

Iniciación al

Cálculo diferencial e integral

Arquímedes Caballero C.

Lorenzo Martínez C.

Jesús Bernárdez G.

ESFINGE
GRUPO EDITORIAL



**Iniciación al
Cálculo
Diferencial e
Integral**

Iniciación al Cálculo Diferencial e Integral

ARQUÍMEDES CABALLERO C.

LORENZO MARTÍNEZ C.

JESÚS BERNÁRDEZ G.

SÉPTIMA EDICIÓN



EDITORIAL ESFINGE, S. DE R. L. DE C. V.

Esfuerzo 18-A

Col. Industrial Atoto

Naucalpan, Estado de México

2011

Primera edición: 1999
Séptima edición: 2006
Sexta reimpresión: 2011

Derechos reservados ©
Editorial Esfinge, S. de R. L. de C. V.
Esfuerzo 18-A
Col. Industrial Atoto
Naucalpan, Estado de México

La presentación, la disposición y las demás características de esta obra son propiedad de **Editorial Esfinge, S. de R. L. de C. V.**

La reproducción o transmisión total o parcial y el almacenamiento de información sin autorización escrita del editor quedan prohibidos mediante cualquier sistema o método electrónico o mecánico de recuperación.



ISBN 978-970-782-158-3

IMPRESO EN MÉXICO



Isaac Newton. Matemático y físico inglés (1642-1727). En 1666, a la edad de 23 años, estudiaba en la Universidad de Cambridge, cuando fue víctima de un brote epidémico, que lo obligó a pasar un año en cama en el pueblo donde había nacido, Woolsthorpe. Según sus biógrafos, allí se dedicó a inventar el cálculo diferencial e integral, además de realizar importantes descubrimientos sobre la naturaleza de la luz y establecer las bases de la teoría de gravitación universal.

Contenido

| | | |
|---------------------|---|----|
| Capítulo I. | Variables y funciones | 11 |
| 1.1. | Variables y constantes | 11 |
| 1.2. | Variables dependientes e independientes | 12 |
| 1.3. | Función | 13 |
| 1.4. | Notación | 14 |
| 1.5. | Funciones algebraicas y trascendentes | 14 |
| 1.6. | Funciones racionales e irracionales | 15 |
| 1.7. | Funciones explícitas e implícitas | 16 |
| 1.8. | Funciones simples y compuestas | 17 |
| 1.9. | Función de función | 18 |
| Capítulo II. | Límites | 21 |
| 2.1. | Límite | 21 |
| 2.2. | Infinitamente pequeño | 22 |
| 2.3. | Infinito | 23 |
| 2.4. | Límites básicos | 23 |
| 2.5. | Propiedades fundamentales | 24 |
| 2.6. | Obtención del límite de una función | 25 |
| 2.7. | Indeterminaciones | 28 |

| | | |
|----------------------|--|----|
| Capítulo III. | Derivada de una función | 35 |
| 3.1. | Incremento de una variable | 35 |
| 3.2. | Función continua | 37 |
| 3.3. | Pendiente | 42 |
| 3.4. | Derivada | 44 |
| 3.5. | Regla general para obtener la derivada de $f(x)$ | 45 |
| 3.6. | Interpretación geométrica de la derivada | 51 |
| Capítulo IV. | Derivadas de las funciones algebraicas | 55 |
| 4.1. | Consideración importante | 55 |
| 4.2. | Derivada de una constante | 55 |
| 4.3. | Derivada de una variable con respecto a sí misma | 56 |
| 4.4. | Derivada de una suma de funciones | 57 |
| 4.5. | Derivada del producto de una constante por una función | 59 |
| 4.6. | Derivada del producto de dos funciones | 60 |
| 4.7. | Derivada del producto de un número fijo de funciones | 62 |
| 4.8. | Derivada de una función con un exponente constante | 63 |
| 4.9. | Derivada de un cociente de funciones | 64 |
| 4.10. | Derivada del cociente de una función entre una constante | 66 |
| 4.11. | Derivada de la raíz cuadrada de una función | 67 |
| 4.12. | Obtención de derivadas | 69 |
| 4.13. | Derivadas sucesivas | 84 |
| 4.14. | Derivada de funciones implícitas | 89 |
| Capítulo V. | Interpretación cinemática de la derivada | 95 |
| 5.1. | Rapidez de la variación | 95 |
| 5.2. | Interpretación geométrica de la rapidez de variación | 97 |
| 5.3. | Velocidad en el movimiento rectilíneo | 98 |
| 5.4. | Aceleración en el movimiento rectilíneo | 99 |
| 5.5. | Problemas | 99 |

| | |
|--|-----|
| Capítulo VI. Máximos y mínimos | 105 |
| 6.1. Introducción | 105 |
| 6.2. Concavidad y puntos de inflexión | 113 |
| 6.3. Método de la segunda derivada | 115 |
| 6.4. Problemas | 121 |
| Capítulo VII. Derivadas de las funciones trascendentes | 139 |
| 7.1. Valor natural de un ángulo | 139 |
| 7.2. Límites importantes | 141 |
| 7.3. Derivadas de las funciones trigonométricas | 149 |
| 7.4. Derivadas de las funciones logarítmica y exponenciales | 171 |
| Capítulo VIII. Diferenciales | 179 |
| 8.1. Generalidades | 179 |
| 8.2. Diferencial | 180 |
| 8.3. Fórmulas de las diferenciales de funciones algebraicas | 181 |
| 8.4. Obtención de diferenciales de funciones algebraicas | 184 |
| 8.5. Fórmulas de diferenciales de funciones trascendentes | 190 |
| 8.6. Obtención de diferenciales de funciones trascendentes | 194 |
| 8.7. Interpretación geométrica de la diferencial | 199 |
| 8.8. La diferencial como aproximación del incremento | 200 |
| Capítulo IX. Integrales | 203 |
| 9.1. Integración | 203 |
| 9.2. Constante de integración | 205 |
| 9.3. Propiedades fundamentales | 206 |
| 9.4. Formulario de integrales | 207 |
| 9.5. Integrales inmediatas | 211 |

| | | |
|-----------------------------|--|-----|
| Capítulo X. | Métodos de integración | 217 |
| 10.1. | Integración por sustitución | 217 |
| 10.2. | Integración por partes | 222 |
| Capítulo XI. | Integral definida | 229 |
| 11.1. | Diferencial del área limitada bajo una curva | 229 |
| 11.2. | Integral definida | 231 |
| 11.3. | Valor de una integral definida | 233 |
| 11.4. | Áreas | 235 |
| Apéndice | | 243 |
| Respuestas a los ejercicios | | 243 |
| Formulario | | 267 |
| Logaritmos naturales | | 272 |

Capítulo I

Variables y funciones

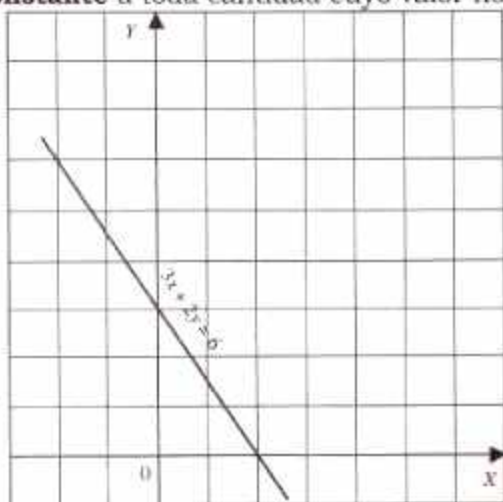
1.1 Variables y constantes

En toda investigación científica y especialmente en una investigación matemática, se llama **constante** a toda cantidad cuyo valor no sufre variación durante cierto proceso. Recibe el nombre de **variable** aquella cuyo valor se altera. Por ejemplo, en el lugar geométrico representado por la ecuación:

$$3x + 2y = 6$$

x , y son *variables*;

2, 3 y 6 son *constantes*.



1.2. Variables dependientes e independientes

En la mayoría de los problemas, interviene un cierto número de variables relacionadas entre sí por medio de una o varias ecuaciones.

Se pueden asignar valores arbitrarios a algunas de estas variables para determinar el valor de las otras.

Ejemplos

a) En la ecuación

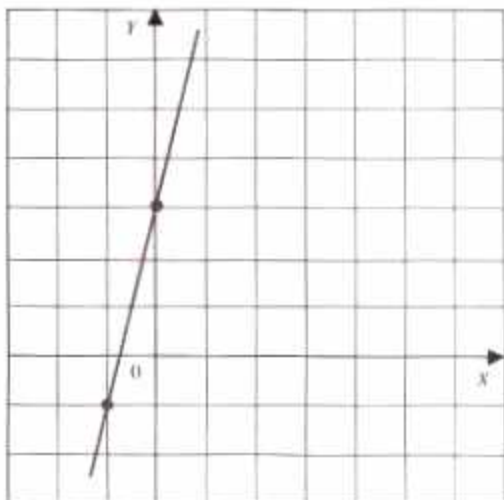
$$y = 4x + 3$$

Si $x = 2$, $y = 11$

Si $x = -1$, $y = -1$

Si $x = 0$, $y = 3$

| x | y |
|-----|-----|
| 2 | 11 |
| -1 | -1 |
| 0 | 3 |



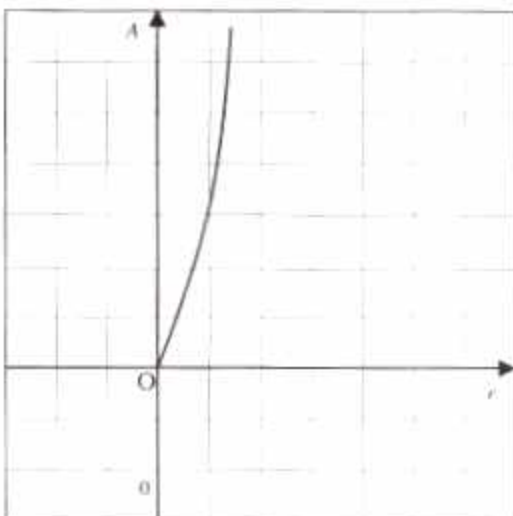
b) En la ecuación $A = \pi r^2$

Si $r = 0$, $A = 0$

Si $r = 1$, $A = 3.14$

Si $r = 2$, $A = 12.56$

| r | A |
|-----|-------|
| 0 | 0 |
| 1 | 3.14 |
| 2 | 12.56 |



c) En la ecuación $y = 25 - x^2$

Si $x = 5$, $y = 0$

Si $x = 4$, $y = \pm 3$

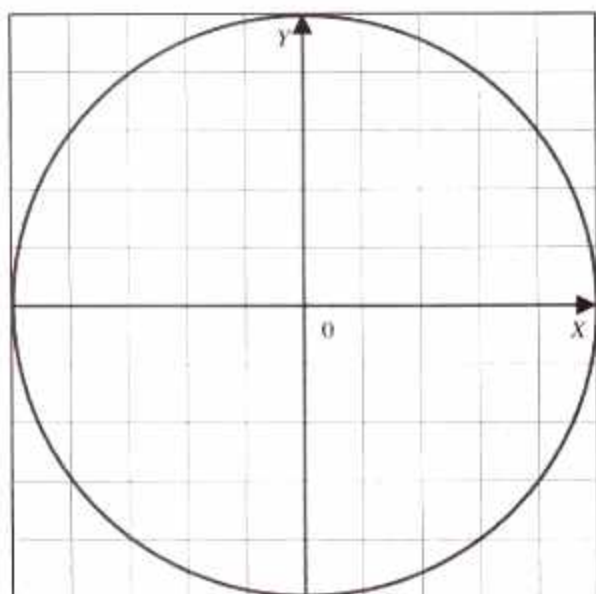
Si $x = 3$, $y = \pm 4$

Si $x = 0$, $y = \pm 5$

Si $x = -3$, $y = \pm 4$

Si $x = -4$, $y = \pm 3$

Si $x = -5$, $y = 0$



| X | Y |
|----|---------|
| 5 | 0 |
| 4 | ± 3 |
| 3 | ± 4 |
| 0 | ± 5 |
| -3 | ± 4 |
| -4 | ± 3 |
| -5 | 0 |

Las variables a las que se asignan *valores arbitrarios* se les llama *variables independientes*; a las otras cuyo valor se determina, se les da el nombre de *variables dependientes*.

1.3. Función

A la variable dependiente se le llama también **función**. Dicho de otro modo, si dos variables están relacionadas de tal manera que a toda variación de una corresponde una variación para la otra, se dice que la segunda es función de la primera.

Ejemplos

- La longitud de la circunferencia es función del radio.
- El volumen de un cubo es función de la longitud de la arista.
- El área de un rectángulo es función de la base y la altura.
- El volumen de un paralelepípedo rectángulo es función de sus tres dimensiones.
- El espacio recorrido por un móvil es función de la velocidad y el tiempo.
- El volumen de una esfera es función del radio.

1.4. Notación

La dependencia de una función respecto a la variable independiente se indica escribiendo:

$$y = f(x)$$

$$y = F(x)$$

$$y = \varphi(x)$$

Leáse: **y** es igual a función de **x** o **y** es función de **x**.

Ejemplos

- $y = x^2 + 9x$, donde **y** es función de **x**; es decir, $y = f(x)$.
- $A = \pi r^2$, donde se puede afirmar que $A = \varphi(r)$.
- $A = bh$, donde $A = f(b, h)$.

1.5. Funciones algebraicas y trascendentes

Función algebraica es aquella que puede expresarse por un determinado número de operaciones algebraicas (suma con un número limitado de sumandos, multiplicación con un número limitado de

Ejemplos

$$y = x^{\frac{2}{3}}, \quad y = ax, \quad y = \sqrt{x^2 - 5}$$

A su vez, las fracciones racionales pueden ser enteras o fraccionarias.

Son enteras cuando el exponente de la variable independiente es un entero positivo.

Ejemplos

$$y = 5x^2, \quad y = -2x, \quad y = 6x^3 + 3$$

Son fraccionarias cuando la variable independiente figura en el denominador o está afectada por un exponente entero negativo.

Ejemplos

$$y = \frac{4x^2 - 2x}{5x^3 - 6x + 8}, \quad y = x^{-3}, \quad y = \frac{1}{4x^2 - 5}$$

1.7. Funciones explícitas e implícitas

Cuando en una función figuran dos variables, cualquiera de ellas se puede tomar como variable independiente y la otra como función. Mas, si la variable que se considera como función está despejada, se dice que la función es **explícita** y si no está despejada, se dice que es **implícita**.

Ejemplos

- a) En $y = 3x - x^2$, donde $y = f(x)$, **y** tiene el carácter de **función explícita**.

- b) En $xy = 3x - y^{-2}$, donde $y = f(x)$, y tiene el carácter de *función implícita*.

1.8. Funciones simples y compuestas

Función simple es aquella que está relacionada con la variable independiente por medio de una o más operaciones simples.

Ejemplos

$$y = x^n \quad y = x + 3 \quad y = \frac{1}{x}$$

$$y = 5x \quad y = x \quad y = e^x$$

$$y = \operatorname{sen} x \quad y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3x$$

Función compuesta es aquella donde el valor de y depende de dos o más variables intermedias que a su vez son funciones de x .

Ejemplos

a) $y = u + v$ donde $u = x + 3$ y $v = (x - 1)^2$
por consiguiente

$$y = x + 3 + (x - 1)^2$$

b) $y = uv$ donde $u = x + 1$ y $v = x - 1$
por consiguiente

$$y = (x + 1)(x - 1)$$

c) $y = u^x$ donde $u = 3x - 2$ y $v = x^2$
 luego

$$y = (3x - 2)^{x^2}$$

1.9. Función de función

Si una función depende de otra y ésta a su vez es una función de la variable independiente, se dice que la primera es *función de función* de la variable independiente.

Ejemplos

a) Si $y = u^2$ donde $u = x + 3$

y es función de función de **x**

b) Si $y = \operatorname{sen} u$ donde $u = x^3$

y es función de función de **x**

c) Si $y = u^2$ donde $u = x^3$

y es función de función de **x**

Ejercicio 1

1. Indicar cuáles de las funciones dadas a continuación son trascendentes y cuáles algebraicas:

a) $y = 3x^2 - 2x + 1$

b) $x^2 + y^2 = 1$

c) $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - y = 0$

d) $y = x^3$

e) $y = {}^3 \operatorname{tg} 3x$

f) $y = 10^{xy}$

g) $y = \ln(\sec x + \tan x)$

h) $\sqrt{x^2 + 6x + 1} = y$

i) $y = \log \frac{2}{x}$

j) $y = ax^2 + bx + c$

- De las funciones listadas en el punto anterior, ¿cuáles son explícitas respecto a y y cuáles implícitas?
- En la misma lista de funciones indicar cuáles son racionales y cuáles irracionales.

Capítulo II

Límites

2.1. Límite

Se dice que una constante A es el límite de una variable V cuando esta variable adquiere valores cada vez más y más próximos a la constante A . Esto significa que toma valores tan cercanos a la constante A como se quiera, pero conservando siempre la cercanía.

También puede afirmarse que cuando una variable se acerca a una constante de tal modo que la diferencia entre los valores de la variable y la constante puede hacerse tan pequeña como se quiera, entonces decimos que la variable se acerca a la constante como un límite.

Para indicar que una variable V tiene por límite el valor A , se emplea la notación:

$$\lim V = a \quad \text{que se lee "el límite de } V \text{ es } A".$$

También se puede escribir:

$$V \rightarrow A \quad \text{que se lee " } V \text{ tiende a } A".$$

Ejemplos

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

cuando $x \rightarrow 2$

$$\text{o bien } \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{2}$$

cuando $x \rightarrow 2$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} 3 + x^2 = 3$$

cuando $x \rightarrow 0$

$$\text{o bien } 3 + x^2 \rightarrow 3$$

cuando $x \rightarrow 0$

Observación. En todos los casos puede suprimirse la palabra *cuando*.

Ejemplos

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{2} = 2$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

2.2. Infinitamente pequeño

Cuando una variable adquiere valores cada vez más y más cercanos a cero, se dice que es un **infinitamente pequeño**. También puede afirmarse que un **infinitamente pequeño** es toda variable que tiende a cero.

Se puede expresar así:

$x \rightarrow 0$ que se lee:

x tiende a cero,

x es infinitamente pequeño,

x tiene por límite cero.

2.3. Infinito

Cuando una variable aumenta de valor constantemente y llega a ser mayor que cualquier constante por grande que ésta sea, se dice que tiende al infinito.

Se expresa así:

$x \rightarrow \infty$ que se lee:

x tiende a infinito.

