límite de Sucesiones

Definición 4.2.1 Sea $X = (x_n)$ una sucesión en \mathbb{R} . Se dice que el número real L es el límite de la sucesión X y lo denotamos por $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ (o $x_n \rightarrow L$) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que la distancia entre x_n y L es menor que ε siempre que $n \geq n_0$, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \iff [\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 |x_n - L| < \varepsilon].$$

Nota.- Si una sucesión $X = (x_n)$ posee límite L y éste es un número real, se dice que la sucesión es *convergente*, en caso contrario se dirá que la sucesión es *divergente*.

Ejemplos:

1. Pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

en efecto:

Sea $\varepsilon > 0$ (fijo, arbitrario).

Debemos demostrar que $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \text{si } n \geq n_0, \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$.

Por la propiedad Arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$

Ahora, si $n \geq n_0 \implies \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

Por lo tanto $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / \text{si } n \geq n_0 \implies \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$;
es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. Pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

en efecto:

Sea $\varepsilon > 0$ (fijo, arbitrario).

Debemos demostrar que $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon$.

Por la propiedad Arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \sqrt{\varepsilon}$.

Ahora si $n \geq n_0 \implies \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n_0^2} < \varepsilon$.

Por lo tanto $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / \text{si } n \geq n_0 \implies \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon$;
es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

3. Pruebe que la sucesión $X = (0, 2, 0, 2, \dots)$ no es convergente.

En efecto:

Supongamos que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$, entonces

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / \text{si } n \geq n_0 \implies |x_n - L| < \varepsilon$.

En particular si $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \text{si } n \geq n_0 \implies |x_n - L| < \frac{1}{2}$.

Ahora si $2m \geq n_0$ ($\therefore 2m + 1 \geq n_0$), implica que

$$2 = |x_{2m} - x_{2m+1}| \leq |x_{2m} - L| + |x_{2m+1} - L| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

evidentemente una contradicción. Por lo tanto esta sucesión es divergente.

Teorema 4.2.1 Sean $X = (x_n)$ una sucesión de números reales y sea $L \in \mathbb{R}$. Si existen $M > 0$ y una sucesión de números reales positivos $Y = (y_n)$ tales que:

$$|x_n - L| \leq M y_n \quad \forall n \geq n_1 \quad \text{y} \quad y_n \rightarrow 0$$

entonces $x_n \rightarrow L$.

Prueba.

Sea $\varepsilon > 0$. Debemos demostrar que $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \text{si } n \geq n_0 \implies |x_n - L| < \varepsilon$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, $\exists n_2 \in \mathbb{N} / \text{si } n \geq n_2 \implies |y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$

luego elegimos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Ahora, si $n \geq n_0$ ($\therefore n \geq n_1 \wedge n \geq n_2$), entonces

$$|x_n - L| \leq M y_n < M \left(\frac{\varepsilon}{M} \right) = \varepsilon$$

Así $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / \text{si } n \geq n_0 \implies |x_n - L| < \varepsilon$. □

Aplicaciones del Teorema

1. Pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + na} \right) = 0$ (si $a > 0$).

En efecto: Basta observar que

$$\left| \frac{1}{1 + na} - 0 \right| = \frac{1}{1 + na} < \left(\frac{1}{a} \right) \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

2. Pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0$ (si $0 < b < 1$).

En efecto: Como $0 < b < 1$, existe $a > 0$ tal que $b = \frac{1}{1+a}$.

Pero por la desigualdad de Bernoulli

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad \forall n \geq 1$$

luego

$$|b^n - 0| = b^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} \rightarrow 0$$

Por lo tanto $b^n \rightarrow 0$

3. Pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

En efecto:

- Si $c = 1$ es obvio (i o no?)
- Si $c > 1$ ($\therefore \sqrt[n]{c} > 1$), $\exists d_n > 0$ tal que $\sqrt[n]{c} = 1 + d_n$, luego $c = (1 + d_n)^n \geq 1 + nd_n$, de lo cual se tiene que $0 < d_n \leq (c-1)\frac{1}{n}$ donde $(c-1) > 0$, y como

$$|\sqrt[n]{c} - 1| = d_n \leq (c-1)\frac{1}{n}$$

se concluye que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

- Si $0 < c < 1$ ($\therefore \sqrt[n]{c} < 1$), $\exists h_n > 0$ tal que $\sqrt[n]{c} = \frac{1}{1+h_n}$, luego

$$c = \frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+nh_n} \leq \frac{1}{nh_n} \quad \left(\because 0 < h_n \leq \frac{1}{cn} \right)$$

Ahora

$$|\sqrt[n]{c} - 1| = 1 - \sqrt[n]{c} = 1 - \frac{1}{1+h_n} = \frac{h_n}{1+h_n} < h_n \leq \left(\frac{1}{c}\right) \frac{1}{n}$$

Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$

Definición 4.2.2 Una sucesión $X = (x_n)$ está acotada si su rango es un conjunto acotado. Equivalentemente

(x_n) esta acotada si y sólo si existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Proposición 4.2.2 Toda sucesión convergente es acotada

Prueba. Sea (a_n) una sucesión convergente, es decir existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \rightarrow L$. Luego para $\varepsilon = 1 > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < 1$ siempre que $n \geq n_0$. Por tanto $||a_n| - |L|| < 1$ para $n \geq n_0$. Se desprende entonces que

$$|a_n| < 1 + |L| \quad \text{para } n \geq n_0$$

Luego tomando $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |L|\}$ tenemos que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ \square

Frecuentemente se usa el contrarrecíproco lógico de la proposición precedente. Así,

si (a_n) no está acotada, entonces (a_n) no es convergente

Por ejemplo, la sucesión $(n^2 + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ no es convergente pues no está acotada. Observe también que el recíproco de esta proposición en general es falso, basta con hacer notar que la sucesión $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada y sin embargo no es convergente.

Teorema 4.2.3 Sean (a_n) y (b_n) sucesiones de números reales y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $a_n \rightarrow L$ y $b_n \rightarrow M$, se tiene que:

1. $(a_n + b_n)$ es convergente y $a_n + b_n \rightarrow L + M$.
2. (λa_n) es convergente y $\lambda a_n \rightarrow \lambda L$.
3. $(a_n b_n)$ es convergente y $a_n b_n \rightarrow LM$.
4. $(\frac{1}{b_n})$ es convergente y $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{M}$, si $M \neq 0$ y $b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Prueba.

1. Dado $\varepsilon > 0$, por la hipótesis existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} n \geq n_1 &\implies |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ n \geq n_2 &\implies |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Si $n \geq n_0$,

$$|(a_n + b_n) - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L + M$.

2. Sea $\varepsilon > 0$. Si $\lambda = 0$ el resultado es trivial. Supongamos $\lambda \neq 0$. Como $a_n \rightarrow L$, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ para $n \geq n_0$; luego $|\lambda a_n - \lambda L| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Así $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda a_n = \lambda L$.

3. Sea $\varepsilon > 0$. De la convergencia de (a_n) y (b_n) tenemos que:

$$\begin{aligned} \exists C > 0 : |b_n| &\leq C \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \exists n_1 \in \mathbb{N} / n \geq n_1 &\implies |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2C} \\ \exists n_2 \in \mathbb{N} / n \geq n_2 &\implies |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} \end{aligned}$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Si $n \geq n_0$, entonces

$$\begin{aligned} |a_n b_n - LM| &\leq |a_n b_n - L b_n| + |L b_n - LM| \\ &\leq |a_n - L| |b_n| + |L| |b_n - M| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2C} \cdot C + |L| \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = LM$.

4. Sea $\varepsilon > 0$. En primer lugar observamos que

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{b_n - M}{b_n M} \right|$$

Como $b_n \rightarrow M$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_1 \implies |b_n - M| < \frac{1}{2} |M|$$

de ésto, no es difícil concluir que

$$|b_n| > \frac{1}{2} |M| \quad \left(\because \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|M|} \right) \quad \text{para } n \geq n_1.$$

Por otro lado, para $\frac{\varepsilon M^2}{2} > 0$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_2 \implies |b_n - M| < \frac{\varepsilon M^2}{2}.$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Si $n \geq n_0$, entonces

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|b_n - M|}{|b_n| |M|} < \frac{2}{|M|} \frac{1}{|M|} |b_n - M| < \frac{2}{M^2} \frac{\varepsilon M^2}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{M}$$

□

Como una consecuencia inmediata de este teorema tenemos que

$$a_n - b_n \longrightarrow L - M \quad \text{y} \quad \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{L}{M}$$

siempre que las sucesiones involucradas sean convergentes y tanto b_n como M sean siempre no nulos. Así mismo, el ítem 1. y el ítem 3. de este teorema, se cumplen para un número finito de sucesiones convergentes. Ahora, veamos algunos

Ejemplos:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n^2} + \frac{3}{n} \right) = 0 + 0 = 0.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{4}{n}}{2 + \frac{3}{n^2}} \right) = \frac{0}{2} = 0.$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 7n - 2}{2n^2 - 3n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5 + \frac{7}{n} - \frac{2}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}} \right) = \frac{5}{2}.$
4. Sea b un número real tal que $0 < b < 1$. Pruebe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^n) = \frac{1}{1 - b}$$

Solución. Si $S_n = 1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^n$ entonces

$$S_n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b} = \frac{1}{1 - b} - b^n \left(\frac{b}{1 - b} \right)$$

y como $b^n \rightarrow 0$ implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - b}.$

5. Hallar el área de la región determinada por las gráficas de: $y = x^2$, $x = b$ ($b > 0$) y $y = 0$ (el eje X).

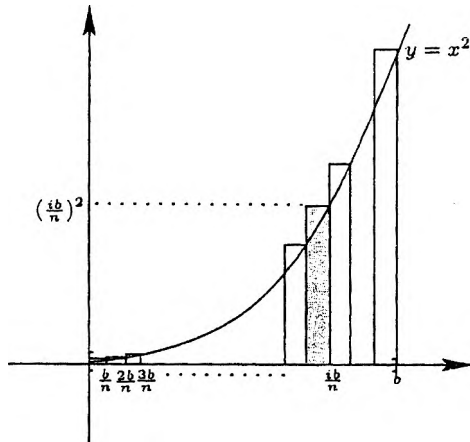
Solución.

Subdividimos el intervalo $[0, b]$ en n subintervalos congruentes, se construyen así n rectángulos cuyas bases miden $\frac{b}{n}$ unidades y sus alturas

$\left(\frac{ib}{n} \right)^2$ unidades para $1 \leq i \leq n$. El área del i -ésimo rectángulo es

$\frac{b}{n} \left(\frac{ib}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} i^2$ y la suma A_n de las áreas de los n rectángulos viene dado por (vea la figura adjunta)

$$A_n = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$



Ahora, la intuición geométrica nos hace ver que el área A de esta región es $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, luego

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{3}. \end{aligned}$$

Proposición 4.2.4 Dadas las sucesiones reales (a_n) , (b_n) y (c_n) , se cumple que:

1. Si $a_n \rightarrow L$, entonces $|a_n| \rightarrow |L|$.
2. Si $a_n \rightarrow L$ y $L < M$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N} / a_n < M \forall n \geq n_0$.
3. Si $a_n \leq b_n \forall n \geq n_0$, $a_n \rightarrow L$ y $b_n \rightarrow M$, entonces $L \leq M$.

4. Si $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq n_0$, $a_n \rightarrow L$ y $c_n \rightarrow L$, entonces $b_n \rightarrow L$.

(El ítem 4 es conocido como el Lema de Cauchy)

Prueba.

1. Basta ver que $||a_n| - |L|| \leq |a_n - L|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Como $a_n \rightarrow L$, para $\varepsilon = M - L > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \implies |a_n - L| < M - L$, de esto concluimos que

$$a_n < M \quad \forall n \geq n_0.$$

3. Sea $\varepsilon > 0$. Como $a_n \rightarrow L$ y $b_n \rightarrow M$, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

$$n \geq n_1 \implies |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y}$$

$$n \geq n_2 \implies |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$, tenemos que

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < a_{n_3} \leq b_{n_3} < M + \frac{\varepsilon}{2}$$

lo que implica que $L < M + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Así

$$L \leq M.$$

4. Sea $\varepsilon > 0$. Como $a_n \rightarrow L$ y $c_n \rightarrow L$, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

$$n \geq n_1 \implies L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad \text{y}$$

$$n \geq n_2 \implies L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon.$$

Sea $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Ahora si $n \geq n_3$ tenemos que

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon.$$

Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$. □

Hasta ahora, todos los problemas de convergencia de sucesiones que hemos analizado, han tenido una respuesta intuitivamente clara, sin embargo esto no siempre es así, por ejemplo, ¿qué podemos intuir de la sucesión cuyo término n -ésimo es $a_n = 2^n/n!$? ..., dando valores a n observamos que la sucesión se acerca a cero, pero ¿cómo puedo justificar formalmente esto?. La respuesta nos da la siguiente

Proposición 4.2.5 Criterio de la Razón

Sea (a_n) una sucesión de términos no nulos tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L.$$

Si $0 \leq L < 1$, entonces $a_n \rightarrow 0$.

Prueba. Sea $M \in \mathbb{R}$ (fijo) tal que $L < M < 1$. Por el ítem 2 de la proposición anterior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < M \quad \forall n \geq N.$$

Por tanto

$$|a_{n+1}| < M|a_n| \quad \forall n \geq N,$$

luego

$$\begin{aligned} |a_{N+1}| &< M|a_N| \\ |a_{N+2}| &< M|a_{N+1}| < M^2|a_N| \\ |a_{N+3}| &< M|a_{N+2}| < M^3|a_N| \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\therefore |a_{N+n}| < M^n|a_N| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $0 < M < 1$ podemos asegurar que $M^n \rightarrow 0$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n|a_N| = 0$ y por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{N+n} = 0$. De donde se concluye que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. \square

Ejemplo. Sea $a_n = \frac{k^n}{n!}$ con $k \in \mathbb{R}$ fijo. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^{n+1}/(n+1)!}{k^n/n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n+1} = 0$$

concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^n}{n!} = 0$$

4.3 Sucesiones Monótonas

Definición 4.3.1 Sea $X = (x_n)$ una sucesión de números reales. Se dice que:

1. X es creciente si $x_n < x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. X es decreciente si $x_n > x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
3. X es no-creciente si $x_n \geq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
4. X es no-decreciente si $x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
5. X es monótona si se cumple alguna de las condiciones anteriores.

Ejemplos.-

- a) Las sucesiones $X = \left(\frac{1}{n}\right)$ y $Y = (b^n)$ para $0 < b < 1$ son decrecientes.
- b) Las sucesiones $X = (2n)$ y $Y = (c^n)$ para $c > 1$ son crecientes.
- c) Las sucesiones $X = ((-1)^n)$ y $Y = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ no son monótonas.

Teorema 4.3.1 Si (x_n) es una sucesión monótona creciente o no decreciente y acotada superiormente (es decir $\exists M \in \mathbb{R}: x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq M$), entonces (x_n) es convergente; más aún

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n / n \in \mathbb{N}\}.$$

Prueba. Sea $\alpha = \sup\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ y sea $\varepsilon > 0$. Por la caracterización del supremo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha - \varepsilon < x_{n_0} \leq \alpha.$$

Ahora, $n \geq n_0$ implica que

$$\alpha - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon.$$

Por lo tanto

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \implies \alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$$

Así $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ □

Corolario 4.3.1 Si (x_n) es una sucesión monótona decreciente o no creciente y acotada inferiormente (es decir $\exists m \in \mathbb{R}: x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq m$), entonces (x_n) es convergente; más aún

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n / n \in \mathbb{N}\}.$$

Prueba.- Ejercicio para el lector.

Ejemplos de Aplicación

Ejemplo 1.- Sea $X = (x_n)$ la sucesión definida de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \sqrt{2x_{n-1}} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Afirmación 1

$$1 \leq x_n < x_{n+1} < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En efecto: Si $n = 1$, $1 = x_1 < x_2 = \sqrt{2} < 2$. Supongamos que las desigualdades se cumplen para $n = h$, es decir $1 \leq x_h < x_{h+1} < 2$ (hipótesis inductiva). Veamos que la afirmación se cumple para $n = h + 1$. En efecto, de la hipótesis inductiva se tiene que $1 \leq \sqrt{2x_h} < \sqrt{2x_{h+1}} < 2$, es decir $1 \leq x_{h+1} < x_{h+2} < 2$.

Afirmación 2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2.$$

Como (x_n) es ~~creciente~~ y acotada superiormente, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$ para algún $L \in \mathbb{R}$. De $1 \leq x_n$ y $x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$, tomando límite tenemos que $1 \leq L$ y $L = \sqrt{2L}$, de donde concluimos que $L = 2$.

Ejemplo 2.- Sea $X = (x_n)$ la sucesión definida de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \frac{1}{4}(2x_{n-1} + 3) \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Afirmación 1

$$x_n < x_{n+1} < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En efecto, si $n = 1$, $1 = x_1 < x_2 = \frac{5}{4} < 2$. Supongamos ahora que la afirmación se cumple para $n = h$, es decir, $x_h < x_{h+1} < 2$ (hipótesis inductiva). Veamos que la afirmación se cumple para $n = h + 1$. En efecto, de la hipótesis inductiva se tiene que $\frac{1}{4}(2x_h + 3) < \frac{1}{4}(2x_{h+1} + 3) < 2$, es decir $x_{h+1} < x_{h+2} < 2$.

Afirmación 2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{3}{2}.$$

Como (x_n) es no decreciente y acotada superiormente, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$ para algún $L \in \mathbb{R}$. Como $x_n = \frac{1}{4}(2x_{n-1} + 3)$, tomando límite tenemos que $L = \frac{1}{4}(2L + 3)$, de donde concluimos que $L = \frac{3}{2}$.

Ejemplo 3.- El número e de Euler

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la sucesión $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la siguiente manera:

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Claramente, (S_n) es una sucesión creciente. Además tenemos que

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots + \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3. \end{aligned}$$

Es decir, $S_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego estamos ante una sucesión creciente y acotada superiormente y aplicando el teorema precedente esta sucesión es convergente y su límite es por definición el número de Euler e , es decir

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Notamos además que

$$2,5 < e < 3$$

El número e tiene un destacado rol en la matemática, de hecho éste y el número π constituyen los dos mas famosos números trascendentes, es decir, no son raíces de ninguna ecuación polinomial del siguiente tipo

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad \text{con } a_i \in \mathbb{Q}.$$

Por otro lado no es difícil probar que

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

vea la lista de ejercicios propuestos, luego si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es cualquier función estrictamente creciente y a es cualquier número real positivo, podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{f(n)} \right)^{f(n)} = e^a.$$

4.4 Ejercicios Resueltos

1. Halle la suma de las cifras del centésimo término de la siguiente sucesión

$$X = (6, 13, 26, 45, 70, \dots)$$

Solución:

Observe que

$$t_n = 5 + (1 + 7 + 13 + \dots + a_n)$$

donde $a_n = 6n - 5$. Por tanto $a_{100} = 595$ y

$$t_{100} = 5 + (1 + 7 + 13 + \dots + 595) = 5 + \left(\frac{1 + 595}{2} \right) 100 = 29805$$

Así la suma de las cifras de t_{100} es 24. □

2. Halle el valor de S , si

$$S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{3}{25} + \frac{7}{125} + \frac{15}{625} + \frac{31}{3125} + \dots$$

Solución:

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{5} + \frac{3}{25} + \frac{7}{125} + \frac{15}{625} + \frac{31}{3125} + \dots \\ &= 1 + \frac{2-1}{5} + \frac{2^2-1}{5^2} + \frac{2^3-1}{5^3} + \frac{2^4-1}{5^4} + \frac{2^5-1}{5^5} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \left(\frac{2}{5} \right)^3 + \dots \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} - \frac{1/5}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{3} - \frac{1}{4} = \frac{17}{12} \end{aligned}$$

3. Halle el número de términos de una sucesión aritmética finita, sabiendo que su primer término es 3 y el número de términos entre 23 y 59 es el doble de los comprendidos entre 3 y 23 (59 último término)

Solución:

Tenemos que la sucesión aritmética finita empieza en 3 y termina en 59, además se cumple que:

- Entre 3 y 23 hay k términos
- Entre 23 y 59 hay $2k$ términos,

luego

$$23 = 3 + [(k + 2) - 1]r \quad \wedge \quad 59 = 23 + [(2k + 2) - 1]r$$

de donde

$$r = \frac{20}{k + 1} = \frac{36}{2k + 1},$$

lo que implica que $k = 4$ y $r = 5$. Por lo tanto el número de términos de esta sucesión es $3(k + 1) = 15$. \square

4. Sea (x_n) una sucesión en la que se conocen los cuatro primeros términos :

$$1, \quad \frac{9}{10}, \quad \frac{13}{15}, \quad \frac{17}{20}, \dots$$

Pruebe que:

- (a) $a_n \in [4/5, 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) (a_n) es estrictamente decreciente.
- (c) ¿A partir de qué término se cumple que $|a_n - 4/5| < 0,01$?

Solución: Observe que $a_n = \frac{4n + 1}{5n}$.

- (a) Como $\frac{4}{5} < \frac{4 + \frac{1}{n}}{5} \leq \frac{4 + 1}{5} = 1$ implica que $\frac{4}{5} < a_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Basta con observar las siguientes equivalencias:

$$a_{n+1} < a_n \equiv \frac{4n + 5}{5n + 5} < \frac{4n + 1}{5n} \equiv 20n^2 + 25n < 20n^2 + 25n + 5 \equiv 0 < 5.$$

(c) Como

$$\left| a_n - \frac{4}{5} \right| = a_n - \frac{4}{5} = \frac{4n+1}{5n} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5n}$$

se tiene que

$$\left| a_n - \frac{4}{5} \right| < \frac{1}{100} \iff \frac{1}{5n} < \frac{1}{100} \iff 20 < n.$$

Por lo tanto la desigualdad se cumple a partir del término 21. \square

5. Pruebe que la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$$

es convergente, luego calcular su límite.

Solución: Note que

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2} \text{ y} \\ x_n &= \sqrt{2 + x_{n-1}} \quad \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

Afirmación 1.- (x_n) es creciente:

Como $0 \leq \sqrt{2} \implies \sqrt{2} \leq \sqrt{2 + \sqrt{2}} \implies x_1 \leq x_2$.

Supongamos que $x_h \leq x_{h+1}$ (Hipótesis Inductiva), entonces

$$x_{h+1} = \sqrt{2 + x_h} \leq \sqrt{2 + x_{h+1}} = x_{h+2}.$$

Por lo tanto $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Afirmación 2.- (x_n) esta acotada:

Como $\sqrt{2} \leq 2 \implies x_1 \leq 2$. Supongamos ahora que $x_h \leq 2$ (Hipótesis Inductiva), entonces

$$x_h = \sqrt{2 + x_h} \leq \sqrt{4} = 2.$$

Por lo tanto $x_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Ahora aplicando el teorema 4.3.1 concluimos que (x_n) es convergente.

Por otro lado de $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$, tomando límite cuando n tiende al infinito tenemos que $L = \sqrt{2 + L}$, entonces $L = 2$ ó $L = 1$, y como $1 < x_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ concluimos que $1 \leq L \leq 2$. Así $L = 2$. \square

6. Pruebe que no existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi)$.

Solución:

Si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi) = L$, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existe $n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \implies |\cos n\pi - L| < \frac{1}{2}$.

Por otro lado como $2n_0 + 1 \geq n_0 \wedge 2n_0 \geq n_0$ tenemos que

$$\begin{aligned} 2 &= |1 - (-1)| = |\cos 2n_0\pi - \cos(2n_0 + 1)\pi| \\ &\leq |\cos 2n_0\pi - L| + |\cos(2n_0 + 1)\pi - L| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

es decir, $2 < 1$ (¡evidentemente esto es un absurdo!), esto prueba que no existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi)$. \square

7. Si P_n es el perímetro de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r , halle $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$.

Solución:

Observe que

$$P_n = n2r \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) = 2\pi r \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\left(\frac{\pi}{n} \right)}$$

y como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\left(\frac{\pi}{n} \right)} \right\} = 1$, concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 2\pi r$ (longitud de la circunferencia de radio r). \square

8. Sea $X = (x_n)$ la sucesión definida por

$$x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!}$$

Muestre que la sucesión X es monótona y acotada.

Solución:

Note que

$$x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{2k} \right),$$

luego $x_{n+1} = x_n \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)$ ó bien $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{2n+2} < 1$, lo que implica que

$$x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Así

$$0 < \dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_2 < x_1 = \frac{1}{2}.$$

es decir la sucesión (x_n) es monótona decreciente y acotada. \square

9. Sea (x_n) la sucesión definida por $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Demostrar que las sucesiones (x_n) y $(\sqrt{n} x_n)$ son ambas convergentes.

Solución:

Como

$$x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad (4.1)$$

concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. De (4.1), también tenemos que

$$\sqrt{n} x_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

Por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} x_n = 1$. \square

10. Sea (x_n) la sucesión definida por $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ con $0 < a < b$. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$.

Solución:

Como

$$z_n = \sqrt[n]{b^n \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1 \right]} = b \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}$$

y teniendo en cuenta que $\frac{a}{b} < 1$, concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = b$$

4.5 Ejercicios Propuestos

1. Usando la definición de límite, pruebe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 5}{3n^2 + 4} \right) = \frac{2}{3}$$

2. Calcular el valor de L , si $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \right)$

3. Sea (x_n) una sucesión de números reales.

(a) Si $x_n \rightarrow L$ y $x_n \geq 0$, pruebe que $L \geq 0$ y $\sqrt{x_n} \rightarrow \sqrt{L}$.

(b) Si $x_n \rightarrow L$, pruebe que $x_n^2 \rightarrow L^2$.

4. (a) ¿La sucesión $(\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2})$ es convergente? ¡Justifique su respuesta!

(b) Si $X = (x_n)$ es una sucesión convergente tal que $x_n \rightarrow 0$, pruebe que la sucesión $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ es divergente.

5. Sea $X = (x_n)$ la sucesión definida por

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{6} \\ x_n &= \sqrt{6 + x_{n-1}} \quad \text{para todo } n \geq 2 \end{aligned}$$

(a) Muestre que la sucesión X es creciente y acotada superiormente.

(b) Halle $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

6. Sea (x_n) una sucesión tal que:

$$x_1 = 2, \quad x_{23} = 156 \quad \text{y} \quad x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} \quad \text{para todo } n \geq 3.$$

Determine el lugar que ocupa el término 702.

7. Sea (x_n) una sucesión definida por

$$x_1 = m \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad x_n = x_{n-1} + 2(n-1) \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

Determine el valor de $\sqrt{x_m}$.

8. Usando la definición demuestre que:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+5} = \frac{3}{2}$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2}$$

9. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$. Con un contraejemplo demuestre que la convergencia de la sucesión $(|x_n|)$ no implica la convergencia de (x_n) .

10. Dadas las sucesiones (a_n) y (b_n) tales que

$$a_n < 0 < b_n \quad \text{y} \quad (b_n - a_n) \rightarrow 0.$$

¿Qué podemos afirmar sobre la convergencia de estas sucesiones?

11. Encontrar dos parejas de sucesiones (x_n) , (y_n) divergentes tales que su producto sí sea convergente.
12. Sean (x_n) y (y_n) dos sucesiones de números reales. Si la sucesión (x_n) converge a un número no nulo y $(x_n y_n)$ también converge, pruebe que la sucesión (y_n) es convergente.
13. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ y $L < 0$, pruebe que existe un número natural n_0 tal que $x_n < 0$ para todo $n \geq n_0$.
14. Si $0 < b < 1$, demuestre que:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^{1/n} = 1$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} = 0$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} (nb^n) = 0$$

15. Sean $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n} \quad \forall n \geq 1$. Pruebe que la sucesión es convergente y determine su límite.
16. Pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
17. Calcular los siguientes límites:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} \right)$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n} \right)$$

18. (x_n) es una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
19. Sea (x_n) una sucesión de números reales positivos. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$, pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = L$.

20. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$, pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right) = L$.

21. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ donde $x_n > 0$, pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = L$.

22. Sea b un número real con $b > 1$. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{2^n} \qquad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b^n} \qquad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$$

23. Sea (x_n) la sucesión definida así $x_1 > 1$ (fijo, arbitrario) y

$$x_n = 2 - \frac{1}{x_{n-1}} \quad \text{para todo } n \geq 2.$$

Demostrar que (x_n) es convergente, luego encontrar su límite.

24. Sea (x_n) la sucesión definida por

$$x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que esta sucesión es convergente.

25. Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

26. En cada caso, establecer la convergencia de las sucesión (x_n) y encontrar los límites respectivos, si:

$$(a) x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (c) x_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$(b) x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \qquad (d) x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

27. Sea (x_n) una sucesión de términos no nulos. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n x_n$ existe, pruebe que (x_n) también es convergente.

28. Sean $X = (x_n)$ y $Y = (y_n)$ sucesiones de números reales tales que

$$x_n = 2n^2 + 1 \text{ y } Y = (0, 3, 10, 21, 36, 55, 78, \dots)$$

Determine $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{y_n + 2x_n}{2y_n + x_n} \right]$.

29. Los *números de Fibonacci*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... son definidos recursivamente por la fórmula $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, con $x_1 = x_2 = 1$. Pruebe que x_n y x_{n+1} son primos entre sí. Pruebe además que $x_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$, donde a y b son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$.

30. Sea (a_n) la sucesión de Fibonacci. Probar que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

31. Sea (a_n) la sucesión definida recursivamente por

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2^n, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = 2^n + 3^n$.

32. Sea (a_n) la sucesión definida recursivamente por

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2na_n + 2^{n+1}n!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = 2^n n!$.

33. Sea (a_n) la sucesión definida recursivamente por

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + n(3n + 1), \quad \text{si } n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^2(n - 1)$.

34. Dada la sucesión (s_n) definida por

$$s_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{n^2 + 2n}$$

Muestre que (s_n) es convergente y converge a $\frac{3}{4}$.

35. Para $a \in \mathbb{R}$ fijo, muestre que existe el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{a}{n}} - 1 \right)$$

36. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y (b_n) es acotada, pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
37. Si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente, pruebe que $n \leq f(n)$.
38. Sea (a_n) una sucesión de números reales. Probar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{f(n)} = L$, para cualquier $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ aplicación estrictamente creciente.
39. Usar el resultado de la pregunta anterior, para probar que las sucesiones

$$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left((-1)^n + \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{y} \quad (\sin(n\pi))_{n \in \mathbb{N}}$$

no son convergentes.

40. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $I_n = \left[0, \frac{1}{n} \right]$, $J_n = \left\langle 0, \frac{1}{n} \right\rangle$, $K_n = \langle n, +\infty \rangle$ y $x > 0$. Pruebe que:

$$(a) \quad x \notin \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n.$$

$$(b) \quad \bigcap_{n=1}^{+\infty} J_n = \phi.$$

$$(c) \quad \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n = \phi.$$

Capítulo 5

Límites de funciones

5.1 El Concepto de Límite

Definición 5.1.1 *Punto de acumulación*

Sea D un subconjunto no vacío de los números reales. Un punto $a \in \mathbb{R}$ se llama punto de acumulación "p.a." del conjunto D si cada vecindad de a de radio δ ($\delta > 0$)

$$\mathcal{V}_\delta(a) = \langle a - \delta, a + \delta \rangle = \{x \in \mathbb{R} / a - \delta < x < a + \delta\}$$

contiene por lo menos un punto del conjunto D diferente de a , es decir,

$$a \in \mathbb{R} \text{ es "p.a." de } D \iff (\mathcal{V}_\delta(a) - \{a\}) \cap D \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.- Si $D = \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 0, 1 \rangle$, entonces 0 es un punto de acumulación del conjunto D .

Ejemplo 2.- Si $D = \langle 1, 3 \rangle$, cualquier punto del intervalo $[1, 3]$ es punto de acumulación del conjunto D .

Ejemplo 3.- Si $D = [0, 1] \cup \{2\}$, el punto 2 no es un punto de acumulación de este conjunto (¡grafique!). En este caso se dice que 2 es un *punto aislado* del conjunto D .

Ejemplo 4.- Si $D = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$, entonces 0 es un punto de acumulación del conjunto D .