2.4. Límites básicos

En el caso de que la variable independiente tienda a cero o a infinito, es necesario considerar los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{c}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{c} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{c} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} cx = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} cx = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c + x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} c + x = c$$

2.5. Propiedades fundamentales

Propiedad 1. El límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites de las funciones. Esto quiere decir que dadas las funciones:

$$m = f_1(x), \quad v = f_2(x), \dots, \quad w = f_p(x)$$

se tiene

$$\lim (\mu + v + \dots + w) = \lim \mu + \lim v + \dots + \lim w$$

donde el número p de sumandos es un número finito. Es decir que p no crece indefinidamente.

Propiedad 2. El límite de un producto de funciones es igual al producto de sus límites.

Significa que dadas las funciones:

$$\mu = f_1(x), \quad v = f_2(x) \dots w = f_p(x)$$

tenemos

$$\lim (\mu \cdot v \cdot \dots \cdot w) = (\lim \mu)(\lim v) \dots (\lim w)$$

donde p es un número finito de factores.

Propiedad 3. El límite de un cociente de funciones es igual al cociente de los límites de las funciones, siempre que el divisor no tienda a cero.

Lo anterior significa que dadas las funciones:

$$\mu = f_1(x) \quad \text{y} \quad v = f_2(x)$$

$$\lim \left(\frac{\mu}{v} \right) = \frac{\lim \mu}{\lim v} \quad \text{donde } \lim v \neq 0$$

2.6. Obtención del límite de una función

El límite de una función se puede obtener mediante la aplicación de las propiedades estudiadas sustituyendo la variable independiente por el valor al que tiende como un límite.

Ejemplos

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(x) &= x^2 + x \\ x &\rightarrow 2 \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x = 4 + 2 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f(x) &= \frac{x^2 - 9}{x + 9} \\ x &\rightarrow 2 \end{aligned}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x + 9} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 9)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 9)} = \frac{4 - 9}{2 + 9} = -\frac{5}{11}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f(x) &= \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ x &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 4)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x - 2)} = \frac{0 - 4}{0 - 2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$d) \quad f(x) = 5 + \frac{3}{x}$$

$$x \rightarrow \infty$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{3}{x} \right) = 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x} \right) = 5 + \frac{3}{\infty} = 5 + 0 = 5$$

$$e) \quad f(x) = 2x^2 - 3hx + h^2$$

$$x \rightarrow 0$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - 3hx + h^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2) + \lim_{x \rightarrow 0} (-3hx) + h^2$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 3h \lim_{x \rightarrow 0} x + h^2 = 0 - 0 + h^2 = h^2$$

$$f) \quad f(x) = (x + 3)(x + 5)$$

$$x \rightarrow 1$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 3)(x + 5) = [\lim_{x \rightarrow 1} (x + 3)][\lim_{x \rightarrow 1} (x + 5)]$$

pero como

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = \lim_{x \rightarrow 1} x + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 5) = \lim_{x \rightarrow 0} x + 5 = 0 + 5 = 5$$

$$x \rightarrow 0$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 3)(x + 5) = (4)(5) = 20$$

$$x \rightarrow 1$$

g) $f(x) = \frac{2 + x}{3 + x}$

$$x \rightarrow 0$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + x}{3 + x} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2 + x)}{\lim_{x \rightarrow 0} (3 + x)}$$

$$x \rightarrow 0$$

pero como

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 + x) = 2 + \lim_{x \rightarrow 0} x = 2 + 0 = 2$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3 + x) = 3 + \lim_{x \rightarrow 0} x = 3 + 0 = 3$$

$$x \rightarrow 0$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + x}{3 + x} \right) = \frac{2}{3}$$

$$x \rightarrow 0$$

2.7. Indeterminaciones

En muchos casos resultan indeterminaciones como $\frac{\infty}{\infty}$ o bien $\frac{0}{0}$.

Por lo que es necesario transformar la función en otra equivalente, antes de proceder a sustituir el valor asignado a la variable independiente.

Ejemplo 1

Sea obtener el límite de la función:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x}$$

$$x \rightarrow \infty$$

Sustituyendo resulta:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x} = \frac{\infty + 1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

lo que viene a ser una indeterminación.

Para evitarla, se procede a transformar la función dada en otra equivalente, que no presente indeterminación. En este caso se logra dividiendo entre x el numerador y el denominador.

De esta manera tenemos:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x} = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1} = 2 + \frac{1}{x}$$

$$x \rightarrow \infty$$

luego

$$\lim \left(2 + \frac{1}{x} \right) = 2 + \frac{1}{\infty} = 2 + 0 = 2$$

Ejemplo 2

Sea obtener el límite de la función:

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-x-12}$$

$$x \rightarrow 4$$

Sustituyendo resulta:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \frac{4-4}{(4)^2-4-12} = \frac{0}{0}$$

lo que es una indeterminación.

Para evitarla, se transforma la función en otra equivalente descomponiendo en factores el denominador y simplificando. De esta manera tenemos:

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-x-12} = \frac{x-4}{(x-4)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$$

$$x \rightarrow 4$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4+3} = \frac{1}{7}$$

Ejemplo 3

Sea obtener el límite de la función:

$$f(x) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$h \rightarrow 0$$

Sustituyendo resulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{(x+0)^2 - x^2}{0} = \frac{x^2 - x^2}{0} = \frac{0}{0}$$

lo que es una indeterminación.

Para evitarla se transforma la función en otra equivalente.

Haciendo operaciones, factorizando y simplificando, se tiene:

$$f(x) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} =$$

$$= \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$$

$$h \rightarrow 0$$

luego

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x+0 = 2x$$

Ejemplo 4

Sea obtener el límite de la función:

$$f(x) = \frac{6x^2 + 2x + 1}{5x^2 - 3x - 4}$$

$$x \rightarrow \infty$$

Sustituyendo resulta:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 2x + 1}{5x^2 - 3x - 4} = \frac{\infty + \infty + 1}{\infty + \infty + 4} = \frac{\infty}{\infty}$$

lo que es una indeterminación.

Dividiendo numerador y denominador entre x^2 tenemos:

$$f(x) = \frac{6 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}$$

$$x \rightarrow \infty$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{6 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{6}{5}$$

$$x \rightarrow \infty$$

Ejemplo 5

Sea obtener el límite de la función:

$$f(s) = \frac{s^4 - a^4}{s^2 - a^2}$$

$$s \rightarrow a$$

Sustituyendo resulta:

$$\lim_{s \rightarrow a} \frac{s^4 - a^4}{s^2 - a^2} = \frac{a^4 - a^4}{a^2 - a^2} = \frac{0}{0}$$

$$s \rightarrow a$$

lo que es una indeterminación.

Factorizando el numerador y simplificando tenemos:

$$f(s) = \frac{s^4 - a^4}{s^2 - a^2} = \frac{(s^2 - a^2)(s^2 + a^2)}{s^2 - a^2} = s^2 + a^2$$

$$s \rightarrow a$$

luego

$$\lim_{s \rightarrow a} (s^2 + a^2) = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$s \rightarrow a$$

Ejercicio II

Obtener el límite de las funciones en cada caso:

$$1. \quad f(x) = (x^2 - 3x)$$

$$x \rightarrow 2$$

$$2. \quad f(x) = x^2 - 3x + 5x^3$$

$$x \rightarrow 0$$

$$3. \quad f(x) = \frac{3+x}{x}$$
$$x \rightarrow 2$$

$$4. \quad f(x) = \frac{2-x}{x}$$
$$x \rightarrow -2$$

$$5. \quad f(x)(i+x)(i-x)$$
$$x \rightarrow 1$$

$$6. \quad f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$
$$x \rightarrow 0$$

$$7. \quad f(z) = \frac{z^2 - 3z + 1}{2z^2 + 5}$$
$$z \rightarrow 0$$

$$8. \quad f(x) = 5 + \frac{3}{x}$$
$$x \rightarrow 1$$

$$9. \quad f(x) = \frac{x+2}{x-2}$$
$$x \rightarrow 0$$

$$10. \quad f(h) = 2x^2 - 3hx + h^2$$
$$h \rightarrow 0$$

$$11. \quad f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 + 9}$$
$$x \rightarrow 3$$

$$12. \quad f(x) = \frac{3x-2}{8x+7}$$
$$x \rightarrow \infty$$

$$13. \quad f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{4x^3 - 1}$$
$$x \rightarrow \infty$$

$$14. \quad f(x) = \frac{2x^3}{x^3 + 1}$$
$$x \rightarrow \infty$$

$$15. \quad f(x) = \frac{4x+5}{2x+3}$$
$$x \rightarrow 0$$

$$16. \quad f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x - 6}$$
$$x \rightarrow 0$$

$$17. \quad f(t) = \frac{t+t^2+t^3}{t+3}$$
$$t \rightarrow 0$$

$$18. \quad f(x) = \frac{x^2h + 3xh^2 + h^3}{2xh + 5h^2}$$
$$h \rightarrow \infty$$

$$19. f(x) = \frac{6x^3 - 5x^2 + 3}{2x^3 + 4x - 7}$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$20. f(k) = \frac{(2z + 3k)^3 - 4k^2z}{2z(2z + 3k)^2}$$

$$k \rightarrow 0$$

$$21. f(x) = \frac{2x^2 + 6x^3 + c}{dx^5 + ex^3 + fx}$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$22. f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

$$x \rightarrow 2$$

$$23. f(y) = \frac{4y^2 - 3}{2y^3 + 3y^2}$$

$$y \rightarrow \infty$$

$$24. f(x) = \frac{x+h-x}{h+x}$$

$$h \rightarrow 0$$

$$25. f(x) = 3x^2 - 3x + 5x^3$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$26. f(x) = \frac{3 + x}{x}$$

$$x \rightarrow 1$$

$$27. f(x) = \frac{3 + x}{x}$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$28. f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$29. f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

$$x \rightarrow 1$$

$$30. f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$x \rightarrow 1$$

Capítulo III

Derivada de una función

3.1. Incremento de una variable

Cuando una variable cambia de un valor numérico a otro, se dice que tiene un incremento.

El incremento de una variable se representa por la letra griega **delta** Δ , que se antepone a la variable.

Ejemplos

1. Si x cambia de 3 a 4, podemos afirmar que:

$$\Delta x = 4 - 3 = 1$$

2. Si x cambia de 5 a 3:

$$\Delta x = 3 - 5 = -2$$

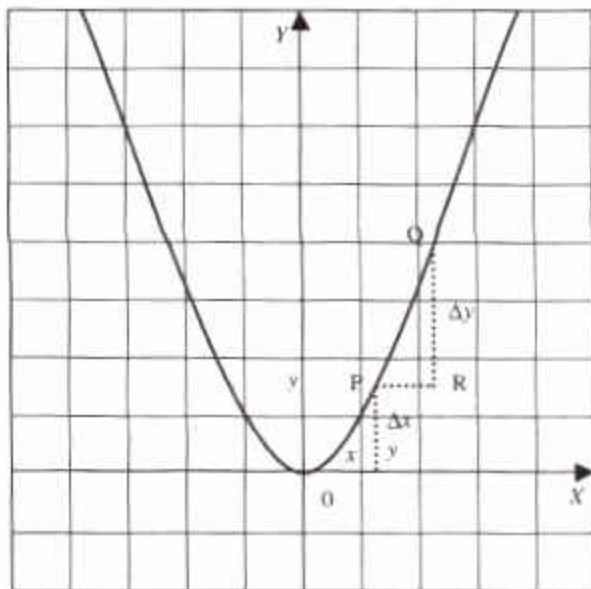
3. Si x cambia de 1 a -2 :

$$\Delta x = -2 - 1 = -3$$

El incremento de x resulta de la diferencia entre los valores **final e inicial** de la variable. El incremento es positivo cuando la variable aumenta de valor y negativo cuando registra una disminución.

De acuerdo con lo anterior, dada una función de x , es decir, $y = f(x)$, cuando x tiene un incremento Δx , corresponde a la función un incremento Δy . Existe una correspondencia entre los incrementos Δx y Δy .

Por ejemplo, siendo x y y las coordenadas de un punto P de la parábola de la figura que sigue:



Si x registra un incremento Δx , el punto P cambia y se sitúa en la posición Q sobre la curva.

Los respectivos incrementos son:

$$\Delta x = PR, \quad \Delta y = RQ$$

Las coordenadas del punto en su nueva posición son:

$$Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

3.2. Función continua

Se dice que una función es **continua** cuando el incremento de la función tiende a cero, en la medida que el incremento de la variable independiente tiende a cero.

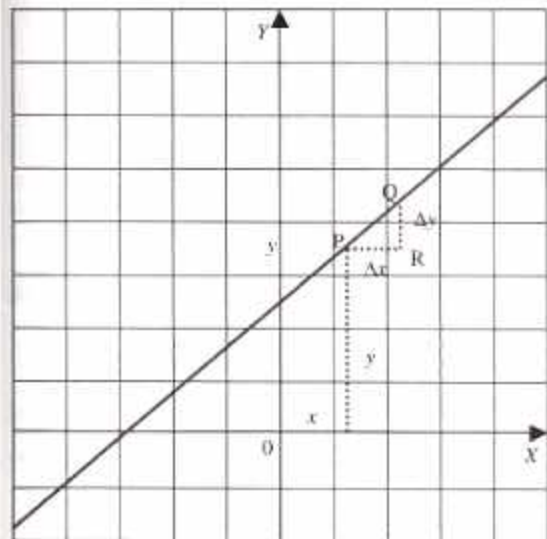


Figura 1

Por ejemplo, en la recta de la figura cuya ecuación es $y = x - 2$, y es una función continua de x .

Siendo $P(x, y)$, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, Q se aproxima a P , por tanto $\Delta y \rightarrow 0$.

También en la parábola de la figura 2 cuya ecuación es $y = \frac{x^2}{2}$, y es una función continua de x .

Siendo $P(x, y)$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$, Q se aproxima a P , y por consiguiente,

$$\Delta y \rightarrow 0.$$

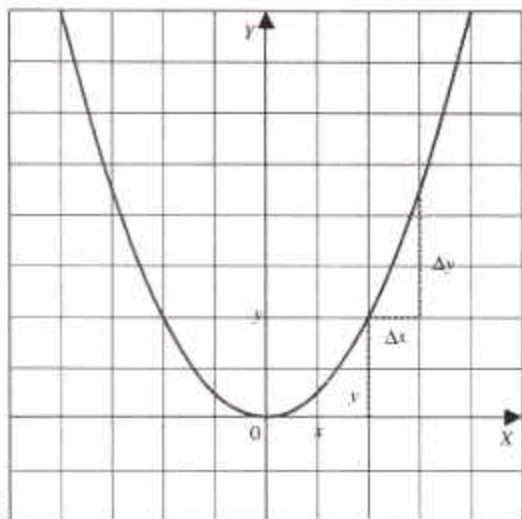
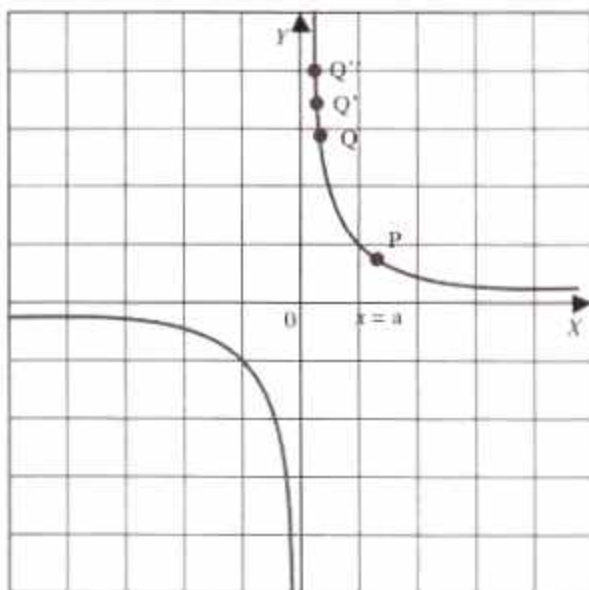


Figura 2

En cambio, en la hipérbola de la figura, cuya ecuación es $y = \frac{1}{x}$, y no es función continua de x . Se trata de una función **discontinua**.



Siendo $P(x, y)$, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, Δy no tiende a cero sino a infinito, porque la ordenada que corresponde a $x = a$ es infinita. Por consiguiente, el incremento corresponde a un cambio a partir de $x = a$, o de un valor próximo, resulta infinito para la función, como Q'' , Q' , ... etc.

También se puede afirmar que una función es **continua**, cuando la **variable dependiente** es **continua**, es decir, si ésta no puede pasar de un valor a otro sin pasar por todos los intermedios.

Así, por ejemplo, en la parábola de la figura 2, y es una función continua de x , pues como se observa en la tabla, la variable y , al pasar de un valor a otro, pasa por todos los intermedios, incluido en este caso el cero.

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

| | | | | | | | |
|-----|---|-----|---|---|----|-----|----|
| x | 4 | 3 | 2 | 0 | -2 | -3 | -4 |
| y | 8 | 4.5 | 2 | 0 | 2 | 4.5 | 8 |

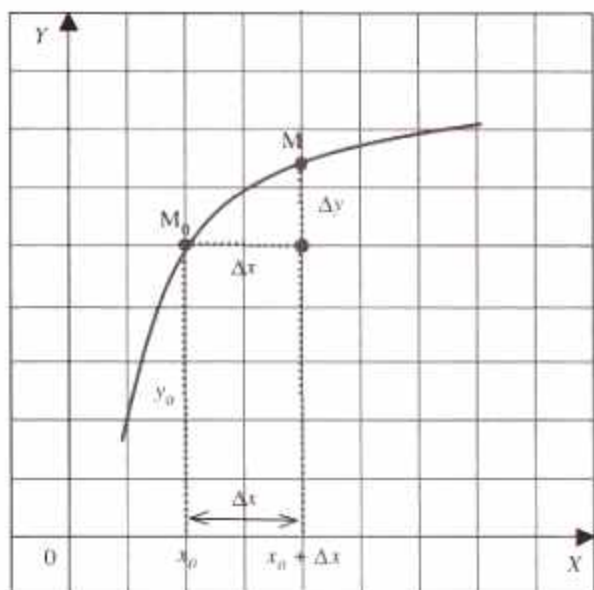
Sin embargo, para la hipérbola de la figura 3, como puede observarse en la tabla, si x pasa del valor 2 al -2 , la variable dependiente, o sea, la función pasa del valor $\frac{1}{2}$ al valor $-\frac{1}{2}$, sin pasar por el cero:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

| | | | | | | | | | |
|-----|----------------|---------------|---------------|---|----------|----|----------------|----------------|----------------|
| x | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 | -3 | -4 |
| y | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | ∞ | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ |

donde además se observa que si $x \rightarrow 0$, $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$.

En general, si suponemos que la función $y = f(x)$ está definida para cierto valor x_0 y en cierta vecindad en torno al mismo punto, sea $y = f(x_0)$, se tiene:



Si x recibe cierto incremento Δx (positivo o negativo) y toma el valor $x = x_0 + \Delta x$; la función y también resultará incrementada en Δy .

El nuevo valor incrementado de la función, como se observa en la figura, será:

$$y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x).$$

Luego, el incremento de la función Δy puede expresarse con la fórmula:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Conclusión:

La función $y = f(x)$ se considera **continua**, para el valor de $x = x_0$ (0 en el punto x_0), si está definida en cierta vecindad del punto x_0 , (incluido el punto x_0) y si:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \tag{1}$$

o, lo que es lo mismo

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \tag{2}$$

La condición establecida en (2) también se puede escribir así:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

o sea

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \quad (2)$$

En el lenguaje geométrico la continuidad de la función en el punto dado (x_0) significa que la diferencia de las ordenadas de la gráfica $y = f(x)$ en los puntos $x_0 + \Delta x$ y x_0 se considera en valor absoluto, arbitrariamente pequeña a condición de que $|\Delta x|$ sea lo suficientemente pequeño.

Ejemplo

Demostrar que la función $y = x^2$ es continua en el punto x_0 , elegido en forma arbitraria.

De acuerdo con lo estudiado tenemos:

$$y_0 = x_0^2$$

$$y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2$$

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - y_0$$

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 \text{ sustituyendo } y_0 \text{ por } x_0^2$$

Desarrollando:

$$\Delta y = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2$$

Simplificando:

$$\Delta = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2$$

Tomando el límite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 2x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^2$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 2x(0) + (0)$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

Por consiguiente:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

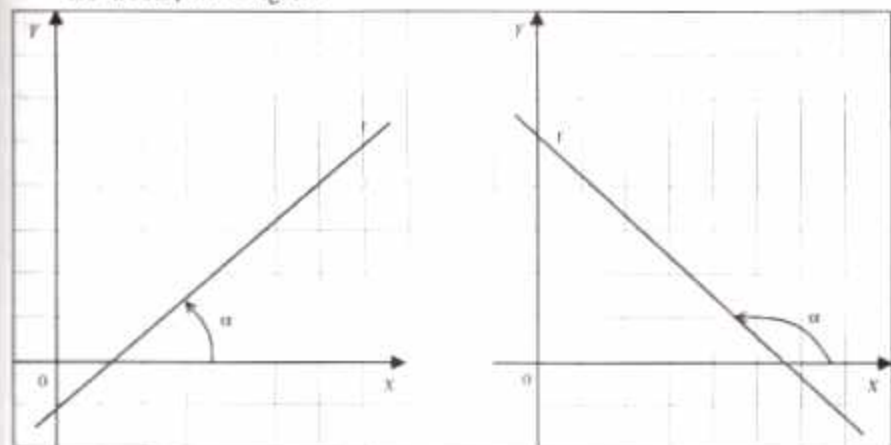
la función es continua.

3.3. Pendiente

De acuerdo con lo estudiado en el curso de geometría analítica, la pendiente es la tangente trigonométrica del ángulo que una recta forma con la dirección positiva del eje de las x .

Por ejemplo, en las rectas de las figuras siguientes la pendiente es igual a $\operatorname{tg} \alpha$.

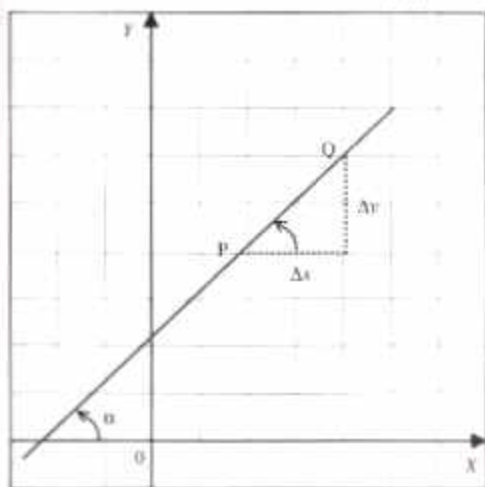
Es decir, $m = \operatorname{tg} \alpha$.



En la figura de la izquierda α es agudo; por tanto, la pendiente será positiva. En la figura de la derecha α es obtuso; por consiguiente, la pendiente será negativa.

Dada una recta de ecuación $y = f(x)$

$$\text{Pendiente de } PQ = \operatorname{tg} \alpha = \frac{RQ}{PR} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Si α mide entre 0° y 90° , la pendiente será positiva y si mide entre 90° y 180° la pendiente será negativa.

3.4. Derivada

Derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función y el incremento de la variable independiente, cuando este último tiende a cero.

Es decir, dada $y = f(x)$

$$D_x f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

que se lee "derivada de función de x con respecto a x ".

También la derivada de una función se indica escribiendo:

$\frac{dy}{dx}$ que indica la derivada de y con respecto a x .

y' que es una forma abreviada de $\frac{dy}{dx}$.

$\frac{d}{dx} f(x)$, que indica la derivada de $f(x)$ con respecto a x .

Cuando Δy y Δx son números finitos y tienen valores definidos, la expresión $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es una fracción.

Por tanto, el símbolo $\frac{dy}{dx}$ es llamado también **cociente diferencial**, porque es el cociente de dos cantidades **dy y dx** , llamadas diferenciales.

En general, dada una función:

$$y = f(x) \tag{1}$$

Si suponemos que la función (1) es continua y damos a x un incremento Δx , la función y tendrá un incremento Δy .

Esto es:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \quad (2)$$

Restando (1) de (2), se tiene:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (3)$$

Dividiendo ambos miembros de (3) entre Δx , se obtiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

El valor que toma:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

es la **derivada** que se puede escribir:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

3.5. Regla general para obtener la derivada de $f(x)$

De lo tratado en el inciso anterior, se desprende que para obtener la derivada de una función se realizan las operaciones siguientes:

- I. Sustituir en la función propuesta, x por $x + \Delta x$ y en el primer miembro y por $y + \Delta y$.
- II. Restar el valor dado de la función del nuevo valor, para encontrar Δy .
- III. Dividir los dos miembros de la igualdad entre Δx .
- IV. Hallar el límite de los cocientes obtenidos cuando $\Delta x \rightarrow 0$, para obtener la derivada de la función.¹

Ejemplo 1

Obtener la derivada de la función $y = 3x^2 + 5$:

$$\begin{aligned} \text{I. } y + \Delta y &= 3(x + \Delta x)^2 + 5 \\ y + \Delta y &= 3[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] + 5 \\ y + \Delta y &= 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5 \end{aligned}$$

$$\text{II. } \Delta y = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2$$

$$\text{III. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$$

$$\text{IV. } \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

¹ Algunos llaman a este procedimiento "regla de los cuatro pasos".

Por lo tanto $\frac{dy}{dx} = 6x$, también se puede escribir:

$$\frac{d}{dx} (3x^2 + 5) = 6x$$

$$D_x (3x^2 + 5) = 6x$$

$$y' = 6x$$

Ejemplo 2

Obtener la derivada de $f(x) = x^3 - 2x + 7$

como $y = f(x)$,

$$y = x^3 - 2x + 7$$

$$\text{I. } y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 7$$

$$y + \Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2(x + \Delta x) + 7$$

$$\text{II. } \Delta y = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2\Delta x$$

$$\text{III. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2$$

$$\text{IV. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 2$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\therefore D_x f(x) = 3x^2 - 2$$

o bien:

$$D_x(x^2 - 2x + 7) = 3x^2 - 2$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 3x^2 - 2$$

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 2x + 7) = 3x^2 - 2$$

$$y' = 3x^2 - 2$$

Ejemplo 3

Obtener la derivada de la función $y = \frac{c}{x^2}$, donde c es una constante.

$$\text{I. } y + \Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2}$$

$$\text{II. } \Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2} - \frac{c}{x^2}$$

$$\Delta y = \frac{c}{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2} - \frac{c}{x^2}$$

$$\Delta y = \frac{cx^2 - cx^2 - 2cx\Delta x - c(\Delta x)^2}{x^4 + 2x^3\Delta x + x^2(\Delta x)^2}$$

$$\Delta y = \frac{-2cx\Delta x - c(\Delta x)^2}{x^4 + 2x^3\Delta x + x^2(\Delta x)^2}$$

$$\text{III. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2cx - c\Delta x}{x^4 + 2x^3\Delta x + x^2(\Delta x)^2}$$

$$\text{IV. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2cx}{x^4}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2c}{x^3}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2c}{x^3}$$

o bien

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{c}{x^2} \right) = -\frac{2c}{x^3}$$

$$D_x \left(\frac{c}{x^2} \right) = -\frac{2c}{x^3}$$

$$y' = -\frac{2c}{x^3}$$

Ejercicio III

Aplicando la regla general, obtener la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = 4x^2$

2. $y = 3 - x^2$

3. $s = 2 - 5t, s = f(t)$

4. $y = mx + b, m$ y b constantes

5. $y = \frac{x^2}{2}$

6. $A = \pi r^2, A = f(r)$

7. $s = \frac{1}{2t+1}, s = f(t)$

8. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$

9. $y = \frac{1-x}{x}$

10. $y = \frac{x}{1-x}$

11. $y = \frac{x+2}{x^2}$

12. $y = \frac{1}{x^2+1}$

13. $y = (x+2)^2$

14. $y = 5x^2 - 6 + 7$

15. $y = (a-x)^2, a = \text{constante}$

16. $y = (x+1)(x+2)$

17. $y = (b+x)^3, b = \text{constante}$

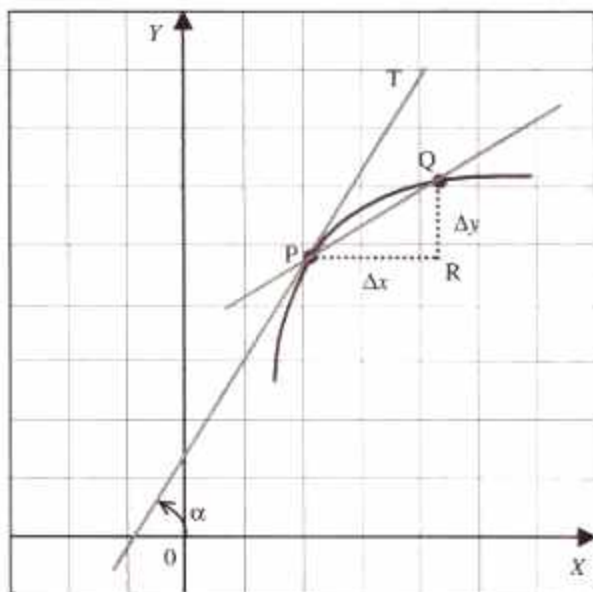
18. $y = \frac{x+2}{x-2}$

19. $s = \frac{t}{1-t^2}, s = f(t)$

20. $y = \frac{x^2}{2-x}$

3.6. Interpretación geométrica de la derivada

Siendo P y Q dos puntos de una curva de ecuación $y = f(x)$, así en la figura siguiente:



la razón $\frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la pendiente de la secante PQ .

Si suponemos que Q se mueve a lo largo de la curva, hacia la posición que tiene P , la recta PQ gira alrededor de P y tiende a ocupar la posición \overline{PT} como límite.

Esta recta PT es la tangente a la curva en P .

A medida que Q se aproxima a P , Δx tiende a cero y la pendiente de la secante PQ tiene por límite la pendiente de la tangente \overline{PT} ; luego podemos concluir que:

$$\text{Pendiente de la tangente en } P = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

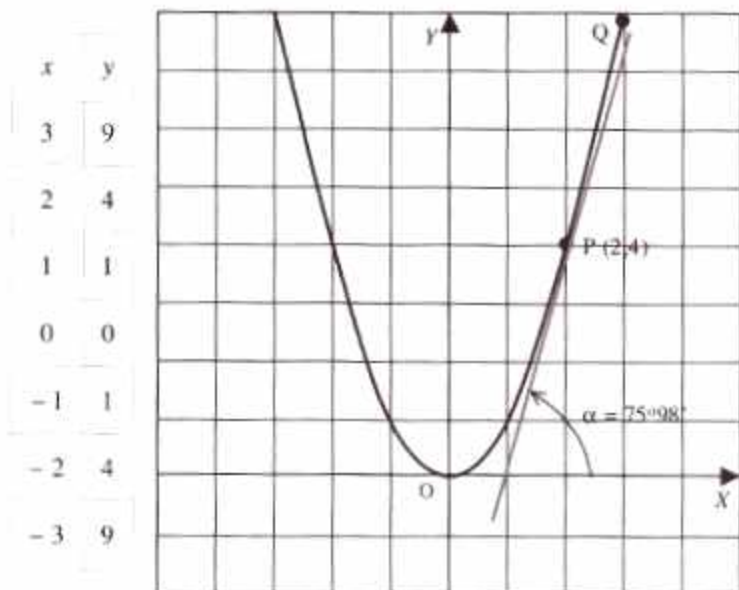
Es decir:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \text{pendiente de la tangente en el punto } P.$$

El valor de la derivada en cualquier punto de una curva, es igual a la pendiente de la tangente de la curva en ese punto.

Por ejemplo, consideremos que se trata de obtener el valor de la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(2, 4)$.

Para comprender mejor la situación tracemos la gráfica de la curva.



Si suponemos $P(x, y)$, las coordenadas de otro punto Q serán $(x + \Delta x, y + \Delta y)$

Luego, como ambos puntos se encuentran situados en la curva, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación $y = x^2$.

Aplicando la regla de los cuatro pasos para obtener la derivada se tiene:

$$\text{I. } y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

$$y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\text{II. } \Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\text{III. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$\text{IV. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Por consiguiente, la pendiente en el punto P es $2x$, es decir:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = 2x$$

Así, para el punto P de abscisa 2,

$$\operatorname{tg} \alpha = 2x = 2 \times 2 = 4.$$

Luego, la pendiente de \overline{PT} es 4 y su inclinación es:

$$\alpha = \operatorname{ang} \operatorname{tg} (4) = 75^{\circ} 58'$$

Ejercicio IV

- Obtener la pendiente y la inclinación de la tangente de cada una de las curvas dadas a continuación, en el punto que en cada caso se indica:
 - $y = \frac{1}{x}$ en el punto donde $x = 4$
 - $y = x^2 - 1$ en el punto donde $x = -2$
 - $y = \frac{1}{x-1}$ en el punto donde $x = 2$
 - $y = x^2 + 2x - 1$ en el punto donde $x = 0$
 - $y = x^3 - x^2$ en el punto donde $x = 2$
 - $y = 2x - x^3$ en el punto donde $x = -1$
- Hallar el punto de la curva $y = 3 - x^2$ en el que la inclinación de la tangente es de 45° .
- Obtener las coordenadas del punto de la curva $y = 4x - x^2$ donde la tangente vale 0.
- Determinar los valores de la pendiente y de la inclinación de las tangentes a la curva de la ecuación $y = \frac{9}{x}$, en los puntos donde x vale 3 y -3 .
- Hacer las comprobaciones gráficas que corresponden a los ejercicios 3 y 4.

Capítulo IV

Derivadas de las funciones algebraicas

4.1. Consideración importante

La regla general para la derivación estudiada en el capítulo anterior es sumamente importante porque nos permite entender con claridad la definición de la derivada; mas, para facilitar el trabajo de obtención de la derivada, se han deducido un conjunto de reglas especiales para encontrar la derivada de funciones algebraicas que se presentan con mucha frecuencia en el cálculo.

Estas reglas especiales resultan de la aplicación de la regla general y se expresan por medio de fórmulas, cuyo empleo facilita la rápida obtención de las derivadas.

A continuación estableceremos esas fórmulas.

4.2. Derivada de una constante

Sea la función

$$y = c$$

donde c es una constante.

Como el valor de la función es constante, cuando x tiene un incremento Δx el valor de la función no cambia, es decir $\Delta y = 0$.

Por consiguiente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

entonces

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

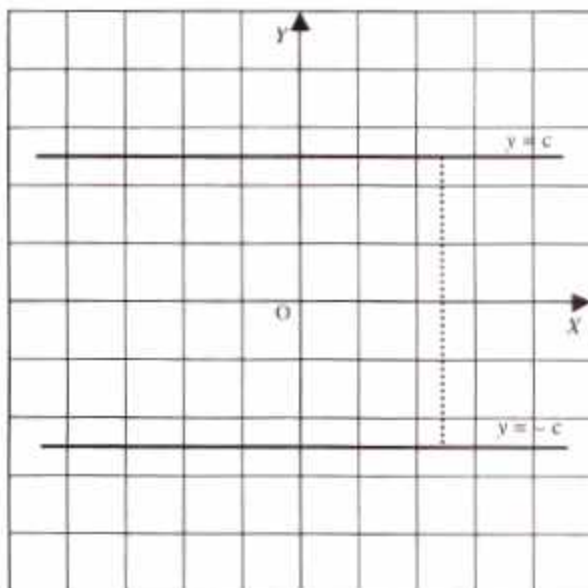
luego

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dc}{dx} = 0 \text{ (I)}$$

“La derivada de una constante es cero.”

Como se puede observar, la gráfica de $y = c$ corresponde a una recta paralela al eje de las x , cuya pendiente es 0.



4.3. Derivada de una variable con respecto a sí mismo

Siendo la función $y = x$, aplicando la regla general para la derivación, se tiene:

$$\text{I. } y + \Delta y = x + \Delta x$$

$$\text{II. } \Delta y = \Delta x$$

$$\text{III. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

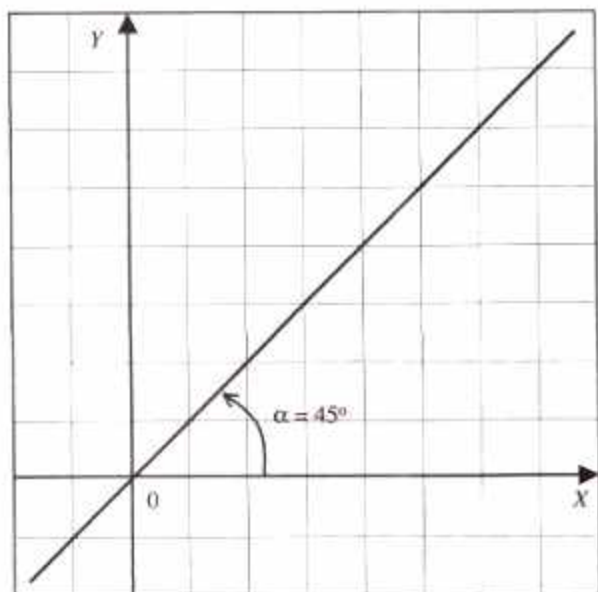
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

$$\text{IV. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = 1 \quad (\text{II})$$



“La derivada de una variable con respecto a sí misma es uno.”