En efecto: si $\delta > 0$, por la propiedad Arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\delta} < n_0$, luego $\frac{1}{n_0} < \delta$. Así, $\frac{1}{n_0} \in (\mathcal{V}_\delta(0) - \{0\}) \cap D$, es decir

$$(\mathcal{V}_\delta(0) - \{0\}) \cap D \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$$

lo que significa que 0 es un punto de acumulación del conjunto D .

Definición 5.1.2 Límite de una función

Dada la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ y a un punto de acumulación del dominio D de f . Se dice que L es el límite de la función f en el punto a , y se escribe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta$, se tiene que $|f(x) - L| < \varepsilon$; es decir

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 / \\ x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \end{array} \right]$$

Ilustramos esta definición en el siguiente gráfico:

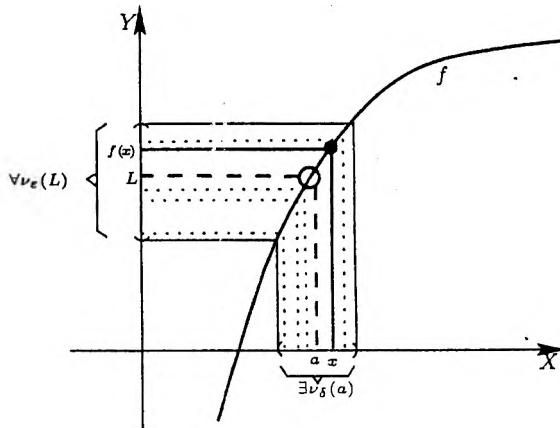


Figura 5.1: Definición de límite

En el lenguaje de la teoría de conjuntos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f\left((\mathcal{V}_\delta(a) - \{a\}) \cap D\right) \subseteq \mathcal{V}_\varepsilon(L)$$

Ejemplos:

1. Pruebe que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 7$.

En efecto:

Sea $\varepsilon > 0$ (fijo, arbitrario). Debemos demostrar que $\exists \delta > 0 / x \in D_f \wedge 0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$.

Observe que si $x \neq 2$, $f(x) = \frac{(3x+1)(x-2)}{x-2} = 3x+1$.

Luego

$$|f(x) - 7| = |(3x+1) - 7| = 3|x-2|.$$

Por lo tanto elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Ahora, si $0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - 7| = 3|x - 2| < 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$
es decir

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 7.$$

2. Pruebe que $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$.

En efecto:

Sea $\varepsilon > 0$ (fijo, arbitrario). Debemos demostrar que

$\exists \delta > 0 / x \neq -1 \wedge 0 < |x - (-1)| < \delta \implies |f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon$.

Observe que si $x \neq -1$:

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2|x+1|} |x-1| \quad y$$

$$|x - 1| < 1 \implies 0 < x < 2 \implies 2 < 2|x+1| \implies \frac{1}{2|x+1|} < \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, elegimos $\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$ ($\therefore \delta \leq 1$ y $\delta \leq 2\varepsilon$)

Ahora, si $x \neq -1$ y $0 < |x - (-1)| < \delta \implies$

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2|x+1|} |x-1| < \frac{1}{2} |x-1| < \frac{1}{2}(2\varepsilon) = \varepsilon$$

es decir

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

3. Pruebe que $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$ (si $a > 0$).

En efecto:

Sea $\varepsilon > 0$ (fijo, arbitrario). Debemos demostrar que

$$\exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \sqrt[3]{a}| < \varepsilon.$$

Observe que si $x > 0$:

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}| = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xa} + \sqrt[3]{a^2}} \cdot |x - a| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} |x - a|$$

Por lo tanto, elegimos $\delta = \min\{a, \sqrt[3]{a^2}\varepsilon\}$ ($\therefore \delta \leq a$ y $\delta \leq \sqrt[3]{a^2}\varepsilon$)

Ahora, si $0 < |x - a| < \delta \implies$

$$|f(x) - \sqrt[3]{a}| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} |x - a| < \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} (\sqrt[3]{a^2}\varepsilon) = \varepsilon.$$

es decir

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}.$$

(Note que si $\delta \leq a$ y $0 < |x - a| < \delta$ entonces $0 < x < a + \delta$)

4. Pruebe que $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2x - 1}{x - 2} = -4$

En efecto:

Sea $\varepsilon > 0$ (fijo, arbitrario). Debemos demostrar que

$$\exists \delta > 0 / x \neq 2 \wedge 0 < |x - \frac{3}{2}| < \delta \implies |f(x) + 4| < \varepsilon.$$

Observe que si $x \neq 2$:

$$|f(x) + 4| = \left| \frac{2x - 1}{x - 2} + 4 \right| = \frac{6}{|x - 2|} \left| x - \frac{3}{2} \right| \quad y$$

$$\left| x - \frac{3}{2} \right| < \frac{1}{4} \implies -\frac{3}{4} < x - 2 < -\frac{1}{4} \implies \frac{6}{|x - 2|} < 24.$$

Por lo tanto, elegimos $\delta = \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{24}\right\}$

Ahora, si $x \neq 2 \wedge 0 < |x - \frac{3}{2}| < \delta \implies$

$$|f(x) + 4| = \frac{6}{|x - 2|} \left| x - \frac{3}{2} \right| < 24 \left| x - \frac{3}{2} \right| < 24 \left(\frac{\varepsilon}{24} \right) = \varepsilon.$$

es decir

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2x - 1}{x - 2} = -4.$$

5. Pruebe que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ ($a \neq 0$)

En efecto:

Sea $\varepsilon > 0$ (fijo, arbitrario). Debemos demostrar que
 $\exists \delta > 0 / x \neq 0 \wedge 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \frac{1}{a}| < \varepsilon$.

Observe que si $x \neq 0$:

$$\left| f(x) - \frac{1}{a} \right| = \frac{1}{|a||x|} |x - a| \quad y$$

$$|x - a| < \frac{|a|}{2} \implies -\frac{|a|}{2} < x - |a| < \frac{|a|}{2} \implies \frac{1}{|x|} < \frac{2}{|a|}$$

Por lo tanto, elegimos $\delta = \min \left\{ \frac{|a|}{2}, \frac{a^2 \varepsilon}{2} \right\}$

Ahora, si $x \neq 0 \wedge 0 < |x - a| < \delta \implies$

$$\left| f(x) - \frac{1}{a} \right| = \frac{1}{|a||x|} |x - a| < \frac{1}{|a|} \frac{2}{|a|} |x - a| < \frac{2}{a^2} \left(\frac{a^2 \varepsilon}{2} \right) = \varepsilon.$$

es decir

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}.$$

Por otro lado, al observar el siguiente gráfico

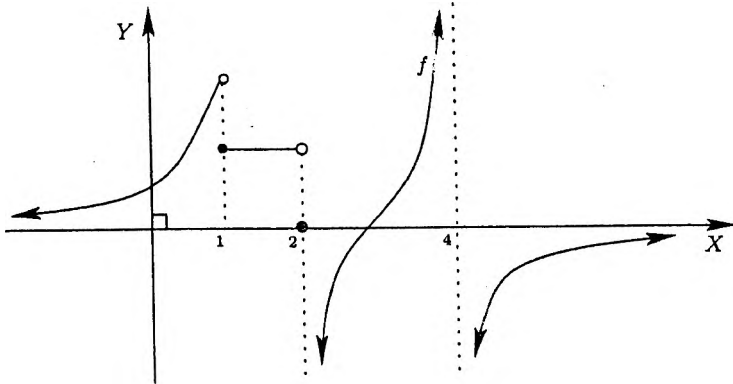


Figura 5.2: Límites laterales

podemos afirmar intuitivamente que:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ y } \nexists \lim_{x \rightarrow 4} f(x),$$

sin embargo es posible analizar el comportamiento de esta función cuando:

- x tiende a 1 por la izquierda.
- x tiende a 1 por la derecha.
- x tiende a 2 por la izquierda.
- x tiende a 2 por la derecha.
- x tiende a 4 por la izquierda.
- x tiende a 4 por la derecha.

Los tres primeros comportamientos serán estudiados ahora (los otros tres serán vistos en la sección 5.3). El estudio de este tipo de límites lleva por nombre los **límites laterales**.

Definición 5.1.3 Sean $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $L \in \mathbb{R}$ y c un punto de acumulación del dominio D de f . Se dice que L es el límite de la función f cuando x tiende a c por la izquierda, lo que denotamos $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $x \in D \cap \langle c - \delta, c \rangle$. Es decir

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \iff \left[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 / \right. \\ \left. x \in D \wedge c - \delta < x < c \implies |f(x) - L| < \varepsilon \right]$$

Definición 5.1.4 Sean $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $L \in \mathbb{R}$ y c un punto de acumulación del dominio D de f . Se dice que L es el límite de la función f cuando x tiende al punto c por la derecha, lo que denotamos $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $x \in D \cap \langle c, c + \delta \rangle$. Es decir

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L \iff \left[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 / \right. \\ \left. x \in D \wedge c < x < c + \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \right]$$

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x > 0 \\ 3 & , \quad x = 0 \\ -2x - 1 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Pruebe que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.

Solución.- Sea $\varepsilon > 0$. Debemos demostrar que

$$\exists \delta > 0 / -\delta < x < 0 \implies |f(x) + 1| < \varepsilon.$$

En efecto: si $x < 0$, entonces $|f(x) + 1| = |(-2x - 1) + 1| = 2|x| = -2x$.

Luego elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora si $-\delta < x < 0$ ($\therefore 0 < -x < \delta$) $\implies |f(x) + 1| = -2x < 2\delta = \varepsilon$, es decir

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1.$$

De manera análoga el lector debe verificar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. □

En este ejemplo observamos que ambos límites laterales existen y son diferentes. También es posible que ninguno de estos límites laterales exista, aunque la función esté definida a la derecha y a la izquierda del punto donde se están tomando los límites. Asimismo, uno de ellos puede existir sin que el otro exista. Precisamente en el siguiente resultado se relaciona la noción de límite de una función con la noción de los límites laterales.

Proposición 5.1.1 Sean $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $L \in \mathbb{R}$ y c un punto de acumulación del dominio D de f . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ si y sólo si } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

Prueba .- Para la prueba de este resultado, vea la lista de ejercicios propuestos al final de este capítulo

5.2 Propiedades del Límite

Teorema 5.2.1 Sean $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y a punto de acumulación del dominio común D . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, entonces

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha L + \beta M$.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = LM$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{L}{M}$ (si $M \neq 0$).

Prueba.

- (i) Sea $\varepsilon > 0$ (fijo, arbitrario). Debemos demostrar que $\exists \delta > 0 / x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta \implies |(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha L + \beta M)| < \varepsilon$.

En efecto:

por la hipótesis, existen $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tales que

$$x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)}$$

$$x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)}$$

Por lo tanto, elegimos $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$

Ahora, si $x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta \implies$

$$\begin{aligned} |(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha L + \beta M)| &\leq |\alpha| |f(x) - L| + |\beta| |g(x) - M| \\ &< |\alpha| \frac{\varepsilon}{2(|\alpha| + 1)} + |\beta| \frac{\varepsilon}{2(|\beta| + 1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha L + \beta M.$$

- (ii) Sea $\varepsilon > 0$ (fijo, arbitrario). Debemos demostrar que $\exists \delta > 0 / x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta \implies |(fg)(x) - (LM)| < \varepsilon$.
Observemos primero que

$$|(fg)(x) - (LM)| \leq |g(x)| |f(x) - L| + |L| |g(x) - M|$$

y como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, existen $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tales que:

$$x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2(|L| + 1)} \quad y$$

$$x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - M| < 1.$$

De la última proposición se concluye que

$$|g(x)| < (|M| + 1) \quad \forall x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Por otro lado, como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta_3 \implies |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M| + 1)}.$$

Por lo tanto, elegimos $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$

Ahora, si $x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta \implies$

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - LM| &\leq |g(x)||f(x) - L| + |L||g(x) - M| \\ &< (|M| + 1) \frac{\varepsilon}{2(|M| + 1)} + |L| \frac{\varepsilon}{2(|L| + 1)} < \varepsilon, \end{aligned}$$

es decir

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = LM.$$

(iii) Como $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)}$, basta demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

y aplicar el ítem (ii) (ya demostrado) del presente teorema.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ (fijo, arbitrario). Debemos demostrar que

$$\exists \delta > 0 / x \in D_g \wedge 0 < |x - a| < \delta \implies \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \varepsilon.$$

Observe que

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \frac{1}{|M|} \frac{1}{|g(x)|} |g(x) - M|$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0$, para $\frac{|M|}{2} > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_g \wedge 0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - M| < \frac{|M|}{2}$$

($\therefore 0 < \frac{|M|}{2} < |g(x)| < \frac{3|M|}{2}$), de donde se concluye que

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} \text{ siempre que } x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Por otro lado, considerando $\frac{\varepsilon M^2}{2} > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - M| < \frac{M^2 \varepsilon}{2}.$$

Luego elegimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Ahora, si $x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta \implies$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| &= \frac{1}{|M|} \frac{1}{|g(x)|} |g(x) - M| \\ &< \frac{2}{M^2} |g(x) - M| < \frac{2}{M^2} \left(\frac{M^2 \varepsilon}{2} \right) = \varepsilon, \end{aligned}$$

es decir

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M} \quad \square$$

El siguiente resultado es parte de la demostración del ítem (ii) del teorema precedente, y nos dice que toda función que posee límite en un punto fijo es localmente acotada, esto es

Corolario 5.2.1 Sea $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función y a un punto de acumulación del dominio D de esta función. Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x)| < (1 + |M|) \quad \forall x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta$$

Prueba. Ejercicio para el lector.

Como consecuencia inmediata de este teorema y sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} \lambda = \lambda \quad (\text{¡Verifique!}),$$

podemos concluir que dada una **función polinomial** $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(a)}$$

Además, si $r(x)$ es una función racional, es decir, $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son dos funciones polinomiales, utilizando los items (ii) y (iii) del teorema 5.2.1 tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} r(x) = r(a) \quad \text{si } q(a) \neq 0.$$

En los cinco ejemplos de la sección anterior se conocen los límites de las funciones. Ahora, usando el teorema que acabamos de demostrar vamos precisamente a calcular esos límites.

Ejemplos de Cálculo de Límites:

1. Si $a > 0$ y $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$, halle $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Como

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

se concluye que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

2. Si $a \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a}$, halle $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Como

$$f(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}$$

se concluye que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = na^{n-1}$.

3. Si $f(x) = \frac{x^2 - 6 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1} - 2}$, halle $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-3)(x+3) - \frac{(x-3)}{3 + \sqrt{x+6}}}{\frac{(x-3)}{\sqrt{x+1} + 2}} \\ &= \frac{x+3 - \frac{1}{3 + \sqrt{x+6}}}{\frac{1}{\sqrt{x+1} + 2}} \end{aligned}$$

concluimos que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{70}{3}$.

4. Si $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2+4} - \sqrt[4]{x^2+6x}}{x^2-4}$, halle $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sqrt[3]{x^2+4} - 2) + (2 - \sqrt[4]{x^2+6x})}{x^2-4} \\ &= \frac{\frac{(x-2)(x+2)}{FR_1} + \frac{-(x-2)(x+8)}{FR_2}}{(x-2)(x+2)} \end{aligned}$$

donde

$$FR_1 = \sqrt[3]{x^2+4}^2 + 2\sqrt[3]{x^2+4} + 4$$

y

$$FR_2 = 8 + 4\sqrt[4]{x^2+6x} + 2\sqrt[4]{x^2+6x}^2 + \sqrt[4]{x^2+6x}^3.$$

Concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{(x+2)}{FR_1} + \frac{-(x+8)}{FR_2}}{(x+2)} = \frac{4}{12} + \frac{-10}{32} = \frac{1}{192}.$$

Teorema 5.2.2 Teorema del Sandwich

Sean $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ funciones con dominio común D y a un punto de acumulación del dominio D . Si

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in D \setminus \{a\}$$

y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

Prueba.

Sea $\varepsilon > 0$ (fijo, arbitrario). Debemos demostrar que

$$\exists \delta > 0 / x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta \implies |g(x) - L| < \varepsilon.$$

Por la hipótesis, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta_1 \implies L - \varepsilon < f(x)$$

$$x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta_2 \implies h(x) < L + \varepsilon.$$

Luego, si tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tenemos que

$$x \in D \wedge |x - a| < \delta \implies L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon.$$

Es decir

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta \implies |g(x) - L| < \varepsilon.$$

lo que concluye nuestra demostración. \square

Veamos ahora algunas aplicaciones de este teorema:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$, ya que

$$0 \leq \left| x^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right| < x^2 \quad \forall x \neq 0$$

y como $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, aplicando el teorema del sandwich se confirma el resultado.

2. Sean las funciones $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ y a un punto de acumulación del dominio común D . Si f es acotado en D y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = 0.$$

En efecto: sea $\varepsilon > 0$. Por la hipótesis, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in D$, y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$; luego, teniendo en cuenta que

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq M|g(x)| \quad \forall x \in D$$

y usando el teorema del Sandwich, concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = 0.$$

3. En este ejemplo y en el siguiente se demuestran los límites trigonométricos más importantes. En primer lugar probaremos que:

$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{cos} x = 1$
--

En efecto:

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ se tiene que $0 < \operatorname{sen} x < x$. Por otro lado,

si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ tenemos que $x < \text{sen } x < 0$. De todo esto concluimos que

$$0 < |\text{sen } x| < |x| \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

luego, usando el teorema del sandwich inferimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\text{sen } x| = 0 \quad (\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x = 0).$$

Por otro lado, como $\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, se tiene también que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

4. Demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

En efecto:

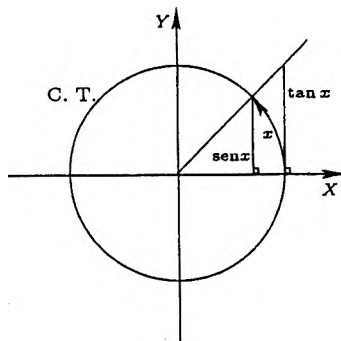


Figura 5.3: Círculo trigonométrico

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ se tiene que $0 < \text{sen } x < x < \text{tg } x$, luego

$$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1.$$

Si $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ ($\therefore 0 < -x < \frac{\pi}{2}$) tenemos que

$$\cos(-x) < \frac{\text{sen}(-x)}{(-x)} < 1.$$

De todo esto concluimos que

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

luego, usando el teorema del sandwich se logra demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

5. Este es un ejemplo de un límite trigonométrico y algebraico a la vez

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\cos(\frac{\pi}{2}x)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (h + 1)^2}{\cos(\frac{\pi}{2}h + \frac{\pi}{2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2)}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\pi} \left(\frac{\frac{\pi}{2}h}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}h)} \right) (h + 2) \right] = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

Proposición 5.2.3 *Los límites respetan la relación de orden*

Sean $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ funciones con dominio común D , tales que

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{para todo } x \in D \setminus \{a\}$$

donde a es un punto de acumulación del dominio común D . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ entonces $L \leq M$.

Prueba.

Sea $\varepsilon > 0$ (fijo, arbitrario). Por la hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) \quad \text{y} \quad g(x) < M + \frac{\varepsilon}{2}$$

siempre que $x \in D$ y $0 < |x - a| < \delta$. Esto implica que $L < M + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, por lo tanto $L \leq M$. □

Ahora planteamos la siguiente interrogante.

$$\text{¿ Existe } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} ?$$

La respuesta a esta interrogante se da en el siguiente teorema que relaciona la teoría de sucesiones con la teoría de los límites.

Teorema 5.2.4 Sucesiones y Límites

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función con dominio D y sea a un punto de acumulación del conjunto D . Son equivalentes:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

2. Para toda sucesión (x_n) en $D \setminus \{a\}$: $x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow L$

Prueba.

Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y sea (x_n) una sucesión en $D \setminus \{a\}$ tal que $x_n \rightarrow a$. Luego, para $\varepsilon > 0$ (fijo, arbitrario) existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon \quad (5.1)$$

Como $x_n \rightarrow a$, para el $\delta > 0$ encontrado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \delta$, $x_n \neq a$, $x_n \in D$ siempre que $n \geq n_0$. Es decir

$$0 < |x_n - a| < \delta \wedge x_n \in D.$$

Luego, de (5.1) se concluye que $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ siempre que $n \geq n_0$. Así hemos probado que

$$f(x_n) \rightarrow L.$$

Recíprocamente, supongamos que para toda sucesión (x_n) en $D \setminus \{a\}$: $f(x_n) \rightarrow L$ siempre que $x_n \rightarrow a$, y que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$, es decir

$$\sim (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 / x \in D \wedge 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon)$$

o equivalentemente

$$\exists \varepsilon_0 > 0 / \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in D : 0 < |x_\delta - a| < \delta \wedge |f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon_0$$

por lo tanto

$$\exists \varepsilon_0 > 0 / \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D : 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$$

Así, existe una sucesión (x_n) en $D \setminus \{a\}$ tal que $x_n \rightarrow a$ y $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$; pero por la hipótesis, $f(x_n) \rightarrow L$, lo que implica que $0 \geq \varepsilon_0$ (¡evidentemente una contradicción!). Esto completa nuestra demostración. \square

Ahora, damos respuesta a nuestra interrogante.

$$\text{No existe } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x},$$

puesto que si consideramos las sucesiones:

$$x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi} \quad \text{y} \quad \tilde{x}_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}$$

tenemos que

$$x_n \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \tilde{x}_n \rightarrow 0.$$

Sin embargo

$$\text{sen} \left(\frac{1}{x_n} \right) = \text{sen} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 1 \rightarrow 1$$

y

$$\text{sen} \left(\frac{1}{\tilde{x}_n} \right) = \text{sen} \left(2n\pi - \frac{\pi}{2} \right) = -1 \rightarrow -1.$$

Por lo tanto, en concordancia con el teorema precedente no existe el límite indicado.

5.3 Los Infinitos y el Límite

5.3.1 Límites Infinitos

Consideremos la función $f(x) = \frac{2}{|x-2|} \quad \forall x \neq 2$ y observemos su comportamiento en una vecindad de 2 mediante un cuadro de valores.

x	1	3/2	5/3	19/10	199/100	1999/1000
$f(x)$	2	4	6	20	200	2000
x	3	5/2	7/3	21/10	201/100	2001/1000

Esta variación de valores indica que cuando x toma valores muy próximos al número 2, el valor de la función aumenta indefinidamente. Este hecho lo podemos simbolizar de la siguiente manera

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow 2$$

De acuerdo con el concepto de límite en un punto, tenemos una función que no posee límite en el punto 2, pues cuando x se aproxima a 2, la función f no se aproxima a ningún número real (fijo). Podemos denotar este caso de no existencia de límite como

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty,$$

que se lee " $f(x)$ crece indefinidamente cuando x tiende a 2" ó por abuso de lenguaje

$f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende a 2.

Análogamente, si consideramos la función $g(x) = \frac{-2}{|x-2|} \forall x \neq 2$, tenemos que $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty$. Hacemos notar que en este caso la función g tampoco tiene límite en 2 y la notación previa indica que $g(x)$ decrece indefinidamente cuando x se aproxima al número 2. Formalizamos estas notaciones en la siguiente definición.

Definición 5.3.1 Límites Infinitos

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sea c un punto de acumulación del dominio D de f . Se dice que:

1. f tiene límite $+\infty$ cuando x tiende a c ; lo que denotamos por $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$, si

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 / f(x) > M \text{ siempre que } x \in D_f \wedge 0 < |x - c| < \delta$$

2. f tiene límite $-\infty$ cuando x tiende a c , lo que denotamos por $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$, si

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 / f(x) < -M \text{ siempre que } x \in D_f \wedge 0 < |x - c| < \delta$$

Veamos algunos ejemplos ilustrativos:

Ejemplo 1.- Pruebe que $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{|\sqrt{x-1}-2|} = +\infty$.

En efecto:

si $f(x) = \frac{x}{|\sqrt{x-1}-2|}$, observamos que 5 es punto de acumulación de $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$. Ahora sea $M > 0$ (fijo, arbitrario). Vemos que

$$f(x) = \frac{x(\sqrt{x-1}+2)}{|x-5|} \quad \forall x \neq 5.$$

Si $|x-5| < 1$, es decir, si $4 < x < 6$, entonces

$$3 < \sqrt{3} + 2 < \sqrt{x-1} + 2 < \sqrt{5} + 2$$

que a su vez implica que $x(\sqrt{x-1}+2) > 12$. Así, $f(x) > \frac{12}{|x-5|}$.

Por lo tanto, elegimos $\delta = \min\{1, \frac{12}{M}\}$ y tenemos que

$$\text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{5\} \wedge 0 < |x-5| < \delta \implies f(x) > \frac{12}{|x-5|} > 12 \left(\frac{M}{12}\right) = M.$$

Es decir

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{|\sqrt{x-1}-2|} = +\infty.$$

Ejemplo 2.- Pruebe que $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1+x}{(x+3)^2} = -\infty$.

En efecto:

Sea $M > 0$. Si $|x+3| < 1$, se tiene que

$$\frac{-3}{(x+3)^2} < \frac{x+1}{(x+3)^2} < \frac{-1}{(x+3)^2},$$

luego

$$f(x) < \frac{-1}{(x+3)^2} < -M \iff \frac{1}{(x+3)^2} > M \iff |x+3| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Por lo tanto, elegimos $\delta = \min\{1, \frac{1}{\sqrt{M}}\}$ y tenemos que

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \wedge 0 < |x+3| < \delta \implies f(x) < \frac{-1}{(x+3)^2} < -M.$$

Es decir

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1+x}{(x+3)^2} = -\infty.$$

Proposición 5.3.1 Sean f, g funciones reales de variable real con dominios D_f y D_g respectivamente y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de la intersección de estos dominios $D_f \cap D_g$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y g es positivo en una vecindad del punto a , entonces:

1. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ cuando $L > 0$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ cuando $L < 0$.

Prueba:

1. Sea $M > 0$.

Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, para $\varepsilon = \frac{L}{2M} > 0 \exists \delta_1 > 0$ tal que, si $x \in D_g \wedge 0 < |x - a| < \delta_1$ implica que $0 < g(x) = |g(x)| < \frac{L}{2M}$, equivale lentamente $\frac{1}{g(x)} > \frac{2M}{L}$.

Análogamente como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, para $\tilde{\varepsilon} = \frac{L}{2} > 0 \exists \delta_2 > 0$ tal que, si $x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta_2$ entonces $0 < |f(x) - L| < \frac{L}{2}$, equivalentemente $\frac{L}{2} < f(x) < \frac{3}{2}L$.

Por lo tanto, elegimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y tenemos que

$$\text{si } x \in D_f \cap D_g \wedge 0 < |x - a| < \delta \text{ entonces } f(x) > \frac{L}{2} \text{ y } \frac{1}{g(x)} > \frac{2M}{L}$$

Así, $\frac{f(x)}{g(x)} > M$ siempre que $x \in D_f \cap D_g \wedge 0 < |x - a| < \delta$.

2. ¡Ejercicio para el lector responsable!

Proposición 5.3.2 Sean f, g funciones reales de variable real con dominios D_f y D_g respectivamente y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de la intersección de estos dominios $D_f \cap D_g$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y g es negativo en una vecindad del punto a , entonces:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty \text{ cuando } L > 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \text{ cuando } L < 0.$$

Prueba: Análoga a la anterior.

Nota.- En la práctica para hacer los cálculos, éstas dos proposiciones serán usadas de la siguiente forma:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overset{+}{L}}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overset{-}{L}}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overset{+}{L}}{0^-} = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overset{-}{L}}{0^-} = +\infty$$

Ejemplo 3.-

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{\sqrt{|x-3|}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty,$$

Ejemplo 4.-

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 5x + 7}{|x \operatorname{sen} x|} = \frac{7}{0^+} = +\infty.$$

Ejemplo 5.- Halle el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 8}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$$

Solución.-

Si $f(x) = 3x - 8$ y $g(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-2)^2(x-1)$, tenemos que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2$ y $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$. Además, para todo $x > 1$ próximo al punto 2 se tiene que $g(x) = (x-2)^2(x-1) > 0$, luego

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 8}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Ejemplo 6.- Análogamente al ejemplo anterior, el lector debe verificar que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x - 11}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{-4}{0^-} = +\infty.$$

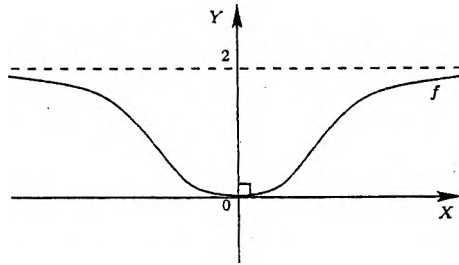
5.3.2 Límites en el Infinito

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La gráfica de esta función (par) se muestra en la figura adjunta. Consideremos ahora que x toma los valores: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000, y así sucesivamente, permitiendo que x crezca indefinidamente. Los valores de la función correspondientes se dan en la siguiente tabla

x	0	1	2	3	4	5	10	100	1000
$f(x)$	0	1	$\frac{8}{5}$	$\frac{18}{10}$	$\frac{32}{17}$	$\frac{50}{26}$	$\frac{200}{101}$	$\frac{20000}{10001}$	$\frac{2000000}{1000001}$



Observamos que cuando x crece a través de valores positivos, los valores de la función $f(x)$ se acercan cada vez más a 2. En particular:

$$2 - f(4) = 2 - \frac{32}{17} = \frac{2}{17}$$

$$2 - f(10) = 2 - \frac{200}{101} = \frac{2}{101}$$

$$2 - f(100) = 2 - \frac{20000}{10001} = \frac{2}{10001}$$

Continuando así vemos que podemos acercar el valor de $f(x)$ a 2 tanto como queramos, tomando x suficientemente grande. En otras palabras, podemos hacer la diferencia entre 2 y $f(x)$ tan pequeña como se desee tomando x como cualquier número mayor que algún número positivo suficientemente grande.

Dando un paso más, podemos decir que dado $\varepsilon > 0$, independientemente de qué tan pequeño sea, podemos encontrar un número $N > 0$ tal que $|f(x) - 2| < \varepsilon$ siempre que $x > N$, lo que denotamos por $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, y lo formalizamos en la siguiente definición.

Definición 5.3.2 Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

1. Supongamos que $\langle m, +\infty \rangle \cap D \neq \emptyset \forall m > 0$. Se dice que f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $+\infty$, lo cual se denota por $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 / x \in D \wedge x > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

2. Supongamos que $\langle -\infty, -m \rangle \cap D \neq \emptyset \forall m > 0$. Se dice que f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $-\infty$, lo cual se denota por

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L, \text{ si}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 / x \in D \wedge x < -N \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ejemplo 1.-Demuestre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^3 + 1} = 0$

Solución:

Sea $\varepsilon > 0$. Si $f(x) = \frac{2x}{x^3 + 1}$, $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ y para $x > 0$

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = \left| \frac{2x}{x^3 + 1} \right| = \frac{2x}{x^3 + 1} < \frac{2x}{x^3} = \frac{2}{x^2}.$$

Por otro lado

$$\frac{2}{x^2} < \varepsilon \iff \frac{2}{\varepsilon} < x^2 \iff \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} < |x| \iff x > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}.$$

Por lo tanto, eligiendo $N = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} > 0$ tenemos que

$$\forall x \in D_f \wedge x > N = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \implies |f(x) - L| < \frac{2}{x^2} < \varepsilon,$$

es decir

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^3 + 1} = 0.$$

Ejemplo 2.-Demuestre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x + 1}{x^2 + 2} = 3$

Solución:

Si $f(x) = \frac{3x^2 + x + 1}{x^2 + 2}$, vemos que $D_f = \mathbb{R}$ y

$$|f(x) - 3| = \frac{|x - 5|}{x^2 + 2} \quad \forall x \in D_f.$$

Notamos que si $x > 5$, $|f(x) - 3| = \frac{x - 5}{x^2 + 2} < \frac{x}{x^2 + 2} < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$.