Gráficamente se puede comprobar que el lugar geométrico al que corresponde la función $y = x$, es una recta que pasa por el origen, forma un ángulo de 45° con la dirección positiva del eje de las x y por tanto su pendiente es uno.

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = 1$$

4.4. Derivada de una suma de funciones

Sea la función

$$y = u + v - w$$

donde

$$u = f_1(x)$$

$$v = f_2(x)$$

$$w = f_3(x)$$

Aplicando la regla general:

$$I. \quad y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (w + \Delta w)$$

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w$$

$$II. \quad \Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$$

$$III. \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$IV. \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

porque el límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites de las funciones.

Pero como:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{dw}{dx}$$

Sustituyendo en IV, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

que podemos escribir:

$$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx} \quad (\text{III})$$

"La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones."

4.5. Derivada del producto de una constante por una función

Sea la función

$$y = cv$$

donde $v = f(x)$ y $c =$ constante.

Aplicando la regla general:

$$\text{I. } y + \Delta y = c(v + \Delta v)$$

$$y + \Delta y = cv + c\Delta v$$

$$\text{II. } \Delta y = c\Delta v$$

$$\text{III. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\text{IV. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

pero

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

Sustituyendo resulta

$$\frac{dy}{dx} = c \frac{dv}{dx}$$

que podemos escribir

$$\frac{dy}{dx} (cv) = c \frac{dv}{dx} \quad (\text{IV})$$

La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

4.6. Derivada del producto de dos funciones

Sea la función

$$y = uv$$

donde $u = f_1(x)$ y $v = f_2(x)$

Aplicando la regla general:

$$I. \quad y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$

$$\therefore y + \Delta y = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

$$II. \quad \Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

$$III. \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = u \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$IV. \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0$$

pero

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} = u \frac{dv}{dx}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v \frac{\Delta u}{\Delta x} = v \frac{du}{dx}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

Sustituyendo

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

que podemos escribir

$$\frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad (V)$$

La derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda, más la segunda función por la derivada de la primera.

4.7. Derivada del producto de un número fijo de funciones

Si dividimos ambos miembros de la fórmula V entre uv resulta:

$$\frac{\frac{d}{dx} (uv)}{uv} = \frac{dv}{v} + \frac{du}{u}$$

Entonces, dada la función $y = v_1 v_2 v_3 \dots v_n$ aplicando el mismo criterio se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d}{dx} (v_1 v_2 v_3 \dots v_n)}{v_1 v_2 v_3 \dots v_n} &= \frac{dv_1}{v_1} + \frac{d(v_2 v_3 \dots v_n)}{v_2 v_3 \dots v_n} \\ \therefore \frac{d}{dx} (v_1 v_2 v_3 \dots v_n) &= \frac{dv_1}{v_1} + \frac{dv_2}{v_2} + \frac{d(v_3 v_4 \dots v_n)}{v_3 v_4 \dots v_n} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (v_1 v_2 v_3 \dots v_n) = \frac{dv_1}{v_1} + \frac{dv_2}{v_2} + \dots + \frac{dv_n}{v_n}$$

Multiplicando ambos miembros por $v_1 v_2 v_3 \dots v_n$, se tiene:

$$\frac{d}{dx} (v_1 v_2 v_3 \dots v_n) = (v_2 v_3 \dots v_n) \frac{dv_1}{dx} + (v_1 v_3 \dots v_n) \frac{dv_2}{dx} + (v_1 v_2 v_3 \dots v_n) \frac{dv_n}{dx} \quad (\text{VI})$$

La derivada del producto de un número fijo de funciones (n) es igual a la suma de los n productos que se obtienen de multiplicar la derivada de cada función por todas las otras funciones.

4.8. Derivada de una función con un exponente constante

Sea la función

$$y = v^n$$

donde $v = f(x)$ y $n = \text{constante}$

Como los n factores son iguales a v , por lo visto en el inciso anterior para establecer la fórmula VI se tiene:

$$\frac{d}{dx} (v^n) = n \frac{dv}{v}$$

Multiplicando ambos miembros por v^n resulta:

$$\frac{d}{dx} (v^n) = n v^{n-1} \frac{dv}{dx} \quad (\text{VII})$$

donde suponemos que n es un entero positivo.

La derivada de una función elevada a un exponente constante es igual al producto del exponente por la función elevada al exponente disminuido una unidad por la derivada de la función.

Caso particular

Siendo $v = x$, es decir, dada la función $y = x^n$ resulta:

$$\frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1} \quad \text{(VIII)}$$

porque

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

4.9. Derivada de un cociente de funciones

Sea la función

$$y = \frac{u}{v}$$

donde $u = f_1(x)$, $v = f_2(x)$ y $v \neq 0$.

Aplicando la regla general:

$$\text{I. } y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\text{II. } \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$\therefore \Delta y = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\therefore \Delta y = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\text{III. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\text{IV. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0$$

pero como

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

entonces

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(v + \Delta v) = v^2$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

Luego, la igualdad del paso IV se transforma en:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

que podemos escribir:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \quad (\text{IX})$$

La derivada del cociente de dos funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

4.10. Derivada del cociente de una función entre una constante

Sea la función

$$y = \frac{u}{c}$$

donde $u = f(x)$ y $c = \text{constante}$

Aplicando la fórmula IX, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c \frac{du}{dx} - u \frac{dc}{dx}}{c^2}$$

pero como

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

$$\therefore u \frac{dc}{dx} = 0$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{c}$$

que podemos escribir:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{c} \right) = \frac{du}{c} \quad (\text{X})$$

La derivada del cociente de una función entre una constante es igual a la derivada de la función entre la constante.

4.11. Derivada de la raíz cuadrada de una función

Sea la función

$$y = u \quad \text{donde} \quad u = f(x);$$

que se puede transformar en:

$$y = u^{\frac{1}{2}}$$

Derivada por la fórmula VII resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2u^2} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 \cdot u} \frac{du}{dx}$$

que podemos escribir:

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{u}) = \frac{1}{2 \cdot u} \frac{du}{dx} \quad (\text{XI})$$

La derivada de la raíz cuadrada de una función es igual al cociente que resulta de dividir la unidad entre el doble de la raíz cuadrada de la función multiplicada por la derivada de la función.

Caso particular

Si $u = x$, la función se transforma en:

$$y = \sqrt{x}$$

Aplicando la fórmula XI, resulta:

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{x}) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \quad (\text{XII})$$

porque

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

4.12. Obtención de derivadas

Mediante la aplicación de las fórmulas establecidas en el presente capítulo, se pueden obtener de manera fácil las derivadas de las funciones algebraicas.

Ejemplos

1. Hallar la derivada de y con respecto a x de cada una de las funciones siguientes:

a) $y = x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 \quad \text{por (VIII)}$$

b) $y = -3x$

$$\frac{dy}{dx} = -3 \frac{dx}{dx} \quad \text{por (IV)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -3 \quad \text{por (II)}$$

c) $y = 3x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \frac{d}{dx} (x^2) \quad \text{por (IV)}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x \cdot 2x \quad \text{por (VIII)}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x$$

$$d) \quad y = 3x^2 - 2x + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (3x^2) + \frac{d}{dx} (-2x) + \frac{d}{dx} (4) \quad \text{por (III)}$$

como

$$\frac{d}{dx} (3x^2) = 6x \quad \text{por (VIII)}$$

$$\frac{d}{dx} (-2x) = -2 \frac{dx}{dx} = -2 \quad \text{por (II) y (IV)}$$

$$\frac{d}{dx} (4) = 0 \quad \text{por (I)}$$

Sustituyendo resulta:

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 2$$

$$e) \quad y = (x^2 - 1)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{d}{dx} (x^2 - 1) \quad \text{por (VII)}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \left[\frac{d}{dx} (x^2) + \frac{d}{dx} (-1) \right] \quad \text{por (III)}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times 2x + 0 \quad \text{por (I) y (VIII)}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x$$

$$f) \quad y = 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (6x) \quad \text{por (XI)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times 6 \quad \text{porque } \frac{d}{dx} (6x) = 6$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{6}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{1}$$

$$g) \quad y = (a+x)(b+x) \quad \text{donde } a \text{ y } b \text{ son constantes}$$

$$\frac{dy}{dx} = (a+x) \frac{d}{dx} (b+x) + (b+x) \frac{d}{dx} (a+x) \quad \text{por (V)}$$

como

$$\frac{d}{dx} (b+x) = \frac{d}{dx} (b) + \frac{dx}{dx} = 0 + 1 = 1$$

$$\frac{d}{dx} (a+x) = \frac{d}{dx} (a) + \frac{dx}{dx} = 0 + 1 = 1$$

Sustituyendo resulta:

$$\frac{dy}{dx} = a + x + b + x$$

$$\frac{dy}{dx} = a + b + 2x$$

$$h) \quad y = 3(x^2 - 2)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \frac{d}{dx} (x^2 - 2)^2$$

como

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 2)^2 = 2(x^2 - 2) \frac{d}{dx} (x^2 - 2)$$

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 2) = 2x$$

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 2)^2 = 4x(x^2 - 2) = 4x^3 - 8x$$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{dx} = 3(4x^3 - 8x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 24x$$

$$i) \quad y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1) \frac{d}{dx} (x+1) - (x+1) \frac{d}{dx} (x-1)}{(x-1)^2}$$

como

$$\frac{d}{dx} (x+1) = 1$$

$$\frac{d}{dx} (x-1) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$j) \quad y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{5}$$

se transforma en:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{2}x - 3\left(\frac{1}{5}\right)x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = x - \frac{3}{5}x^2 = x - \frac{3x^2}{5}$$

$$k) \quad y = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$$

se transforma en:

$$y = 2x^{-1} + 3x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-2} - 6x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

$$l) y = {}^3x^4$$

se transforma en:

$$y = x^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} x^{\frac{4}{3}-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

$$m) y = \sqrt[3]{(2-3x)^2}$$

se transforma:

$$y = (2-3x)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} (2-3x)^{\frac{2}{3}-1} \frac{d}{dx} (2-3x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} (2-3x)^{-\frac{1}{3}} (-3)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\sqrt[3]{2-3x}}$$

$$n) y = (2x+3)(x^2+3x-1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x+3) \frac{d}{dx} (x^2+3x-1) + (x^2+3x-1) \frac{d}{dx} (2x+3)$$

como

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 3x - 1) = 2x + 3$$

$$\frac{d}{dx} (2x + 3) = 2$$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 3)(2x + 3) + 2(x^2 + 3x - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 3)^2 + 2x^2 + 6x - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 12x + 9 + 2x^2 + 6x - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 18x + 7$$

o) $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$

se transforma en:

$$y = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x} + \frac{1}{2x^3}$$

2. Hallar la derivada que en cada caso se indica:

a) $s = at^5 - 5bt^3$ $\frac{ds}{dt}$, a y b constantes

$$\frac{ds}{dt} = 5at^4 - 15bt^2$$

b) $c = 2\pi r$ $\frac{dc}{dr}$, π constante

$$\frac{dc}{dr} = 2\pi$$

c) $A = \pi r^2$ $\frac{dA}{dr}$, π constante

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

d) $e = vt$ $\frac{de}{dt}$, v constante

$$\frac{de}{dt} = v$$

e) $y = \frac{z^2}{2} - \frac{z^5}{10}$ $\frac{dy}{dz}$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{2z}{2} - \frac{5z^4}{10}$$

$$\frac{dy}{dz} = z - \frac{z^4}{2}$$

$$f) \quad y = \left(a + \frac{b}{x}\right)^2 \qquad \frac{dy}{dx}, \quad a \text{ y } b \text{ constantes}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \left(a + \frac{b}{x}\right) \frac{d}{dx} \left(a + \frac{b}{x}\right)$$

como

$$\frac{d}{dx} \left(a + \frac{b}{x}\right) = \frac{d}{dx} (a + bx^{-1})$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dx} \left(a + \frac{b}{x}\right) = -bx^{-2} = -\frac{b}{x^2}$$

Sustituyendo:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \left(a + \frac{b}{x}\right) \left(-\frac{b}{x^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(2a + \frac{2b}{x}\right) \left(-\frac{b}{x^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2ab}{x^2} - \frac{2b^2}{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2b^2 - 2abx}{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2b(b + ax)}{x^3}$$

$$g) \quad v = \frac{4\pi r^3}{3} \qquad \frac{dv}{dr}, \quad \pi \text{ constante}$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{12\pi r^2}{3}$$

$$\frac{dv}{dr} = 4\pi r^2$$

Ejercicio V

Comprobar si son correctas las derivadas siguientes:

$$1. \quad \frac{d}{dx}(x^3 - x^2 + 1) = 3x^2 - 2x$$

$$2. \quad \frac{d}{dx}(5x - x^2 + 4x^3) = 5 - 2x + 12x^2$$

$$3. \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3}\right) = 2x^3 - 2x^5$$

$$4. \quad \frac{d}{dx}(x^2 - a)^2 = 4x^3 - 4ax$$

$$5. \quad \frac{d}{dx}(x^2 + bx + c) = 2x + b$$

$$6. \quad \frac{d}{dx}(2 - 3x)^3 = -9(2 - 3x)^2$$

$$7. \quad \frac{d}{dx} \frac{1}{1-2x} = -\frac{1}{1-2x}$$

$$8. \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{x+a}{x-a} \right) = -\frac{2a}{(x-a)^2}$$

$$9. \quad \frac{d}{dx} \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$$

$$10. \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{2x-1}{x^2+1} \right) = \frac{x+2}{(x^2+1)^2}$$

$$11. \quad \frac{d}{dx} (2x+1)(x^2-x-1) = 6x^2 - 2x - 3$$

$$12. \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2-x+1}{x^2-1} \right) = \frac{x^{2-4x+1}}{(x^2-1)^2}$$

$$13. \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2+2x+1} \right) = -\frac{2}{x+1}$$

$$14. \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x-1}} \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$15. \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1-x}{\sqrt{1+x}} \right) = -\frac{1}{(1+x)^{3/2}(1-x)}$$

Obtener la derivada de cada una de las siguientes funciones:

16. $y = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 8$

17. $y = 1 + 5x - x^3$

18. $s = at^4 - 3bt^2$ $\frac{ds}{dt}$, a y b constantes

19. $s = a + vt$ $\frac{ds}{dt}$, a y v constantes

20. $A = 4\pi r^2$ $\frac{dA}{dr}$, π constante

21. $A = \pi(r^2 + h^2)$ $\frac{dA}{dr}$, π y h constantes

22. $e = a + bt + ct^2$ $\frac{de}{dt}$, a , b y c constantes

23. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{3}$

24. $f(x) = \frac{5}{3}x^3 - a$ a constante

25. $f(x) = a + \frac{1}{ax}$ a constante

26. $y = \sqrt[3]{2 - 3x}$

27. $y = (1 - 2x)^3$

28. $y = \sqrt[4]{(3 - 5x)^3}$

29. $y = \left(a + \frac{b}{x}\right)^2$

30. $f(x) = \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)^2$

31. $f(x) = x \sqrt{1 - 2x}$

32. $f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$

33. $f(x) = \frac{x}{2 - x^2}$

34. $r = \theta^2 \sqrt{2 - 3\theta}$

 $\frac{dr}{d\theta}$

35. $y = \frac{1 - ax}{1 + ax}$

 a constante

$$36. \quad y = \frac{c^2 - x^2}{c^2 + x^2} \quad c \text{ constante}$$

$$37. \quad y = x^2 \sqrt[3]{1 + 3x}$$

$$38. \quad y = \frac{2 + x}{\sqrt[3]{2x}}$$

$$39. \quad y = (x^4 - 5)^4$$

$$40. \quad y = (x + 3)(x^2 + 2x - 5)$$

$$41. \quad y = (x^2 - 3x + 1)(2x^2 + x - 2)$$

$$42. \quad y = \frac{x^3}{1 - x}$$

$$43. \quad y = \frac{x^2 + 6x - 2}{x^2 - x + 1}$$

$$44. \quad y = \frac{3x - 1}{x^2 + 1}$$

$$45. \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$$

$$46. \quad y = \frac{x-1}{x+1}$$

$$47. \quad y = (x-a)\sqrt{x+a} \quad a \text{ constante}$$

$$48. \quad y = \sqrt[3]{3x-2x^2}$$

$$49. \quad y = 7x \cdot 1 + 2x$$

$$50. \quad y = \frac{2+x}{2-x}$$

51. Hallar la pendiente y la inclinación de la tangente a la curva de ecuación $y = \frac{2}{4x^3}$ en el punto cuya abscisa es uno.
52. Obtener la pendiente y la inclinación de la tangente a la curva de la ecuación $y = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa 2.
53. ¿Qué ángulo forma con la dirección positiva del eje de las x , la tangente a la curva de la ecuación $y = \frac{2-x^3}{x}$ en el punto de abscisa uno?
54. Encontrar las coordenadas de los puntos de la curva $y = (x-1)(x+2)^2$, en los cuales las tangentes a la curva son paralelas al eje de las x .
55. Hallar el ángulo que forman el eje ox y la tangente a la curva $y = x\sqrt{1-x}$ en el origen.

4.13. Derivadas sucesivas

La derivada de una función de x , esto es $\frac{dy}{dx}$, es la *primera derivada* de esa función con respecto a x .

La derivada de $\frac{dy}{dx}$ con respecto a x , se llama *segunda derivada*

de y con respecto a x o *derivada de segundo orden* y se escribe $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Es decir,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad \text{segunda derivada}$$

Análogamente

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) \quad \text{tercera derivada}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right) \quad \text{cuarta derivada}$$

Con el mismo criterio se obtienen la 5ª, 6ª, 7ª ... etc., derivada de y con respecto a x . Todas ellas son las derivadas sucesivas de la función considerada.

Ejemplo

Dada la función $y = x^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad \text{primera derivada}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x \quad \text{segunda derivada}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6 \quad \text{tercera derivada}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0 \quad \text{cuarta derivada}$$

En este ejemplo, las derivadas siguientes son todas nulas.

Observación importante. Debe tenerse en cuenta que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Así, en el ejemplo anterior tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

En cambio

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 9x^4$$

Por tanto

$$6x \neq 9x^4$$

En general podemos afirmar que en la $\frac{d^n y}{dx^n}$ (enésima derivada de y con respecto a x), la variable y , o sea la función, se

introduce sólo una vez en el numerador, mientras que la variable independiente x se introduce en el denominador, dividiendo entre Δx , tantas veces como se realiza la derivación.

Puede emplearse también, para las derivadas sucesivas, la notación siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y''$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = y'''$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = y^{IV}$$

$$\frac{d^5 y}{dx^5} = y^V$$

$$\frac{d^6 y}{dx^6} = y^{VI}$$

..... etc.

Por ejemplo, para el caso de la función $y = x^3$, sus derivadas sucesivas se pueden anotar así:

$$y' = 3x^2$$

$$y'' = 6x$$

$$y''' = 6$$

$$y^{IV} = 0$$

Ejemplos

1. Obtener las derivadas sucesivas de las siguientes funciones:

a) $y = 2x^4$

$y' = 8x^3$

$y'' = 24x^2$

$y''' = 48x$

$y^{IV} = 48$

$y^V = 0$

b) $y = 2x^4 - 3x^3 + 6x$

$y' = 8x^3 - 9x^2 + 6$

$y'' = 24x^2 - 18x$

$y''' = 48x - 18$

$y^{IV} = 48$

$y^V = 0$

c) $y = \frac{1}{x}$

como se puede expresar así $y = x^{-1}$, tenemos:

$$y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y'' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$y''' = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

$$y^{IV} = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$$

..... etc.

Como puede observarse, en esta función el número de derivadas sucesivas es infinito.

2. Dada la función $s = 1 + bt$, donde b es constante, obtener la tercera derivada de s respecto a t .

Luego $s = (1 + bt)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} (1 + bt)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} (1 + bt)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} (1 + bt)^{-\frac{1}{2}} (b)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{b}{2} (1 + bt)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{b}{4} (1 + bt)^{-\frac{3}{2}} \frac{d}{dx} (1 + bt)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{b^2}{4} (1 + bt)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^3s}{dt^3} = \frac{3b^2}{8} (1 + bt)^{-\frac{5}{2}} \frac{d}{dx} (1 + bt)$$

$$\frac{d^3s}{dt^3} = \frac{3b^3}{8} (1 + bt)^{-\frac{5}{2}}$$

por lo tanto

$$y''' = \frac{3b^3}{8(1 + bt)^{\frac{5}{2}}}$$

3. Obtener la segunda derivada de la función $y = \frac{x}{1+x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x) \frac{d}{dx} (x) - x \frac{d}{dx} (1+x)}{(1+x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x-x}{(1+x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1+x)^2 \frac{d}{dx}(1) - (1) \frac{d}{dx}(1+x)^2}{(1+x)^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0 - 2(1+x) \frac{d}{dx}(1+x)}{(1+x)^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2(1+x)}{(1+x)^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{(1+x)^3}$$

4.14. Derivada de funciones implícitas

Para obtener la derivada de una función implícita, se procede en primer término a despejar la variable considerada como función.

Ejemplo

Dada la función expresada por la ecuación $x^2y - 4y = 1$ al considerar y función implícita de x , antes de obtener la derivada despejamos y .

Es decir,

$$(x^2 - 4)y = 1$$

$$\therefore y = \frac{1}{x^2 - 4}$$

que equivale a

$$y = (x^2 - 4)^{-1}$$

Derivando se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = -(x^2 - 4)^{-2} \frac{d}{dx} (x^2 - 4)$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x(x^2 - 4)^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(x^2 - 4)^2}$$

Sin embargo, en muchos casos, en que se define y como función implícita de x , es imposible o muy complicado despejar y , por lo que se procede a derivar **término a término**, considerando a y como función de x en cada término; y por último, se despeja $\frac{dy}{dx}$, de la ecuación resultante.

Ejemplos

1. Dada la función expresada por la ecuación

$$x^2 - xy + y^2 = 1$$

donde $y = f(x)$

Derivando término a término resulta:

$$\frac{d}{dx} (x^2) - \frac{d}{dx} (xy) + \frac{d}{dx} (y^2) = \frac{d}{dx} (1)$$

$$2x - \left(x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx} \right) + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x - x \frac{dy}{dx} - y + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = -2x + y$$

$$\frac{dy}{dx} (-x + 2y) = -2x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + y}{-x + 2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

2. Dada la función expresada por la ecuación $x^2 - xy - y^2 = 0$, obtener la primera y segunda derivadas.

Derivando término a término resulta:

$$\frac{d}{dx} (x^2) - \frac{d}{dx} (xy) + \frac{d}{dx} (y^2) = \frac{d}{dx} (0)$$

$$2x - x \frac{dy}{dx} - y \frac{dx}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = -2x + y$$

$$\frac{dy}{dx} (-x + 2y) = -2x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + y}{-x + 2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y} \quad (1)$$

$$y'' = \frac{(x - 2y) \frac{d}{dx} (2x - y) - (2x - y) \frac{d}{dx} (x - 2y)}{(x - 2y)^2}$$

$$y'' = \frac{(x - 2y) \left(2 - \frac{dy}{dx} \right) - (2x - y) \left(1 - 2 \frac{dy}{dx} \right)}{(x - 2y)^2}$$

$$y'' = \frac{2x - 4y - x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} - 2x + y + 4x \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx}}{(x - 2y)^2}$$

Simplificando

$$y'' = \frac{-3y + 3x \frac{dy}{dx}}{(x - 2y)^2}$$

Sustituyendo $\frac{dy}{dx}$ por su valor obtenido en (I) se tiene

$$y'' = \frac{-3y + 3x \left(\frac{2x - y}{x - 2y} \right)}{(x - 2y)^2}$$

Simplificando de nuevo resulta

$$y'' = \frac{-3y(x - 2y) + 3x(2x - y)}{(x - 2y)^3}$$

$$y'' = \frac{-3xy + 6y^2 + 6x^2 - 3xy}{(x - 2y)^3}$$

$$y'' = \frac{6y^2 + 6x^2 - 6xy}{(x - 2y)^3}$$

$$y'' = \frac{6(x^2 + y^2 - xy)}{(x - 2y)^3}$$

Ejercicio VI

1. Obtener la primera y segunda derivadas de las funciones siguientes:

a) $y = 5x^2 - 2x$

b) $y = x - x^2 + x^3$

c) $y = (1 - ax)^2$ a constante

d) $y = \frac{ax + b}{ax - b}$ a y b constantes

e) $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$

f) $y = 1 - bx$ b constante

g) $s = a + vt$ $s = f(t)$, a y v constantes

h) $y = \frac{a}{x - 1}$ a constante

i) $y = (x - 1)(x^2 - x - 2)$

j) $y = (x + a)(x - a)$

2. Obtener la primera derivada de y con respecto a x en las siguientes funciones implícitas:

a) $x^2 + y^2 = r^2$ r constante

b) $xy = x + y$

c) $x^2 + 2xy = -1$

d) $x^3 - xy + y = 2$

e) $x + xy + y = 1$

f) $y^2 - 2xy = a^2$ a constante

g) $x + 3xy + y = 1$

3. Determinar la primera y segunda derivadas de y con respecto a x , en las siguientes funciones implícitas:

a) $x^2 + y^2 = 1$

b) $y^2 = 2px$

c) $x + xy + y = 2$

d) $y^2 - 2xy = a^2$ a constante

Capítulo V

Interpretación cinemática¹ de la derivada

5.1. Rapidez de la variación

Dada una función como $y = x^2$, derivando mediante la aplicación de la regla general (artículo 3.5), resulta:

$$I. \quad y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

$$y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$II. \quad \Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$III. \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

¹ Rama de la mecánica que estudia el movimiento.

Si antes de dar el cuarto paso para obtener la derivada, consideramos por ejemplo que $x = 2$ y $\Delta x = 0.8$, la ecuación III se convierte en $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4.8$, por lo que podemos afirmar que la rapidez media de variación y con respecto a x , equivale a 4.8, cuando x aumenta de $x = 2$ a $x = 2.8$.

De una manera general se dice que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la **rapidez media de variación** de y con respecto a x , cuando x varía de x a $x + \Delta x$. Así, en el caso de la función

$$y = ax + b \quad \text{ecuación de la recta}$$

$$\text{I. } y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$$

$$\text{II. } \Delta y = a \Delta x$$

$$\text{III. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

se puede concluir que la **rapidez media de variación** de y con respecto a x es igual a la **pendiente a** de la recta y es constante. Es decir, se trata de una rapidez constante de variación.

Mas si tomamos la primera función dada, es decir $y = x^2$, a partir del paso III de la aplicación de la regla general, tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

al considerar que el intervalo de x a $x + \Delta x$ disminuye cuando $\Delta x \rightarrow 0$; la rapidez media de variación de y con respecto a x se convierte en **rapidez instantánea de variación** de y con respecto a x .

Por consiguiente, viene a ser el límite de la razón de los incrementos, es decir, la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \text{rapidez instantánea de variación}$$

de y con respecto a x para un valor determinado de x .

Entonces como

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

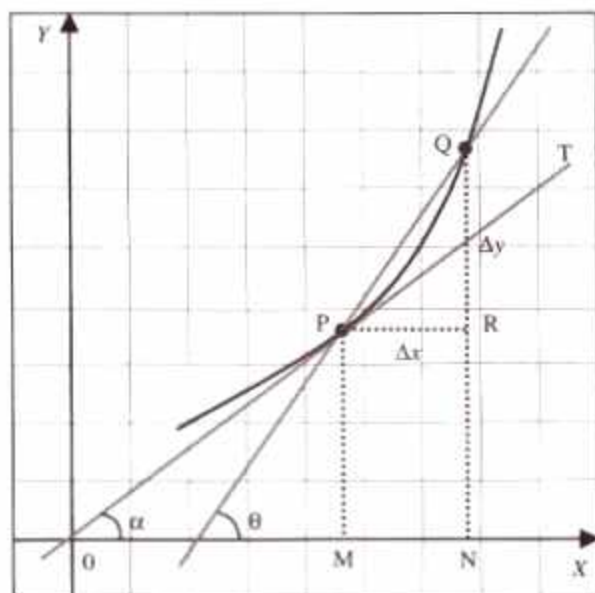
$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{rapidez instantánea de variación}$$

Por ejemplo, si $x = 2$, la rapidez instantánea de variación de sería 4 unidades por unidad de variación de x .

Comúnmente se omite la palabra **instantánea**, y algunos autos le llaman "razón de cambio" o "rapidez de cambio".

2. Interpretación geométrica de la rapidez de variación

Para la función $y = f(x)$, haciendo la gráfica correspondiente se tiene:



Si x crece de \overline{OM} a \overline{ON} entonces y crece de \overline{MP} a \overline{NQ} . La rapidez media de variación de y con respecto a x es igual a la pendiente de la secante \overline{PQ} , $m = \operatorname{tg} \theta$.

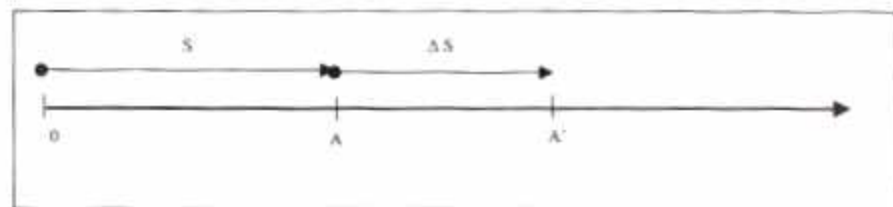
La rapidez en un determinado instante, cuando $x = \overline{OM}$, es igual a la pendiente de la tangente \overline{PT} , es decir, $m = \operatorname{tg} \alpha$.

5.3. Velocidad en el movimiento rectilíneo

Como aprendimos en el curso de física, la velocidad está expresada por la fórmula

$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} \quad , \quad v = \frac{e}{t}$$

Por lo que si consideramos que un punto A se mueve sobre una recta, ocupando las posiciones A y A' :



la razón entre el incremento de la distancia (Δs) y el incremento del tiempo (Δt) es la **velocidad media de variación** en ese intervalo. Es decir:

$$\text{velocidad media} = v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Mas, si tomamos el limite de esa velocidad media, cuando el intervalo tiende a ser infinitamente pequeño, esto es, si $\Delta s \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$, resulta:

$$\text{velocidad} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

es decir,

$$v = \frac{ds}{dt}$$

La velocidad será positiva cuando s sea creciente y negativa en el caso contrario. Empero, lo común es considerar que la velocidad queda expresada por su valor numérico, sin tener en cuenta el signo.

5.4. Aceleración en el movimiento rectilíneo

También por lo aprendido en física sabemos que la aceleración de un móvil es la variación de su velocidad. Entonces, la aceleración de un punto que se mueve sobre una recta será la variación de su velocidad. Es decir:

$$\text{aceleración} = a = \frac{dv}{dt}$$

y como $v = \frac{ds}{dt}$

$$\text{aceleración} = a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

5.5. Problemas

Ejemplo 1

En forma experimental se ha demostrado que si un cuerpo cae libremente en el vacío, a partir del reposo y hacia la superficie de la tierra, obedece, aproximadamente, a la ley expresada para la fórmula

$s = 4.9 t^2$, en la que s representa la distancia recorrida en metros y t el tiempo en segundos. Calcular la velocidad y la aceleración en cualquier instante, al cabo de 2 segundos y al final de 10 segundos.

Solución:

a) En un instante cualquiera:

$$v = \frac{ds}{dt} = 9.8 t$$

$$\therefore v = 9.8 t \text{ m por segundo}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 9.8 = s$$

$$\therefore a = 9.8 \text{ m por (seg)}^2$$

b) Al cabo de 2 segundos:

$$v = 9.8(2) = 19.6$$

$$\therefore v = 19.6 \text{ m por segundo}$$

$$a = 9.8 \text{ m por (seg)}^2$$

c) Al cabo de 10 segundos:

$$v = 9.8(10) = 98$$

$$\therefore v = 98 \text{ m por segundo}$$

$$a = 9.8 \text{ m por (seg)}^2$$

Ejemplo 2

Un móvil realiza en línea recta un movimiento, ajustado a la fórmula $s = 32 t - 8t^2$. Calcular la velocidad, la distancia recorrida y la aceleración al cabo de un segundo.

Solución:

$$v = \frac{ds}{dt} = 32 - 16t$$

$$v = 32 - 16(1) = 32 - 16 = 16 \text{ m por seg}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}(32 - 16t)$$

$$a = \dots -16 = -16 \text{ m por (seg)}^2$$

$$s = 32(1) - 8(1)^2 = 32 - 8 = 24$$

$$s = 24 \text{ m}$$

Ejemplo 3

Un móvil hace un recorrido en 10 minutos, obedeciendo a la fórmula $s = 10t^2 - \frac{t^3}{2}$. Considerando s en metros y t en minutos, hallar la velocidad al cabo de 10 minutos, la aceleración y la distancia recorrida.

$$v = \frac{ds}{dt} = 20t - \frac{3t^2}{2}$$

$$\therefore v = 20(10) - \frac{3(10)^2}{2} = 200 - \frac{300}{2} = 50$$

$$\therefore v = 50 \text{ m por minuto.}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 20 - \frac{6t}{2} = 20 - 3t$$

$$a = 20 - 3(10) = 20 - 30$$

$$a = -10 \text{ m por (min)}^2$$

$$s = 10(100) - \frac{1000}{2}$$

$$s = 1000 - 500 = 500$$

$$\therefore s = 500 \text{ m.}$$

Ejercicio VII

1. En los movimientos rectilíneos definidos por la ecuación dada en cada caso, hallar la distancia recorrida en metros, la velocidad y la aceleración en el instante indicado en segundos:

a) $s = 4t^3 - 2t^2;$ $t = 2$

b) $s = 4 - 2t + 3t^2;$ $t = 10$

c) $s = -\frac{t}{2t};$ $t = 4$

d) $s = \frac{1}{2}t^3 - 4t;$ $t = 4$

e) $s = \sqrt{3t^2 - 2};$ $t = 2$

2. Un proyectil lanzado hacia arriba se mueve según lo establecido por la fórmula $s = 50t - 2t^2$. Si consideramos que s está medido en metros y t en segundos, contestar las preguntas siguientes:

- ¿Qué distancia habrá recorrido al cabo de 2 segundos?
- ¿Cuál será su velocidad al cabo de 2 segundos?
- ¿Qué velocidad llevará al final de 4 segundos?
- ¿Qué distancia habrá recorrido hasta el punto en que deja de ascender?
- ¿Qué velocidad llevará en ese instante al que se refiere el inciso d)?

3. Una pelota que se lanza hacia arriba alcanza en metros una altura h en t segundos, definida por la ecuación $h = 20t^2 - 4.9t^2$.

- a) Calcular su velocidad y aceleración en cualquier instante.
- b) ¿Cuántos metros sube al cabo de 1 seg?
- c) ¿Cuántos después de 2 segundos?
- d) ¿Cuánto valen su velocidad y aceleración al cabo de 2 segundos?

4. Una piedra se arroja a un estanque y su profundidad p medida en metros, en relación con el tiempo de t segundos, después de haber tocado la superficie del agua, se define por la fórmula

$$p = \frac{4}{4 + t^2} + 0.8t - 1$$

- a) Hallar la velocidad y la aceleración en cualquier instante.
- b) ¿Cuál será la velocidad al cabo de 10 seg?
- c) ¿Cuál será la aceleración transcurrido el mismo tiempo?

Capítulo VI

Máximos y mínimos

6.1. Introducción

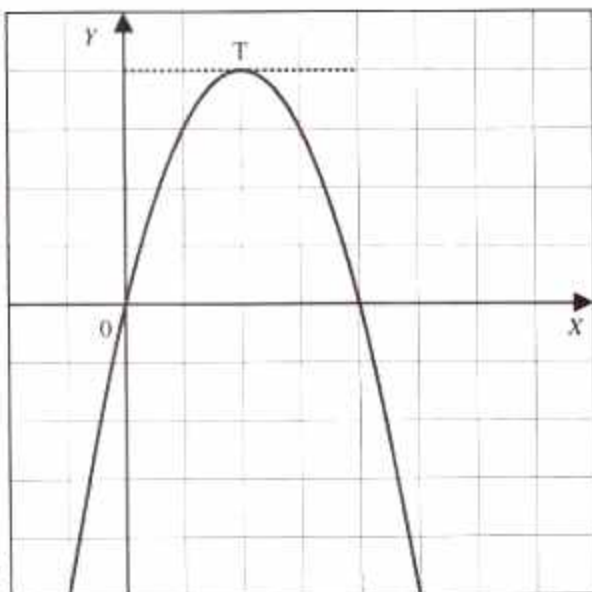
En muchas aplicaciones de la derivada, se requiere determinar cuándo la función tiene un **valor máximo** o un **valor mínimo**.

Ejemplo 1

Sea la función

$$y = 4x - x^2.$$

A partir de una tabla de valores trazamos la gráfica de la función.



| | | | | | | | |
|---|----|---|---|---|---|---|----|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | -5 | 0 | 3 | 4 | 3 | 0 | -5 |

Una simple observación de la figura nos conduce a pensar que la función y presenta un valor máximo para $x = 2$, es decir, en el punto T donde $y = 4$, que es el valor máximo de la función.