Por otro lado, para $x > 0$,

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < x.$$

Por lo tanto, eligiendo $N = \max\{5, \frac{1}{\varepsilon}\}$ tenemos que

$$x \in D_f \wedge x > N \implies |f(x) - 3| < \frac{1}{x} < \varepsilon,$$

es decir

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x + 1}{x^2 + 2} = 3.$$

Teorema 5.3.3 Dada las funciones f, g con dominios D_f y D_g respectivamente y $c \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = M$, entonces los límites

$\lim_{x \rightarrow +\infty} cf(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f+g)(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (fg)(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ existen. Más aún

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} cf(x) = cL$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f+g)(x) = L+M$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (fg)(x) = LM$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$ siempre que $M \neq 0$.

Prueba: La demostración de este teorema es análoga a la prueba hecha en sucesiones, por lo tanto se deja para el lector responsable y estudioso. Ahora damos algunas aplicaciones inmediatas del mismo:

Ejemplo 3.- Hallar

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^2 + 2x - 3}$$

Solución:

Una forma de hallar este tipo de límites es dividir tanto el numerador como el denominador por x^n , donde n es la mayor potencia que tiene x en toda la expresión, para luego aplicar las propiedades dadas en el teorema precedente, así:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{6}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = 3.$$

Ejemplo 4.- Hallar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8}}{x + 5}$

Solución:

Como x toma valores positivos "grandes", $x = \sqrt{x^2}$, luego dividiendo el numerador y denominador por x tenemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8}}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 8}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{x + 5}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{8}{x^2}}}{1 + \frac{5}{x}} = 1.$$

Nota.- El teorema anterior también se cumple cuando $x \rightarrow -\infty$.

Ejemplo 5.- Hallar $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8}}{x + 5}$

Solución: Teniendo en cuenta que x toma valores negativos, $-x = \sqrt{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 8}}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 8}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{x + 5}{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\sqrt{1 + \frac{8}{x^2}}}{1 + \frac{5}{x}} = -1.$$

Ejemplo 6.- Hallar $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax})$

Solución:

Como

$$(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax})(\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{ax}) = bx + c,$$

para $x > 0$ se tiene que

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax} = \frac{bx + c}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{ax}} = \frac{b + \frac{c}{x}}{\sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}} + \sqrt{a}}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax}) = \frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

Ejemplo 7.- Hallar $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + \lambda x + 1} - \sqrt{x^2 - \lambda x + 1}]$ si λ es un número real fijo (arbitrario).

Solución:

Para $x > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + \lambda x + 1} - \sqrt{x^2 - \lambda x + 1} &= \frac{2\lambda x}{(\sqrt{x^2 + \lambda x + 1} + \sqrt{x^2 - \lambda x + 1})} \\ &= \frac{2\lambda x}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + \lambda x + 1} - \sqrt{x^2 - \lambda x + 1}] = \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 8.- De manera análoga (al ejemplo 7) tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{x}}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)} = 0$$

5.3.3 Límites Infinitos en el Infinito

Así como es conveniente poder decir que $f(x) \rightarrow \pm\infty$ cuando $x \rightarrow c$ (para $c \in \mathbb{R}$), también lo es, contar con la noción correspondiente cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Definición 5.3.3 Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Supongamos que $(a, +\infty) \subseteq D$ para algún $a \in \mathbb{R}$ (o que $(-\infty, b) \subseteq D$ para algún $b \in \mathbb{R}$).

1. Se dice que f tiende a $+\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$, y lo denotamos por

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ si}$$

$$\forall M > 0 \exists N > 0 / x \in D \wedge x > N \implies f(x) > M$$

2. Se dice que f tiende a $-\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$, y lo denotamos por

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \text{ si}$$

$$\forall M > 0 \exists N > 0 / x \in D \wedge x > N \implies f(x) < -M$$

3. Se dice que f tiende a $+\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$, y lo denotamos por

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \text{ si}$$

$$\forall M > 0 \exists N > 0 / x \in D \wedge x < -N \implies f(x) > M$$

4. Se dice que f tiende a $-\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$, y lo denotamos por $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, si

$$\forall M > 0 \exists N > 0 / x \in D \wedge x < -N \implies f(x) < -M$$

Ejemplo 1.- Para $n \in \mathbb{N}$, pruebe que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty.$$

En efecto:

Sea $M > 0$. Eligiendo $N_1 = 1 + M$ y $N_2 = \sqrt{1 + M}$, tenemos que:

$$\text{si } x > N_1 \implies x^n > (1 + M)^n \geq 1 + nM \geq M.$$

$$\text{si } x < -N_2 \implies x^{2n} > (1 + M)^n \geq 1 + nM \geq M.$$

Por lo tanto hemos probado que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty$$

Análogamente, tomando $N = \sqrt[2n+1]{M}$ (cuya existencia se garantiza en el siguiente capítulo) se prueba que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty$.

Ejemplo 2.- Pruebe que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 3x + 2}{2x + 1} = +\infty.$$

En efecto: Sea $M > 0$. Eligiendo $N = \frac{2}{5}M$, tenemos que:

$$x > N \implies \frac{5x^2 + 3x + 2}{2x + 1} = \frac{5}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3/4}{2x + 1} \geq \frac{5}{2}x > M$$

Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 3x + 2}{2x + 1} = +\infty$.

Ejemplo 3.- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

Ejemplo 4.- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} \right) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$.

Ejemplo 5.-Pruebe que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty.$$

En efecto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Proposición 5.3.4 Sea $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$ una función polinomial.

1. Si $a_n > 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$.

2. Si $a_n < 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty$.

Prueba de 1: Observamos que

$$p(x) = x^n [a_n + g(x)], \text{ donde } g(x) = \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Como $a_n > 0$ y teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ sabemos que

$$\exists N > 0 / |g(x)| < \frac{a_n}{2} \quad \forall x > N$$

de donde

$$\frac{a_n}{2} x^n < x^n [a_n + g(x)] = p(x) \quad \forall x > N.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{2} x^n = +\infty$, se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty.$$

La prueba de la segunda parte se deja como ejercicio para el lector. \square

Teorema 5.3.5 Sean $f, g : \langle a, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que

$$g(x) > 0 \quad \forall x > a \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}^*.$$

1. Si $L > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si y sólo si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

2. Si $L < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ si y sólo si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Prueba : Probaremos solo el *item* 1.

Como $L > 0$, por la hipótesis existe $N > 0$ ($N > a$) tal que

$$0 < \frac{L}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} < 2L \text{ para todo } x > N.$$

Luego $\frac{L}{2}g(x) < f(x) < (2L)g(x)$ para todo $x > N$, de donde se infiere de inmediato la conclusión. El *item* 2 se prueba de manera análoga. \square

5.4 Asíntotas

Definición 5.4.1 La recta $\mathcal{L} : y = k$ es una **asíntota horizontal** de la función f si se cumple alguna de las tres condiciones siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k \text{ o } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k \text{ o } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k.$$

Ejemplo 1.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{x}{|x|}} \quad \text{si } x \neq 0$$

tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = -1.$$

Es decir, la recta $\mathcal{L}_1 : y = 1$ es una asíntota horizontal a derecha y la recta $\mathcal{L}_2 : y = -1$ es una asíntota horizontal a izquierda. Note además que $f(0) = 0$ y $|f(x)| = \frac{|x|}{1 + |x|} < 1$. Con toda esta información se tiene el siguiente gráfico para esta función

Definición 5.4.2 La recta $\mathcal{L} : x = a$ es una **asíntota vertical** de la función f si se cumple alguna de las seis condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ o } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \text{ o } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \text{ o } \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ o } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \text{ o } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

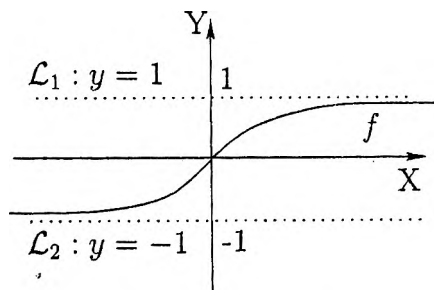


Figura 5.4: $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

Ejemplo 2.- Sea $g : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = \frac{x}{1-|x|} \quad \forall x \neq -1, 1.$$

Como

$$g(x) = \frac{x}{1-|x|} = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{x}{|x|}} \quad \text{si } x \neq 0$$

tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty.$$

Además, teniendo en cuenta que $g(0) = 0$ se concluye que las rectas $\mathcal{L}_1 : x = 1$ y $\mathcal{L}_2 : x = -1$ son las asíntotas verticales, la recta $\mathcal{L}_3 : y = 1$ es la asíntota horizontal a izquierda y la recta $\mathcal{L}_4 : y = -1$ es asíntota horizontal a derecha, como se ve en la siguiente figura.

Definición 5.4.3 La recta $\mathcal{L} : y = mx + b$ es una asíntota oblicua de la función f si se cumple alguna de las condiciones siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

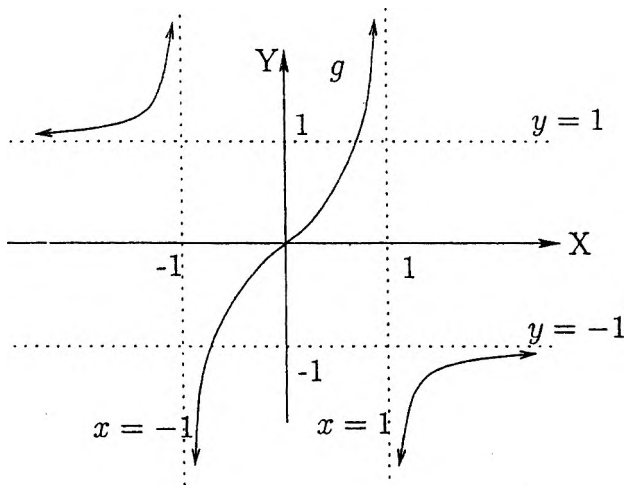


Figura 5.5: $g(x) = \frac{x}{1 - |x|}$

Es decir, la distancia entre $f(x)$ y $mx + b$ tiende a cero cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ como se ilustra en la figura adjunta.

Ejemplo 3.- Sea $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \quad \forall x \neq 0.$$

Como
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\left(x + \frac{1}{x}\right) - x \right] = 0,$$

la recta $\mathcal{L} : y = x$ es la única asíntota oblicua de esta función. Verificando además que la recta $\mathcal{L}' : x = 0$ es la única asíntota vertical para esta función, se tiene el siguiente dibujo para f .

En general.- Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional tal que $\text{grado}(p(x)) = \text{grado}(q(x)) + 1$, entonces

$$f(x) = (mx + b) + g(x) \quad \text{donde} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0.$$

Así, la recta $\mathcal{L} : y = mx + b$ será una asíntota oblicua de esta función.

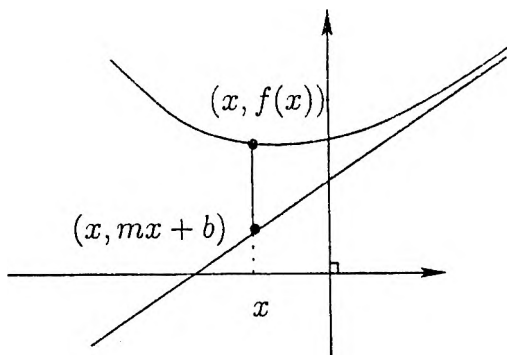


Figura 5.6: Asíntota oblicua

Ejemplo 4.- Sea $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} \quad \forall x \neq 1.$$

Como $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 1}$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x - 1} \right) = 0$, concluimos que la recta $\mathcal{L}: y = x + 2$ es la única asíntota oblicua de esta función. Además, ya es fácil verificar que la recta $\mathcal{L}': x = 1$ es su única asíntota vertical (vea la figura 5.8).

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que una recta sea asíntota a una función.

Teorema 5.4.1 La recta $\mathcal{L}: y = mx + b$ es una asíntota oblicua de la función f si y sólo si

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx].$$

Prueba.- Supongamos que la recta $\mathcal{L}: y = mx + b$ es una asíntota oblicua de la función f , es decir se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Luego, si $|x| > 1$ ($\therefore \frac{1}{|x|} < 1$), tenemos que

$$\left| \frac{f(x)}{x} - m \right| \leq \frac{|f(x) - (mx + b)|}{|x|} + \frac{|b|}{|x|} \leq |f(x) - (mx + b)| + \frac{|b|}{|x|},$$

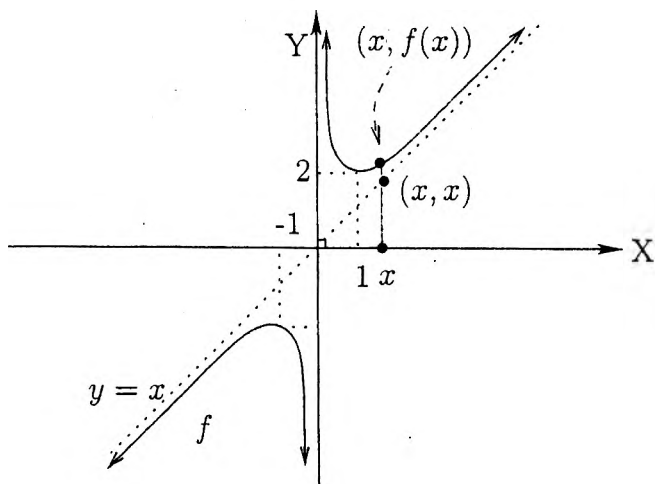


Figura 5.7: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

y de esto concluimos que $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$; para el otro límite es suficiente observar que $f(x) - mx = [f(x) - (mx + b)] + b$. El recíproco es inmediato observando que

$$f(x) - (mx + b) = [f(x) - mx] - b. \quad \square$$

Ejemplo 5.- Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2} \quad \forall x \neq -1.$$

Sabemos que esta función tiene una asíntota. Supongamos que la recta $\mathcal{L} : y = mx + b$ es dicha asíntota, entonces:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2(1 + \frac{1}{x})^2} = \frac{1}{2}, \quad y$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2(x^2 + 2x + 1)} - \frac{x}{2} \right) = -1.$$

Por lo tanto, $\mathcal{L} : y = \frac{1}{2}x - 1$ es la asíntota oblicua de f . Además $\mathcal{L}' : x = -1$ es la única asíntota vertical de esta función. Todo esto justifica el siguiente dibujo para la función f

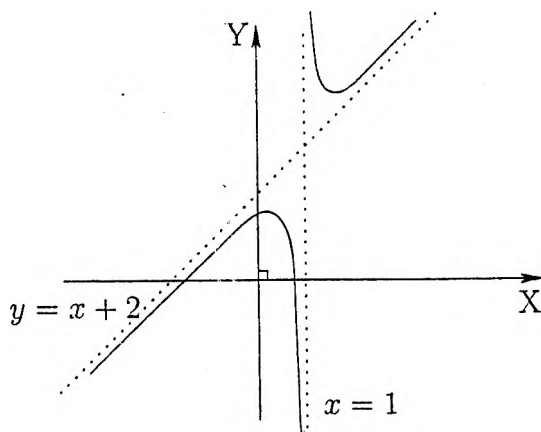


Figura 5.8: $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}$

Ejemplo 6.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observamos que esta función no posee asíntota horizontal ni vertical, pero sí tiene asíntota oblicua, a saber, la recta $\mathcal{L} : y = x$, puesto que

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1 - 1)}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0.$$

5.5 Ejercicios Resueltos

1. Demuestre por definición que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$.

Solución:

Sea $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y sea $\varepsilon > 0$ (fijo, arbitrario). Debemos demostrar que $\exists \delta > 0 / 0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - \frac{4}{5}| < \varepsilon$.

En efecto; observe que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\left| f(x) - \frac{4}{5} \right| = \left| \frac{5x^3 - 4x - 24}{5(x^2 + 1)} \right| < \left(\frac{5x^2 + 6x + 12}{5} \right) |x - 2|.$$

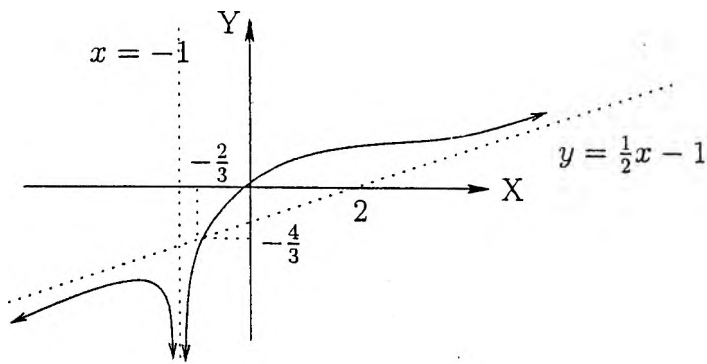


Figura 5.9: $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

Pero si $0 < |x - 2| < 1$ entonces $23 < 5x^2 + 6x + 12 < 75$.

Por lo tanto elegimos $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{15}\}$.

Ahora, $0 < |x - 2| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{4}{5} \right| &< \left(\frac{5x^2 + 6x + 12}{5} \right) |x - 2| \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &< 15|x - 2| \quad \text{si } |x - 2| < 1 \\ &< 15 \left(\frac{\epsilon}{15} \right) = \epsilon \quad \text{si } |x - 2| < \frac{\epsilon}{15}. \end{aligned}$$

Así, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{4}{5}$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x$ si x es racional, y $f(x) = 0$ si x es irracional. Probar que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Usar un razonamiento en términos de sucesiones para probar que si $c \neq 0$, entonces f no tiene límite en c .

Solución: Sea $\epsilon > 0$.

Debemos demostrar que $\exists \delta > 0 / 0 < |x| < \delta \implies |f(x)| < \epsilon$.

En efecto:

si $x \in \mathbb{Q}$, $|f(x)| = |x|$; y si $x \in \mathbb{I}$, $|f(x)| = |0| \leq |x|$.

Luego

$$|f(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto eligiendo $\delta = \epsilon$ tenemos que

$$0 < |x| < \delta \implies |f(x)| \leq |x| < \delta,$$

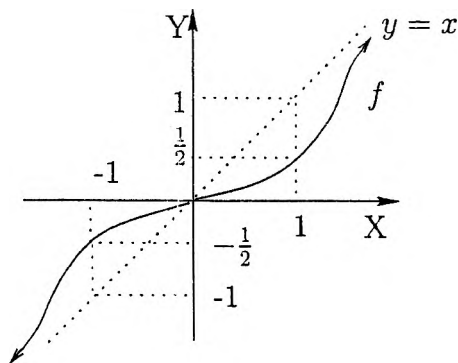


Figura 5.10: $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

así

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Por otro lado sea $c \neq 0$ y supongamos que $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

Sabemos que existen sucesiones $(r_n) \subseteq \mathbb{Q}$ y $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{I}$ tales que $r_n \rightarrow c$ y $\alpha_n \rightarrow c$, entonces

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = L = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = 0$$

3. Demuestre que no existe el límite de $\text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ cuando x tiende a cero.

Solución:

Supongamos que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) = L$.

Sea $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Como $x_n = \sqrt{\frac{2}{(4n+1)\pi}} \rightarrow 0$ y

$\tilde{x}_n = \sqrt{\frac{2}{(4n-1)\pi}} \rightarrow 0$, aplicando el teorema de límites y sucesiones se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = L.$$

Pero como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{sen}\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

tendríamos que $1 = -1$ (¡Absurdo!). Esto completa la solución.

4. Sea $f : \langle a, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y acotada superiormente. Demuestre que existe $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Solución:

Como f es acotada, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$L = \sup\{f(x) / x > a\}.$$

Afirmo que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$. En efecto:

sea $\varepsilon > 0$ (fijo, arbitrario). Por la caracterización del supremo $\exists N > a$ tal que $L - \varepsilon < f(N) \leq L$.

Ahora si $x > N$, por ser f creciente

$$L - \varepsilon < f(N) < f(x)$$

entonces

$$L - \varepsilon < f(x) \leq L < L + \varepsilon \quad \forall x > N$$

Así $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{R} / x > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon$.

Esto demuestra que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.

5. Calcular el límite de $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x - 1}{\cos x - \operatorname{sen} x - 1}$ cuando x tiende a cero.

Solución:

Observe que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\operatorname{sen} x + \cos x - 1}{\cos x - \operatorname{sen} x - 1} \cdot \frac{\operatorname{sen} x + \cos x + 1}{\cos x - \operatorname{sen} x + 1} \cdot \frac{\cos x - \operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{sen} x + \cos x + 1} \\ &= \frac{[(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 1]}{[(\cos x - \operatorname{sen} x)^2 - 1]} \cdot \frac{\cos x - \operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{sen} x + \cos x + 1} \end{aligned}$$

es decir

$$f(x) = -\frac{\cos x - \operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{sen} x + \cos x + 1}$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1 - 0 + 1}{0 + 1 + 1} = -1.$$

6. Encuentre el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 3} - x)$.

Solución:

Si $f(x) = x(\sqrt{x^2 + 3} - x)$ entonces

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = \frac{3x}{|x|\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} + x}$$

Ahora para $x < 0$

$$f(x) = \frac{3}{1 - \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}$$

Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$.

7. Hallar $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} + 1 - x^2}{x^2 - 4}$

Solución:

Si $f(x) = \frac{\sqrt{4x+1} + 1 - x^2}{x^2 - 4}$ entonces

$$f(x) = \frac{(\sqrt{4x+1} - 3) + (4 - x^2)}{x^2 - 4} = \frac{4(x-2)}{(\sqrt{4x+1} + 3)(x^2 - 4)} - 1$$

es decir

$$f(x) = \frac{4}{(\sqrt{4x+1} + 3)(x+2)} - 1.$$

Luego $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{4}{(3+3)(2+2)} - 1 = -\frac{5}{6}$.

8. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(2x) - \cos(2x) - 1}{\cos x - \operatorname{sen} x} & , \quad \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{2\sqrt{2\pi x} - 2x - \pi}{2x - \pi} & , \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Halle $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$.

Solución:

Si $x < \frac{\pi}{2} \implies f(x) = \frac{2\operatorname{sen} x \cos x - 2\cos^2 x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = -2\cos x$.

Si $x > \frac{\pi}{2} \implies f(x) = -\frac{(\sqrt{2x} - \sqrt{\pi})^2}{2x - \pi} = \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{2x}}{\sqrt{\pi} + \sqrt{2x}}$.

Así,

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \frac{0}{2\sqrt{\pi}} = 0.$$

Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})} f(x) = 0$.

9. Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{1 - x^4}{2x^3 - 8x} \quad \forall x \neq 0, \pm 2.$$

Determinar las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de f , luego bosqueje su gráfica.

Solución:

Como $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1 - 4x^2}{2(x^3 - 4x)}$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 4x^2}{2(x^3 - 4x)} = 0$,

la recta de ecuación $y = -\frac{1}{2}x$ es la única asíntota oblicua (a derecha e izquierda). Por otro lado, teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$$

concluimos que las rectas de ecuaciones $x = 2$, $x = 0$ y $x = -2$ son asíntotas verticales de f , y su gráfico es

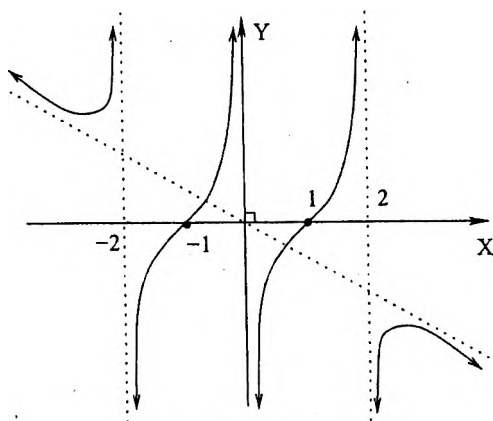


Figura 5.11: $f(x) = \frac{1 - x^4}{2x^3 - 8x}$

10. Halle dos números reales a y b tales que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 + 3\sqrt[3]{x^3 + 1} + 5}{x + 3} - ax - b \right] = 0.$$

Solución:

Si $f(x) = \frac{x^2 + 3\sqrt[3]{x^3 + 1} + 5}{x + 3} - ax - b$ entonces

$$f(x) = \frac{(1-a)x^2 - (3a+b)x + 3\sqrt[3]{x^3 + 1} + (5-3b)}{x+3}$$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ implica que $a = 1$, entonces

$$f(x) = \frac{-(b+3) + 3\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} + \frac{5-3b}{x}}{1 + \frac{3}{x}}$$

y como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -(b+3) + 3$ concluimos que

$$a = 1 \text{ y } b = 0.$$

5.6 Ejercicios Propuestos

1. Usando la definición, demuestre que:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 3x + 2x + 1) = 7$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = \frac{1}{2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{2}}{2x + \sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

2. Sea f una función definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ para todo $x > -1$.

Halle un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-3| < \delta$ entonces $|f(x) - \frac{1}{2}| < 0,0025$.

3. Probar que $\lim_{x \rightarrow a} x^3 = a^3$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

4. Probar que $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ para cualquier $a \geq 0$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = 3x + 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, y $f(x) = -2x + 6$ si x es irracional. Pruebe que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$.

6. Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

7. Sea a un punto de acumulación del dominio de una función real de variable real f tal que $\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = L$. Si $L = 0$, pruebe que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e indicar mediante un ejemplo que si $L \neq 0$, entonces f puede no tener un límite en el punto a .

8. Encontrar los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}}{\sqrt{x} + 2x^2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2+4} - \sqrt[4]{x^2+6x}}{x^2 - 4}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1} - 2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{1+x^2}}$

9. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe, pero que $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

10. Demostrar que los límites siguientes no existen en \mathbb{R}

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \operatorname{sgn}(x))$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

11. Calcular, si es posible, los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{(x+1)^2(x-4)}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{(x-2)^2(x-4)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{(x-2)^2(x-4)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -5} \sqrt{(x+1)^2(x+5)}$

12. Encontrar dos funciones f y g que no tengan límite en un punto a , pero tanto $f + g$ como fg sí tengan límite en a (simultáneamente).

13. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x, y en \mathbb{R} . Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ existe, demuestre que $L = 0$. Probar después que f tiene límite en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$.

14. ¿Para qué valores de a la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in \mathbb{Q} \\ -2x + 3 & , x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

posee límite real? (¿Existen dos valores de a !)

15. Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x & , x \in \mathbb{Q} \cap \langle -\infty, 0 \rangle \\ x^3 & , x \in \mathbb{I} \cap \langle -\infty, 0 \rangle \\ \sqrt{x} & , x \geq 0 \end{cases}$$

Pruebe usando la definición que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

16. Sean f, g funciones reales de variable real definidas como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x = \frac{1}{n} \\ x^2 & , x \neq \frac{1}{n} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ x - 1 & , x \neq 0 \end{cases}$$

- (a) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?
 (b) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$?
 (c) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x)$?

En cada uno de los casos anteriores justifique su respuesta.

17. Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ para todo $x \neq 1$. Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, luego demuéstrela usando la definición.

18. Supóngase que f y g son dos funciones que tienen límite (en \mathbb{R}) cuando $x \rightarrow +\infty$, y que $f(x) \leq g(x)$ para $x \in \langle a, +\infty \rangle$. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

19. Dada la función $f: \langle a, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \text{ si y sólo si } \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = L.$$

20. Sea $f: \langle a, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = L$ con $L \in \mathbb{R}$, pruebe que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

21. (a) Si existen los límites $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x)$, pruebe que existe $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$.
- (b) Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow c} (fg)(x)$ existen, ¿se infiere la existencia de $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$?
22. Sea $f : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente y acotada inferiormente. Demuestre que existe $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
23. Evaluar los siguientes límites o probar su inexistencia:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$$

24. Estudie la función $f(x) = \frac{x^2 + \operatorname{sen} x}{x}$ para todo $x \neq 0$.
(Este problema muestra una función cuya asíntota la intercepta infinitas veces. ¿Es esto una contradicción?)
25. Sea f la función definida por $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$. Determinar las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, luego bosquejar el gráfico de esta función.
26. Hallar los valores de a y b si se sabe que

$$L = \lim_{x \rightarrow 2b} \frac{x^3 - x^2 + ax + 12}{x^2 - 4bx + 4b^2} \in \mathbb{R}.$$

27. Encuentre una función f tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no exista en ningún punto a de \mathbb{R} , pero que $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$ exista para todo a real.
28. Sean f, g funciones definidas en un dominio común D y sea a un punto de acumulación del conjunto D . Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \in D \setminus \{a\}$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen, ¿se puede concluir que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$? ¡Justifique su respuesta!
29. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $L \in \mathbb{R}$ y c un punto de acumulación del dominio D de f . Pruebe que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ si y sólo si } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

30. Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = L$ y $b \neq 0$, pruebe que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(bx)}{x} = bL$. ¿Qué ocurre si $b = 0$?

31. Hallar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}}$, si existe.

32. Hallar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} - \sqrt{x}$, si existe.

33. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, si $f(x) = \frac{|2+x| - |x| - 2}{x}$.

34. Si $f(x) = [\text{sen}(x)]$, encontrar los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

35. Si $f(x) = \frac{[x + \frac{3}{2}] - [\frac{3}{2}]}{x}$, halle $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

36. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(tx) = tf(x)$ para todo $t, x \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

37. Sea f la función definida por $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si c es una raíz de f , pruebe que

$$|c| \leq 1 + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|.$$

38. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x + a \text{arsen}(x)$. Si $|a| < 1$, halle $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

39. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $A = \{x \in \mathbb{R} / ax + b > x^2\}$. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} a \text{arsen}(\frac{a}{x}) = b - 1$ y $\text{sup}(A) = a + b$, halle $a^2 + b^2$.

40. Halle la(s) asíntota(s) de la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} & , |x| > 2 \\ \frac{x^3}{4 - x^2} & , |x| < 2 \end{cases}$$

41. Halle la(s) asíntota(s) de la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+2)\sqrt{x^2+1}}, & x \leq -1 \\ x - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, & -1 < x \leq 0 \\ \frac{x^4}{x^3 - 1}, & x > 0 \end{cases}$$

42. Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x^2 + ax}{(a+b^2)x+c} \quad \forall x \neq -\frac{c}{a+b^2}$.

Encontrar los valores de a, b y c de modo que $f(1) = \frac{1}{3}$ y $y = x + 2$ sea su asíntota oblicua.

43. Sea c un punto de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \rightarrow c} |f(x) - L| = 0$.

44. Si $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ es una función creciente y acotada, demuestre que para cada $x_0 \in \langle a, b \rangle$ existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

45. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sea $c \in I$. Supóngase la existencia de los números K y L tales que $|f(x) - L| \leq K|x - c|$ para todo $x \in I$. Probar que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

46. Supóngase que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite L cuando x tiende a 0, y sea $a > 0$. Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $g(x) = f(ax)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pruebe que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = L$.

47. En cada uno de los siguientes casos, halle el límite indicado:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow (-4)^-} \left(\frac{2}{t^2 + 3t - 4} - \frac{3}{t + 4} \right)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - x}{3 - x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{\sqrt{2x - x^2} - 1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x^2] - 1}{x^2 - 1}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{2 - \sqrt{4x - x^2}}$

48. En cada uno de los siguientes casos, halle el límite indicado:

$$(a) \lim_{r \rightarrow +\infty} (\sqrt{3r^2 + r} - 2r)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 + 1})$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - x)$$

$$(d) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t}}}}{\sqrt{t + 1}}$$

49. Un campo rectangular que tiene un área de 2700 metros cuadrados va a ser limitado por una cerca. Además, otra cerca dividirá el terreno por la mitad. El costo de la cerca que dividirá el terreno es de 4 dólares por metro y el costo de la de los lados es de 6 dólares por metro. Sea x metros la longitud de la cerca divisoria y $C(x)$ el costo de la cerca.

(a) Escriba una ecuación que defina $C(x)$ y establezca el dominio de la función C .

(b) Encuentre $\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x)$ y explique sus resultados en términos del problema.

(c) Trace la gráfica de C .

50. Un tanque abierto de forma rectangular tendrá una base cuadrada y su capacidad será de 125 metros cúbicos. El costo por metro cuadrado para el fondo será de 8 dólares y para los lados será de 4 dólares. Sea x metros la longitud de un lado de la base cuadrada y $C(x)$ el costo del material:

(a) Establezca una ecuación que defina $C(x)$ y determine el dominio de la función C .

(b) Halle $\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x)$ y explique sus resultados en términos del problema.

(c) Trace la gráfica de C .

Capítulo 6

Continuidad

6.1 Continuidad y Discontinuidad

Definición 6.1.1 Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función real con dominio D y sea $a \in D$. Se dice que f es continua en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad x \in D \wedge |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Observación 6.1.1 Si existe $\delta > 0$ tal que $D \cap (a - \delta, a + \delta) = \{a\}$, se dice que a es un *punto aislado* del dominio de f . En este caso f siempre es continua en a . Por ejemplo, si f es la función definida por

$$f(x) = \sqrt{(x+2)^2(x+1)^2(x-4)} \quad \forall x \in [4, +\infty) \cup \{-2, -1\}$$

siendo -2 y -1 puntos aislados del dominio de f , tenemos que f es continua en -2 y en -1 .



Figura 6.1: Dominio de f

Observación 6.1.2 Si a no es un punto aislado del dominio de f , entonces a es un punto de acumulación del dominio de esta función. En este caso, tenemos que

$$f \text{ es continua en } a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Equivalentemente

$$f \text{ es continua en } a \iff \begin{array}{l} \text{(i)} \exists f(a). \\ \text{(ii)} \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x). \\ \text{(iii)} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \end{array}$$

Note además que (i) quiere decir que $a \in D$, y (ii) quiere decir que los límites laterales en a $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ son iguales (si ambos existen).

Definición 6.1.2 Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función real con dominio D y sea $A \subseteq D$. Se dice que f es continua en A , y lo denotamos por $f \in C(A)$, si f es continua en x para todo $x \in A$.

Ejemplos de funciones continuas:

- Si $f(x) = \sqrt{x} \quad \forall x \geq 0$, entonces $f \in C([0, +\infty))$ puesto que: $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ (si $x_0 > 0$) y $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$.

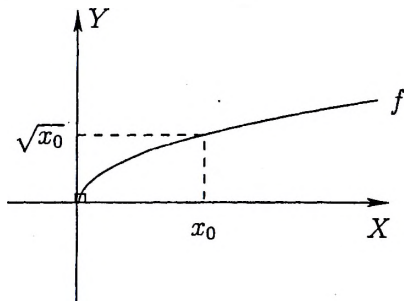


Figura 6.2: Función $f(x) = \sqrt{x}$

2. Continuidad de la Función Polinomial

Sean $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. La función $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

es llamada *función polinomial* (con coeficientes reales), y si x_0 es un número real fijo y arbitrario, sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0)$$

Por lo tanto, $f \in C(\mathbb{R})$.

3. Si $f(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $f \in C(\mathbb{R})$ puesto que: para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$, se cumple que $\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0|$.

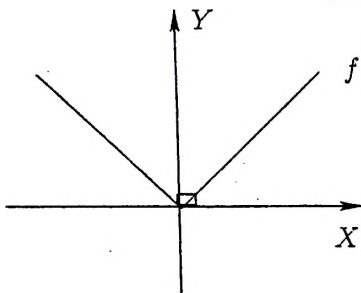


Figura 6.3: Función $f(x) = |x|$

4. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ (fijo, arbitrario). Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \text{sen}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \text{sen}(x_0 + h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [\text{sen}(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\text{sen}(h)] \\ &= \text{sen}(x_0), \end{aligned}$$

concluimos que la función **seno** es continua en toda la recta real. Análogamente se verifica que la función **coseno** también es continua en toda la recta real, es decir

$$\text{sen} \in C(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \text{cos} \in C(\mathbb{R}).$$

5. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / (x-1)^2(x-4) \geq 0\}$ y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2(x-4)}, \quad \forall x \in A.$$

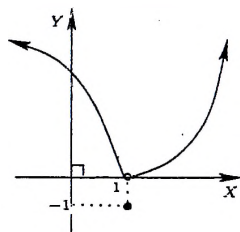
Entonces f es continua en 1, puesto que 1 es un punto aislado del dominio A de esta función.



6. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x > 1 \\ -1 & , x = 1 \\ \sqrt{-x+1} & , x < 1 \end{cases}$$

Observamos que:



- 1 es un punto de acumulación del dominio de f .
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.
- Pero $f(1) = -1$.

Por lo tanto, f no es continua en 1.

7. Sea $f: [-3, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & , -3 \leq x < 1 \\ x^2 - 2x + 3 & , 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

¿Es la función f continua en 1?

Solución.- Vemos que $1 \in D_f = [-3, 3)$ y es un punto de acumulación del mismo, luego debemos averiguar si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

En efecto: como los límites laterales son

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 2) = -1 \quad y$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2x + 3) = 2$$

inferimos que no existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Por lo tanto, f no es continua en 1.

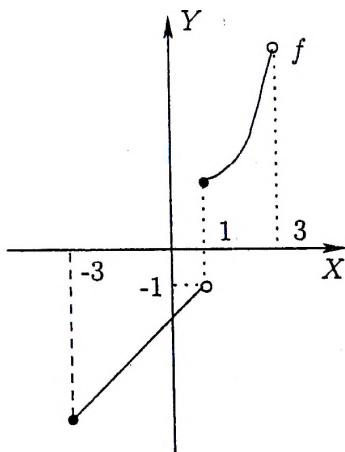


Figura 6.4: f es continua a derecha en 1.

8. Si $f(x) = \frac{3x - 5}{x - 2} \quad \forall x \neq 2$, entonces $f \in C(\mathbb{R} \setminus \{2\})$ puesto que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ si } x_0 \neq 2.$$

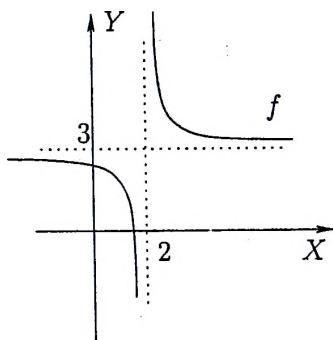


Figura 6.5: f no es continua en 2

Si una función no es continua en un determinado punto, se dice que esta función es discontinua en dicho punto. Más aún, es posible clasificar esta discontinuidad en discontinuidad eliminable o no eliminable, y si no es eliminable puede ser finita o infinita como pasamos a definir.

Definición 6.1.3 Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función real y a un número real fijo. Se dice que f tiene una **discontinuidad eliminable** en a si existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, pero $f(a)$ no existe o no coincide con este límite.

El ejemplo 6 nos muestra una función con discontinuidad eliminable en el punto 1.

Nota: Una función con discontinuidad eliminable en a puede "convertirse" en continua redefiniéndola en a como $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, es decir

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in D \setminus \{a\} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) & , x = a \end{cases}$$

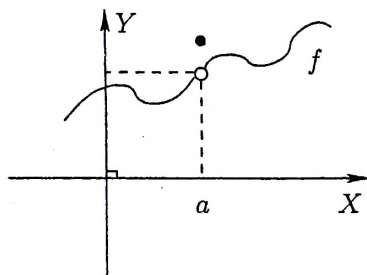


Figura 6.6: Discontinuidad eliminable

Definición 6.1.4 Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función y a un número real fijo. Se dice que f tiene una **discontinuidad finita** en a si existen $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ pero no son iguales.

La función dada en el ejemplo 7 muestra una discontinuidad finita en el punto 1

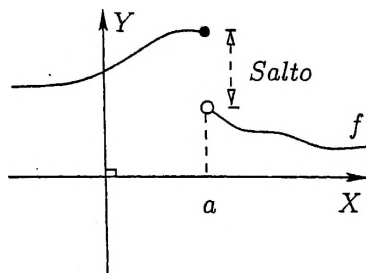


Figura 6.7: Discontinuidad finita

Definición 6.1.5 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función y a un número real fijo. Se dice que f tiene una discontinuidad infinita en a si uno de los límites laterales, o ambos, son infinitos.

El ejemplo 8 nos da una función con discontinuidad infinita en 2

Nota: Cuando la función f tiene discontinuidad infinita en el punto a , la recta $\mathcal{L} : x = a$, es una asíntota vertical de esta función.

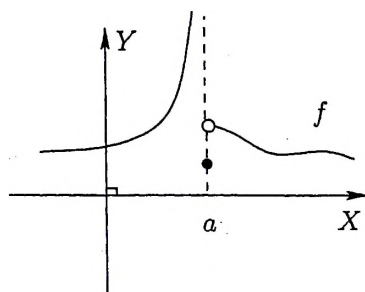


Figura 6.8: Discontinuidad infinita

6.2 Propiedades Básicas

Teorema 6.2.1 Álgebra de las funciones continuas

Sean f y g funciones reales con dominios D_f y D_g respectivamente, $x_0 \in D_f \cap D_g$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f y g son continuas en x_0 entonces

$$f + g, f - g, \lambda f, fg \text{ y } \frac{f}{g} \text{ (si } g(x_0) \neq 0)$$

son continuas en x_0 .

Prueba: (Es consecuencia inmediata de la teoría de límites.) □

Veamos algunos ejemplos de aplicación de este teorema:

Ejemplo 6.2.1 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

Como la función $x \mapsto \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x \neq 0$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (al ser cociente de dos funciones continuas), y como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 = f(0)$, se concluye que $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Ejemplo 6.2.2 Como toda función polinomial es continua en \mathbb{R} , aplicando el teorema anterior se tiene que toda función racional

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

es continua en todo su dominio, es decir

$$r \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2, \dots, r_k \mid q(r_i) = 0, 1 \leq i \leq k\})$$

Ejemplo 6.2.3 Teniendo en cuenta que:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ y } \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

aplicando el teorema anterior, concluimos que todas las funciones trigonométricas son continuas en sus respectivos dominios.

Si la función f o la función g (o ambas) son discontinuas en el punto a , el teorema anterior no afirma nada sobre la continuidad de $f + g$, $f - g$, fg , f/g . Por ejemplo, si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones reales definidas por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & , x \neq 1 \\ 3 & , x = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 3x - 2 & , x \neq 1 \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$$

es fácil ver que ni f ni g son continuas en 1; sin embargo, la función suma $f + g$, que está dada por

$$(f + g)(x) = \begin{cases} 4x - 1 & , x \neq 1 \\ 3 & , x = 1 \end{cases}$$

sí es continua en 1.

Teorema 6.2.2 Continuidad y Sucesiones

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sea $a \in D$ un punto de acumulación de este dominio, son equivalentes:

i) f es continua en a .

ii) Para toda sucesión (x_n) en $D \setminus \{a\}$, $f(x_n) \rightarrow f(a)$, si $x_n \rightarrow a$.

Prueba:

Basta recordar que f es continua en a si y sólo si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ y aplicar el teorema correspondiente de *límites y sucesiones* del capítulo anterior. \square

Ejemplo 6.2.4 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in \mathbb{Q} \\ -2x & , x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en 0.

En efecto: Sea $\varepsilon > 0$. Debemos demostrar que

$$\exists \delta > 0 : 0 < |x| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon.$$

Observemos que

$$\text{si } x \in \mathbb{Q} : |f(x)| = |x| \leq 2|x|$$

$$\text{si } x \in \mathbb{I} : |f(x)| = |-2x| = 2|x|$$

Entonces $|f(x)| \leq 2|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora, si $0 < |x| < \delta \implies |f(x)| \leq 2|x| < 2\delta = \varepsilon$.

Así, f es continua en 0.

Ejemplo 6.2.5 Pruebe que el único punto de continuidad de la función f del ejemplo 6.2.4 es el 0.

En efecto:

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Sabemos que existen sucesiones (r_n) y (α_n) tales que $r_n \in \mathbb{Q}$, $\alpha_n \in \mathbb{I}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y que además

$$r_n \rightarrow a \text{ y } \alpha_n \rightarrow a.$$

Si f fuese continua en a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n),$$

es decir

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2\alpha_n) = -2a, \quad a \neq 0 \quad (\text{¡Absurdo!}).$$

Por lo tanto f no es continua en a para $a \neq 0$, y teniendo en cuenta el ejemplo anterior concluimos que cero es el único punto de continuidad de f .

Ejemplo 6.2.6 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{1}{x}) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

¿Es la función f continua en 0?

Respuesta:

Como $D_f = \mathbb{R}$ y 0 es un punto de acumulación de \mathbb{R} , aplicaremos el teorema precedente. Tomando la sucesión:

$$x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi},$$

vemos que $x_n \rightarrow 0$, y como $f(x_n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, se infiere que

$$f(x_n) \not\rightarrow f(0) = 0.$$

Por lo tanto esta función no es continua en el 0.

Teorema 6.2.3 Continuidad de la Composición

Sean f y g funciones reales con dominios D_f y D_g respectivamente. Si f es continua en $c \in D_f$ y g es continua en $f(c) \in D_g$, entonces $g \circ f$ es continua en c .

Prueba: Sea (x_n) una sucesión en $D_{g \circ f}$ tal que $x_n \rightarrow c$, es decir

$$x_n \in D_f, \quad f(x_n) \in D_g \quad \text{y} \quad x_n \rightarrow c.$$

Siendo f continua en c , $f(x_n) \rightarrow f(c)$. Y como g es continua en $f(c)$, $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(c))$. Por lo tanto para toda sucesión (x_n) en $D_{g \circ f}$ tal que $x_n \rightarrow c$, se tiene que $(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(c)$. Así, $g \circ f$ es continua en c . \square

Ejemplos.-

1. Como la función $g(x) = x^2 - 3x + 2$ es continua en 0 y la función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $2 = g(0)$, concluimos que la función compuesta $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ es continua en el 0.
2. Si $f(x) = \text{sen} \left(\cos \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right) \right)$, entonces $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ (¿ por qué?).
3. Si $f(x) = \cos \left(\frac{1}{x-1} \right)$, entonces $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \setminus \{1\})$.

Proposición 6.2.4 Cortesía de la Continuidad

Sean f, g dos funciones reales y a un punto de acumulación del dominio de f . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y g es continua en L entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(L)$, es decir

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)$$

Prueba: Sea $\varepsilon > 0$.

Como g es continua en L , $\exists \eta > 0$ tal que

$$y \in D_g \wedge |y - L| < \eta \implies |g(y) - g(L)| < \varepsilon. \quad (6.1)$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, para $\eta > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$$x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \eta \quad (6.2)$$

luego, si

$$0 < |x - a| < \delta \wedge x \in D_{g \circ f} \implies x \in D_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \wedge f(x) \in D_g$$

$$\stackrel{(6.2)}{\implies} |f(x) - L| < \eta \wedge f(x) \in D_g$$

$$\stackrel{(6.1)}{\implies} |g(f(x)) - g(L)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(L)$. □

Ejemplos:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}(\cos x) = \operatorname{sen}\left(\lim_{x \rightarrow 0} \cos x\right) = \operatorname{sen} 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pi} (\cos x)^{10} = \left(\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x\right)^{10} = (-1)^{10} = 1.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -5} \sqrt{|x-3|} = \sqrt{\left|\lim_{x \rightarrow -5} (x-3)\right|} = 2\sqrt{2}.$$

6.3 El Teorema del Valor Intermedio

Teorema 6.3.1 Teorema del Valor Intermedio (T.V.I)

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua tal que $f(a) \neq f(b)$ (digamos $f(a) < f(b)$). Si $k \in \mathbb{R}$ es tal que $f(a) < k < f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Prueba: Si $C = \{x \in [a, b] / f(x) < k\}$, vemos que $C \neq \emptyset$ por cuanto $a \in C$; además, b es una cota superior de C , por lo tanto $\exists c = \sup C$. Observe que $a \leq c \leq b$.

Afirmamos que $f(c) = k$

$$1. \underline{f(c) \leq k}$$

Siendo $c = \sup C$, $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in C / c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$, por lo tanto $x_n \rightarrow c$, y como f es continua en c , $f(x_n) \rightarrow f(c)$. Por otro lado, $f(x_n) < k$ pues $x_n \in C$. Luego, tomando límite se concluye que $f(c) \leq k$.

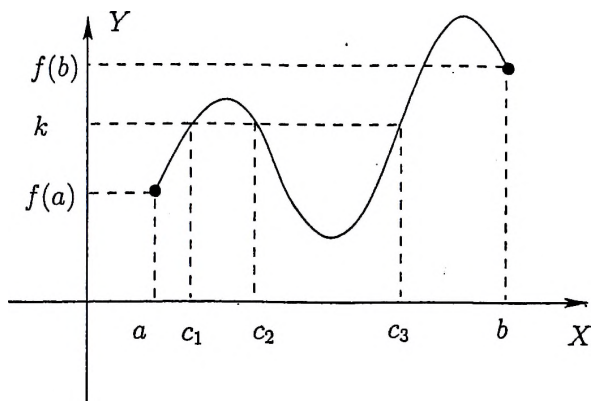


Figura 6.9: Teorema del Valor Intermedio

2. $f(c) \geq k$

Como $f(c) \leq k < f(b)$ implica que $c < b$ ($\therefore b - c > 0$), entonces existe $N \in \mathbb{N}$ / $\frac{1}{N} < b - c$, es decir $c + \frac{1}{N} < b$.

Ahora, si $n > N$ tenemos que $\frac{1}{n} < \frac{1}{N}$, así

$$c + \frac{1}{n} < b \quad \forall n > N.$$

Luego, definiendo

$$y_m = c + \frac{1}{N + m}$$

vemos que $y_m \rightarrow c$ y $a \leq c < y_m \leq b$, y siendo f continua en c , concluimos que $f(y_m) \rightarrow f(c)$. Por otro lado, como $y_m \notin C$ (pues $c < y_m$), se debe cumplir $f(y_m) \geq k$. Así, tomando límite cuando m tiende al infinito se obtiene que $f(c) \geq k$. \square

Corolario 6.3.1 Teorema del Cero

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua. Si $f(a)f(b) < 0$ entonces $\exists c \in (a, b)$ / $f(c) = 0$.

Prueba: Este es un caso particular del teorema del valor intermedio tomando $k = 0$. \square

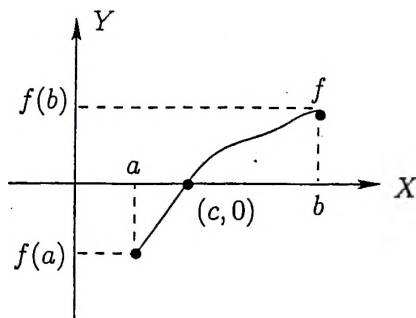


Figura 6.10: Teorema del Cero

Corolario 6.3.2 Existencia de la raíz n -ésima

Si $a > 0$ y $n = 2, 3, 4, \dots$, entonces existe un único $b > 0$ tal que $b^n = a$.

Prueba:Existencia

Si $f : [0, a + 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por $f(x) = x^n$ para todo $x \in [0, a + 1]$, tenemos que $f \in C([0, a + 1])$, $f(0) = 0$ y

$$f(a + 1) = (1 + a)^n \geq 1 + na \geq 1 + a > a$$

es decir $f(0) < a < f(a + 1)$. Luego, por el teorema del cero $\exists b \in (0, a + 1) / f(b) = a$, es decir

$$\exists b > 0 / b^n = a.$$

Unicidad

Si además de b existe $c > 0 / c^n = a$ ($\therefore b^n = c^n$) tenemos que

$$(b - c)[b^{n-1} + b^{n-2}c + \dots + c^{n-1}] = 0$$

$$\therefore b = c$$

Definición 6.3.1 Dado $a > 0$, denotamos por $\sqrt[n]{a}$ al único número real positivo tal que $(\sqrt[n]{a})^n = a$

En particular tenemos bien definido a

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[20]{7}, \text{ etc.}$$

Definición 6.3.2 Sean $a > 0$ y $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Si $r > 0$, definimos $a^r = (\sqrt[n]{a})^m$

Si $r < 0$, definimos $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$

Si $r = 0$, definimos $a^0 = 1$

Nota: En el curso cálculo integral o análisis matemático se podrá definir $a^x \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, usando la función exponencial que a su vez se define usando la teoría de integrales o la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (solución de un problema de Cauchy).

Corolario 6.3.3 Teorema del Punto Fijo

Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ es una aplicación continua, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$ (x_0 es un punto fijo de f).

Prueba: Definimos $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(x) = f(x) - x \forall x \in [a, b]$ y como $a \leq f(a)$ y $f(b) \leq b$, tenemos que

$$F \in C([a, b]) \text{ y } F(b) \leq 0 \leq F(a).$$

Si $F(a) = 0$ ó $F(b) = 0$, la prueba termina, pues en este caso $f(a) = a$ o $f(b) = b$. En caso contrario, $F(b) < 0 < F(a)$, luego por el teorema del cero, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $F(x_0) = 0$

$$\therefore \exists x_0 \in [a, b] \text{ / } f(x_0) = x_0.$$

□

Corolario 6.3.4 ; Un problema clásico !

Toda función polinomial de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

Prueba: Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ con n impar. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $a_n > 0$. Entonces

$$p(x) = x^n \left[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right] \text{ y } p \in C(\mathbb{R}).$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$, concluimos que existen $b > 0$ y $a > 0$ tales que $p(a) < 0 < p(b)$, luego por el teorema del cero, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $p(x_0) = 0$. □

6.4 El Teorema de los Valores Extremos (T.V.E)

En esta sección probaremos el T.V.E. usando el teorema de Bolzano-Weierstrass, y aquí presentamos una de las demostraciones más bellas de este último (entendible a este nivel) y para este fin necesitamos el concepto de subsucesión.

Definición 6.4.1 Sea (x_n) una sucesión en \mathbb{R} y sea (k_n) una sucesión estrictamente creciente en \mathbb{N} (i.e. $k_i \in \mathbb{N}$ y $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$). La sucesión (x_{k_n}) es llamada subsucesión de (x_n) , es decir

$$\begin{array}{ccccc} x \circ k : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & k_n \longmapsto x_{k_n} \end{array}$$

Ejemplos de Subsucesiones.

1. A partir de la sucesión $(x_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ tenemos las siguientes subsucesiones:

$$\text{Si } k_n = 2n - 1 \implies (x_{k_n}) : 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$$

$$\text{Si } j_n = n! \implies (x_{j_n}) : 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, \dots$$

2. Si $x_n = (-1)^n$ es el término n -ésimo de la sucesión (x_n) , tomando $k_n = 2n$ y $j_n = 2n + 1$ obtenemos las siguientes subsucesiones:

$$(x_{k_n}) : 1, 1, 1, \dots$$

$$(x_{j_n}) : -1, -1, -1, \dots$$

Note aquí que la sucesión (x_n) no es convergente, pero ambas subsucesiones (x_{k_n}) , (x_{j_n}) sí son convergentes.

Lema 6.4.1 Si $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una sucesión estrictamente creciente en \mathbb{N} , entonces

$$k_n \geq n.$$

Prueba: Como $k_1 \in \mathbb{N}$ inferimos que $k_1 \geq 1$. Ahora supongamos que $k_h \geq h$ (hipótesis auxiliar), veamos que $k_{h+1} \geq h + 1$. En efecto, siendo k estrictamente creciente tenemos que

$$k_{h+1} > k_h \implies k_{h+1} > k_h \geq h \implies k_{h+1} > h$$

de donde $k_{h+1} \geq h + 1$

□

Proposición 6.4.1 Sea (x_{k_n}) una subsucesión de (x_n) . Si $x_n \rightarrow L$ entonces $x_{k_n} \rightarrow L$.

Prueba: Sea $\varepsilon > 0$.

$$\text{Como } x_n \rightarrow L, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon \quad (6.3)$$

Ahora, si $n \geq n_0 \Rightarrow k_n \geq k_{n_0} \geq n_0 \stackrel{(6.3)}{\Rightarrow} |x_{k_n} - L| < \varepsilon$.

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |x_{k_n} - L| < \varepsilon$$

□

Teorema 6.4.2 Teorema de Bolzano-Weierstrass

Toda sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente.

Prueba: Sea (a_n) una sucesión acotada, es decir

$$\exists M > 0 / -M \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ entonces $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq -M$, por lo tanto $\exists b \in \mathbb{R}$ tal que $b_n \rightarrow b$.

1. Sea $k_1 \in \mathbb{N}$ (arbitrario). Como $b_{k_1} = \sup\{a_{k_1}, a_{k_1+1}, \dots\}$

$$\exists r_1 \geq k_1 / b_{k_1} - 1 < a_{r_1} \leq b_{k_1} \quad (\because -1 < a_{r_1} - b_{k_1} \leq 0 < 1)$$

2. Si elegimos $k_2 \in \mathbb{N} / k_2 > r_1$ y teniendo en cuenta que

$$b_{k_2} = \sup\{a_{k_2}, a_{k_2+1}, \dots\}$$

$$\exists r_2 \geq k_2 / b_{k_2} - \frac{1}{2} < a_{r_2} \leq b_{k_2} \quad (\because -\frac{1}{2} < a_{r_2} - b_{k_2} \leq 0 < \frac{1}{2})$$

3. Si elegimos $k_3 \in \mathbb{N} / k_3 > r_2$ y teniendo en cuenta que

$$b_{k_3} = \sup\{a_{k_3}, a_{k_3+1}, \dots\}$$

$$\exists r_3 \geq k_3 / b_{k_3} - \frac{1}{3} < a_{r_3} \leq b_{k_3} \quad (\because -\frac{1}{3} < a_{r_3} - b_{k_3} \leq 0 < \frac{1}{3})$$

Observe que

$$r_3 \geq k_3 > r_2 \geq k_2 > r_1 \geq k_1.$$

Por lo tanto, existen dos subsucesiones (b_{k_n}) y (a_{r_n}) de (b_n) y (a_n) respectivamente, tales que

$$|a_{r_n} - b_{k_n}| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $b_n \rightarrow b$ y aplicando la proposición anterior, $b_{k_n} \rightarrow b$, de donde concluimos que

$$a_{r_n} = (a_{r_n} - b_{k_n}) + b_{k_n} \rightarrow 0 + b = b$$

□

Ahora teniendo a la mano el Teorema de Bolzano Weierstrass, estamos ya en condiciones de demostrar el Teorema de los Valores Extremos, y como consecuencia de este último resultado generalizamos el T.V.I.

Teorema 6.4.3 Teorema de los Valores Extremos (T.V.E)

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación continua, entonces

1. f está acotada.
2. Existen $c, d \in [a, b]$ tales que $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in [a, b]$.

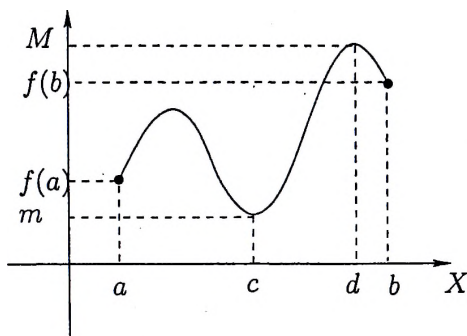


Figura 6.11: Teorema de los Valores Extremos

Prueba:

1. Supongamos que f no es acotada, es decir

$$\sim (\exists M > 0 / \forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M)$$

luego

$$\forall M > 0 \exists x \in [a, b] / |f(x)| > M.$$

En particular

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b] / |f(x_n)| > n \quad (6.4)$$

Como $a \leq x_n \leq b$, por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión (x_{k_n}) de (x_n) tal que $x_{k_n} \rightarrow x_0 \in [a, b]$. Luego, la continuidad de f en x_0 permite concluir que $f(x_{k_n}) \rightarrow f(x_0)$; en particular $\exists L \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|f(x_{k_n})| \leq L, \forall n \in \mathbb{N} \quad (6.5)$$

Ahora, si elegimos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > L$ (Propiedad Arquimediana), tenemos que $k_{n_0} \geq n_0 > L$, así

$$L \stackrel{(6.5)}{\geq} |f(x_{k_{n_0}})| \stackrel{(6.4)}{>} k_{n_0} > L,$$

lo que claramente es absurdo. Por lo tanto f está acotada.

2. Siendo f acotada en $[a, b]$, podemos asegurar que existe $\sup_{x \in [a, b]} f(x)$, en particular $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b]$ tal que

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

luego

$$f(x_n) \rightarrow \sup_{x \in [a, b]} f(x) \quad (6.6)$$

Por otro lado, como $x_n \in [a, b]$, por el teorema de Bolzano Weierstrass existe (x_{k_n}) subsucesión de (x_n) tal que $x_{k_n} \rightarrow d \in [a, b]$, luego de la continuidad de f en d concluimos que

$$f(x_{k_n}) \rightarrow f(d).$$

Además, siendo $(f(x_{k_n}))$ una subsucesión de $(f(x_n))$, la ecuación (6.6) nos permite inferir que

$$f(x_{k_n}) \rightarrow \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Finalmente, por la unicidad del límite (de sucesiones), tenemos que

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(d).$$

Análogamente, existe $c \in [a, b]$ tal que $\inf_{x \in [a, b]} f(x) = f(c)$. Así, existen $c, d \in [a, b]$ tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$, $\forall x \in [a, b]$. \square

Notación.-

$$m =: f(c) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad y \quad M =: f(d) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Corolario 6.4.1 Generalización del T.V.I

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua y no constante.

Si $\min_{x \in [a, b]} f(x) < k < \max_{x \in [a, b]} f(x)$ entonces $\exists x_1 \in (a, b) / f(x_1) = k$.

Prueba: Por el T.V.E., existen $c, d \in [a, b]$ tales que $m =: f(c) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ y $M =: f(d) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$, es decir $f(c) < k < f(d)$. Luego, por el T.V.I. aplicado a $[c, d]$ o a $[d, c]$ (según sea el caso), existe x_1 entre c y d tal que $f(x_1) = k$. Por lo tanto, existe $x_1 \in (a, b)$ tal que $f(x_1) = k$. \square

Corolario 6.4.2 Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces

$R_f = [m, M]$. En particular, $f: [a, b] \rightarrow [m, M]$ es una función sobreyectiva.

Prueba: (La prueba es obvia ¿o no?).

Corolario 6.4.3 Sea I un intervalo. Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación continua, entonces $f(I)$ es un intervalo.

Prueba: Si $b_1, b_2 \in f(I)$, existen $a_1, a_2 \in I$ tales que $b_1 = f(a_1)$ y $b_2 = f(a_2)$. Debemos demostrar que $[b_1, b_2] \subseteq f(I)$.

En efecto: Sea $b \in [f(a_1), f(a_2)]$. Si $b = f(a_1)$ o $b = f(a_2)$, $b \in f(I)$. Supongamos ahora que $f(a_1) < b < f(a_2)$, luego por el T.V.I. existe c en $(a_1, a_2) \subseteq I$ o en $(a_2, a_1) \subseteq I$ tal que $b = f(c) \in f(I)$. Por lo tanto, $f(I)$ es un intervalo. \square

6.5 Continuidad de la Función Inversa

La continuidad de la inversa de una función continua es un resultado propio de las funciones reales de variable real, es decir, si f es una función de A en B ($A, B \subseteq \mathbb{R}$) continua y biyectiva, entonces la función inversa f^{-1} de B en A también es continua. Sin embargo, esto no es cierto en general. Precisamente en esta sección probaremos este resultado utilizando para esto nuevamente las sucesiones de números reales. Antes algunos resultados previos:

Lema 6.5.1 Sea (a_n) una sucesión acotada. Si toda subsucesión convergente de (a_n) converge a un mismo límite L , entonces $a_n \rightarrow L$.

Prueba: Procedamos por contradicción. Supongamos que $a_n \not\rightarrow L$, es decir

$$\sim [\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} : n > N \implies |a_n - L| < \varepsilon]$$

o equivalentemente

$$\exists \varepsilon_0 > 0 / \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} : n > N \wedge |a_n - L| \geq \varepsilon_0$$

Construimos ahora una subsucesión de (a_n) , de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \text{Para } N = 1 & \exists k_1 \in \mathbb{N} / k_1 > 1 & \wedge |a_{k_1} - L| \geq \varepsilon_0 \\ \text{Para } N = k_1 & \exists k_2 \in \mathbb{N} / k_2 > k_1 & \wedge |a_{k_2} - L| \geq \varepsilon_0 \\ \text{Para } N = k_2 & \exists k_3 \in \mathbb{N} / k_3 > k_2 & \wedge |a_{k_3} - L| \geq \varepsilon_0 \\ & \vdots & \\ \text{Para } N = k_{n-1} & \exists k_n \in \mathbb{N} / k_n > k_{n-1} & \wedge |a_{k_n} - L| \geq \varepsilon_0 \end{array}$$

Obviamente (a_{k_n}) es una subsucesión acotada de (a_n) , luego por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión $(a_{l_{k_n}})$ de (a_{k_n}) de tal manera que $(a_{l_{k_n}})$ es convergente, y por la hipótesis, $a_{l_{k_n}} \rightarrow L$, lo que está en contradicción con $|a_{l_{k_n}} - L| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. \square

Teorema 6.5.1 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, entonces su inversa $f^{-1} : [m, M] \rightarrow [a, b]$ también es continua e inyectiva.