Esto lo podemos comprobar fácilmente si trazamos la tangente a la curva que pasa por el punto T , la que necesariamente es paralela al eje de las x , por tanto su pendiente es **cero**.

Entonces, como de acuerdo con lo estudiado en el artículo 3.6, el valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente en ese punto, sin recurrir a la gráfica, podemos hallar el valor de x mediante el siguiente procedimiento:

- (1) Obtener el valor de la derivada de la función.
- (2) Igualar a cero la ecuación que resulta.
- (3) Resolver la ecuación para hallar el **valor crítico de x** .

Así, para la función dada $y = 4x - x^2$

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = 4 - 2x$$

$$(2) \quad 4 - 2x = 0$$

$$(3) \quad x = 2 \qquad \qquad \qquad \text{valor crítico}$$

Sustituyendo el valor de x en la ecuación dada, tenemos:

$$y = 4(2) - (2)^2 = 8 - 4$$

| |
|---------|
| $y = 4$ |
|---------|

Estamos seguros de que se trata de un **máximo**, porque si tomamos un valor un poco menor que el valor crítico $x = 2$, la

tangente en ese punto tiene pendiente positiva y si lo tomamos un poco mayor tiene pendiente negativa.

Por ejemplo: si $x = 1.9$

$$\frac{dy}{dx} = 4 - 2(1.9) = 4 - 3.8 = 0.2 \quad \text{positivo}$$

La pendiente positiva para la tangente en ese punto nos indica que forma un ángulo agudo con la dirección positiva del eje de las x .

En cambio, si $x = 2.1$

$$\frac{dy}{dx} = 4 - 2(2.1) = 4 - 4.2 = -0.2 \quad \text{negativo}$$

La tangente en ese punto tiene pendiente negativa y forma un ángulo obtuso con el eje de las x .

Por tanto, al considerar las dos situaciones anteriores se concluye que la curva pasa de creciente a decreciente en el punto T ,

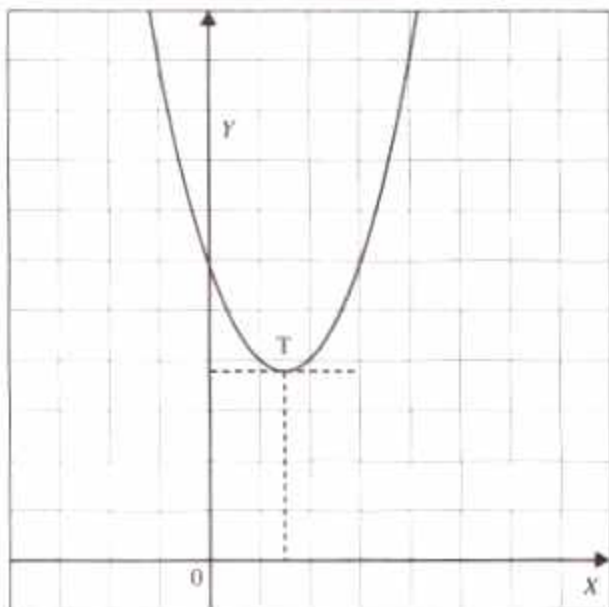
donde la función tiene un valor máximo. Así podemos estar seguros de que para el valor crítico $x = 2$, la función tiene un valor máximo en $y = 4$.

Ejemplo 2

Sea la función

$$y = x^2 - 3x + 6$$

A partir de una tabla de valores trazamos la gráfica



| | | | | | | |
|-----|----|---|---|---|---|----|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 10 | 6 | 4 | 4 | 6 | 10 |

Al observar la figura se puede inferir que la curva presenta un valor mínimo de la función en el punto **T**, comprendido entre $x = 1$ y $x = 2$. Se puede suponer que en ese punto x valga $1 \frac{1}{2}$.

Sin recurrir a la gráfica podemos encontrar el valor de x mediante el procedimiento indicado en el ejemplo anterior. Es decir:

Dada la función $y = x^2 - 3x + 6$

$$1. \quad \frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

$$2. \quad 2x - 3 = 0$$

$$3. \quad 2x = 3; \quad x = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$$

Para estar seguros de que se trata de un mínimo, tomamos primero un valor un poco menor que el valor crítico $x = \frac{3}{2}$ y luego un valor un poco mayor. Así por ejemplo, resulta:

a) Para $x = 1$

$$\frac{dy}{dx} = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1 \quad \text{negativo}$$

b) Para $x = 2$

$$\frac{dy}{dx} = 2(2) - 3 = 4 - 3 = 1 \quad \text{positivo}$$

Esto significa que la tangente en el punto donde $x = 1$ forma con el eje de las x un ángulo obtuso y la tangente en el punto donde $x = 2$ forma con el eje de las x un ángulo agudo. Por tanto, la curva

pasa de decreciente a creciente en el punto **T**, donde presenta un valor mínimo para la función.

Podemos concluir que para el valor crítico $x = \frac{3}{2}$ la función tiene un valor mínimo, el cual conoceremos si sustituimos en la ecuación dada el valor crítico. Esto es,

$$y = x^2 - 3x + 6$$

Sustituyendo $x = \frac{3}{2}$

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) + 6$$

$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 6$$

$$y = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + 6$$

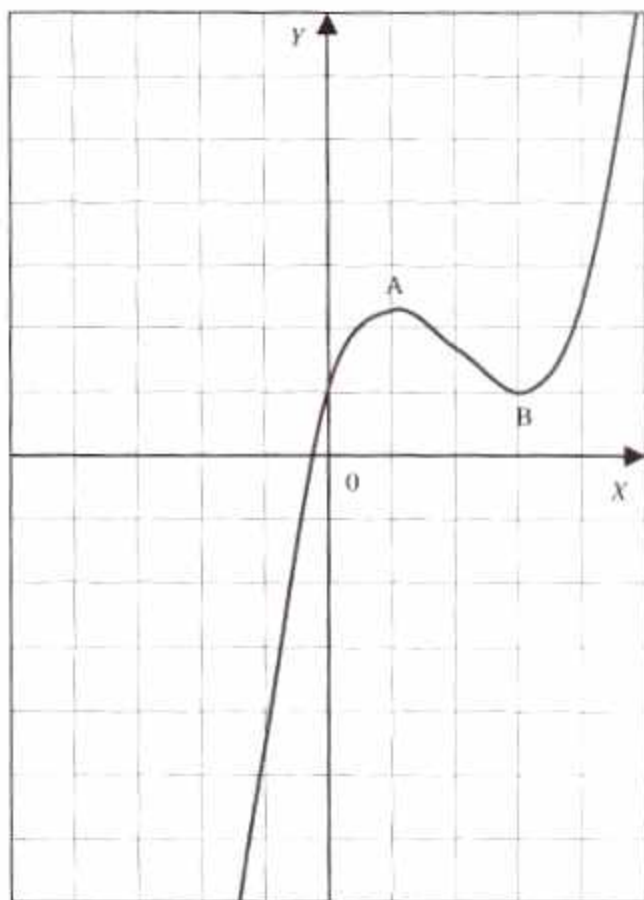
$$y = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \quad \text{valor mínimo de la función}$$

Ejemplo 3

Sea la función $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

Como en los dos ejemplos anteriores, trazamos la gráfica correspondiente:

| | | | | | | | | | |
|-----|------------------|-----------------|---|----------------|----------------|---|----------------|----------------|----|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| y | $-15\frac{2}{3}$ | $-4\frac{1}{2}$ | 1 | $2\frac{1}{3}$ | $1\frac{2}{3}$ | 1 | $2\frac{1}{3}$ | $7\frac{2}{3}$ | 19 |



Al observar la gráfica de la función notamos que la función presenta un **máximo** en A y un **mínimo** en B.

También observamos que ese máximo y ese mínimo no son necesariamente el mayor y el menor valor de la función, por lo que se les llama **máximo** y **mínimo relativos**.

Obteniendo el valor de la derivada, igualando a cero la ecuación que resulta y resolviéndola para x , hallaremos los valores críticos correspondientes.

Es decir,

dada
$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

1.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3} - 4x + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 4x + 3$$

2.
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Factorizando resulta

3.
$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$$

Luego $x_1 = 3$

$$x_2 = 1$$

valores críticos

En seguida procedemos a comprobar que estos valores de x corresponden a un **máximo** o un **mínimo**.

a) Para $x = 3$

Si $x = 2.5$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 4x + 3 = (2.5)^2 - 4(2.5) + 3 = 6.25 - 10 + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = -0.75 \quad \text{negativo}$$

Si $x = 3.5$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 4x + 3 = (3.5)^2 - 4(3.5) + 3 = 12.25 - 14 + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 1.25 \quad \text{positivo}$$

La pendiente de la tangente pasa de **negativa** a **positiva**; entonces para $x = 3$ la función tiene un **mínimo**, es decir:

$$y = \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = \frac{1}{3} (3)^3 - 2(3)^2 + 3(3) + 1$$

$$y = 9 - 18 + 9 + 1$$

| |
|---------|
| $y = 1$ |
|---------|

b) Para $x = 1$

Si $x = 0.5$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 4x + 3 = (0.5)^2 - 4(0.5) + 3 = 0.25 - 2 + 3 = 1.25$$

$$\frac{dy}{dx} = 1.25 \quad \text{negativo}$$

$$\text{si } x = 1.5$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 4x + 3 = (1.5)^2 - 4(1.5) + 3 = 2.25 - 6 + 3 = -0.75$$

$$\frac{dy}{dx} = -0.75 \quad \text{negativo}$$

La pendiente de la tangente pasa de positiva a negativa, entonces para $x = 1$ la función tiene un **máximo**; es decir:

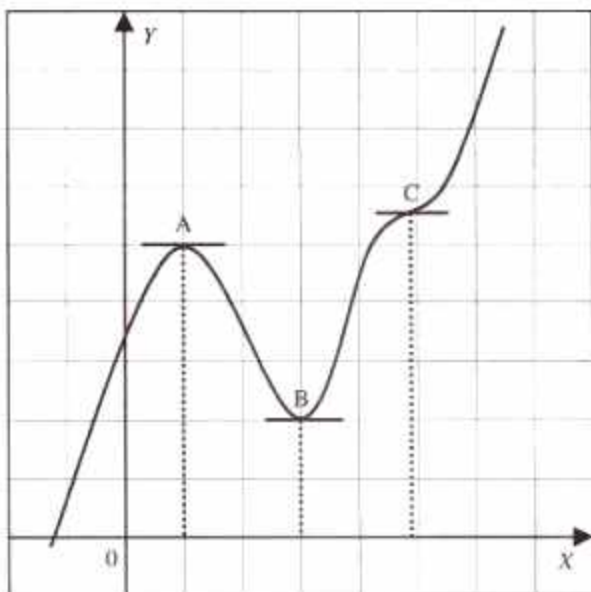
$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = \frac{1}{3}(1)^3 - 2(1)^2 + 3(1) + 1$$

$$y = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1$$

$$y = 2\frac{1}{3}$$

6.2. Concavidad y puntos de inflexión

Dada una curva de ecuación $y = f(x)$



En general, se presentan tres casos:

- I. Si la pendiente de una recta tangente a la curva es positiva a la izquierda y negativa a la derecha del punto, como en A, la curva pasa de creciente a decreciente; entonces la curva tiene un valor máximo para ese punto. La curva es cóncava hacia abajo.

Luego, si $x = a$, podemos afirmar:

$f(x)$ tiene un valor máximo para $x = a$, si en un entorno de a la derivada $f'(x)$ es positiva para valores de x menores que a y negativa para valores de x mayores que a .

- II. Si la pendiente de una recta tangente a la curva es negativa a la izquierda y positiva a la derecha del punto, como en B, la curva pasa de decreciente a creciente; entonces la curva tiene un valor mínimo para ese punto. La curva es cóncava hacia arriba.

Luego si $x = a$, podemos afirmar:

$f(x)$ tiene un valor mínimo para $x = a$, si en un entorno de a la derivada $f'(x)$ es negativa para valores de x menores que a y positiva para valores de x mayores que a .

- III. Si la pendiente de una recta tangente a la curva tiene el mismo signo a ambos lados del punto, como en C, entonces la curva sólo **cambia el sentido de la concavidad** y por tanto no presenta ni máximo ni mínimo. Se trata de un punto de **inflexión**.

Luego, si $x = a$, podemos afirmar:

$f(x)$ no tiene máximo ni mínimo para $x = a$, si $f'(x)$ tiene el mismo signo para valores de x mayores o menores que a . Se trata de un **punto de inflexión** el que determina un cambio en la concavidad.

6.3. Método de la segunda derivada

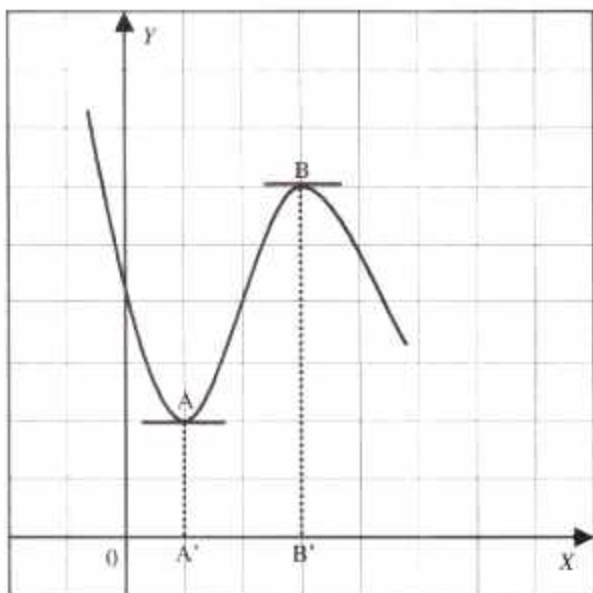
Dada la función $y = f(x)$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) \quad \text{primera derivada}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) \quad \text{segunda derivada}$$

Podemos comprobar que cuando $f''(x)$ es positiva, $f'(x)$ aumenta a medida que x crece y cuando $f''(x)$ es negativo, $f'(x)$ disminuye a medida que x crece.

Así por ejemplo, siendo la función $y = f(x)$, a es el valor crítico de x que hace nula la primera derivada, es decir, $f'(a) = 0$



Para el mínimo $a = OA'$

Para el máximo $a = OB'$

Se presentan dos situaciones:

1. Si $f''(a)$ es **positiva**, $f'(x)$ aumenta al pasar por cero cuando x crece al pasar por a . Esto significa que $f'(x)$ tiene que

ser negativa para valores de x un poco menores que a y positiva para valores de x un poco mayores que a . Por consiguiente, la función tiene un **valor mínimo** para $x = a$.

2. Si $f'(a)$ es **negativa**, $f'(x)$ disminuye al pasar por cero cuando x crece al pasar por a . Esto significa que $f'(x)$ tiene que ser positiva para valores de x un poco menores que a y negativa para valores de x un poco mayores que a . Por consiguiente, la función tiene un **valor máximo** para $x = a$.

En resumen:

1. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, la función $f(x)$ tiene un **mínimo** para $x = a$.
2. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, la función $f(x)$ tiene un **máximo** para $x = a$.

El método de la segunda derivada para determinar si se presentan máximos o mínimos, comprende los cuatro pasos siguientes:

- I. Hallar la primera derivada.
- II. Igualar a cero la primera derivada y resolver la ecuación para determinar las raíces reales (valores críticos).
- III. Obtener la segunda derivada de la función.

Sustituir en la segunda derivada cada uno de los valores críticos obtenidos. Si el resultado es **negativo** se tendrá un **máximo** y si es **positivo** se tendrá un **mínimo**.

El método de la segunda derivada no es aplicable cuando $f''(x) = 0$, aunque puede haber un máximo p , un mínimo o un punto de inflexión, por lo que en este caso se debe recurrir al método explicado en el artículo 5.1.

Ejemplos

Hallar los máximos y mínimos de cada función, empleando el método de la segunda derivada.

$$1. \quad y = x^4 - 32x$$

$$I. \quad y' = 4x^3 - 32$$

$$II. \quad 4x^3 - 32 = 0$$

$$4x^3 = 32$$

$$x^3 = \frac{32}{4} = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8}$$

$$x = 2$$

valor crítico

$$III. \quad y'' = 12x^2$$

$$IV. \quad 12(2)^2 = 12(4) = 48 \quad \text{valor } \mathbf{mínimo}, \text{ por ser positivo}$$

$$2. \quad y = x^3 - 2x^2 + x$$

$$I. \quad y' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$II. \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{6} = \frac{4 \pm 2}{6}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

valores críticos

$$\text{III. } y' = 6x - 4$$

$$\text{Para } x = 1$$

$$\text{IV. } 6(1) - 4 = 6 - 4 = 2 \quad \text{mínimo por ser positivo}$$

$$\text{Para } x = \frac{1}{3}$$

$$6\left(\frac{1}{3}\right) - 4 = 2 - 4 = -2 \quad \text{máximo por ser negativo}$$

Por medio de la segunda derivada podemos obtener el valor crítico correspondiente a un **punto de inflexión**.

Para esto se procede conforme a los pasos siguientes:

- I. Hallar los valores críticos cuando $\frac{d^2y}{dx^2}$ es igual a **cero** o **infinito**.
- II. Observar si al asignar valores menores y mayores al valor crítico, la segunda derivada cambia de signo. Entonces se tiene un punto de inflexión.

Ejemplo

Sea la curva de la ecuación:

$$y = \frac{x^4}{3} - 2x^2$$

Derivando tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}x^3 - 4x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x - 4$$

luego $4x - 4 = 0$ si $x = \pm 1$

Es decir, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ son los valores **críticos**.

De esta manera:

Para $x = 1$

$$\text{Si } x = 0.5, \frac{d^2y}{dx^2} = 4(.5)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$$

$$\text{Si } x = 1.5, \frac{d^2y}{dx^2} = 4(1.5)^2 - 4 = 6 - 4 = 2$$

Cambia de signo

Para $x = -1$

$$\text{Si } x = -2, \frac{d^2y}{dx^2} = 4(-2)^2 - 4 = 16 - 4 = 12$$

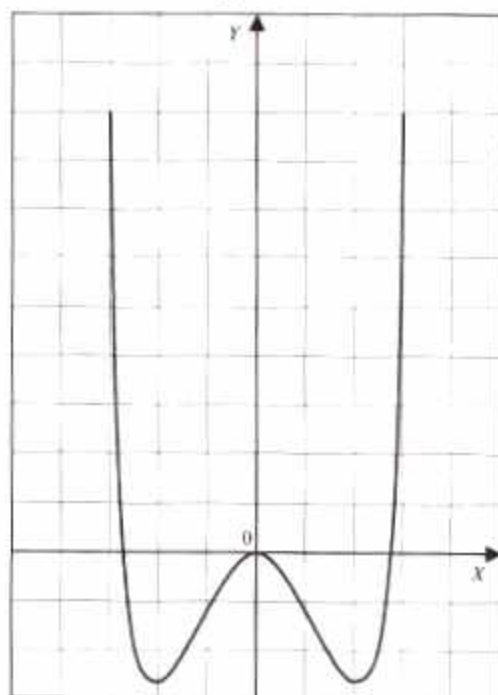
$$\text{Si } x = -0.5, \frac{d^2y}{dx^2} = 4(-.5)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$$

Cambia de signo

En conclusión, $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ corresponden a puntos de inflexión.