Prueba: Sea $y_0 \in [m, M]$ y sea (y_n) en $[m, M] \setminus \{y_0\}$ tal que $y_n \rightarrow y_0$. Observamos que $y_n = f(x_n)$ y $y_0 = f(x_0)$ donde $x_0, x_n \in [a, b]$, luego

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0) \tag{6.7}$$

Debemos demostrar que $x_n = f^*(f(x_n)) \rightarrow f^*(f(x_0)) = x_0$.

En efecto: sea (x_{k_n}) una subsecuencia de (x_n) tal que $x_{k_n} \rightarrow r$. Como $r \in [a, b]$, de la continuidad de f se infiere que $f(x_{k_n}) \rightarrow f(r)$. Por otro lado, de 6.7 tenemos que $f(x_{k_n}) \rightarrow f(x_0)$, luego por la unicidad del límite de sucesiones concluimos que $f(r) = f(x_0)$, por tanto $r = x_0$ (pues f es inyectiva). Así, $x_{k_n} \rightarrow x_0$. Finalmente, usando el lema precedente, $x_n \rightarrow x_0$. \square

Proposición 6.5.2 Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, entonces la función inversa $f^* : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva.

Prueba: (Vea la lista de ejercicios).

Ejemplos.-

1. La función $\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, luego su inversa $\text{arcsen} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ también es continua e inyectiva.
2. La función $\text{cos} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, luego su inversa $\text{arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ también es continua e inyectiva.
3. La función $\text{tan} : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, luego su inversa $\text{arctan} : \mathbb{R} \rightarrow \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ también es continua e inyectiva.

6.6 Ejercicios Resueltos

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x + 1 & , \quad x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

- (a) Pruebe que f es continua en 1.
- (b) ¿Es la función f continua en -2?
- (c) Pruebe que f es discontinua en a si $a \neq 1$ y -2 .

Solución:

(a) Sea $\varepsilon > 0$. Observamos que:

Para $x \in \mathbb{Q}$, $|f(x) - f(1)| = |x + 1| \cdot |x - 1| < 3|x - 1|$ (siempre que $|x - 1| < 1$), y para $x \in \mathbb{I}$, $|f(x) - f(1)| = |x - 1|$.

Así $|f(x) - f(1)| = |f(x)| < 3|x - 1| \forall x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - 1| < 1$.
Luego elegimos $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$ y tenemos que

$$\text{Si } |x - 1| < \delta \implies |f(x) - f(1)| < 3|x - 1| < 3\delta \leq \varepsilon.$$

Es decir, f es continua en 1.

(b) En este caso la respuesta es afirmativa, es decir, la función f sí es continua en -2. La prueba es análoga al ítem anterior, tomando $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$.

(c) Sea $a \neq 1$ y -2 . Supongamos además que f sea continua en a . Sabemos que existen $r_n \in \mathbb{Q}$ y existen $\alpha_n \in \mathbb{I}$ tales que:

$$r_n \rightarrow a \text{ y } \alpha_n \rightarrow a$$

luego por la hipótesis $f(r_n) \rightarrow f(a)$ y $f(\alpha_n) \rightarrow f(a)$, es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n)$ o bien $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n^2 - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n - 1)$, lo que implica que $a = 1$ ó $a = -2$ (¡Contradicción!). Así, los únicos puntos de continuidad de esta función son -2 y 1 . \square

2. Sea $f: \langle -\infty, 3 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + x - 1 & , \quad x \leq -1 \\ \frac{-2x^2 + x + b}{x^2 + 1} & , \quad -1 < x \leq 1 \\ a^2x^2 - 10x - 4 & , \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Hallar los valores de a y b de modo que f sea continua en todo su dominio.

Solución:

Es fácil notar que f es continua en $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 1, 3 \rangle$; luego, para que f sea continua en todo su dominio sólo falta ver su continuidad cuando $x = 1$ y cuando $x = -1$.

En efecto:

f es continua en -1 si y sólo si $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$, equivalentemente

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1) \text{ o bien } a - 3 = \frac{b-3}{2}, \text{ de donde}$$

$$b = 2a - 3.$$

f es continua en 1 si y sólo si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, equivalentemente $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ o bien $\frac{b-1}{2} = a^2 - 14$, de donde

$$2a^2 = b + 27.$$

Por lo tanto $a = 4$ y $b = 5$ ó bien $a = -3$ y $b = -9$. \square

3. Sean f, g las funciones definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 3|x-2| - x^2 & , -1 < x < 4 \\ x-2 & , x \geq 4 \end{cases} \quad y$$

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & , x < 0 \\ \sqrt{x+16} & , x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Pruebe que f y g son discontinuas en 4 y 0 respectivamente.

(b) ¿Qué puede afirmar sobre la continuidad de $f \circ g$ en 0?

Solución: Como

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+16} = 4,$$

g es discontinua en 0. Análogamente, como

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} 3|x-2| - x^2 = -10 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x-2) = 2,$$

f es discontinua en 4.

Por otro lado, como

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 3|x-1| - (x+1)^2 & , -2 < x < 0 \\ \sqrt{x+16} - 2 & , x \geq 0 \end{cases}$$

entonces $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x) = 2$. Así $f \circ g$ es continua en el cero.

4. Sea f la función real definida por

$$f(x) = \begin{cases} c & , x = -3 \\ \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} & , |x| < 3 \\ d & , x = 3 \end{cases}$$

Encuentre los valores de c y d para que la función sea continua en $[-3, 3]$.

Solución: Note que

$$f(x) = \frac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} = 4 + \sqrt{x^2 + 7}.$$

Es claro que $f \in C((-3, 3))$. Para que esta función sea continua en 3 y -3, se debe cumplir que:

$$c = f(-3) = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} (4 + \sqrt{x^2 + 7}) = 8$$

$$d = f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (4 + \sqrt{x^2 + 7}) = 8$$

Por tanto $c = d = 8$.

5. Pruebe que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x_0 = x_0$.

Solución: Considere la función f definida por $f(x) = \cos x - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $f(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$ y $f(0) = 1$ tenemos que

$$f \in C(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad f(-\frac{\pi}{2}) < 0 < f(0),$$

luego aplicando el teorema de los ceros, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, es decir existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x_0 = x_0$.

6. Muestre que la ecuación $x^5 - 3x^2 + 1 = 0$ tiene por lo menos 3 raíces reales diferentes.

Solución: Como

$$f(-1) = -3, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = -1 \quad \text{y} \quad f(2) = 21$$

por el teorema de los ceros

$$\exists r_1 \in (-1, 0), \quad \exists r_2 \in (0, 1) \quad \text{y} \quad \exists r_3 \in (1, 2)$$

tales que

$$f(r_1) = f(r_2) = f(r_3) = 0.$$

Por lo tanto f tiene por lo menos 3 raíces reales.

7. Sea p una función polinomial definida por

$$p(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7) + (x-2)(x-4)(x-6)(x-8)$$

¿Cuántas raíces reales tiene esta función?

Justifique su respuesta.

Solución: Se tiene que f es continua en toda la recta real. En principio, siendo f una función polinomial de cuarto grado, el número de sus raíces puede ser 0, 1, 2, 3 ó 4 (!apriori no sabemos nada!); pero aplicando nuevamente el TVI en los intervalos $[1, 2]$, $[3, 4]$, $[5, 6]$ y $[7, 8]$ tenemos que:

$$\text{Como } f(2) < 0 < f(1), \exists x_1 \in (1, 2) : f(x_1) = 0$$

$$\text{Como } f(3) < 0 < f(4), \exists x_2 \in (3, 4) : f(x_2) = 0$$

$$\text{Como } f(6) < 0 < f(5), \exists x_3 \in (5, 6) : f(x_3) = 0$$

$$\text{Como } f(7) < 0 < f(8), \exists x_4 \in (7, 8) : f(x_4) = 0$$

Así, esta función tiene 4 raíces reales.

8. Sea f una función de $[0, 1]$ en \mathbb{R} continua tal que $f(0) = f(1)$. Pruebe que existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

Solución: Si $f(0) = f(\frac{1}{2})$, existe $c = 0$ que satisface la tesis.

Supongamos ahora que $f(0) \neq f(\frac{1}{2})$. Si definimos $g : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2}) \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$$

observamos que:

$$g \in C([0, \frac{1}{2}]),$$

$$g(0) = f(0) - f(\frac{1}{2}) \neq 0 \quad \text{y}$$

$$g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - f(1) = f(\frac{1}{2}) - f(0) = -g(0);$$

luego $g(0)g(\frac{1}{2}) = -g(0)^2 < 0$. Y por el T.V.I existe $c \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $g(c) = 0$

$$\therefore \exists c \in [0, \frac{1}{2}] / f(c) = f(c + \frac{1}{2}).$$

□

9. Sea $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$x^2 + f(x)^2 = 1 \text{ para todo } x \in [-1, 1].$$

Pruebe que o bien $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $\forall x \in [-1, 1]$ o bien $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, $\forall x \in [-1, 1]$ (sólo uno de ellos).

Solución:

Supongamos que existen $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ tales que $x_1 < x_2$ y $f(x_1)f(x_2) < 0$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $f(x_1) < 0 < f(x_2)$. Como f es continua en $[x_1, x_2]$, aplicando el teorema del cero en este intervalo, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(c) = 0$ entonces

$$c \in (-1, 1)$$

luego $c^2 + f(c)^2 = 1$, es decir $c = \pm 1$; evidentemente una contradicción!

Por lo tanto $f(x) > 0 \forall x \in [-1, 1]$ ó $f(x) < 0 \forall x \in [-1, 1]$ lo que implica que $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $\forall x \in [-1, 1]$ o bien $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, $\forall x \in [-1, 1]$ □

10. Analizar la continuidad de la aplicación $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 - x + [x] - [1 - x] \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Solución:

En primer lugar observamos que

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2n - 1 & , \quad n - 1 < x < n \\ n & , \quad x = n \\ -x + 2n + 1 & , \quad n < x < n + 1 \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Como

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} (-x + 2n - 1) = n - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} (-x + 2n + 1) = n + 1$$

concluimos que f es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, y es discontinua en cada punto de \mathbb{Z} . □

6.7 Ejercicios Propuestos

1. Determinar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones, construir su gráfica e indicar el tipo de discontinuidad:

$$(a) h(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} & \text{si } x \neq -3 \\ 1 & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} x + 2 & , \text{ si } -3 \leq x \leq -1 \\ -x & , \text{ si } -1 < x \leq 1 \\ x^2 - 1 & , \text{ si } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

2. Redefinir las siguientes funciones de manera que resulten continuas en el punto que se indica.

$$(a) f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}, \text{ en } x = 1.$$

$$(b) f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{x}, \text{ en } x = 0.$$

$$(c) g(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}, \text{ en } x = 0.$$

3. Determinar la continuidad de la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \sqrt{|x| - [x]} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

en los intervalos $[-2, 0)$ y $[1, 2]$.

4. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en 0.

5. En las siguientes funciones hallar los intervalos de continuidad y de discontinuidad

(a) $f(x) = [\sqrt{x+1}]$

(b) $f(x) = \sqrt{|x| + [x]}$

6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x - [x]| & \text{si } [x] \text{ es par} \\ |x - [x + 1]| & \text{si } [x] \text{ es impar} \end{cases}$$

Hallar los intervalos de continuidad y de discontinuidad de f .

7. Si $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(a) ¿Son f y g continuas en $x = 0$?

(b) ¿Serán $f + g$ y fg continuas en $x = 0$?

8. Si $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \right) & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ y

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{2+x} - \sqrt{2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{2}} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) ¿Son f y g continuas en $x = 0$?

(b) ¿Serán $f - g$ y $\frac{f}{g}$ continuas en $x = 0$?

9. Si $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^2+1}}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ y

$$g(x) = \begin{cases} x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) ¿Son f y g continuas en $x = 0$?

(b) ¿Serán $f + g$ continua en $x = 0$?

10. Pruebe que si f es continua en a , también lo es $|f|$.

11. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ para algún $K > 0$. Pruebe que f es continua en cualquier $c \in \mathbb{R}$.

12. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(x) < g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que existe una función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) < 2h(x) < g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
13. Defínase $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = 2x$ para x racional y, $g(x) = x + 3$ para x irracional. Encontrar todos los puntos en los que g es continua.
14. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como sigue

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ -2x & , \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Hallar todos los puntos de continuidad y de discontinuidad.

15. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 16 & x \in \mathbb{Q} \\ 2x + 1 & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Demuestre que f tiene dos únicos puntos de continuidad. Justifique todo su procedimiento.

16. Dar un ejemplo de una función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que sea discontinua en cualquier punto de $[0, 1]$ pero tal que $|f|$ sea continua en $[0, 1]$.
17. Construya una función, discontinua en todo su dominio, cuyo cuadrado sea una función continua.
18. Sean f, g dos funciones reales de variable real definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) - \cos x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Muestre que f es continua en el cero. ¿La función g será continua en el cero? ¡Justifique su respuesta! (La relación entre f y g es que g es la "derivada" de f)

19. Supóngase que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en \mathbb{R} y que $f(r) = r$ para cualquier número racional r . Demuestre que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

20. Sean f y g continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} , y supóngase que $f(r) = g(r)$ para todos los números racionales r . ¿Es verdad que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$?
21. Se dice que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **aditiva** si $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar que si f es aditiva y continua en algún punto x_0 , entonces es continua en cualquier punto de \mathbb{R} .
22. Suponga que una función f es aditiva en \mathbb{R} y continua en el cero. Si $a = f(1)$, pruebe que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
23. Sea f una función real de variable real tal que $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que f es continua en $x = 0$.
24. Muestre que para cada d en $(3, 5)$ existe c en $(0, 1)$ tal que

$$c^8 + c^5 - c^4 + c + 3 = d.$$

25. Sea I un intervalo en \mathbb{R} . Si la función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, pruebe que f es estrictamente monótona.
26. Sean a y b dos números reales fijos. ¿Para qué valores de a la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como sigue, es continua?

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos x & x \leq c \\ ax^2 + b & x > c. \end{cases}$$

27. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad y \quad g(x) = x(1 - x^2)$$

Analice la continuidad de las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

28. Determinar los valores de a y b , tal que la función

$$f(x) = \begin{cases} -2 \operatorname{sen} x & , & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen} x + b & , & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & , & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

es continua en toda la recta real.

29. Estudie la continuidad de la función g , cuya regla de correspondencia es $g(x) = \frac{\lfloor x-2 \rfloor}{x-2}$ en el intervalo $(0, 2)$.

30. Sea $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{I} \\ \frac{1}{n} & , \quad x = \frac{m}{n} \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q} \quad \text{donde } m \text{ y } n \text{ son PESI}^* \end{cases}$$

Pruebe que:

- (a) f es continua en $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{I}$
- (b) f es discontinua en $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q}$

* PESI : primos entre sí.

Capítulo 7

Derivadas

7.1 Nociones Básicas sobre Derivación

El problema de las tangentes. Muchos problemas importantes en cálculo dependen del problema de encontrar la recta tangente a una curva dada, en un punto específico de la misma. En geometría plana, si la curva es una circunferencia, la recta tangente en un punto P de la circunferencia se define como la recta que corta a la circunferencia únicamente en el punto P . Esta definición no es suficiente para una curva en general.

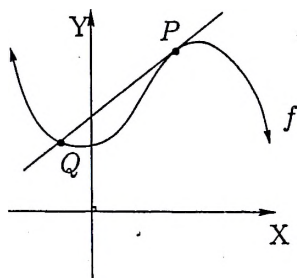


Figura 7.1: Recta tangente en P

Por ejemplo, en la figura 7.1, la recta que debería ser la recta tangente a la curva en el punto P corta a la curva en otro punto Q de la curva.

En esta sección damos una definición adecuada para la recta tangente a la gráfica de una función en un punto de dicha gráfica. El primer paso es definir la pendiente de la recta tangente, ya que si conocemos la pendiente y un punto de ella, la recta está determinada.

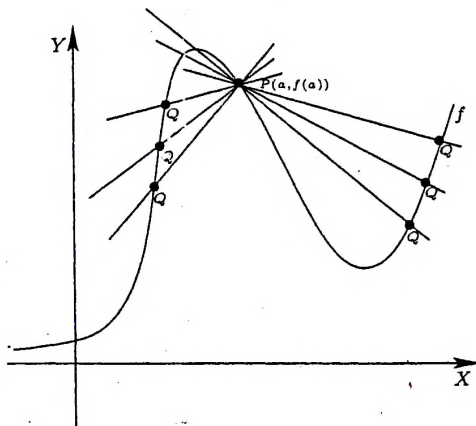


Figura 7.2: Rectas secantes en P

Sea f una función continua en a . Deseamos definir la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$. Sea I un intervalo abierto que contiene al punto a y en el cual está definida f . Sea $Q(x, f(x))$ otro punto sobre la gráfica de f , tal que x también está sobre I . Tracemos una recta secante a través de P y Q ; en la figura 7.2 se muestra la recta secante para diversos valores de x . La figura 7.1 muestra una recta secante particular; en esta figura, Q se halla a la izquierda de P , sin embargo Q puede estar ya sea a la derecha o a la izquierda de P como se observa en la figura 7.2.

Ahora representemos la diferencia de las abscisas de Q y P por h , es decir

$$h = x - a.$$

Notamos que h puede ser positivo o negativo. La pendiente de la recta

secante PQ está definida entonces por

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{h}$$

Como $x = a + h$ podemos reescribir la ecuación anterior como

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

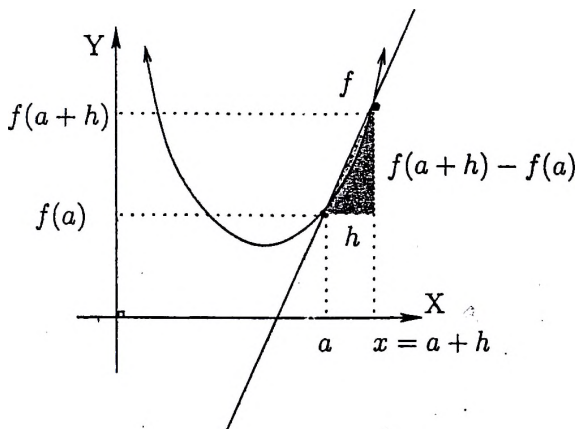


Figura 7.3: Pendiente de la recta secante

Ahora, imaginemos el punto P como un punto fijo y desplazemos al punto Q a lo largo de la curva en dirección hacia P ; es decir, Q se aproxima a P . Esto equivale a decir que h tiende a cero. Conforme esto sucede, la recta secante gira sobre el punto fijo P . Si esta recta secante tiene una "posición límite", es esta posición límite la que deseamos sea la recta tangente a la gráfica en P , es decir la pendiente buscada debe ser el límite de m_{PQ} cuando h tiende a cero, si este límite existe. Si $\lim_{h \rightarrow 0} m_{PQ} = +\infty$ ó $-\infty$, entonces cuando h tiende a cero, la recta PQ se aproxima a la recta que pasa por P y es paralela al eje Y . En este caso queremos que la recta tangente a la gráfica en P sea la recta vertical de ecuación $x = a$. Todo este análisis nos condujo a la siguiente definición.

Definición 7.1.1 Sea f una función continua en a . La recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es:

1. la recta a través de P , cuya pendiente $m(a)$ se define como

$$m(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

si el límite existe.

2. la recta $x = a$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty \text{ ó } -\infty.$$

Si ni (1) ni (2) de esta definición se cumplen, entonces no existe recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$.

Definición 7.1.2 La recta normal a una curva en un punto dado es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto.

Al tratar de resolver el problema de las tangentes vemos la necesidad de calcular un límite (notable); este límite también se presenta en muchos otros problemas reales y tiene un nombre propio que pasamos a definir y estudiar.

Definición 7.1.3 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in I$ donde I es un intervalo. Se dice que f es derivable en el punto a si existe el siguiente límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \left(= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right).$$

A este límite se le denota por $f'(a)$ y se llama la derivada de f en a .

Definición 7.1.4 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en por lo menos un punto de I donde I es un intervalo y sea $J = \{a \in I / f \text{ es derivable en } a\}$. La función $f' : J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \forall x \in J$$

se llama la derivada de f .

Observación. Si f es una función derivable en el punto a entonces la recta tangente \mathcal{L}_T y la recta normal \mathcal{L}_N (si $f'(a) \neq 0$) en el punto $(a, f(a))$ son:

$$\mathcal{L}_T : y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

y

$$\mathcal{L}_N : y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

Si $f'(a) = 0$ la recta tangente y recta normal en $(a, f(a))$ tienen por ecuaciones $y = f(a)$ y $x = a$ respectivamente. Ahora daremos una cantidad suficiente de ejemplos para ilustrar estas definiciones.

Ejemplo 1.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = k$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}$ (fijo, arbitrario). Luego

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow a} \frac{k - k}{h} = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) = 0 \end{aligned}$$

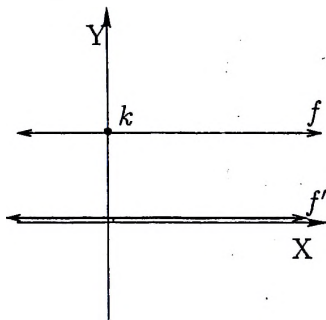


Figura 7.4: Derivada de la constante

Ejemplo 2.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}$ (fijo, arbitrario). Luego

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow a} \frac{(a+h) - a}{h} = 1.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) = 1 \end{aligned}$$

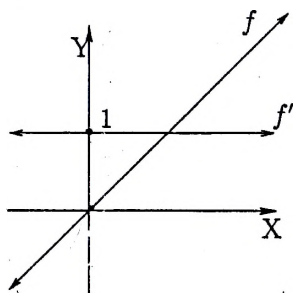


Figura 7.5: Derivada de la identidad

Ejemplo 3.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ y sea $a \in \mathbb{R}$ (fijo, arbitrario). Luego

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) = nx^{n-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.- Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{x}$ para todo $x \geq 0$, y sea $a \in \mathbb{R}^+$ (fijo, arbitrario). Luego

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f' : (0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Ahora damos una observación que usaremos en los dos siguientes ejemplos.

Observación. Como

$$\frac{1 - \cos h}{h} = \frac{(1 - \cos h)(1 + \cos h)}{h(1 + \cos h)} = \frac{\operatorname{sen} h}{(1 + \cos h)} \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h} \quad \forall h \neq 0,$$

entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos h}{h} \right) = 0.$$

Ejemplo 5.- Como

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos h + \operatorname{sen} h \cdot \cos x - \operatorname{sen} x}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) + \operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) \right] \\ &= \cos x \cdot 1 + \operatorname{sen} x \cdot 0 = \cos x, \end{aligned}$$

concluimos que

$$\boxed{\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)}$$

Ejemplo 6.- Análogamente, como

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x \cdot \cos h - \operatorname{sen} h \cdot \operatorname{sen} x - \cos x}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) - \operatorname{sen} x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right] \\ &= \cos x \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot 1 = -\operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

concluimos que

$$\boxed{\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)}$$

Ejemplo 7.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$, y sea $a \neq 0$ (fijo, arbitrario). Luego

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 8.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y sea $a \in \mathbb{R}$:

- Si $a > 0$, $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|a+h| - |a|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h) - a}{h} = 1$.
- Si $a < 0$, $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|a+h| - |a|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(a+h) + a}{h} = -1$.
- Si $a = 0$, como $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$, no existe $f'(0)$.

Observe que esta función tiene un cambio brusco (cúspide, punta o esquina) en el origen de coordenadas. Note también que esta función es continua en el cero, sin embargo no es derivable en este punto.

Ejemplo 9.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^7 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 5x & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0. \end{cases}$$

Halle $f'(0)$.

Solución.- Como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[h^6 \cos\left(\frac{1}{h}\right) - 5 \right] = -5,$$

tenemos que $f'(0) = -5$.

Ejemplo 10.- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = -\sqrt{|x|} + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observe que:

- si $x > 0$, $f(x) = -\sqrt{x} + 1$ y $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$
- si $x < 0$, $f(x) = -\sqrt{-x} + 1$ y $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}$

- ¿Existe la derivada de f cuando $x = 0$?

Respuesta: como

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-\sqrt{|x|}}{x} = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{x}} & , x > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-x}} & , x < 0 \end{cases}$$

no existe la derivada de esta función en el cero.

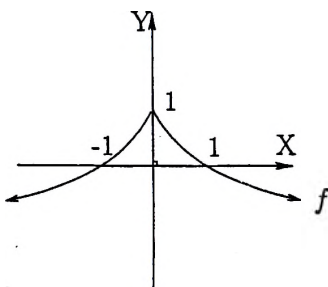


Figura 7.6: $f(x) = -\sqrt{|x|} + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

La siguiente proposición nos habla sobre la continuidad (puntual) de una función derivable.

Proposición 7.1.1 *Si una función f es derivable cuando $x = a$, entonces f es continua en $x = a$.*

Prueba: Si $x \neq a$

$$f(x) = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) (x - a) + f(a)$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a).$$

Así, f es continua en el punto a . □

El recíproco de esta proposición es en general falso. Los contraejemplos están en los ejemplos 8 y 10.

7.2 Álgebra de las derivadas

Hasta ahora hemos hallado la derivada de una función en un punto usando solamente la definición; sin embargo, para funciones más sofisticadas, esto se torna muy engorroso. Es por ello que necesitamos de algunas propiedades que faciliten su cálculo.

Teorema 7.2.1 Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones derivables en a y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $f + g$ es derivable en a y

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

2. λf es derivable en a y

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

3. fg es derivable en a y

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \text{ "Regla de Leibnitz"}$$

4. $\frac{1}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2} \quad \text{si } g(a) \neq 0.$$

Prueba:

1. Como

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) + \left(\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right)$$

tomando límite cuando $x \rightarrow a$, se concluye la prueba.

2. Basta observar que

$$\frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x - a} = \lambda \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$$

y tomar el límite respectivo.

3. Como

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) g(x) + f(a) \left(\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que g es continua en a (puesto que es derivable en a), tomando el límite cuando x tiende hacia a , concluimos que

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

4. Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ y

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = - \left(\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \cdot \frac{1}{g(x)g(a)}$$

tomando el límite cuando x tiende hacia a se completa la demostración. \square

Corolario 7.2.1 Si $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones derivables en a , entonces:

1. $f - g$ es derivable en a y $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$.
2. $\frac{f}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2} \quad \text{si } g(a) \neq 0.$$

Prueba:

1. Basta usar los ítems 1 y 2 del teorema anterior.
2. En este caso usamos los ítems 3 y 4 del teorema precedente.

Ejemplo 11.- Derivada de las Funciones Trigonómicas

Ya sabemos que:

$$\boxed{D(\operatorname{sen} x) = \cos x} \quad \text{y} \quad \boxed{D(\cos x) = -\operatorname{sen} x}$$

Ahora, si $f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, entonces:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen}' x \cos x - \operatorname{sen} x \cos' x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\therefore D(\tan x) = \sec^2 x$$

Análogamente se prueba que:

$$D(\operatorname{ctg} x) = -\operatorname{csc}^2 x$$

$$D(\sec x) = \sec x \cdot \tan x$$

$$D(\operatorname{csc} x) = -\operatorname{csc} x \cdot \operatorname{ctg} x$$

Ejemplo 12.- Sea $f(x) = x^k$ donde $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Si $k > 0$ ya sabemos que $f'(x) = kx^{k-1}$. Supongamos ahora que $k < 0$, es

decir $k = -n$ con $n \in \mathbb{N}$, luego $f(x) = \frac{1}{x^n}$ y

$$f'(x) = \frac{-(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} = kx^{k-1}$$

$$\therefore D(x^k) = kx^{k-1} \quad \forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Ejemplo 13.- Derivada de la raíz m -ésima

Sea $f(x) = \sqrt[m]{x}$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $m \geq 2$, y sea $a \in \mathbb{R}$ (para el cual existe $\sqrt[m]{a}$). Luego

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)}{(x - a) \left[\sqrt[m]{x}^{m-1} + \sqrt[m]{x}^{m-2} \sqrt[m]{a} + \dots + \sqrt[m]{a}^{m-1} \right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt[m]{a}^{m-1} + \sqrt[m]{a}^{m-2} + \dots + \sqrt[m]{a}^{m-1}} \\ &= \frac{1}{m \sqrt[m]{a}^{m-1}} = \frac{1}{m} a^{\frac{1}{m}-1} \end{aligned}$$

$$\therefore D(x^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}$$

Interrogante .-

¿Cómo hallar la derivada de la función $f(x) = x^r$ con $r \in \mathbb{Q}$?

La respuesta a esta interrogante requiere el uso de la regla de la cadena, que pasamos a estudiar.

7.3 Regla de la cadena

La regla de la cadena es un resultado muy interesante que nos enseña a derivar la composición de dos o más funciones. Presentamos aquí una demostración bastante accesible a un estudiante (¡responsable!) que recién inicia su carrera universitaria.

Teorema 7.3.1 Regla de la Cadena

Sean I, J dos intervalos y sean $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ aplicaciones tales que $f(I) \subseteq J$. Si f es derivable en $c \in I$ y g es derivable en $f(c)$, entonces $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en c y

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

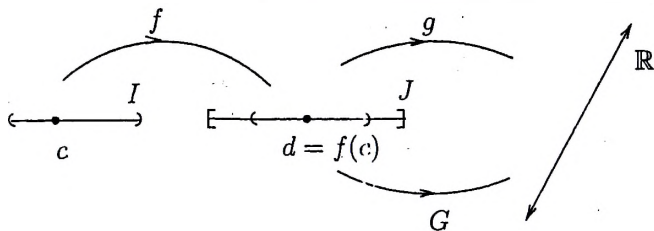


Figura 7.7: Regla de la Cadena

Prueba: Sea $d = f(c)$ y sea $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$G(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(d)}{y - d} & , y \in J \setminus \{d\} \\ g'(d) & , y = d. \end{cases}$$

Siendo g derivable en d ,

$$\lim_{y \rightarrow d} G(y) = \lim_{y \rightarrow d} \frac{g(y) - g(d)}{y - d} = g'(d) = G(d),$$

es decir, la función G es continua en d . Luego

$$\lim_{x \rightarrow c} G(f(x)) = G(f(c)) = G(d) = g'(d) = g'(f(c)) \quad (7.1)$$

Por otro lado, de la definición de G ,

$$g(y) - g(d) = G(y)(y - d) \quad \forall y \in J.$$

En particular

$$g(f(x)) - g(f(c)) = G(f(x))(f(x) - f(c)) \quad \forall x \in I.$$

Así, para $x \neq c$ en I tenemos que

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c)}{x - c} = G(f(x)) \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right).$$

Por lo tanto, tomando límite cuando $x \rightarrow c$ y usando la ecuación (7.1) concluimos que $(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c)$. \square

Ejemplo 14.-Si $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ ($n > 0$), tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= D \left[\left(x^{\frac{1}{n}} \right)^m \right] \\ &= m \left(x^{\frac{1}{n}} \right)^{m-1} \cdot D \left(x^{\frac{1}{n}} \right) \\ &= m x^{\frac{m}{n} - \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1} \end{aligned}$$

Así

$$D(x^r) = r x^{r-1} \quad \forall r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

Ejemplo 15.- Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

tenemos que

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) + x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) \left[-\frac{1}{x^2} \right] \quad \text{para } x \neq 0,$$

y como

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} h \operatorname{sen} \left(\frac{1}{h} \right) = 0;$$

concluimos que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) - \cos \left(\frac{1}{x} \right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

Note que en este ejemplo la función f' no es continua cuando $x = 0$ (¿porqué?), aun cuando la función f sí lo es. Si denotamos por $\mathcal{C}^1(I)$ al conjunto de todas las funciones reales con primera derivada continua en el intervalo I , concluimos que

$$\mathcal{C}^1(I) \subsetneq \mathcal{C}(I).$$

En general si denotamos por $\mathcal{C}^{(k)}(I)$ al conjunto de todas las funciones reales cuyas k primeras derivadas sean continuas en el intervalo I , se demuestra que

$$\dots \subsetneq \mathcal{C}^{(n)}(I) \subsetneq \mathcal{C}^{(n-1)}(I) \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{C}^{(2)}(I) \subsetneq \mathcal{C}^1(I) \subsetneq \mathcal{C}(I).$$

Ejemplo 16.- Si I es un intervalo y $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $x \in I$, entonces

$$D(f^n(x)) = n f^{n-1}(x) f'(x)$$

Ejemplo 17.- Si I es un intervalo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $x \in I$ y $f(x) > 0$, entonces

$$D(\sqrt{f(x)}) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Ejemplo 18.- Si f es la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1-x^2}} \quad \text{para todo } x \in [-1, 1],$$

entonces $f'(x) = -\frac{1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(x + \sqrt{1-x^2})^2}$. Por lo tanto

$$f'(x) = \frac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}(1 + 2x\sqrt{1-x^2})} \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle \setminus \{\sqrt{2}/2\}.$$

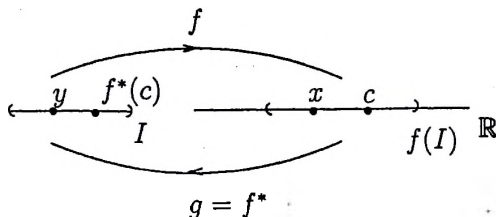
7.4 Derivada de la Función Inversa

Teorema 7.4.1 Derivada de la función inversa

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e inyectiva y sea $c \in f(I)$. Si f es derivable en $f^*(c)$ y $f'(f^*(c)) \neq 0$, entonces la función inversa de f , f^* es derivable en c y

$$(f^*)'(c) = \frac{1}{f'(f^*(c))}$$

Prueba:



Denotemos por g a la inversa de la función f , es decir $g =: f^* : f(I) \rightarrow I$. Luego debemos demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = \frac{1}{f'(g(c))} \quad (7.2)$$

Como $x \neq c$ si y sólo si $g(x) \neq g(c)$ (ya que f y g son inyectivas), demostrar la ecuación (7.2) es equivalente a demostrar

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} = f'(g(c))$$

En efecto: sea $\varepsilon > 0$.

Como f es derivable en $g(c)$, $\exists \eta > 0$ tal que

$$y \in I \wedge 0 < |y - g(c)| < \eta \implies \left| \frac{f(y) - f(g(c))}{y - g(c)} - f'(g(c)) \right| < \varepsilon \quad (7.3)$$

y siendo g continua en c , para $\eta > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$x \in f(I) \wedge |x - c| < \delta \implies |g(x) - g(c)| < \eta \quad (7.4)$$

Ahora si

$$x \in f(I) \wedge 0 < |x - c| < \delta \xrightarrow{(7.4)} g(x) \in I \wedge 0 < |g(x) - g(c)| < \eta$$

$$\xrightarrow{(7.3)} \left| \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} - f'(g(c)) \right| < \varepsilon,$$

es decir

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} = f'(g(c)).$$

Esto completa la demostración. □

Ejemplos 19 .- Como la función $\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva y su rango es el intervalo $[-1, 1]$, su inversa $\text{arcsen} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es biyectiva y

$$\begin{aligned} \text{arcsen}(\text{sen}x) &= x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \text{sen}(\text{arcsen}x) &= x \quad \forall x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

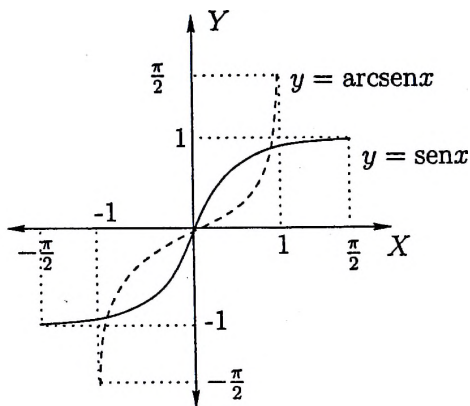


Figura 7.8: Función Seno y su Inversa

Por otro lado, para $x \in [-1, 1]$ tenemos que

$$\operatorname{sen}'(\operatorname{arcsen} x) = \cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Luego, $\operatorname{sen}'(\operatorname{arcsen} x) \neq 0$ si y sólo si $x \in \langle -1, 1 \rangle$

$$\therefore D(\operatorname{arcsen}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Ejemplo 20.- Como la función $\cos : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva y su rango es el intervalo $[-1, 1]$, su inversa $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ es biyectiva y

$$\begin{aligned} \arccos(\cos x) &= x \quad \forall x \in [0, \pi] \\ \cos(\arccos x) &= x \quad \forall x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Por otro lado, para $x \in [-1, 1]$ tenemos que

$$\cos'(\arccos x) = -\operatorname{sen}(\arccos x) = -\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Luego, $\cos'(\arccos x) \neq 0$ si y sólo si $x \in \langle -1, 1 \rangle$

$$\therefore D(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle$$

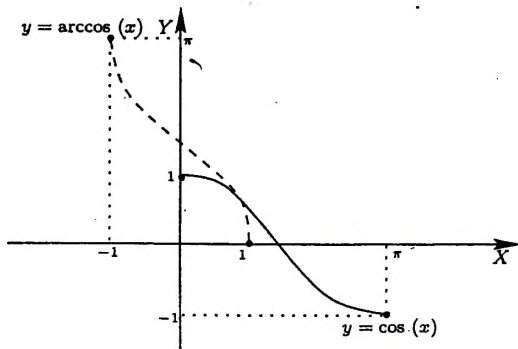


Figura 7.9: Función coseno y su Inversa

Ejemplo 21.- Como la función $\tan : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva y su rango es \mathbb{R} , su inversa $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ es biyectiva y

$$\begin{aligned}\arctan(\tan x) &= x \quad \forall x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \\ \tan(\arctan x) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Por otro lado, para $x \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\tan'(\arctan x) = \sec^2(\arctan x) = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + x^2.$$

Luego, $\tan'(\arctan x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\therefore D(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

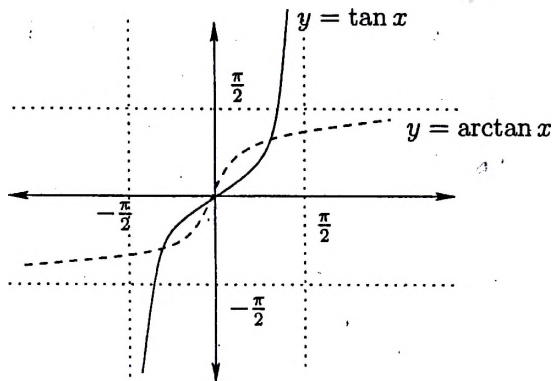


Figura 7.10: Función tangente y su Inversa

Problema.- Demuestre que:

i) $D(\operatorname{arccotg}(x)) = -\frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

ii) $D(\operatorname{arcsec}(x)) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad \text{si } |x| > 1.$

iii) $D(\operatorname{arccsc}(x)) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad \text{si } |x| > 1.$

7.5 Derivación Implícita

Consideremos la expresión

$$F(x, y) = 0$$

que indica que la relación F entre los números x e y es igual a cero. Ejemplos de esto son:

$$3x - 5y + 4 = 0 \quad (7.5)$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (7.6)$$

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \quad (7.7)$$

$$2y^5 - 3y^3 + 5y^2 + x = 0 \quad (7.8)$$

Volviendo a la expresión $F(x, y) = 0$, procedamos de la siguiente manera: Dado un $x_0 \in \mathbb{R}$, si existe al menos un $y \in \mathbb{R}$ tal que $F(x_0, y) = 0$, elegimos uno de ellos al que denotamos por y_0 y lo denominamos "imagen" de x_0 ; es decir, a cada x_0 de un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ le asignamos un elemento $y \in \mathbb{R}$ usando la relación F . Podemos denotar a la imagen por $y = f(x)$, donde " f " indica la manera de cómo le asignamos el correspondiente y de x (teniendo en cuenta que debe satisfacer $F(x, y) = 0$). Así, definimos la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Veamos algunos.....

Ejemplos:

1. Si $F(x, y) = 3x - 5y + 4 = 0$; dado $x = 1$, $F(1, y) = 3 - 5y + 4 = 0$ implica que $y = \frac{7}{5}$, luego $f(1) = \frac{7}{5}$. Análogamente, para $x = 0$, $F(0, y) = -5y + 4 = 0$ implica que $y = \frac{4}{5}$, luego $f(0) = \frac{4}{5}$. Observamos que si $F(x, y) = 3x - 5y + 4 = 0$, podemos definir la aplicación $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$$

que es una ley de correspondencia (deducida de $F(x, y) = 0$) que asigna a cada $x \in \mathbb{R}$ uno y sólo un elemento $y = f(x) \in \mathbb{R}$.

2. Sea ahora $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Usando el mismo procedimiento anterior vemos que, para $x = 0$, $F(0, y) = y^2 - 1 = 0$ implica que $y = \pm 1$; escogemos uno de ellos, por ejemplo $y = -1$, es decir

$f(0) = -1$. Para $x = 2$, $F(2, y) = 4 + y^2 - 1 = 0$, muestra que no existe ningún $y \in \mathbb{R}$ tal que $F(2, y) = 0$, es decir $x = 2$ no tendría "imagen" mediante f . Para $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, y) = \frac{1}{2} + y^2 - 1 = 0$ implica que $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Elijamos $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, o sea $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Procediendo de esta manera y eligiendo el valor negativo de los valores de y (cuando los tuviera), observamos que nuestra función f puede ser deducida de $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ de la siguiente manera:

$$y^2 = 1 - x^2 \\ y = \pm \sqrt{1 - x^2} \quad \forall x \in [-1, 1].$$

- Luego, de acuerdo a nuestra elección, la función f sería

$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, tal que

$$F(x, y) = F(x, f(x)) = x^2 + [f(x)]^2 - 1 = 0.$$

- Con el mismo argumento podríamos obtener otra función

$g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, tal que

$$F(x, y) = F(x, g(x)) = x^2 + [g(x)]^2 - 1 = 0.$$

- Podemos obtener también la función

$$h: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } h(x) = \begin{cases} +\sqrt{1 - x^2} & x \in \mathbb{Q} \\ -\sqrt{1 - x^2} & x \in \mathbb{I} \end{cases},$$

tal que $F(x, y) = F(x, h(x)) = x^2 + [h(x)]^2 - 1 = 0$.

3. Sea $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$. Para $x_0 \in \mathbb{R}$, $F(x_0, y) = x_0^2 + y^2 + 1$ es siempre un número positivo, lo que indica que no podemos designar una imagen a ningún $x_0 \in \mathbb{R}$. En otras palabras, no podemos obtener una función f con la ayuda de

$$F(x, y) = 0.$$

Este ejemplo nos muestra que de la ecuación $F(x, y) = 0$ no siempre se puede obtener una función f .

4. Sea ahora

$$F(x, y) = 2y^5 - 3y^3 + 5y^2 - y + x = 0.$$

Para $x_0 = 0$, $F(0, y) = 2y^5 - 3y^3 + 5y^2 - y = 0$ implica que existe al menos un valor $y \in \mathbb{R}$ tal que $F(0, y) = 0$. En general, para un $x_0 \in \mathbb{R}$ cualquiera,

$$F(x_0, y) = 2y^5 - 3y^3 + 5y^2 - y + x_0 = 0$$

es un polinomio en y de quinto grado (grado impar) y debe tener al menos una raíz real, lo que quiere decir que podemos asignar a x_0 un y_0 tal que $F(x_0, y_0) = 0$. En este caso, no es fácil deducir la ley de correspondencia $y_0 = f(x_0)$ a partir de $F(x_0, y) = 0$. Por lo tanto, a pesar de haber detectado la existencia de por lo menos una función f que satisfaga

$$F(x, f(x)) = 0,$$

encontrar de forma explícita esta función puede ser una tarea muy laboriosa, difícil o desalentadora; (¡Felizmente esto no será necesario!).

Definición 7.5.1 Si determinamos que es posible definir una función a partir de $F(x, y) = 0$, diremos que esta función está **definida explícitamente** si podemos expresarla de la forma

$$y = f(x) \text{ con } F(x, f(x)) = 0.$$

Así, en el ejemplo 1 de $F(x, y) = 3x - 5y + 4 = 0$ podemos definir explícitamente la función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ por } f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}.$$

Igualmente de $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ del ejemplo 2 podemos definir explícitamente las funciones:

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

$$g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$h: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} / h(x) = \begin{cases} +\sqrt{1-x^2} & x \in \mathbb{Q} \\ -\sqrt{1-x^2} & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Definición 7.5.2 Si de $F(x, y) = 0$ determinamos la existencia de una función que no podemos expresar en la forma $y = f(x)$, diremos que en $F(x, y) = 0$ hay una función implícitamente definida.

El ejemplo 4 nos muestra que en la relación

$$F(x, y) = 2y^5 - 3y^3 + 5y^2 - y + x = 0$$

hay una función implícitamente definida

De todo lo expuesto previamente surgen las siguientes interrogantes. Dada la relación $F(x, y) = 0$,

- (i) ¿Cuándo esta relación define por lo menos una función?
- (ii) ¿Son éstas funciones derivables?
- (iii) Si hay una función implícitamente definida y además es derivable, ¿cómo se halla su derivada?

La respuesta la obtendremos de un teorema denominado "*Teorema de la Función Implícita*" que da las condiciones necesarias para la existencia de una función implícita derivable dada por $F(x, y) = 0$. La demostración de este teorema es competencia del cálculo avanzado, por lo que es mejor dedicarnos a ilustrar las aplicaciones de (iii).

Consideremos nuevamente:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

donde $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ y $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ son las funciones explícitamente definidas de $F(x, y) = 0$. Sabemos que f y g son derivables para todo $x \in (-1, 1)$ y

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7.9)$$

$$g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (7.10)$$

Sin embargo, si en la ecuación

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (7.11)$$

asumimos que y depende de x (o sea $y = y(x)$) y derivamos la ecuación (7.11), obtenemos:

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0 \quad (7.12)$$

donde hemos usado la regla de la cadena para derivar $[y(x)]^2$. Luego, de (7.12) tenemos $y'(x) = -\frac{x}{y}$, es decir, si hay alguna función $y = y(x)$ definida en $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ su derivada debe ser:

$$y'(x) = -\frac{x}{y} \quad (7.13)$$

Es fácil comprobar que cuando $y = f(x)$ o $y = g(x)$ de (7.13) obtenemos las fórmulas de (7.9) y (7.10). Además, notemos que $x^2 + y^2 - 1 = 0$ es la ecuación de la circunferencia de radio 1 y de centro en el origen de coordenadas. Las funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ tienen por gráfica la semicircunferencia inferior y superior respectivamente. La igualdad (7.13) nos da la pendiente de la tangente en cada punto (x, y) de la circunferencia, mientras que $y' = f'(x)$ es la pendiente de la tangente en el punto (x, y) de la semicircunferencia inferior y $y' = g'(x)$ nos da la pendiente de la tangente en (x, y) de la semicircunferencia superior.

Veamos otros ejemplos:

1. Sea $F(x, y) = y^5 + 4y^3 - 3xy^2 + xy + 7 = 0$. Sabemos que hay al menos una función $y = y(x)$ definida implícitamente en $F(x, y) = 0$. Calculemos $y'(x)$:

$$5y^4y' + 12y^2y' - 6xyy' - 3y^2 + xy' + y = 0.$$

Luego

$$y'(x) = \frac{3y^2 - y}{5y^4 + 12y^2 - 6xy + x}$$

2. Sea $F(x, y) = x^3 + 2xy^2 + y^3 - 1 = 0$. Si existe una función $y = y(x)$ definida implícitamente, su derivada debe satisfacer:

$$3x^2 + 2y^2 + 4xyy' + 3y^2y' = 0,$$

o sea

$$y' = -\frac{3x^2 + y^2}{4xy + 3y^2}.$$

Notar que este método de derivación está condicionado a la existencia de una función definida implícita o explícitamente en $F(x, y) = 0$. Es decir, si existe la función, su derivada se calcula de la manera expuesta.

El hecho de "obtener" la derivada no implica la existencia de la función. Por ejemplo, de $x^2 + y^2 + 1 = 0$ obtenemos $2x + 2yy' = 0$, luego $y' = -\frac{x}{y}$. Pero sabemos que no hay ninguna función $y = y(x)$ definida en $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

Este método también puede tener ventajas para calcular la derivada de algunas funciones del tipo $y = f(x)$. Por ejemplo, si

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + 5}{x - 1}} \text{ para todo } x > 1$$

entonces $y^2(x - 1) = x^2 + 5$, y derivando, $2yy'(x - 1) + y^2 = 2x$, es decir

$$y' = \frac{2x - y^2}{2y(x - 1)}$$

Luego, reemplazando el valor de y ,

$$y' = \frac{2x - \frac{x^2 + 5}{x - 1}}{2(x - 1)\sqrt{\frac{x^2 + 5}{x - 1}}} = \frac{x^2 - 2x - 5}{2(x - 1)^2\sqrt{\frac{x^2 + 5}{x - 1}}}$$

Así

$$y' = \frac{x^2 - 2x - 5}{2(x - 1)^{3/2}(x^2 + 5)^{1/2}}$$

7.6 Ejercicios Resueltos

1. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^5 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^4}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

- (a) ¿ Es f continua en $[-1, 1]$?
 (b) ¿ Es f' continua en $[-1, 1]$?

En cada caso justínque su respuesta.

Solución.-

(a) Si $x \neq 0$, por la teoría de funciones continuas, f es continua en x , y como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^5 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^4} \right) = 0 = f(0)$, se tiene también que f es continua en 0, es decir esta función es continua en $[-1, 1]$.

(b) Como $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^4 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^4} \right) = 0$, se tiene que

$$f'(x) = \begin{cases} 5x^4 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^4} \right) - 4 \cos \left(\frac{1}{x^4} \right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Luego f es continua en x , para $x \neq 0$. Por otro lado, como $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n\pi}} \rightarrow 0$ y $f'(x_n) = -4(-1)^n = \pm 4$, no se tiene que $f'(x_n) \rightarrow f'(0) = 0$, es decir f no es continua en el cero, ni en el intervalo $[-1, 1]$.

2. Hallar la derivada de la función f definida por $f(x) = \frac{a + bx}{c + dx}$

Solución.-

Basta con aplicar la regla para derivar un cociente, así:

$$f'(x) = \frac{b(c + dx) - d(a + bx)}{(c + dx)^2} = \frac{bc + bdx - ad - bdx}{(c + dx)^2}$$

Por tanto

$$f'(x) = \frac{bc - ad}{(c + dx)^2} \quad \forall x \neq -\frac{c}{d}$$

3. Sean f y g dos funciones definidas en todo \mathbb{R} tales que:

(a) $g(x) = xf(x) + 1$

(b) $g(x + y) = g(x) \cdot g(y)$ y

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

Probar que $g'(x) = g(x)$.

Solución.-

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \stackrel{(b)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)g(h) - g(x)}{h} \\ &= g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - 1}{h} \stackrel{(a)}{=} g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(h)}{h} \\ &= g(x) \lim_{h \rightarrow 0} f(h) \stackrel{(c)}{=} g(x) \end{aligned}$$

Así $g'(x) = g(x)$.

4. Sea $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & , x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

- (a) Halle $f'(0)$.
 (b) Muestre que f' no es continua en $x = 0$.
 (c) ¿Es la función f' monótona en $[-1, 1]$?

Solución.-

$$(a) \quad f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[1 + 2h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) \right] = 1.$$

$$(b) \quad f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

Observamos que $x_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0$. Si f' fuese continua en el 0 se tendría que $f'(x_n) \rightarrow f'(0) = 1$. Pero

$$f'(x_n) = 1 + \frac{4}{2n\pi} \operatorname{sen}(2n\pi) - 2\cos(2n\pi) = -2$$

que naturalmente no converge a 1. Por lo tanto f' no es continua en el 0.

- (c) Respuesta. f' no es monótona en $[-1, 1]$, puesto que $f'\left(\frac{1}{\pi}\right) = 3$ (positivo) y $f'\left(\frac{1}{2\pi}\right) = -1$ (negativo).

5. (a) Dar un ejemplo de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciable en $\langle a, b \rangle$, con $f(a) = f(b)$, tal que $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in \langle a, b \rangle$
- (b) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en un único punto de su dominio ($D_f = \mathbb{R}$).

Solución.-

$$(a) \text{ Basta definir } f(x) = \begin{cases} x & , x \in \langle a, b \rangle \\ \frac{a+b}{2} & , x \in \{a, b\} \end{cases}$$

y notar que $f'(x) = 1 \quad \forall x \in \langle a, b \rangle$.

(b) Sabemos que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

no es continua en x para $x \neq 0$, luego no es derivable en x para $x \neq 0$. Por otro lado, afirmamos que f es derivable en el 0 y que $f'(0) = 0$. En efecto: sea $\varepsilon > 0$. Debemos demostrar que $\exists \delta > 0 / 0 < |h| < \delta \implies \left| \frac{f(h)}{h} \right| < \varepsilon$.

Note que

$$\left| \frac{f(h)}{h} \right| = \left| \frac{h^2}{h} \right| = |h|, \text{ si } h \in \mathbb{Q}$$

y

$$\left| \frac{f(h)}{h} \right| = \left| \frac{0}{h} \right| = 0, \text{ si } h \in \mathbb{I}$$

Por lo tanto elegimos $\delta = \varepsilon$ y tenemos que

$$0 < |h| < \delta \implies \left| \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} \right| = \left| \frac{f(h)}{h} \right| \leq |h| < \delta = \varepsilon.$$

6. Sea $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que $L'(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$, y sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ la inversa de L :

- (a) Muestre que $g'(x) = g(x)$.
- (b) Si $f(x) = ag(3x) + bg(2x)$ ($a, b \in \mathbb{R}$), halle

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x).$$

Solución.-

- (a) Sabemos que $(L \circ g)(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, luego derivando y aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$L'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$

es decir $\frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = 1$, así

$$g'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{Como } f(x) &= ag(3x) + bg(2x) \\ \implies f'(x) &= 3ag(3x) + 2bg(2x) \\ \implies f''(x) &= 9ag(3x) + 4bg(2x) \\ \implies -5f(x) &= -15ag(3x) - 10bg(2x) \\ \text{y } 6f(x) &= 6ag(3x) + 6bg(2x). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0.$$

7. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{4} \operatorname{sen}(3x) \sqrt[3]{\operatorname{sen}(3x)} - \frac{1}{10} \operatorname{sen}^3(3x) \sqrt[3]{\operatorname{sen}(3x)}$$

Muestre que $f'(x) = \cos^3(3x) \sqrt[3]{\operatorname{sen}(3x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Solución.-

Como

$$f(x) = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^{4/3}(3x) - \frac{1}{10} \operatorname{sen}^{10/3}(3x)$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 \operatorname{sen}^{1/3}(3x) \cos(3x) - \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{3} \cdot 3 \operatorname{sen}^{7/3}(3x) \cos(3x) \\ &= \operatorname{sen}^{1/3}(3x) \cos(3x) \{1 - \operatorname{sen}^2(3x)\} = \operatorname{sen}^{1/3}(3x) \cos^3(3x) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f'(x) = \cos^3(3x) \sqrt[3]{\operatorname{sen}(3x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

8. Sea f la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{1}{1-x}$ para todo $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Halle un polinomio p de grado 5 tal que $p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ para $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

($p^{(k)}$ denota la k -ésima derivada de p)

Solución.- En primer lugar observe que

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Por otro lado, si

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$$

entonces

$$p^{(k)}(0) = k!a_k \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Así de la condición impuesta tenemos que $p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$, es decir $k!a_k = k!$, de donde se concluye que

$$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en a , pruebe que

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Solución.- Como

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$

y $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} = f'(a)$, concluimos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}f'(a) + \frac{1}{2}f'(a) = f'(a).$$

10. Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva

$$C : x^2 + 2y^2 - 19 = 0$$

en sus puntos de abscisa 1.

Solución.-

Los puntos de abscisa 1 son $(1, 3)$ y $(1, -3)$. Ahora derivando implícitamente la ecuación se tiene que $2x + 4y \cdot y' = 0$, de donde

$$y' = -\frac{x}{2y}.$$

Así

$$y'(1, 3) = -\frac{1}{6} \quad \text{y} \quad y'(1, -3) = \frac{1}{6}.$$

Por lo tanto en $(1, 3)$

$$\mathcal{L}_T : x + 6y = 19 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_N : 6x - y = 3$$

y en $(1, -3)$

$$\mathcal{L}_T : x - 6y = 19 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_N : 6x + y = 3.$$

7.7 Ejercicios Propuestos

- Sean $c \in \mathbb{R}$ y f una función derivable sobre \mathbb{R} . Si $g(x) = f(x + c)$, demuestre partiendo de la definición que $g'(x) = f'(x + c)$. Además, si $h(x) = f(cx)$, demuestre que $h'(x) = cf'(cx)$.
- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = x^2$ para x racional, y $f(x) = 0$ para x irracional. Pruebe que f es derivable en $x = 0$ y encontrar $f'(0)$.
- (a) Pruebe que $f(x) = x^{1/3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ no es derivable en $x = 0$.
(b) ¿Es la función $f(x) = \sqrt{|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ derivable en $x = 0$?
Justifique su respuesta.
- Halle la derivada de la función $f(x) = |x^2 - 1| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- Sea $f(x) = |x|^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Determinar $f'(x)$, $f''(x)$ para $x \neq 0$. Pruebe además que no existe $f'''(0)$.
- Determinar todos los puntos en los que las siguientes funciones reales son derivables, luego encontrar las respectivas derivadas:

(a) $f(x) = |x| + |x + 1|$

(c) $f(x) = x|x|$

(b) $f(x) = 2x + |x|$

(d) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

7. Suponga que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en todo punto de \mathbb{R} . Si f es una función par, pruebe que f' es una función impar.
8. Suponga que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en todo punto de \mathbb{R} . Si f es una función impar, pruebe que f' es una función par.
9. Sea $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que $L'(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$. Calcule la derivada de las siguientes funciones:
 $f(x) = L(2x + 3)$, $g(x) = (L(x^2))^3$, $h(x) = L(L(x^5))$.
10. Suponga que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en c y que $f(c) = 0$. Pruebe que $g(x) = |f(x)|$ es derivable en c si y sólo si $f'(c) = 0$.
11. Demuestre que $D(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{1+x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
12. (a) Demuestre que $\operatorname{arc} \operatorname{sec} x = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{x}$ siempre que $|x| > 1$.
 (b) Demuestre que $D(\operatorname{arc} \operatorname{sec} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ siempre que $|x| > 1$.
13. Demuestre que $D(\operatorname{arc} \operatorname{csc} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ siempre que $|x| > 1$.
14. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x^2})$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Probar que f es derivable en \mathbb{R} . Probar asimismo que la derivada f' no está acotada en $[-1, 1]$.
15. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = 2x^4 + x^4 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, pruebe que su derivada f' tiene valores estrictamente positivos y estrictamente negativos en cualquier vecindad de 0.
16. Sea f una función real tal que $|f(x)| \leq |x|^\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$. ¿Es la función f diferenciable en 0? ¡Justifique su respuesta!
17. Sea f una función real tal que: $f(a) = g(a) = h(a)$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y $f'(a) = h'(a)$. Pruebe que g es diferenciable en $x = a$ y $f'(a) = g'(a) = h'(a)$.

18. Dada la función $f(x) = \left| x^5 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{x^2 + 1} \right) \right|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, halle por definición $f'(0)$ (si existe).
19. Hallar, si existe, $f'(3)$, donde

$$f(x) = |x - 3|^3(x - 3) + x^3 \left\| x - \frac{3}{2} \right\|.$$

20. Hallar, si es posible, valores para a y b de modo que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{27}{|x|^3} & , |x| \geq 3 \\ ax^2 + bx + c & , |x| < 3 \end{cases}$$

sea continua en $x = 3$ y diferenciable en $x = -3$.

21. Hallar $f'(0)$ si la función f es definida por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

donde la función g satisface que $g'(0) = g(0) = 0$.

22. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, pruebe que f es estrictamente monótona.
23. Sabiendo que a es un número real fijo, ¿para qué valores de α y β la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & , |x| > a \\ \alpha + \beta x & , |x| \leq a \end{cases}$$

es diferenciable?

24. Si la derivada de una función es cero en todo su dominio, ¿se puede concluir que la función es constante? ¡Justifique su respuesta!
25. Dado que la función $f(x) = x^3 + 2x + 1 \forall x \in \mathbb{R}$ posee inversa f^* en \mathbb{R} , encontrar el valor de $(f^*)^{-1}(y)$ en los puntos correspondientes a $x = 0, 1$ y -1 .
26. Sean $f(x) = |x| + 3x$ y $g(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}|x|$.

- (a) Verificar que no existe $f'(0)$ ni $g'(0)$.
- (b) ¿Existirá $(f \circ g)'(0)$?
27. Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $C: x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ en sus puntos de abscisa 6.
28. Muestre que:

(a) Si $y = f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{2}$, se verifica que $1 + (y')^2 = 2yy''$.

(b) Si $y = a + \frac{bx}{ax + 1}$, se verifica que $y - xy' = a(1 + x^2y')$.

(c) Si $y = \sqrt{4x + 4}$, se verifica que $[1 + (y')^2]y^2 - 4yy' - 4x = 0$.

29. Calcular la segunda derivada y'' en las siguientes ecuaciones:

(a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

(c) $x^2y - xy^2 = 16$

(b) $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 1$

(d) $y^2 = \frac{x-1}{x^2+5}$

30. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable dos veces en a , es decir existe $f''(a)$. Pruebe que

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

31. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $\langle a, b \rangle$ salvo en $x_0 \in \langle a, b \rangle$, además $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$. Demostrar que $f'(x_0) = L$.
32. Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[0, 1]$, $f(0) = 0$ y f derivable en $\langle 0, 1 \rangle$. Demuestre que si f es creciente en $\langle 0, 1 \rangle$ entonces la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es también creciente.
33. Sea $a \in \mathbb{R}^+$. Demostrar que no existe ninguna función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga simultáneamente las tres condiciones siguientes:
- (a) f es derivable en $[0, \infty)$
- (b) $f'(0) = 0$
- (c) $f'(x) \geq a$ para todo $x > 0$.

Capítulo 8

Aplicaciones de la Derivada

8.1 El Teorema del Valor Medio TVM

Definición 8.1.1 Extremos Locales y Absolutos

Sean I un intervalo en \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Se dice que:

- (i) f tiene un **mínimo local** en c si existe $\delta > 0$ tal que

$$f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in I_\delta(c) \cap I.$$

En este caso $f(c)$ se llama **mínimo local** de f .

- (ii) f tiene un **mínimo absoluto** en c si

$$f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in I.$$

En este caso $f(c)$ se llama **mínimo absoluto** de f .

- (iii) f tiene un **máximo local** en c si existe $\delta > 0$ tal que

$$f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in I_\delta(c) \cap I.$$

En este caso $f(c)$ se llama **máximo local** de f .

(iv) f tiene un máximo absoluto en c si

$$f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in I.$$

En este caso $f(c)$ se llama máximo absoluto de f .

(v) f tiene un extremo local (absoluto) en c , si se tiene alguno de los casos anteriores y el valor $f(c)$ se llama extremo local (absoluto) de la función f .

Si $f(c)$ es un extremo absoluto de f , entonces $f(c)$ es un extremo local de f , mas el recíproco en general es falso. Esta definición se ilustra en el siguiente gráfico.