Representación gráfica de $y = \frac{x^4}{3} - 2x^2$

| | |
|-----|-------|
| x | y |
| 3 | 9 |
| 2 | -2.67 |
| 1 | -1.66 |
| 0 | 0 |
| -1 | -1.66 |
| -2 | -2.67 |
| -3 | 9 |



Sustituyendo los valores críticos 1 y -1 en la ecuación obtenemos las coordenadas de los puntos de inflexión:

$$M(1, -1.66)$$

$$N(-1, -1.66)$$

Ejercicio VIII

1. Por observación de su representación gráfica, determinar los valores máximo y mínimo de cada función:

a) $y = x^2 - 4x + 3$

d) $y = 3x - x^2$

b) $y = x^2 - 2x + 5$

e) $y = x^4 - 4x$

c) $y = x^4 - 2x^2 + 6$

2. Calcular los valores máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = x^2 - 6x + 8$

b) $y = -x^2 + 2x + 8$

c) $y = x^2 + 2x - 3$

d) $y = x^3 - 9x$

e) $y = 4 - 3x^2$

f) $y = x^3 - x$

g) $y = x^2 + x + 5$

h) $y = x^3 + x^2 - 5$

i) $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

j) $y = 3x - x^3$

6.4. Problemas

Es posible resolver algunos problemas en los que se buscan valores máximos o mínimos, si podemos expresarlos mediante una función de dos variables.

Ejemplo 1

Si la suma de dos números es 10, ¿cuál será el valor máximo de su producto?

Consideraciones:

Siendo x un número $10 - x$ será el otro número.

Si representamos por y el producto se tiene la ecuación

$$y = x(10 - x)$$

es decir,

$$y = 10x - x^2 \text{ en la que } y \text{ debe tener un valor máximo.}$$

Derivando, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = 10 - 2x$$

Igualando a cero, tenemos:

$$10 - 2x = 0$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

valor de x que hace nula la primera derivada.

Para determinar si se trata de un máximo o de un mínimo se tiene:

Para $x = 4$ (valor un poco menor que 5)

$$10 - 2x = 10 - 2(4) = 10 - 8 = 2 \quad (\text{positivo})$$

Para $x = 6$ (valor un poco mayor que 5)

$$10 - 2x = 10 - 2(6) = 10 - 12 = -2 \quad (\text{negativo})$$

Luego, la función tiene un **máximo** para $x = 5$.

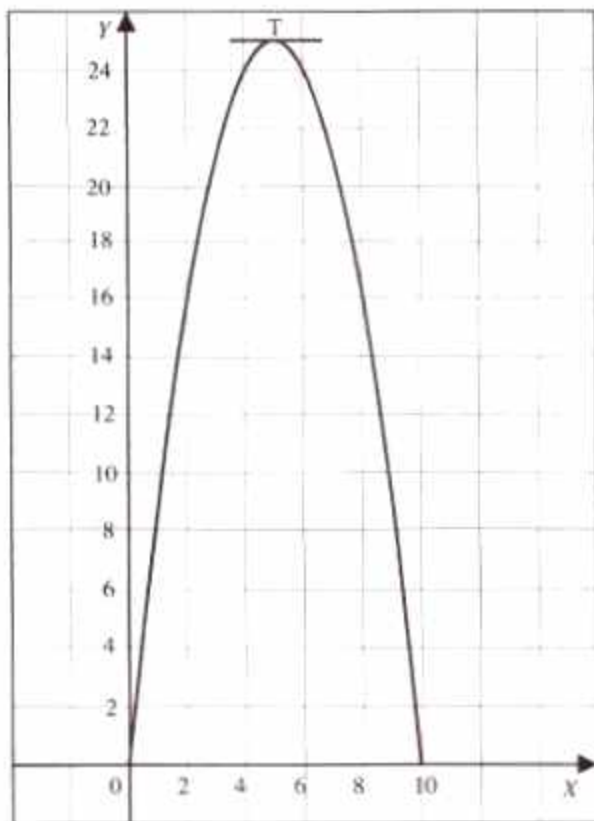
Por consiguiente,

$$y = 10x - x^2 = 10(5) - (5)^2 = 50 - 25 = 25$$

que es el valor **máximo** del producto.

Representación gráfica de la función $y = 10x - x^2$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|---|----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| y | 0 | 9 | 16 | 21 | 24 | 25 | 24 | 21 | 16 | 9 | 0 |

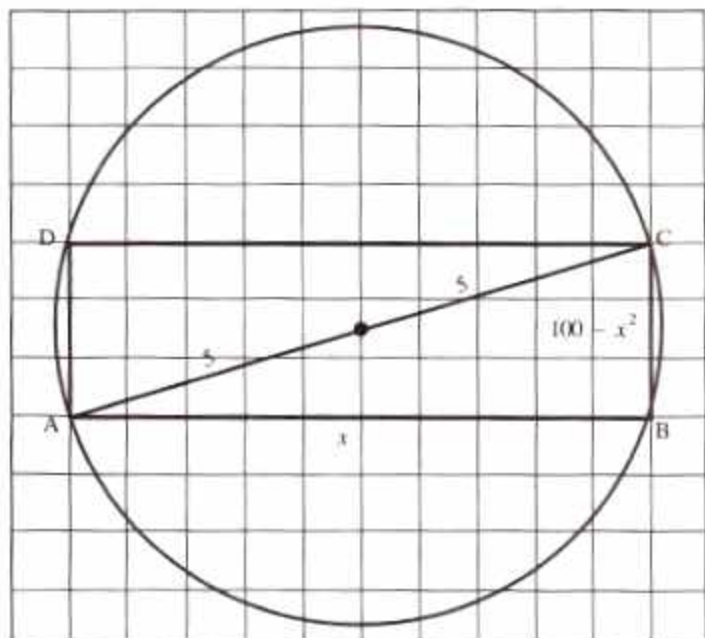


Se puede observar que cuando $x = 5$, $y = 25$ es el valor **máximo** del producto.

Ejemplo 2

¿Qué dimensiones tiene el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en una circunferencia de radio igual a 5 m?

Considerando la figura que ilustra el problema, tenemos



$$a = AB \times BC$$

Si $r = 5$ y $AB = x$

resultan

$$AC = 10 \quad \text{y} \quad BC = 100 - x^2$$

La ecuación será

$$A = x \cdot 100 - x^2$$

donde x debe tener un valor tal que A sea un máximo.

Derivando esta función se tiene:

$$\frac{dA}{dx} = x \frac{d}{dx} (100 - x^2) + \sqrt{100 - x^2} \frac{d}{dx} (x)$$

$$\frac{dA}{dx} = x \left(\frac{1}{2 \sqrt{100 - x^2}} \right) \frac{d}{dx} (100 - x^2) + \sqrt{100 - x^2}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{x}{2 \sqrt{100 - x^2}} (-2x) + \sqrt{100 - x^2}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-x^2}{100 - x^2} + \sqrt{100 - x^2}$$

Convirtiendo a un común denominador resulta:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-x^2}{100 - x^2} + \frac{100 - x^2}{100 - x^2}$$

Luego

$$\frac{dA}{dx} = \frac{100 - 2x^2}{100 - x^2}$$

Igualando a cero esta derivada tenemos:

$$\frac{100 - 2x^2}{100 - x^2} = 0$$

lo que será cierto si el numerador es igual a cero, es decir:

$$\text{si } 100 - 2x^2 = 0$$

Basta resolver la ecuación para obtener los valores críticos de x , esto es:

$$2x^2 = 100$$

$$x^2 = 50$$

$$x = \pm \sqrt{50}$$

Si consideramos $x = \sqrt{50}$ porque la longitud del lado necesariamente debe ser positiva.

Enseguida, por el procedimiento estudiado en el artículo 6.1, procedemos a determinar si se trata de un máximo o de un mínimo.

De esta manera:

Para $x = \sqrt{48}$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{100 - 96}{106 - 48} = \text{valor positivo}$$

Para $x = \sqrt{52}$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{100 - 104}{100 - 52} = \text{valor negativo}$$

Por consiguiente, para $x = \sqrt{50}$, la función tiene un **valor máximo**.

En consecuencia:

$x = \sqrt{50}$ m es la longitud del lado AB

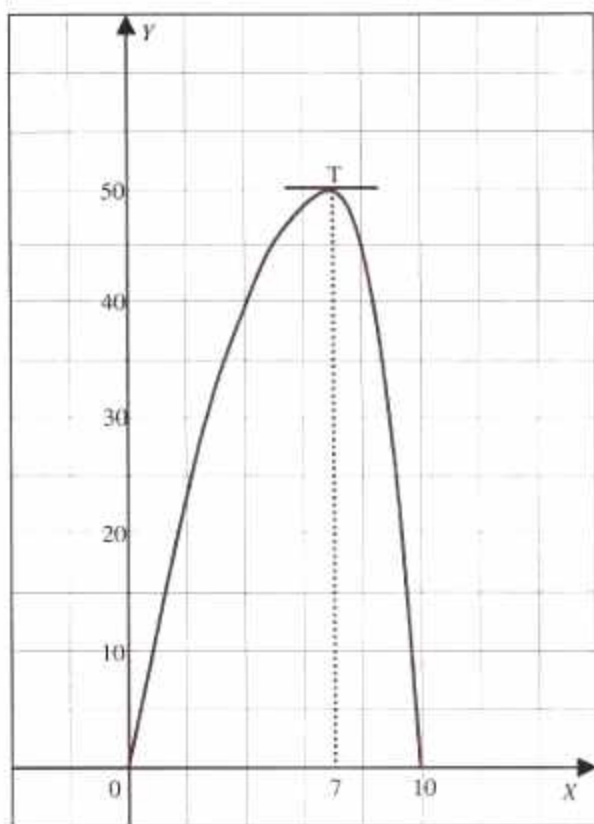
$$BC = 100 - (\sqrt{50})^2 = 100 - 50 = 50$$

Se trata de un cuadrado, cuya área es:

$$A = \overline{AB} \times \overline{BC} = \sqrt{50} \sqrt{50} = 50 \text{ m}^2$$

Representación gráfica de la función $A = x \sqrt{100 - x^2}$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|-----|------|------|------|----|----|------|----|------|----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| A | 0 | 9.9 | 19.6 | 28.6 | 36.6 | 43 | 48 | 41.7 | 48 | 39.6 | 0 |



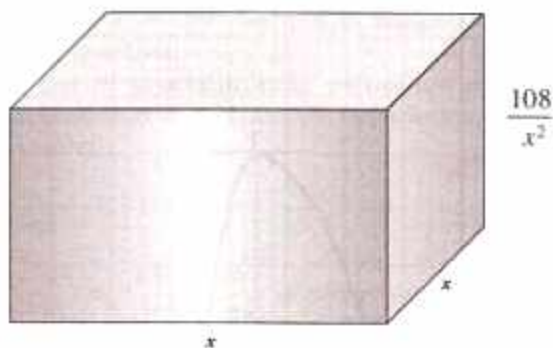
Se puede observar que cuando $x = \sqrt{50} = 7.07$

$A = 50 \text{ m}^2$ presenta su valor máximo.

Ejemplo 3

Hallar las dimensiones de una caja sin tapa de 108 cm^3 de volumen, que tiene la forma de un prisma recto de base cuadrada, para que en su construcción se emplee la menor cantidad posible de material.

Considerando la figura, se tiene



Si $x =$ lado de la base y $v = 108$

la altura será $\frac{108}{x^2}$

Entonces el área requerida es

$$A = x^2 + 4x \left(\frac{108}{x^2} \right)$$

$$A = x^2 + \frac{432}{x}$$

$A = x^2 + 432 x^{-1}$ donde x debe ser tal que A sea un **mínimo**.

Derivando la función tenemos:

$$\frac{dA}{dx} = 2x - 432x^{-2}$$

$$\frac{dA}{dx} = 2x - \frac{432}{x^2}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{2x^3 - 432}{x^2}$$

Igualando a cero la derivada, resulta:

$$\frac{2x^3 - 432}{x^2} = 0$$

lo que es cierto si $2x^3 - 432 = 0$, es decir:

$$2x^3 = 432$$

$$x^3 = 216$$

$$x = \sqrt[3]{216}$$

$$x = 6$$

Por el procedimiento estudiado en el artículo 6.1, determinamos si se trata de un máximo.

Así, consideramos:

Para $x = 5$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{2(5)^3 - 432}{25} = \text{valor negativo}$$

Para $x = 7$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{2(7)^3 - 432}{4} = \text{valor positivo}$$

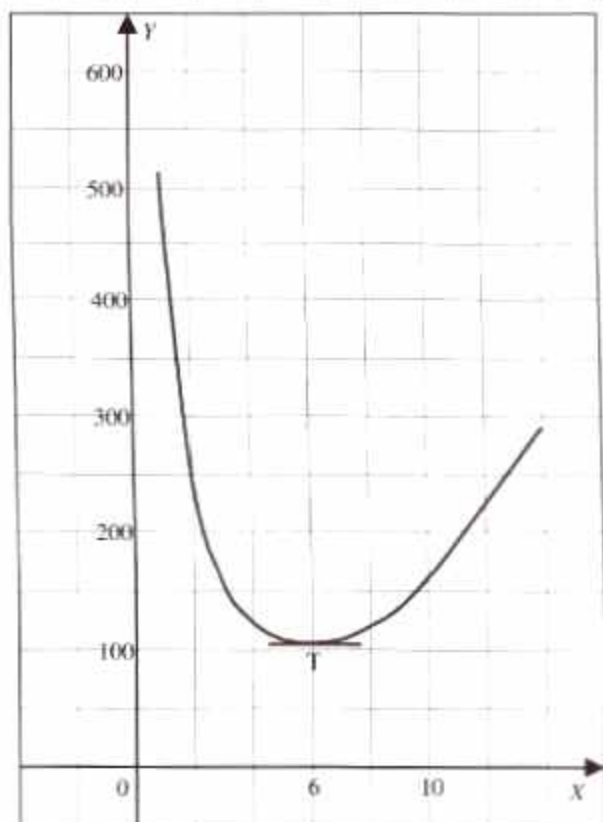
Por consiguiente, para $x = 6$ la función tiene un **valor mínimo**. Por tanto, el lado de la base mide 6 cm.

La altura $h = \frac{108}{36} = 3$ cm. Su área será $A = 36 + 24 \times 3$.

$$A = 108 \text{ cm}^2$$

Representación gráfica de la función $A = x^2 + \frac{432}{x}$

| | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| A | 433 | 220 | 153 | 124 | 111 | 108 | 111 | 118 | 129 | 143 |



La función tiene un mínimo en el punto **T**.

Ejemplo 4

Demostrar que si se quiere construir un bote de hojalata cerrado, en forma de cilindro circular recto de un litro de capacidad y gastar la menor cantidad posible de hojalata, se requiere que la altura sea igual al diámetro de la base.

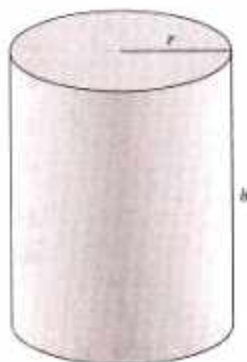
Considerando la figura, tenemos:

r = radio de la base

h = altura

El área total del cilindro será

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad (1)$$



Como la capacidad del bote es de un litro, por consiguiente su volumen equivale a un decímetro cúbico.

Entonces, si $V = \pi r^2 h$

$$\pi r^2 h = 1$$

$$h = \frac{1}{\pi r^2} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) para tener $A = f(r)$ resulta

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1}{\pi r^2} \right)$$

$$A = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$$

o sea, que si

$$A = 2\pi r^2 + 2r^{-1}$$

derivando se tiene:

$$\frac{dA}{dx} = 4\pi r - 2r^{-2}$$

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2}{r^2}$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{4\pi r^3 - 2}{r^2}$$

igualando a cero la derivada resulta:

$$\frac{4\pi r^3 - 2}{r^2} = 0$$

lo que ocurre si

$$4\pi r^3 - 2 = 0$$

es decir, si

$$4\pi r^3 = 2$$

$$r^3 = \frac{2}{4\pi}$$

$$r^3 = \frac{1}{2\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

Empleamos el método de la segunda derivada, estudiado en el artículo 6.2, para determinar si se trata de un máximo o de un mínimo.

Para ello conviene obtener la segunda derivada de

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - 2r^{-2}$$

Es decir,

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + 4r^{-3}$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4}{r^3}$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = \frac{4\pi r^3 + 4}{r^3}$$

Sustituyendo $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \right)^3 + 4 = \frac{4\pi}{\frac{1}{2\pi}} + 4 = \frac{2 + 4}{\frac{1}{2\pi}} = (\text{positivo})$$

Por consiguiente, para $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ la función presenta un **valor mínimo**.

Para obtener el valor de la altura h , sustituimos $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ en (2), y tenemos:

$$h = \frac{1}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \right)^2} = \frac{1}{\pi^{\frac{2}{3}} 4\pi^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4\pi^2}}$$

$$h = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

Comparando este valor $h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ con el diámetro $2r$ resulta:

$$2r = 2 \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8}{2\pi}}$$

$$2r = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

Luego, $h = 2r$, lo que significa que la altura es igual al diámetro, justamente lo que se quería demostrar.