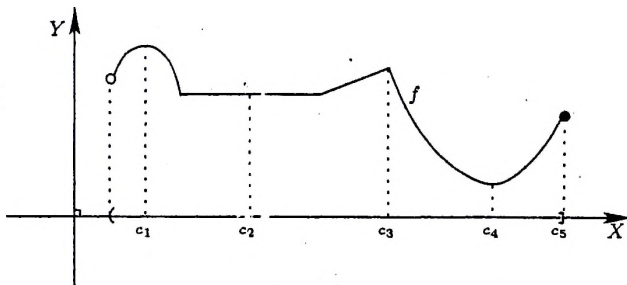


Figura 8.1: $f(c_1)$ máximo absoluto, $f(c_3)$ y $f(c_5)$ son máximos relativos; $f(c_2)$ mínimo relativo y $f(c_4)$ mínimo absoluto.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, por el teorema de los valores extremos TVE, existen $c, d \in [a, b]$ tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ para todo $x \in [a, b]$, es decir, en este caso se garantiza la existencia del máximo y mínimo absoluto de la función f . Luego surge la siguiente interrogante, ¿cómo hallarlos?. Para responder a esta interrogante demostraremos los teoremas de: Fermat, Rolle y Valor Medio; antes recordamos que el interior de un intervalo I , denotado por $\text{int}(I)$, es el mismo conjunto I sin considerar los extremos (si los tiene). Por ejemplo:

$$\text{int}[a, b] = \langle a, b \rangle, \quad \text{int}(-\infty, b] = \langle -\infty, b \rangle, \quad \text{int}(a, +\infty) = \langle a, +\infty \rangle$$

Teorema 8.1.1 Teorema de Fermat

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $c \in \text{int}(I)$. Si f es derivable en c y tiene un extremo relativo en c , entonces

$$f'(c) = 0.$$

Prueba. Suponiendo que f tiene un máximo relativo en c , existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in (c - \delta, c + \delta).$$

Si $c - \delta < x < c$, entonces

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \quad (8.1)$$

Si $c < x < c + \delta$, entonces

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \quad (8.2)$$

Y como f es derivable en c

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c),$$

luego de (8.1) y (8.2) tenemos que

$$f'(c) \geq 0 \quad \text{y} \quad f'(c) \leq 0,$$

de donde concluimos que $f'(c) = 0$. □

La interpretación geométrica del teorema de Fermat es que si f tiene un extremo relativo en c y existe la derivada de f en este punto, entonces la gráfica de f debe tener una recta tangente horizontal en el punto $(c, f(c))$.

Definición 8.1.2 Punto Crítico

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Se dice que c es un punto crítico de f si $f'(c) = 0$ ó $\nexists f'(c)$ ó c es un extremo del intervalo I .

Nota.- Como consecuencia del TVE y del teorema de Fermat tenemos que si una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo relativo en c , entonces c es un punto crítico de f . El recíproco de este resultado es en general falso, como se ilustra ahora:

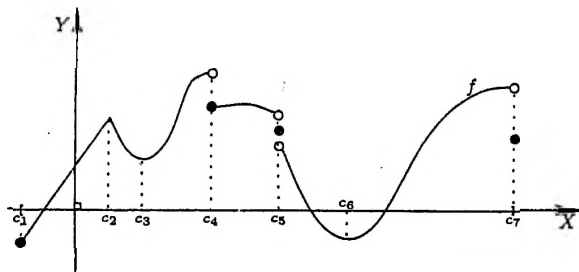


Figura 8.2: c_i punto crítico de f ($i = 1, 2, \dots, 7$)

- Dada la función $f(x) = x^3 \quad \forall x \in [-1, 1]$, tenemos que $f'(0) = 0$, sin embargo como $f(x) < 0 \quad \forall x \in [-1, 0)$ y $f(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 1]$ esta función no tiene un extremo relativo en el punto 0.
- Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \in (0, 1] \\ 0 & , \quad x = 0 \\ x-1 & , \quad x \in [-1, 0) \end{cases}$$

Siendo esta función discontinua en el 0 sabemos que $\nexists f'(0)$, y como $f(x) < -1 \quad \forall x < 0$ y $f(x) > 1 \quad \forall x > 0$ esta función no tiene un extremo relativo en el punto 0.

- Si definimos la función f por: $f(x) = x \quad \forall x \in (-1, 1)$ y $f(-1) = f(1) = 0$, vemos que los puntos -1 y 1 son los extremos del dominio de f , sin embargo ninguno de estos es punto extremo de esta función.

Es decir, que c sea un punto crítico de f es una condición necesaria, mas no suficiente, para que la función f tenga un extremo relativo en c .

Ahora enunciamos y demostramos el teorema debido al matemático francés Michel Rolle (1652- 1719).

Teorema 8.1.2 Teorema de Rolle

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Si $f(a) = f(b)$ entonces existe $d \in (a, b)$ tal que $f'(d) = 0$.

Prueba Si $f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a, b]$ entonces $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$; en caso contrario existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) \neq f(a)$. Sin pérdida de generalidad ("spg"), supongamos que $f(x_0) > f(a)$.

Como f es continua en $[a, b]$, por el TVE existe $d \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(d) \quad \forall x \in [a, b]$, es decir f tiene un extremo relativo en d . Puesto que

$$f(d) \geq f(x_0) > f(a) = f(b),$$

se tiene que $d \neq a$ y $d \neq b$, es decir f tiene un extremo relativo en $d \in (a, b) = \text{int}[a, b]$ y es diferenciable en este punto. Luego, usando el teorema de Fermat concluimos que

$$f'(d) = 0. \quad \square$$

Observación.- Para que se cumpla la tesis del teorema de Rolle existen tres hipótesis mínimas (es decir, no eliminables). Ilustremos esto en los siguientes ejemplos:

- Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es definida por $f(x) = x$ tenemos que f es continua en $[0, 1]$ y derivable en $(0, 1)$, pero no existe $d \in (0, 1)$ tal que $f'(d) = 0$. (Aquí falta la hipótesis $f(0) = f(1)$.)
- Si $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ es definida por $f(x) = |x|$ tenemos que f es continua en $[-2, 2]$ y $f(-2) = f(2)$, pero no existe $d \in (-2, 2)$ tal que $f'(d) = 0$. (Aquí falta la hipótesis que f sea derivable en $(-2, 2)$.)
- Si $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ es definida por $f(x) = x \quad \forall x \in (0, 2)$ y $f(0) = f(2) = 1$, tenemos que f es derivable en $(0, 2)$ y $f(0) = f(2)$, pero no existe $d \in (0, 2)$ tal que $f'(d) = 0$. (Aquí falta la hipótesis que f sea continua en $[-2, 2]$.)

Teorema 8.1.3 Teorema del Valor Medio

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Prueba.-

Sea $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$\varphi(x) = f(x) - \left[\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a) + f(a) \right].$$

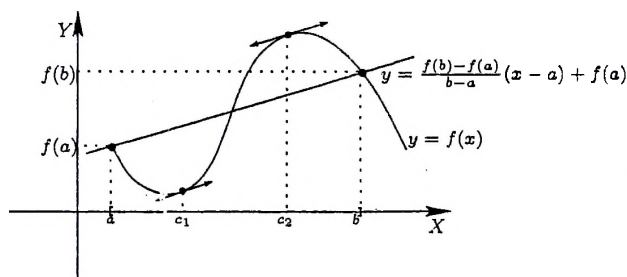


Figura 8.3: Teorema del Valor Medio TVM.

Observamos que φ es continua en $[a, b]$ y derivable en $\langle a, b \rangle$ con

$$\varphi'(x) = f'(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \quad \text{y} \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0,$$

luego por el teorema de Rolle existe $c \in \langle a, b \rangle$ tal que $\varphi'(c) = 0$, es decir

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Esto concluye la prueba. □

La interpretación geométrica de éste teorema es que en la gráfica de la función f , el número $\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$ es la pendiente del segmento rectilíneo que une los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$. El TVM garantiza que existe algún punto sobre la curva entre A y B en el cual la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por los puntos A y B .

Ejemplo 1.- La función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0, 1]$ y derivable en $\langle 0, 1 \rangle$, luego por el TVM existe $c \in \langle 0, 1 \rangle$ tal que $f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$, es decir $\frac{1}{2\sqrt{c}} = 1$. Por lo tanto $c = \frac{1}{4}$.

Ejemplo 2.- La función $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ es continua en $[-1, 1]$ y derivable en $\langle -1, 1 \rangle$, luego por el TVM existe $c \in \langle -1, 1 \rangle$ tal que $f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$, es decir $3c^2 = 1$. Por lo tanto $c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ó $c = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

En seguida se demuestran las consecuencias más importantantes del teorema del valor medio. La potencia de estos resultados se ve de inmediato al intentar graficar funciones no elementales.

Corolario 8.1.1 Consecuencias del TVM

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo I y derivable en el interior de dicho intervalo.

1. Si $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \text{int}(I)$, entonces f es constante en I .
2. Si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \text{int}(I)$, entonces f es creciente en I .
3. Si $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \text{int}(I)$, entonces f es decreciente en I .
4. Si $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{int}(I)$, entonces f es no decreciente en I .
5. Si $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \text{int}(I)$, entonces f es no creciente en I .

Prueba.-

Sea $a \in I$ (fijo, arbitrario) y sea $x \in I$ ($x \neq a$). Si $x > a$, f es continua en $[a, x]$ y derivable en $\langle a, x \rangle$, luego por el TVM existe $c_x \in \langle a, x \rangle$ tal que

$$f(x) - f(a) = f'(c_x)(x - a).$$

Y como por hipótesis $f'(c_x) = 0$, se tiene que $f(x) = f(a) \quad \forall x \geq a$. Análogamente se prueba que $f(x) = f(a) \quad \forall x < a$. Esto completa la prueba del ítem 1.

Para probar la parte 2, 3, 4 y 5 tomemos $a < b$ en I , entonces f es continua en $[a, b]$ y derivable en $\langle a, b \rangle$, luego por el TVM existe $c \in \langle a, b \rangle$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Ahora, según $f'(c)$ sea positivo, negativo, no negativo o no positivo, se tendrá que $f(a) < f(b)$, $f(a) > f(b)$, $f(a) \leq f(b)$ o $f(a) \geq f(b)$ respectivamente, lo que completa la demostración. \square

Proposición 8.1.4 Si las derivadas de dos funciones coinciden en el interior de un intervalo, ellas difieren en una constante (en dicho intervalo).

Prueba.- Sea I un intervalo y sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones tales que

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in \text{int}(I),$$

entonces $(f - g)'(x) = 0 \quad \forall x \in \text{int}(I)$. Luego por la parte 1. del corolario anterior existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = g(x) + k \quad \forall x \in I. \quad \square$$

Ejemplos :

1. Sea f la función real definida por $f(x) = \frac{6x-1}{3x+2} \quad \forall x \neq -\frac{2}{3}$.

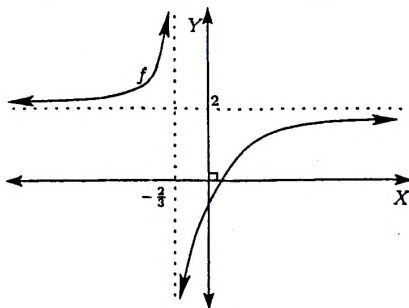
Como

$$f'(x) = \frac{6(3x+2) - (3x-1)3}{(3x+2)^2} = \frac{15}{(3x+2)^2} > 0 \quad \forall x \neq -\frac{2}{3},$$

f es creciente en $(-\infty, -\frac{2}{3})$ y en $(-\frac{2}{3}, +\infty)$. Además, teniendo en cuenta que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow (-\frac{2}{3})^-} f(x) = +\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow (-\frac{2}{3})^+} f(x) = -\infty,$$

tenemos el siguiente dibujo para esta función.

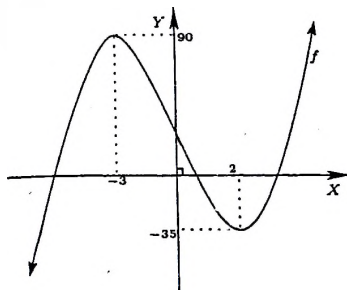


2. Sea f la función real definida por

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 9 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x+3)(x-2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, vemos que $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$ y $f'(x) < 0$ en $[-3, 2]$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f &\text{ es creciente en } (-\infty, -3], \\ f &\text{ es decreciente en } [-3, 2] \text{ y} \\ f &\text{ es creciente en } [2, +\infty). \end{aligned}$$

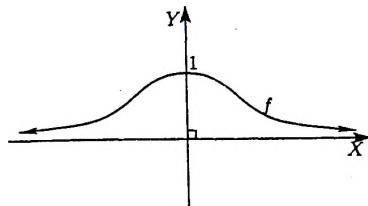


No está demás aclarar que esta función no es creciente en $\langle -\infty, -3 \rangle \cup [2, +\infty)$ ¡Obviamente!

3. Sea f la función real definida por

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, f es creciente en $\langle -\infty, 0 \rangle$ y es decreciente en $[0, +\infty)$, como se ilustra en la siguiente gráfica



8.2 Criterio de la 1ra y 2da Derivada

Teorema 8.2.1 Criterio de la primera derivada

Sean I un intervalo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $c \in \text{int}(I)$. Si existe $\delta > 0$ tal que:

1. $f'(x) > 0 \forall x \in \langle c - \delta, c \rangle$ y $f'(x) < 0 \forall x \in \langle c, c + \delta \rangle$, entonces f tiene un máximo relativo en c .
2. $f'(x) < 0 \forall x \in \langle c - \delta, c \rangle$ y $f'(x) > 0 \forall x \in \langle c, c + \delta \rangle$, entonces f tiene un mínimo relativo en c .

Prueba.-

1. Por la hipótesis f es creciente en $\langle c - \delta, c \rangle$ y decreciente en $\langle c, c + \delta \rangle$, esto es

$$f(x) \leq f(c) \text{ siempre que } c - \delta < x \leq c \text{ y}$$

$$f(c) \geq f(x) \text{ siempre que } c \leq x < c + \delta.$$

Por lo tanto $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in \langle c - \delta, c + \delta \rangle$, así $f(c)$ es el máximo relativo de f .

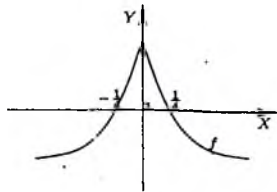
La prueba de 2. es análoga, se deja para el lector responsable (justed!). \square

Ejemplos:

1. Dada la función $f(x) = -2\sqrt{|x|} + 1 \forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{x}} & , x > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-x}} & , x < 0 \end{cases}$$

Entonces $f'(x) > 0 \forall x \in \langle -\infty, 0 \rangle$ y $f'(x) < 0 \forall x \in \langle 0, +\infty \rangle$, luego aplicando el criterio de la primera derivada, podemos afirmar que: $f(0) = 1$ es el único máximo relativo (más aún máximo absoluto). Además como f es creciente en $\langle -\infty, 0 \rangle$, decreciente en $\langle 0, +\infty \rangle$ y teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$, tenemos el siguiente bozquejo para la gráfica de esta función.



2. Dada la función $f(x) = (x+2)^2(x-3) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que

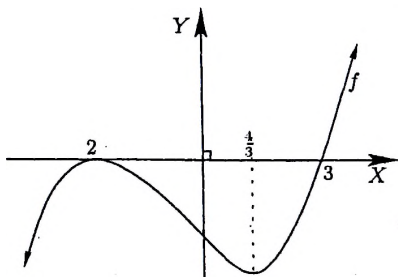
$$f'(x) = 2(x+2)(x-3) + (x+2)^2 = (x+2)[2x-6+x+2] = (x+2)(3x-4).$$

Entonces

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \langle -\infty, 2 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle \quad \text{y}$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \langle -2, 3 \rangle,$$

luego aplicando el criterio de la primera derivada, podemos afirmar que: $f(-2) = 0$ es el único máximo relativo y $f(\frac{4}{3}) = -\frac{500}{27}$ es el único mínimo relativo la función f . Además como f es creciente en $\langle -\infty, 2 \rangle$, decreciente en $\langle -2, 3 \rangle$, creciente en $\langle 3, +\infty \rangle$ y teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, tenemos el siguiente bozquejo para la gráfica de esta función.



3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x = \frac{1}{3}x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).$$

Entonces

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \langle -\sqrt{3}, 0 \rangle \cup \langle \sqrt{3}, +\infty \rangle \quad \text{y}$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \langle -\infty, -\sqrt{3} \rangle \cup \langle 0, \sqrt{3} \rangle$$

luego aplicando el criterio de la primera derivada, podemos afirmar que: $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4} = f(\sqrt{3})$ son los mínimos relativos y $f(0) = 0$ es el único máximo relativo la función f . Además como f es decreciente en $\langle -\infty, -\sqrt{3} \rangle$, creciente en $\langle -\sqrt{3}, 0 \rangle$, decreciente en $\langle 0, \sqrt{3} \rangle$, creciente en $\langle \sqrt{3}, +\infty \rangle$ y teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, tenemos el siguiente bozquejo para la gráfica de esta función.

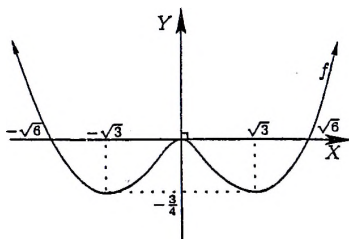


Figura 8.4: $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

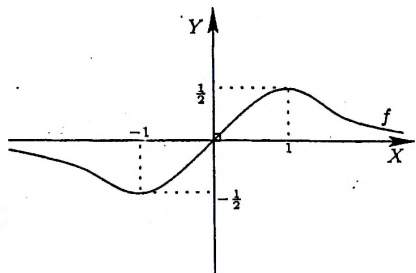
4. Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = -\frac{(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (-1, 1) \quad y$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$



luego aplicando el criterio de la primera derivada, podemos afirmar que: $f(1) = \frac{1}{2}$ es el único máximo relativo y $f(-1) = -\frac{1}{2}$ es el único mínimo relativo de la función f . Además como f es decreciente en $(-\infty, -1)$, creciente en $(-1, 1)$, decreciente en $(1, +\infty)$ y teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, tenemos el siguiente bozquejo para la gráfica de esta función.

Teorema 8.2.2 Criterio de la segunda derivada

Sea f una función real, derivable en una vecindad $\langle c - \delta_0, c + \delta_0 \rangle$ del punto c tal que $f'(c) = 0$ y $f''(c)$ existe.

1. Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de f .
2. Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo de f .
3. Si $f''(c) = 0$ no se afirma nada.

Prueba de 2.- Como $f''(c) < 0$, es decir $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = f''(c) < 0$, tomando $\varepsilon = -f''(c) > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} - f''(c) \right| < -f''(c) \quad \text{siempre que } x \in \langle c - \delta, c + \delta \rangle \setminus \{c\}$$

entonces

$$\frac{f'(x)}{x - c} < 0 \quad \forall x \in \langle c - \delta, c + \delta \rangle \setminus \{c\}. \quad (8.3)$$

Si $c - \delta < x < c$, de (8.3) se concluye que $f'(x) > 0$ en $\langle c - \delta, c \rangle$, y si $c < x < c + \delta$, de (8.3) se concluye que $f'(x) < 0$ en $\langle c, c + \delta \rangle$. Por lo tanto, por el criterio de la 1ra derivada, f tiene un máximo relativo en c . La prueba de (1) es análoga. Para ver la parte (3) basta con analizar la función $f(x) = x^5$ donde vemos que $f''(0) = 0$ y que $f(0) = 0$ no es máximo ni mínimo relativo de esta función. \square

Ejemplo 1.- Si f es la función ya estudiada $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x = 0 \iff x = 0, \quad x = \sqrt{3} \text{ y } x = -\sqrt{3}.$$

También se tiene que $f''(x) = x^2 - 1$, y como:

$$f''(0) = -1 < 0, \quad f''(\sqrt{3}) = 2 > 0, \quad f''(-\sqrt{3}) = 2 > 0$$

concluimos que

$f(0) = 0$ es un máximo local, $f(\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$ es un mínimo local y $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$ también es un mínimo local de f .

Ejemplo 2.- Si f es la función definida por $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \iff x = \pm 1 \text{ (puntos críticos),}$$

y como $f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3}$, implica que $f''(1) = -\frac{1}{2} < 0$ y $f''(-1) = \frac{1}{2} > 0$, de donde se concluye que

$f(1) = \frac{1}{2}$ es un máximo local y $f(-1) = -\frac{1}{2}$ es un mínimo local de f .

(Por otro lado siendo $(|x| - 1)^2 \geq 0$ para todo x real, implica que $|f(x)| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$, luego $f(-1) = -\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} = f(1)$. Así el rango de esta función es $\mathcal{R}_f = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. ¡Vea el gráfico anterior!)

Ejemplo 3.- Si $f(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$f'(x) = \frac{4-x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}}$$

y

$$f''(x) = \frac{-8}{\sqrt[3]{x^4(6-x)^5}} \text{ si } x \neq 0 \wedge x \neq 6$$

y como $f''(4) < 0$, por el criterio de la segunda derivada, concluimos que $f(4)$ es un máximo relativo para f .

8.3 Convexidad y Concavidad

Para $a, b \in \mathbb{R}$ distintos la función $\lambda: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definida por

$$\lambda(t) = (1-t)a + tb \quad \forall t \in [0, 1]$$

es inyectiva. Por otro lado si $a \leq x \leq b$, entonces $0 \leq x - a \leq b - a$, luego $0 \leq \frac{x-a}{b-a} \leq 1$. Por lo tanto

$$\forall x \in [a, b] \exists t = \frac{x-a}{b-a} \in [0, 1] / x = (b-a)t + a = \lambda(t)$$

lo que demuestra que λ establece una biyección entre los intervalos $[0, 1]$ y $[a, b]$. Es decir, si t varía entre 0 y 1 entonces $\lambda(t)$ varía entre a y b ; precisamente usaremos esto en la siguiente definición.

Definición 8.3.1 Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Se dice que:

1. La función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es **convexa** si:

$$f[(1-t)a + tb] \leq (1-t)f(a) + tf(b) \quad \forall a, b \in I \quad \forall t \in [0, 1]$$

2. La función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es **cóncava** si $-f$ es convexa.

Ilustramos esta definición en el siguiente gráfico

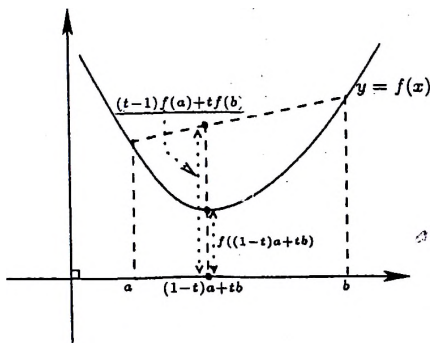
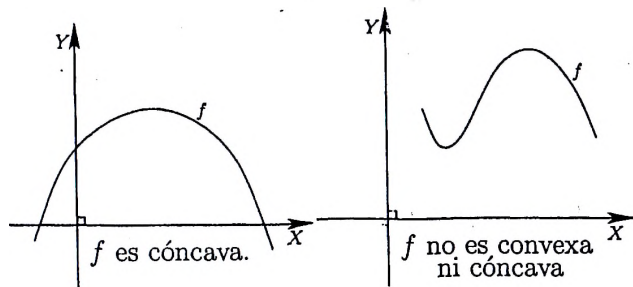


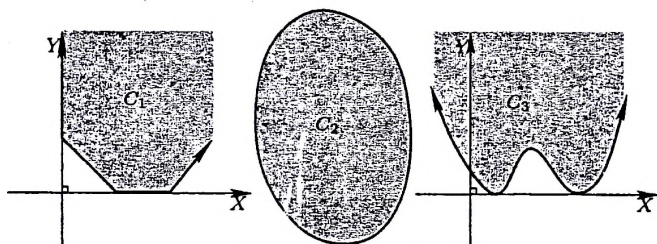
Figura 8.5: f es convexa

Otros gráficos que ilustran la definición anterior son los siguientes:



Definición 8.3.2 Un subconjunto C del plano es **convexo** si para todo $P, Q \in C$ el segmento de extremos P y Q denotado por $[P, Q]$ está contenido en C , es decir

$$S \text{ es convexo} \iff [P, Q] \subset C \quad \forall P, Q \in C.$$



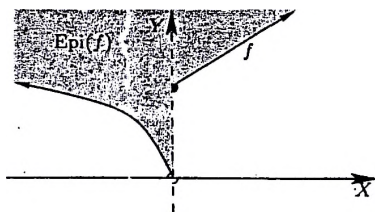
C_1 y C_2 son convexos, pero C_3 no es convexo.

Ahora a cada función le asociamos un conjunto y analizando la convexidad de este conjunto sabremos si la función bajo estudio es o no convexa.

Definición 8.3.3 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Dada la función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, el conjunto

$$\text{Epi}(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} / f(x) \leq y\}$$

se llama el **Epígrafo** de f



Teorema 8.3.1 Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. La función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si $\text{Epi}(f)$ es un conjunto convexo del plano.

Prueba.- Supongamos que f es convexa, y sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{Epi}(f)$ y $t \in [0, 1]$. Entonces $f(x_1) \leq y_1$, $f(x_2) \leq y_2$, $x_1, x_2 \in I$, luego

$$tf(x_1) \leq ty_1, (1-t)f(x_2) \leq (1-t)y_2, \text{ donde } tx_1 + (1-t)x_2 \in I$$

así $tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \leq ty_1 + (1-t)y_2$. Por otro lado, como f es convexa, $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$; de donde por la transitividad de la relación de orden usual tenemos que $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq ty_1 + (1-t)y_2$. Por lo tanto

$$t(x_1, y_1) + (1-t)(x_2, y_2) = (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \in \text{Epi}(f)$$

esto prueba que $\text{Epi}(f)$ es un conjunto convexo.

Recíprocamente, supongamos que $\text{Epi}(f)$ es un conjunto convexo, luego si $x_1, x_2 \in I$ y $t \in [0, 1]$ ($\therefore tx_1 + (1-t)x_2 \in I$), y como $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in \text{Epi}(f)$, usando la hipótesis $t(x_1, f(x_1)) + (1-t)(x_2, f(x_2)) \in \text{Epi}(f)$. Por lo tanto

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

lo que demuestra que f es una función convexa. \square

Notamos que una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa cuando su gráfico está situado debajo de "cualquier" secante, es decir, si $a < x < b$ en I entonces

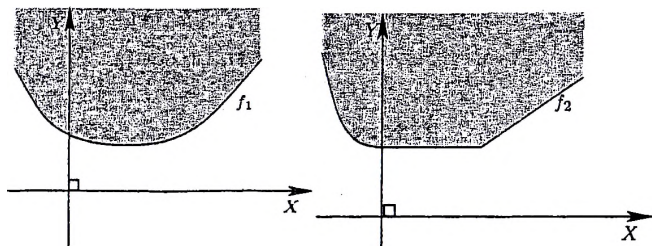
$$f(x) \leq \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a) + f(a)$$

o bien

$$f(x) \leq \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - b) + f(b).$$

Usando esto se ve de inmediato que la función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si, $\forall x \in \langle a, b \rangle \subseteq I$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \quad (8.4)$$



f_1 es convexa y derivable f_2 es convexa no derivable

Observamos que la definición de función convexa es independiente de la diferenciabilidad, esto quiere decir que existen funciones convexas no derivables. En el caso que si lo sea, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 8.3.2 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo I , son equivalentes:

1. f es convexa.
2. f' es monótona creciente.
3. $f(x) \geq T_a(x) \quad \forall a, x \in I$,
donde $T_a(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ es la recta tangente a f en $(a, f(a))$.

Prueba. -

(1 \implies 2) Sean $a < b$ en I , de (8.4)

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \quad \text{siempre que } a < x < b,$$

luego tomando límite cuando $x \rightarrow a^+$ en la primera desigualdad, cuando $x \rightarrow b^-$ en la segunda desigualdad y teniendo en cuenta que f es derivable en todo el intervalo I , concluirnos que

$$f'(a) = f'_+(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_-(b) = f'(b),$$

es decir $f'(a) \leq f'(b)$ siempre que $a < b$, lo que dice que f' es monótona creciente.

(2 \implies 3) Sean $a, x \in I$. Si $a < x$ por el TVM $\exists c_x \in \langle a, x \rangle$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(c_x)(x - a).$$

Como f' es monótona creciente $f'(c) \geq f'(a)$, lo que implica que

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a) = T_a(x).$$

Si $x < a$ la prueba es análoga.

(3 \implies 1) Sean $x_0, a, b \in I$ tal que $a < x_0 < b$. Debemos demostrar que

$$f(x_0) \leq \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x_0 - a) + f(a).$$

En efecto: sea

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq T_{x_0}(x)\}$$

donde $T_{x_0}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ es la recta tangente a f en $(x_0, f(x_0))$, luego de la hipótesis se tiene que $f(a) \geq T_{x_0}(a)$ y $f(b) \geq T_{x_0}(b)$, es decir

$$A(a, f(a)) \in \mathcal{H} \text{ y } B(b, f(b)) \in \mathcal{H}.$$

Siendo \mathcal{H} un conjunto convexo, el segmento de extremos A y B está contenido en \mathcal{H} , en particular

$$\left(x_0, \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x_0 - a) + f(a) \right) \in \mathcal{H},$$

$$\text{es decir } f(x_0) = T_{x_0}(x_0) \leq \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x_0 - a) + f(a). \quad \square$$

Por ejemplo para la función f definida por $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, siendo $f'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (monótona creciente), concluimos que esta función es convexa en todo \mathbb{R} .

Observando este ejemplo es natural dar el siguiente

Corolario 8.3.1 Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable, entonces

1. f es convexa en I si y sólo si $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I$.
2. f es cóncava en I si y sólo si $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I$.

Prueba.-

1.- f es convexa si y sólo si $g = f'$ es creciente en I , o equivalentemente si $g'(x) \geq 0$ en I . Es decir, f es convexa si y sólo si $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.

2.- f es cóncava si y sólo si $-f$ es convexa en I , de donde se concluye que f es cóncava si y sólo si $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$. \square

Para la función $f(x) = x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, como $f''(x) = 6x$ vemos que f es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, \infty)$. En este caso se dice que la función cambia de concavidad (o de convexidad) cuando $x = 0$ ó en el punto $(0, 0)$. Estos puntos de cambio de concavidad son llamados puntos de inflexión.

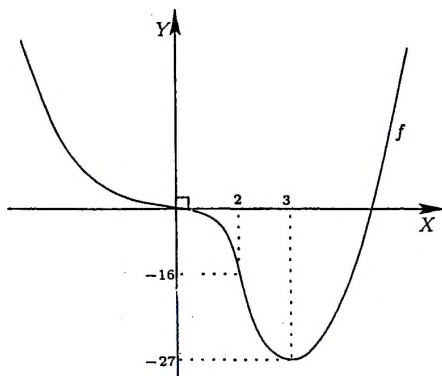
Definición 8.3.4 Sea I un intervalo y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $c \in \text{int}(I)$. Se dice que c es un **punto de inflexión** de f si existe $\delta > 0$ tal que f es convexa (cóncava) en $(c - \delta, c)$ y f es cóncava (convexa) en $(c, c + \delta)$.

Note que, si c es un punto de inflexión entonces $f''(c) = 0$ (¡verifique!), sin embargo el recíproco de este resultado es en general falso. Por ejemplo, si consideramos la función $f(x) = x^4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, vemos que $f''(0) = 0$ y $(0, 0)$ no es un punto de inflexión (claramente). Ahora veamos las aplicaciones más inmediatas de todo lo desarrollado.

Aplicación 1.- Graficar la función f definida por

$$f(x) = x^4 - 4x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Solución.-



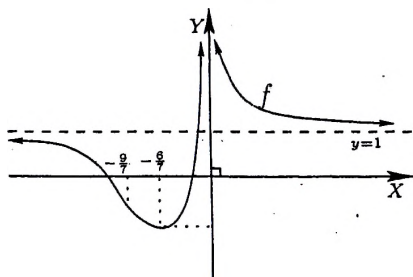
$$f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4) = x^4 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad (8.5)$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3) \quad (8.6)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) \quad (8.7)$$

De (8.5) vemos que las raíces de f son 0 y 4 (ie. $f(0)=f(4)=0$), y que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$; de (8.6) vemos que f es decreciente en $(-\infty, 3]$ y creciente en $[3, +\infty)$, luego $f(3) = -27$ es el mínimo absoluto de f . Además de (8.7) se tiene que f es convexa en $(-\infty, 0)$ y en $(3, +\infty)$, y es cóncava en $(0, 2)$. Por lo tanto $(0, 0)$ y $(2, -16)$ son los únicos puntos de inflexión de esta función. Con toda esta información se ha contruido el gráfico de esta función.

Aplicación 2.- Graficar la función f , si $f(x) = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} \quad \forall x \neq 0$.
Solución.-



$$f(x) = 1 + 7x^{-1} + 3x^{-2} = 1 + \frac{7x + 3}{x^2} \quad (8.8)$$

$$f'(x) = -7x^{-2} - 6x^{-3} = -\frac{7x + 6}{x^3} \quad (8.9)$$

$$f''(x) = 14x^{-3} + 18x^{-4} = 2\frac{7x + 9}{x^4} \quad (8.10)$$

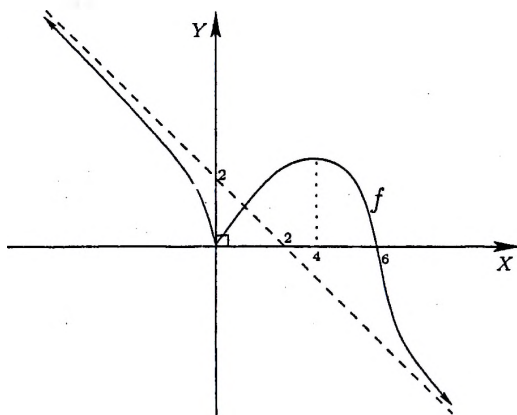
De (8.8) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$, lo que implica que $\mathcal{L}_1 : y = 1$ es una asíntota horizontal a izquierda y a derecha, y como $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = 1 + \frac{3}{0^\pm} = +\infty$ la recta $\mathcal{L}_2 : x = 0$ es una asíntota vertical (a izquierda y derecha del 0). De

(8.9) vemos que f es decreciente en $\langle -\infty, -\frac{6}{7} \rangle$ y en $\langle 0, +\infty \rangle$, es creciente en $[-\frac{6}{7}, 0]$, luego $f(-\frac{6}{7})$ es el mínimo absoluto de f . Además de (8.10) se tiene que f es cóncava en $\langle -\frac{9}{7}, 0 \rangle$ y es convexa en los intervalos $\langle 0, +\infty \rangle$ y $\langle -\frac{9}{7}, 0 \rangle$. Por lo tanto $(-\frac{9}{7}, f(-\frac{9}{7}))$ es el único punto de inflexión de esta función. Con toda esta información se ha construido el gráfico de f .

Aplicación 3.- Graficar la función f definida por

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Solución.-



$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)} = [x^2(6-x)]^{1/3} = x \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} \quad (8.11)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}[x^2(6-x)]^{-2/3} \{2x(6-x) + x^2(-1)\} = \frac{4-x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}} \quad (8.12)$$

$$f''(x) = \frac{-8}{\sqrt[3]{x^4(6-x)^5}} \quad (8.13)$$

De (8.11), vemos que las raíces de f son 0 y 6. Por otro lado como

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} = -1 \quad \text{y}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\sqrt[3]{x^2(6-x)} + x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x - \sqrt[3]{x^2(x-6)}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2}{x^2 + x\sqrt{x^2(x-6)} + \sqrt{x^2(x-6)}^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{6}{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{6}{x}}^2} = 2$$

la recta $\mathcal{L}_1 : y = -x + 2$ es una asíntota oblicua a izquierda y a derecha. De (8.12) vemos que f es creciente en $[0, 4]$, y es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0]$ y $[4, +\infty)$, luego $f(0) = 0$ es el mínimo relativo y $f(4)$ es el máximo relativo de f . Además de (8.13) se tiene que f es convexa en $(6, +\infty)$ y es cóncava en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, 6)$. Por lo tanto $(6, 0)$ es el único punto de inflexión de esta función. Con toda esta información se ha construido el gráfico de f .

8.4 Los Polinomios de Taylor

Una técnica de gran utilidad en el estudio de las funciones reales es la aproximación de éstas por medio de polinomios. Precisamente los polinomios de Taylor proporcionan una aproximación razonable de la función "localmente". El teorema de Taylor que aquí probaremos puede ser considerado como una ampliación del teorema del valor medio para derivadas de orden superior. Mientras que el teorema del valor medio relaciona los valores de la función con su derivada, el teorema de Taylor proporciona una relación entre los valores de la función y sus derivadas de orden superior. Si una función f tiene una derivada n -ésima en un punto c , no es difícil construir un polinomio p_n de grado n -ésimo tal que

$$p(c) = f(c) \text{ y } p_n^{(k)}(c) = f^{(k)}(c) \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (8.14)$$

De hecho tal polinomio es

$$p_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n. \quad (8.15)$$

Este polinomio es llamado n -ésimo Polinomio de Taylor de f alrededor de c . Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 1.- Halle los polinomios de Taylor de la función seno alrededor del 0.

Solución.- Como

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = \operatorname{sen} x & f(0) = 0 \\
 f'(x) = \operatorname{cos} x & f'(0) = 1 \\
 f''(x) = -\operatorname{sen} x & \implies f''(0) = 0 \\
 f^{(3)}(x) = -\operatorname{cos} x & f^{(3)}(0) = -1 \\
 f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) = 0 \\
 \vdots & \vdots
 \end{array}$$

se tiene que

$$p_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4,$$

es decir

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} = p_4(x).$$

En general

$$p_{2k+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = p_{2k+2}(x).$$

Ejemplo 2.- Halle los polinomios de Taylor de la función coseno alrededor del 0.

Solución.- Como

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = \operatorname{cos} x & f(0) = 1 \\
 f'(x) = -\operatorname{sen} x & f'(0) = 0 \\
 f''(x) = -\operatorname{cos} x & \implies f''(0) = -1 \\
 f^{(3)}(x) = \operatorname{sen} x & f^{(3)}(0) = 0 \\
 f^{(4)}(x) = \operatorname{cos} x & f^{(4)}(0) = 1 \\
 \vdots & \vdots
 \end{array}$$

se tiene que

$$p_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4,$$

es decir

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = p_5(x).$$

En general

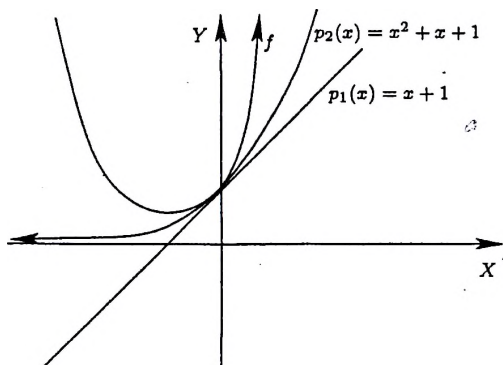
$$p_{2k}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = p_{2k+1}(x).$$

Ejemplo 3.- Si $f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1)$, los polinomios de Taylor de f alrededor del cero son (¡verifique!):

$$p_1(x) = 1 + x, \quad p_2(x) = 1 + x + x^2, \quad p_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3,$$

$$p_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4, \quad p_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5, \text{ etc.}$$

Graficando



En esta gráfica vemos que cuanto mayor sea el grado del polinomio de Taylor mejor es la aproximación a f alrededor del cero.

A fin, de medir la calidad de la aproximación, es necesario contar con la información acerca del residuo

$$R_n(x) := f(x) - p_n(x).$$

El siguiente resultado fundamental proporciona dicha información.

Teorema 8.4.1 Fórmula de Taylor

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $[a, b]$ hasta el orden n tal que $f^{(n+1)}$ exista en (a, b) . Si c es un punto cualquiera fijado en $[a, b]$, entonces para cada $x \in [a, b]$ existe ξ entre c y x tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-c)^{(n+1)}. \quad (8.16)$$

Prueba: Consideremos el caso $x > c$; por un razonamiento análogo se prueba el caso $x < c$. El punto x quedará fijo durante toda la demostración.

Si definimos la función $F : [c, x] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k \quad \forall t \in [c, x]$$

vemos que $F(x) = 0$ y

$$F(c) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k \quad (\therefore f(x) = p_n(x) + F(c)).$$

Ahora como $F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$,

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{(k-1)} \right\} \\ &= -f'(t) - \left\{ \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n - f'(t) \right\} \end{aligned}$$

es decir,

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n. \quad (8.17)$$

Por otro lado si definimos la función $G : [c, x] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x-t}{x-c} \right)^{n+1} \cdot F(c) \quad \forall t \in [c, x]$$

notamos que G es continua en $[c, x]$, derivable en (c, x) y $G(c) = G(x) = 0$, luego por el teorema de Rolle, existe $\xi \in (c, x)$ tal que $G'(\xi) = 0$, es decir

$$F'(\xi) + (n+1) \frac{(x-\xi)^n}{(x-c)^{n+1}} F(c) = 0.$$

Luego usando (8.18), se concluye que $F(c) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-c)^{(n+1)}$. \square

El término correspondiente al residuo en (8.16) se puede usar para estimar el error al aproximar una función mediante su polinomio de Taylor $P_n(x)$. Si el número n es fijado se plantea la cuestión de la precisión de la aproximación; si se especifica cierta precisión entonces la cuestión es encontrar un valor adecuado para n . En los siguientes ejemplos se ilustra lo mencionado.

Ejemplo 1.- Como

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} \operatorname{sen} \xi$$

donde ξ esta entre 0 y x , para $|x| \leq 1$

$$\left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) \right| = \left| \frac{x^5}{120} \operatorname{sen} \xi \right| < \frac{1}{120},$$

es decir el polinomio de Taylor alrededor del origen y con $n = 4$ difiere de la función coseno en menos de $1/120$, para valores de $x \in [-1, 1]$.

Si $n = 6$ el polinomio de Taylor es

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720},$$

luego

$$\left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \right) \right| = \left| \frac{x^7}{7!} \operatorname{sen} \xi \right| < \frac{1}{5040}.$$

Así trabajando en el mismo intervalo al aumentar el grado del correspondiente polinomio de Taylor se mejora la aproximación.

Ejemplo 2.- Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x.$$

En efecto: Fijado $x \in \mathbb{R}$, para algún ξ entre 0 y x se tiene que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\operatorname{sen} \xi}{6} x^3.$$

Por otro lado si $0 \leq x \leq \pi$ tanto ξ como x^3 son positivas, luego $\operatorname{sen} \xi \cdot x^3 \geq 0$, y si $-\pi \leq x \leq 0$ tanto ξ como x^3 son negativas, luego $\operatorname{sen} \xi \cdot x^3 \geq 0$. Por consiguiente $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$ para $|x| \leq \pi$. Si $|x| \geq \pi$ es fácil ver que

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq -3 \leq \cos x.$$

Por lo tanto la desigualdad es válida para todo x real. \square

Existen funciones reales f tales que $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$ y $f(c)$ es un máximo o un mínimo local. Por ejemplo si $f(x) = x^4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ el punto $x = 0$ es un punto crítico de f , pues $f'(0) = 0$ y apesar de que $f''(0) = 0$. $0 = f(0)$ es un mínimo local de f ; análogamente si $f(x) = -x^4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = f''(0) = 0$ y $0 = f(0)$ es un máximo local de esta función. Sentimos pues que hay necesidad de tener un criterio más poderoso para decidir si un punto crítico es un máximo o un mínimo. Gracias al teorema de Taylor demostraremos el resultado deseado en el siguiente teorema, que generaliza los criterios de la primera y segunda derivada.

Teorema 8.4.2 Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^n en (a, b) tal que para algun $c \in (a, b)$

$$f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

1. Si n es par y $f^{(n)}(c) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en c .
2. Si n es par y $f^{(n)}(c) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en c .
3. Si n es impar, f no tiene máximo ni mínimo relativo en c .

Prueba .- Puesto que las $(n-1)$ primeras derivadas de f en c son ceros, por la fórmula de Taylor (8.16)

$$f(x) = f(c) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-c)^n$$

donde ξ es algún número entre c y x . Siendo $f^{(n)}$ continua y $f^{(n)}(c) \neq 0$, existe un intervalo $I \subseteq (a, b)$ que contiene a c tal que

$$f^{(n)}(x) \text{ y } f^{(n)}(c) \text{ tengan el mismo signo } \forall x \in I. \quad (8.18)$$

1. Si n es par y $f^{(n)}(c) > 0$, siendo I un intervalo, para cada $x \in I$, $\xi \in I$ (recordando que $c \in I$), luego de (8.18) $f'(\xi) > 0$ y $(x-c)^n \geq 0$, lo que implica que

$$f(x) = f(c) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-c)^n \geq f(c).$$

Así $f(c) \leq f(x) \forall x \in I$, es decir f tiene un mínimo relativo en c .

2. Si n es par y $f^{(n)}(c) < 0$, siendo I un intervalo, para cada $x \in I$, $\xi \in I$ (recordando que $c \in I$), luego de (8.18) $f'(\xi) < 0$ y $(x-c)^n \geq 0$, lo que implica que

$$f(x) = f(c) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-c)^n \leq f(c).$$

Así $f(c) \geq f(x) \forall x \in I$, es decir f tiene un máximo relativo en c .

3. Si n es impar, entonces $(x-c)^n$ es estrictamente positiva si $x > c$ y estrictamente negativa si $x < c$. Por consiguiente $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-c)^n$ tendrá signos contrarios a la izquierda y a la derecha de c . Por lo tanto f no tiene ni máximo ni mínimo relativo en c . \square

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.- Si f es la función definida por $f(x) = \operatorname{sen} x - x \forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$f'(x) = \operatorname{cos} x - 1, \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f'''(x) = -\operatorname{cos} x$$

luego

$$f(0) = 0, \quad f''(0) = 0 \quad \text{y} \quad f'''(0) = -1.$$

Por lo tanto esta función no tiene extremo relativo en el origen.

Ejemplo 2.- Si f es la función definida por $f(x) = 2\operatorname{cos} x + x^2 + x^5 \forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$f'(x) = -2\operatorname{sen} x + 2x + 5x^4, \quad f''(x) = -2\operatorname{cos} x + 2 + 20x^3,$$

$$f'''(x) = 2\operatorname{sen}(x) + 60x^2 \quad \text{y} \quad f^{(4)}(x) = 2\operatorname{cos} x + 120,$$

luego $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ y $f^{(4)}(0) = 2 > 0$. Por lo tanto f tiene un mínimo relativo en el origen.

8.5 Ejercicios Resueltos

1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x & , 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{2-x} & , 1 < x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Analizar si es aplicable el TVM en el intervalo $[0, \frac{3}{2}]$, si no es aplicable, diga por qué. Si se cumple todas las hipótesis de TVM, hallar el valor de $c \in (0, \frac{3}{2})$ que satisfaga la tesis del TVM.

Solución.-

Como $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, f es continua en $[0, 3/2]$. Derivando

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 & , 0 < x < 1 \\ \frac{2}{(x-2)^2} & , 1 < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Para $0 < x < 1$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)} = x^2 + 1$$

y para $1 < x < \frac{3}{2}$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(-2)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2}{x-2}$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

es decir $f'(1) = 2$, así f es derivable en $(0, \frac{3}{2})$. Por lo tanto f satisface las hipótesis del TVM. Luego existe $c \in (0, \frac{3}{2})$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(3/2) - f(0)}{3/2 - 0} = 2, \text{ más aún tal valor de } c \text{ es } 1.$$

2. Sean $f: I \rightarrow J$ convexa y $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ convexa y creciente. Pruebe que $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa.

Solución.-

Sean $x, y \in I$ y $\lambda \in [0, 1]$ arbitrarios. Siendo f convexa tenemos que

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

y puesto que la función g es creciente y convexa implica que

$$g(f[\lambda x + (1-\lambda)y]) \leq g[\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)] \leq \lambda g(f(x)) + (1-\lambda)g(f(y)),$$

es decir

$$(g \circ f)[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda(g \circ f)(x) + (1-\lambda)(g \circ f)(y).$$

Por lo tanto $g \circ f$ es convexa. \square

3. Un pedazo de alambre de 20cm de largo se corta en dos partes, una parte para formar un cuadrado y con la otra se forma una circunferencia.

(a) ¿Dónde se debe hacer el corte para que la suma de las áreas sea mínima?

(b) Realizar lo anterior para el caso de un máximo. Discutir ese caso.

Solución.-

(a) Con el primer segmento se construirá el cuadrado cuyo lado medirá $x/4$ cm, con el resto se construirá la circunferencia cuya longitud será $2\pi r = 20 - x$, entonces $r = \frac{20-x}{2\pi}$, luego el área total será

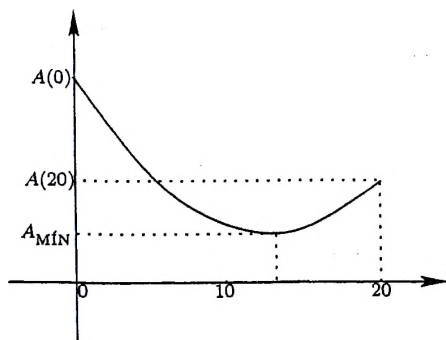
$$A_T(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(20-x)^2}{4\pi} \quad x \in [0; 20].$$

Vemos que el área total $A_T(x)$ (como función de x) es una parábola convexa. Derivándola respecto a x tenemos

$$A'_T(x) = \frac{x}{8} + \frac{x-20}{2\pi}.$$

Igualando a cero y despejando x tenemos $x = \frac{80}{\pi+4}$. La segunda derivada respecto a x es $A''_T(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0$, lo que corrobora la observación que $A_T(x)$ es una función convexa; por lo tanto para lograr el área mínima debemos efectuar el corte del alambre en el punto tal que su longitud desde un extremo sea $\frac{80}{\pi+4} \approx 11.2$ cm.

(b) El valor máximo de la función área, como se puede ver en la figura adjunta, ocurre en $x = 0$. Debería entonces construirse solamente una circunferencia de radio $R = \frac{10}{\pi}$ cm. Si se exigiera necesariamente cortar el alambre, es decir construir algún cuadrado, el problema del máximo carece de solución.



4. Sea $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es derivable y además $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ existen. Demostrar que necesariamente $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$.

Solución.-

Por hipótesis f es derivable en $[a, \infty)$ y existen $L, M \in \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = M$.

Probaremos que $M = 0$. En efecto:

para $\varepsilon > 0$ (fijo arbitrario) existe $p > 0$ tal que si $x > p$

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad |f'(x) - M| < \frac{\varepsilon}{3}$$

luego si $x_0 > p$, por el TVM existe $\theta \in (x_0, x_0 + 1)$ tal que

$$\frac{f(x_0 + 1) - f(x_0)}{(x_0 + 1) - x_0} = f'(\theta),$$

así

$$|f'(\theta)| = |f(x_0 + 1) - f(x_0)| \leq |f(x_0 + 1) - L| + |L - f(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Por lo tanto

$$|M| \leq |M - f'(\theta)| + |f'(\theta)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

de donde concluimos que $M = 0$.

5. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en el intervalo $\langle a, b \rangle$. Pruebe que existe $c \in \langle a, b \rangle$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Solución.-

Si $g(b) = g(a)$, por el teorema de Rolle existe $c \in \langle a, b \rangle$ tal que $g'(c) = 0$, y la tesis se cumple trivialmente.

Supongamos ahora que $g(b) \neq g(a)$. Sean $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ y

$$h(x) = f(x) - \lambda g(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Observamos que h es continua en $[a, b]$ y derivable en $\langle a, b \rangle$, además como $h(a) = h(b)$, por el teorema de Rolle existe $c \in \langle a, b \rangle$ tal que $h'(c) = 0$, es decir $h'(c) = f'(c) - \lambda g'(c) = 0$, de donde se concluye que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$$

para algún $c \in \langle a, b \rangle$.

6. Sea $f(x) = x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Muestre que 0 es un punto crítico de f , sin embargo f no tiene máximo ni mínimo relativo cuando $x = 0$, ni $(0, f(0))$ es punto de inflexión de esta función.

Solución.-

Como $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, 0 es un punto crítico de f .

Además

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

y considerando las sucesiones $x_n = \frac{1}{n\pi}$ y $\bar{x}_n = \frac{-1}{n\pi}$ tenemos que $x_n \rightarrow 0$, $\bar{x}_n \rightarrow 0$ y

$$f'\left(\pm \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \pi^2} = \begin{cases} \text{positivo} & , \quad \text{si } n \text{ es impar} \\ \text{negativo} & , \quad \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

lo que permite concluir que f no tiene máximo ni mínimo en el 0. Análogamente

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 6x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

y como

$$f''\left(\pm \frac{1}{n\pi}\right) = (-6) \left(\frac{\pm 1}{n\pi}\right) (-1)^n$$

concluimos también que $(0, 0)$ no es un punto de inflexión de esta función.

7. Estudie la función f definida por

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x^2} \quad \forall x \neq 0,$$

es decir hallar sus máximos y mínimos relativos y absolutos, sus concavidades y sus puntos de inflexión, luego trace su gráfica.

Solución.-

Tenemos que

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{y} \quad f \in C(D_f).$$

Siendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, la recta $x = 0$ es la única asíntota vertical de f . Como

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

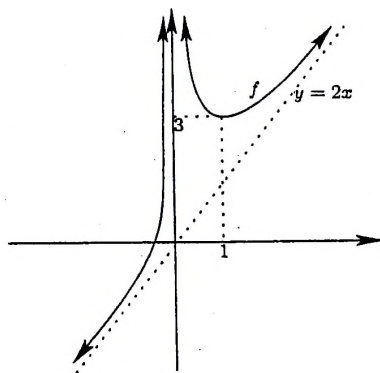
la recta $y = 2x$ es su asíntota oblicua a izquierda y derecha. Derivando

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x-1)}{x} \cdot \frac{(x^2+x+1)}{x^2},$$

luego por el criterio de la primera derivada f es: creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, 1]$ y creciente en $[1, +\infty)$ con mínimo relativo $3 = f(1)$; y como

$$f''(x) = \frac{6}{x^4} \quad \text{para todo } x \neq 0$$

podemos afirmar que f es convexa en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$. Con toda esta información tenemos el siguiente gráfico.

Figura 8.6: $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

8. Sea $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función real tal que

$$L'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0 \quad \text{y} \quad L(1) = 0.$$

Demuestre que $L(xy) = L(x) + L(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

Solución.-

Para $y \in \mathbb{R}^+$ (fijo), definimos la función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = yx \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

Como $(L \circ f)'(x) = L'(f(x)) \cdot f'(x)$ se tiene que

$$(L \circ f)'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot y = \frac{1}{x} = L'(x),$$

por lo tanto existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $(L \circ f)(x) = L(x) + C$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$. En particular si $x = 1$, $L(y) = L(f(1)) = L(1) + C = C$
Así

$$L(xy) = L(x) + L(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

9. Demuestre que, para todo $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

Solución.- Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

Consideremos la función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \text{ para todo } x \geq 0.$$

Como $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ para todo $x \geq 0$, esta función es monótona creciente en $[0, +\infty)$. Consecuentemente, sabiendo que

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

implica que

$$f(|a+b|) \leq f(|a|+|b|).$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}. \end{aligned}$$

10. La resistencia de una viga de sección transversal rectangular es directamente proporcional a su ancho y al cuadrado de su altura.
- Calcular las dimensiones de la viga de máxima resistencia que puede aserrarse de un tronco de madera de forma cilíndrica de diámetro d dado.
 - Si el tronco tiene largo l , ¿Qué porcentaje del total del tronco de madera se ha utilizado en la construcción de esta viga?

Solución.-

(a) Llamando R a la resistencia de la viga y k a la constante positiva de proporcionalidad, podremos escribir

$$R = kxy^2. \quad (8.19)$$

Sobre un corte transversal, llamando x al ancho y y a la altura de la viga construimos un triángulo rectángulo de catetos x, y e hipotenusa d , luego tenemos

$$y^2 = d^2 - x^2 \quad (8.20)$$

Sustituyendo (8.20) en (8.19) obtenemos la expresión analítica de la función R

$$R(x) = kx(d^2 - x^2), \quad 0 \leq x \leq d \quad (8.21)$$

derivando e igualando a cero en (8.21), obtenemos

$$R'(x) = k(d^2 - 3x^2) = 0 \implies x = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Siendo $R''(x) = -6kx$ y $R''\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{6kd}{\sqrt{3}}$, por el criterio de la segunda derivada R tiene un máximo relativo cuando $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$, luego por (8.20)

$$y^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2}{3}d^2 \implies y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}d.$$

Por lo tanto $y = \sqrt{\frac{2}{3}}x$.

(b) Sean V_c el volúmen del "cilindro" y V_v el volumen de la viga, de longitud l , entonces

$$V_c = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 l = \frac{\pi}{4}d^2l \quad \text{y} \quad V_v = xyl = \frac{\sqrt{2}}{3}d^2l$$

entonces $V_v = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}V_c \approx 60\%V_c$.

Así el porcentaje de madera utilizado en la viga es 60% de la madera total. \square

8.6 Ejercicios Propuestos

1. Sea I un intervalo. Dada las funciones convexas $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, demuestre que $f + g$ y λf (si $\lambda > 0$) son también convexas.
2. Sea I un intervalo. Dada las funciones convexas $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, demuestre que la función $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ también es convexa.
3. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava y $J = \{x \in I / f(x) > 0\}$, pruebe que la función $\frac{1}{f} : J \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa.

4. Encuentre dos funciones convexas cuya composición exista pero que no sea convexa.
5. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama afín si $\exists m \in \mathbb{R}^*$ y $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = mx + k \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Pruebe que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función afín, si y sólo si

$$f[\lambda a + (1 - \lambda)b] = \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

6. Si $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función afín y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa, pruebe que $g \circ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa.
7. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Dados $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$ y $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$ tales que $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, pruebe que

$$f(t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_n a_n) \leq t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) + \dots + t_n f(a_n)$$

8. Pruebe que una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si, $\forall x \in \langle a, b \rangle \subseteq I$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

¿Cuál es la interpretación geométrica de este resultado?

9. Sean $p, q \in \mathbb{R}$. Probar que si $p > 0$ entonces la ecuación

$$X^3 + pX + q = 0$$

tiene una sola raíz real.

10. Una fábrica de muebles calcula que el costo semanal de producir x reproducciones terminadas a mano de un escritorio colonial, está dado por $c(x) = x^3 - 3x^2 - 80x + 500$. Cada escritorio producido se vende a 2800 soles ¿Qué producción mensual rendirá la máxima utilidad? ¿Cuál es la mayor ganancia posible por semana?
11. El costo operación para cierto camión se estima en $(30 + v/2)$ centimos por kilometro, cuando se conduce a una velocidad de v Km/h. El salario del conductor es de 18 soles por hora. ¿Cuál es la velocidad que minimizará el costo de realizar un envío a una ciudad que está a k Km?. Suponga que las leyes restringen la velocidad a $50 \leq v \leq 90$ Km/h

12. Un hombre camina a lo largo de una senda recta a una velocidad de $4m/s$. Un reflector está en el piso a $20m$ de la senda y se mantiene enfocando sobre el hombre. ¿ Con qué rapidez gira el reflector cuando el hombre está a $15m$ del punto de la senda más cercano al reflector?.
13. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda sujeta al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, entonces la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante positiva llamada coeficiente de fricción y $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Demuestre que F se minimiza cuando $\tan \theta = \mu$.

14. Sea $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable. Si $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = L$, pruebe que $L = f'(0)$. (Sugerencia: Use el TVM).
15. A las 13 : 00 horas el barco A se encuentra a 25 millas al sur del barco B . Suponiendo que A navega hacia el oeste a razón de 16 millas por hora, y que B navega hacia el sur a 20 millas por hora.
- (a) Determine si a las 13:30 los barcos se están alejando o acercando.
- (b) Determine el instante en el que uno se encuentre mas cerca del otro.
16. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, tal que existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ y $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = B$. Si $A = B$, pruebe que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{B - A}{b - a}$.
17. Sean f, g dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, demuestre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = g'(c)$.
18. Si $f(x) = ax^3 + bx^2$, determine los valores de a y b para que la función f tenga un punto de inflexión en $(2, 6)$.
19. Si $x > 0$, pruebe que

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

20. Si $x > 0$, pruebe que

$$\left| (1+x)^{1/3} - \left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \right) \right| \leq \frac{5x^3}{81}$$

21. Pruebe que el rectángulo de área máxima que se puede construir con un perímetro fijado, es el cuadrado.

22. Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio r .

23. Hallar el área del mayor rectángulo con base en menor en el eje X y vértices superiores en la curva $y = 12 - x^2$

24. Sean $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y sea f la función real de variable real definida por $f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i - x)^2$. Encontrar el único punto donde f alcanza su máximo relativo.

25. (a) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ en $[p; q]$. Si x_0 es el valor que satisface el TVM, pruebe que $x_0 = \frac{1}{2}(p+q)$.

(b) Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en $[p; q]$. Si x_0 es el valor que satisface el TVM, pruebe que $x_0 = \frac{1}{3}(p^2 + pq + q^2)$.

26. Determinar los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad \forall x \neq 1$ (d) $f(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{x+2} \quad \forall x \geq 0$

27. Un observatorio debe tener la forma de un cilindro circular recto, rematado por una bóveda semiesférica, con un volumen total dado. Si la bóveda semiesférica cuesta el doble por pie cuadrado que el muro cilíndrico ¿cuales son las dimensiones más económicas?

28. Haga un bosquejo del gráfico de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{32} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

9. Determinar los puntos de inflexión, asíntotas, intervalos de concavidad, intervalos de convexidad y gráfica de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x^3}{4+x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

10. Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{(x-1)^2} \quad \forall x \neq 1$$

- Hallar las asíntotas y los puntos críticos.
 - Analizar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 - Determinar los intervalos de concavidad.
 - Hallar los valores extremos y puntos de inflexión, si existen
 - Trace su gráfica
31. Dada una lámina cuadrada de oro de lado a , se requiere construir una caja de base cuadrada con tapa que tenga un volumen de $4dm^3$ (decímetros cúbicos). Encuentre las dimensiones que minimicen la cantidad de material necesario (desprecie el espesor del material y lo que se desperdicia en la construcción).
32. Sea f una función derivable en $[a, b]$. Si $f'(a) < 0 < f'(b)$ pruebe que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
33. Sea f una función derivable en $[a, b]$. Si k es un número entre $f'(a)$ y $f'(b)$, pruebe que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = k$.
34. Sea $f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, y derivable en $(0; 2)$. Si $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(2) = 1$, pruebe que:

(a) Existe $c_1 \in (0, 1)$ tal que $f'(c_1) = 1$.

(b) Existe $c_2 \in (1, 2)$ tal que $f'(c_2) = 0$.

(c) Existe $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = \frac{1}{3}$.

35. Sea $a > b > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$). Pruebe que

$$\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{a-b}.$$

(Sug. Pruebe que $f(x) = \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x-1}$ es decreciente para $x \geq 1$, y evaluar f en 1 así como en a/b).

Bibliografía

- [1] Hanser - La Salle - Sullivan, *Análisis Matemático*, Editorial Trillas 1997, México.
- [2] Michael Spivak, *Calculus*, Editorial Reverté, S. A, 1996 España.
- [3] Michel Helfgott- Tomas Núñez, *Cálculo Diferencial*, Editorial Hozlo S.C.R.L. 1989, Lima.
- [4] R Bartle-D Sherbert, *Introducción al Análisis Matemático de una Variable*, Editorial Limusa, 1990, México.
- [5] Louis Leithold, *Cálculo con Geometría Analítica*, Editorial Harla, S.A de C.V, 1982, México.
- [6] Edwards y Penney, *Cálculo con Geometría Analítica*, Editorial Prentice Hall Hispanoamericana S.A, 1996, México.
- [7] James Stewart, *Cálculo. Conceptos y Contextos*, Editorial International Thomson Editores, 1999, México.
- [8] Armando O Rojo, *Algebra I*, Editorial El Ateneo, 1976, Buenos Aires - Argentina.
- [9] Oscar Valverde Ayala, *Cálculo Diferencial*, Publicacion auspiciada por el CONCYTEC, 1989, Perú.
- [10] Paul R Halmos, *Teoría Intuitiva de los Conjuntos*, Editorial Continental S.A. 1967, México.
- [11] Djairo G. de Figueiredo, *Funções Reais*, Monografía N°10 de la OFA, 1980, Washington, D.C

Esta obra
se terminó de imprimir en los
talleres gráficos de:
Dist. Imp. Edit. Lib. MOSHERA S.R.L.
en el mes de Mayo del 2009
con un tiraje de 1000 ejemplares
Lima - Perú

Distribuidora, Imprenta, Editorial, Librería

MOSHERA S.R.L.

Jr. Tacna 2975 - Lima 31

Telefax: 567-9299

e-mail: editorialmoshera@hotmail.com

350