Podemos comprobar que el bote cilíndrico con estas dimensiones tiene una capacidad de un litro, aplicando la fórmula del volumen de un cilindro. Es decir,

$$V = \pi r^2 h$$

Sustituyendo:

$$V = \pi \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \right)^2 \left(\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \right)$$

$$V = \pi \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}} \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} = \pi \sqrt[3]{\frac{4}{4\pi^3}} = \sqrt[3]{\frac{4\pi^3}{4\pi^3}}$$

$$V = \sqrt[3]{1} = 1$$

Con los datos obtenidos, también podemos calcular el área total, aplicando la fórmula (1), de la manera siguiente:

$$A = 2\pi \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \right)^2 + 2\pi \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \right) \left(\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \right)$$

$$A = 2\pi \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}} + 2\pi \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

$$A = \sqrt[3]{\frac{8\pi^3}{4\pi^2}} + 2\pi \sqrt[3]{\frac{4}{2\pi^2}}$$

$$A = 3 \cdot 2\pi + 3 \cdot \frac{32\pi^3}{2\pi^2}$$

$$A = 3 \cdot 2\pi + 3 \cdot 16\pi$$

$$A = 3 \cdot 2\pi + 2 \cdot 2\pi$$

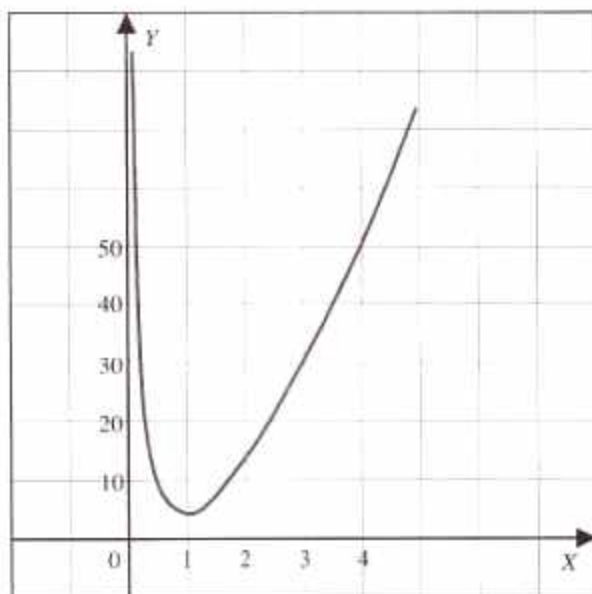
$$A = 3 \cdot 2\pi$$

Representación gráfica de la función $A = Ar^2 + \frac{2}{r}$

se sea $A = \frac{\pi r^3}{r} + 2$

Para $\pi = 3.14$

| r | A |
|-----|-------|
| 0 | ∞ |
| 0.1 | 20.25 |
| 0.2 | 10.12 |
| 1 | 5.14 |
| 2 | 13.56 |
| 3 | 28.92 |
| 4 | 50.74 |



La función presenta un valor mínimo para $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

Si hacemos los cálculos aritméticos respectivos para obtener los valores de r y A resulta:

$$r = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} = 0.542 \text{ dm}$$

$$\text{Entonces, diámetro} = 2r = 1.084 \text{ dm}$$

$$A = 1.854 \text{ dm}^2$$

Ejercicio IX

A. Hallar los valores máximos y mínimos de las funciones que siguen:

- $y = -3x^4 + 6x^2 - 1$
- $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$
- $y = (x - 1)^2 + (x + 1)^3$
- $y = (x - 1)^2(x + 1)$

B. Resolver los problemas siguientes:

- Determinar la altura de un paralelepípedo rectángulo de base cuadrada, tal, que al inscribirlo en una esfera de radio r tenga un volumen máximo.
- Probar que el terreno rectangular de mayor área que es posible cercar con una valla de 100 m, resulta ser un cuadrado.

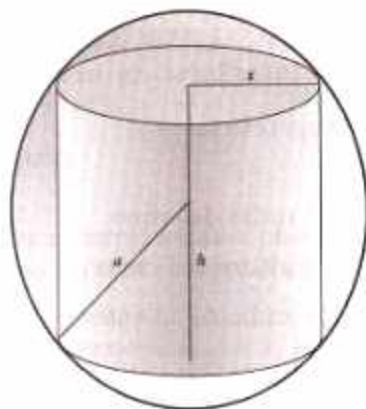
- Hallar el volumen del mayor cono circular recto que puede engendrarse por un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 20 cm, al girar alrededor de uno de sus catetos.
- ¿Qué dimensiones debe tener un bote en forma de cilindro circular recto, sin tapa, de un decímetro cúbico de volumen para que en su construcción se utilice la menor cantidad posible de hojalata?
- Encontrar la altura del cilindro circular recto de mayor volumen que puede inscribirse en una esfera de un metro de radio.

Sugerencia. Ilustrar con una figura como la siguiente:

a = radio de la esfera

h = altura del cilindro

x = radio de la base



- Si tenemos una cuerda de 30 m de largo, extendida de modo que forme un triángulo isósceles mediante la aplicación de 3 fuerzas en los vértices para mantener tensos sus tres lados, ¿en qué caso el área limitada será máxima?
- Debe ponerse una valla para cercar un terreno rectangular de 10800 m² de superficie. Uno de los lados mayores colinda con un río, de suerte que sólo hay que bardear tres lados. ¿Cómo deben escogerse las dimensiones del terreno para que la longitud de la valla sea mínima?

8. Con 1728 cm^2 de cartón debe construirse una caja en forma de un paralelepípedo rectángulo de base cuadrada y sin tapa. Haciendo caso omiso del espesor del material y suponiendo que no hay desperdicio de éste, ¿cuáles son las dimensiones de la mayor caja que puede construirse?
9. Si tres lados de un terreno en forma de trapecio miden cada uno 10 m, ¿cuánto deberá medir el cuarto lado para que el área sea máxima?
10. Si la resistencia de una viga de sección transversal rectangular es directamente proporcional a la anchura y al cuadrado de la profundidad, ¿cuáles deberán ser las dimensiones de la viga de mayor resistencia que pueda aserrarse de un tronco cilíndrico de 48 cm de diámetro?
11. Hallar la altura del mayor cono de base circular que puede inscribirse en una esfera de 15 cm de radio.

Sugerencia:

x = radio del cono

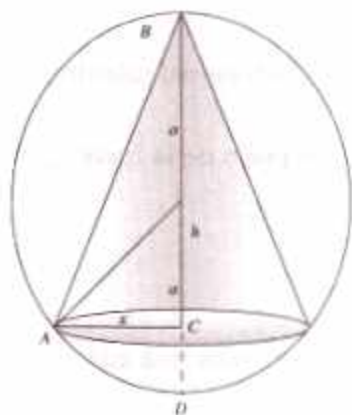
h = altura del cono

a = radio de la esfera

Aplicar la propiedad

En $\triangle ABD$

$$x^2 = BC \times BD$$



12. Hallar las dimensiones del triángulo rectángulo de área máxima cuya hipotenusa sea h .

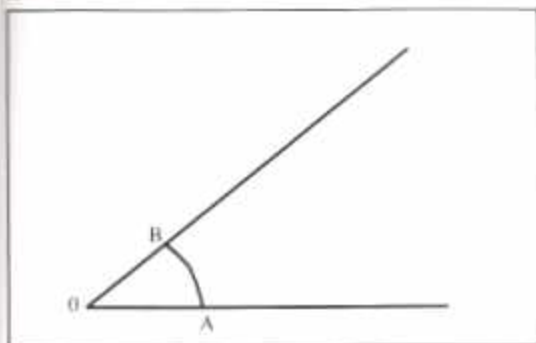
Capítulo VII

Derivadas de las funciones trascendentes

7.1. Valor natural de un ángulo

Es conveniente recordar que el **valor natural** o **valor circular** de un ángulo es aquel en que se toma como unidad el ángulo cuya medida es el arco de longitud igual al radio.

Así, para el ángulo α de la figura, tenemos que la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ dividida entre la longitud del radio OA da una razón constante.



Es decir:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{OA} \quad \text{valor natural del ángulo}$$

Si $\widehat{AB} = \overline{OA}$ medidos en su longitud, se tiene el ángulo unidad llamado también **radián**.

De esta manera:

Para el ángulo de una vuelta (360°)

$$\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2 \cdot \pi = 6.28 \dots \text{radianes}$$

Para el ángulo de media vuelta (180°)

$$\alpha = \frac{2\pi}{2} = \frac{6.28}{2} = 3.14 \dots \text{radianes}$$

Para el ángulo de cuarto de vuelta (90°)

$$\alpha = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \frac{3.14}{2} = 1.57 \dots \text{radianes}$$

Para el ángulo de un grado (1°)

$$\alpha = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = \frac{3.14}{180} = 0.0174 \dots \text{radianes}$$

Podemos concluir que para convertir a radianes un arco expresado en grados, basta multiplicar $\frac{\pi}{180}$ por el número de grados.

Ejemplos

Expresar en radianes un ángulo de 72° .

$$\alpha = 72 \times \frac{\pi}{180} = \frac{72 \times 3.14}{180} = 1.256 \text{ radianes}$$

7.2. Límites importantes

Para establecer las fórmulas de las derivadas de las funciones trascendentes, es necesario considerar primero dos importantes límites.

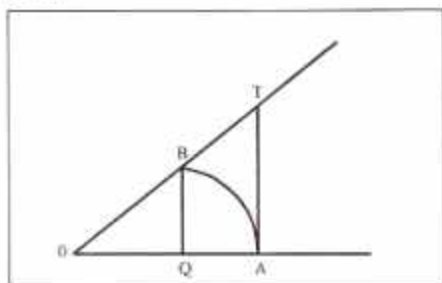
Primer caso
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$$

Podríamos suponer que se trata de una indeterminación, porque si α tiende a cero, $\operatorname{sen} \alpha$ también tiende a cero. Sin embargo, trazando la figura que sigue, tenemos:

$$\text{Si } \overline{BQ} \perp \overline{OA} \quad \text{y} \quad \overline{AT} \perp \overline{OA}$$

En valores naturales se tiene:

$$\overline{QB} < \overset{\frown}{\overline{AB}} < \overline{AT}$$



Dividiendo los miembros de la desigualdad anterior entre un número positivo OA , resulta:

$$\frac{\overline{QB}}{OA} < \frac{\overset{\frown}{\overline{AB}}}{OA} < \frac{\overline{AT}}{OA} \quad (1)$$

Pero,

$$\frac{\overline{QB}}{OA} = \frac{\overline{QB}}{OB} = \operatorname{sen} \alpha, \quad \frac{\overset{\frown}{\overline{AB}}}{OA} = \alpha, \quad \frac{\overline{AT}}{OA} = \operatorname{tg} \alpha$$

Sustituyendo en (1), se tiene:

$$\operatorname{sen} \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$$

Dividiendo los miembros de esta desigualdad entre $\text{sen } \alpha$, se obtiene:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha} < \frac{\alpha}{\text{sen } \alpha} < \frac{\text{tg } \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

o sea:

$$1 < \frac{\alpha}{\text{sen } \alpha} < \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

que se transforma en:

$$1 < \frac{\alpha}{\text{sen } \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}$$

Tomando recíprocos se convierte en:

$$1 > \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} > \cos \alpha$$

Si tomamos límites cuando α tiende a cero, como $\cos \alpha$ tiende a uno, el límite buscado será:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} = 1$$

porque está comprendido entre 1 y una cantidad que tiende a 1.

Lo que podemos comprobar fácilmente, observando la tabla siguiente, que elaboramos con la ayuda de la tabla de valores naturales y expresando los ángulos dados en radianes.

| Ángulo α | | sen α |
|-----------------|---------------|--------------|
| valor en grados | valor natural | |
| 10° | 0.174 | 0.1736 |
| 5° | 0.087 | 0.0872 |
| 3° | 0.0522 | 0.0523 |
| 2° | 0.0348 | 0.0349 |

En la tabla se ve que los cocientes $\frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \rightarrow 1$ a medida que $\alpha \rightarrow 0$.

Es decir:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \rightarrow \frac{0.348}{0.349} \rightarrow 1$$

$$\alpha \rightarrow 0$$

Ejemplos

Obtener el límite de las funciones en cada caso, si $x \rightarrow 0$.

a) $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

b) $f(x) = \frac{\text{sen } x^2}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x^2}{x^2} = 1 \quad \text{porque si } x \rightarrow 0, \quad x^2 \rightarrow 0$$

c) $f(x) = \frac{\text{sen } 5x}{5x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 5x}{5x} = 1 \quad \text{porque si } x \rightarrow 0, \quad 5x \rightarrow 0$$

$$d) f(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} 2x}{2 \times 5x} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} = \frac{2}{5} (1) = \frac{2}{5}$$

$$e) f(x) = \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x^3}{x^3} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3} \right) = (0)(1) = 0$$

Ejercicio X

Hallar el límite de cada una de las siguientes funciones, si $x \rightarrow 0$.

$$1. f(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}$$

$$2. f(x) = \frac{\operatorname{sen} x^3}{x^3}$$

$$3. f(x) = \frac{\operatorname{sen} ax}{ax}, \quad a = \text{constante}$$

$$4. f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{6x}$$

$$5. f(x) = \frac{\operatorname{sen} 6x}{2x}$$

$$6. f(x) = \frac{\operatorname{sen} ax}{bx} \quad a \text{ y } b \text{ son constantes}$$

$$7. f(x) = \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}$$

$$8. f(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x}$$

$$9. f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x^2}{4x^2}$$

$$10. f(x) = \frac{\operatorname{sen} 5x^3}{2x^2}$$

Segundo caso

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

parentemente el limite es 1, porque si $m \rightarrow \infty$, $\frac{1}{m} \rightarrow 0$, entonces tenemos $1 + 0 = 1$, lo que elevado a cualquier potencia sería 1.

Mas, si hacemos una sencilla tabulación como la que sigue, nos encontramos que lo expresado en el párrafo anterior es incorrecto.

| m | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------------------------------|---|----------------------|------------------------|--------------------------|
| $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ | 2 | $\frac{9}{4} = 2.25$ | $\frac{64}{27} = 2.37$ | $\frac{625}{256} = 2.44$ |

En la tabla puede observarse que cuando m crece indefinidamente y con la rapidez que se quiera, la potencia del binomio crece también, pero cada vez más lentamente, lo que nos indica que hay un limite para la potencia.

Desarrollando el binomio, tenemos:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &= 1^m + m \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2} \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \left(\frac{1}{m}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{m}\right)^m \end{aligned}$$

Simplificando resulta:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{m^2 - m}{2m^2} + \frac{1}{3!} \frac{(m-1)(m-2)}{m^2} + \dots + \left(\frac{1}{m}\right)^m$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) + \\ &+ \dots + \left(\frac{1}{m}\right)^m \dots \quad (1) \end{aligned}$$

que comparada con la serie e , es decir, con:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{m!} + \dots \quad (2)$$

se observa que cada término de la serie e es mayor que su correspondiente de la serie (1); veamos por ejemplo:

$$\frac{1}{2!} > \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

$$\frac{1}{3!} > \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

que así con los términos que siguen.

Luego, por grande que sea m , siempre será menor que el número e , suma de los términos de la llamada serie e , es decir que $e = 2.718 \dots$

Por tanto, se concluye:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

porque si el segundo término del binomio tiende a cero, es decir $m \rightarrow \infty$, entonces el exponente del binomio tiende a ∞ , es decir

$\frac{1}{m} \rightarrow 0$, por lo que se tiene la misma situación anterior.

Ejemplos

Obtener el límite de las funciones en cada caso:

$$\text{a) } f(x) = \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x}$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} = e$$

$$\text{b) } f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

porque si $x \rightarrow 0$, $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$

$$\text{c) } f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+2x)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = e^2$$

$$\text{d) } f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3x}}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \right]^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

$$c) f(x) = \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^5$$

$$x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^5 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{e}$$

$$x \rightarrow \infty$$

Ejercicio XI

Hallar el límite de las funciones en cada caso:

$$1. f(x) = \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^4$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$2. f(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$3. f(x) = (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$4. f(x) = (1 + ax)^{\frac{b}{x}}$$

$$x \rightarrow 0$$

a y b son constantes

$$5. f(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$6. f(x) = (1 + x^2)^{\frac{2}{x}}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$7. f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

$$x \rightarrow 0$$

$$8. f(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$9. f(x) = \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$10. f(x) = \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x$$

$$x \rightarrow \infty$$

7.3. Derivadas de las funciones trigonométricas

A. Funciones trigonométricas directas

1. Derivada del seno

Siendo $y = \text{sen } \mu$ donde $\mu = f(x)$

Por la regla general, se tiene:

$$\text{I. } y + \Delta y = \text{sen } (\mu + \Delta\mu)$$

$$\text{II. } \Delta y = \text{sen } (\mu + \Delta\mu) - \text{sen } \mu$$

Aplicando la relación trigonométrica que establece

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \cos \frac{1}{2} (A + B) \text{sen } \frac{1}{2} (A - B)$$

resulta

$$\Delta y = 2 \cos \frac{1}{2} (\mu + \Delta\mu + \mu) \text{sen } \frac{1}{2} (\mu + \Delta\mu - \mu)$$

es decir,

$$\Delta y = 2 \cos \left(\mu + \frac{1}{2} \Delta\mu \right) \text{sen } \frac{1}{2} \Delta\mu$$

$$\text{III. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cos \left(\mu + \frac{1}{2} \Delta\mu \right) \frac{\text{sen } \frac{1}{2} \Delta\mu}{\Delta x}$$

luego, multiplicando numerador y denominador por $\frac{1}{2} \Delta\mu$, se obtiene,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos \left(\mu + \frac{1}{2} \Delta\mu \right) = \frac{\text{sen } \frac{1}{2} \Delta\mu}{\frac{1}{2} \Delta\mu} \frac{\Delta\mu}{\Delta x}$$

$$\text{IV. } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(\mu + \frac{1}{2} \Delta \mu \right) \right] \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \frac{1}{2} \Delta \mu}{\frac{1}{2} \Delta \mu} \right] \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \mu}{\Delta x} \right]$$

pero

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(\mu + \frac{1}{2} \Delta \mu \right) = \cos \mu \quad (1)$$

porque si $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta \mu \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \frac{1}{2} \Delta \mu}{\frac{1}{2} \Delta \mu} = 1 \quad (2)$$

por lo visto en el artículo 7.2

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \mu}{\Delta x} = \frac{d\mu}{dx} \quad (3) \quad \text{por definición de derivada.}$$

Entonces, sustituyendo (1), (2) y (3) en IV, resulta:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \cos \mu \frac{d\mu}{dx}}$$

que también podemos escribir así:

$$\boxed{\frac{d}{dx} (\text{sen } \mu) = \cos \mu \frac{d\mu}{dx}}$$

2. Derivada del coseno

Siendo $y = \cos \mu$ donde $\mu = f(x)$,

como $\cos \mu = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \mu \right)$ porque el coseno de un ángulo es igual al seno de su complemento, se tiene:

$$\frac{d}{dx} \cos \mu = \frac{d}{dx} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \mu \right)$$

es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \mu \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} - \mu \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \mu \right) \frac{d}{dx} (-\mu)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - \mu \right) \frac{d\mu}{dx}$$

pero

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \mu \right) = \operatorname{sen} \mu$$

luego

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} \mu \frac{d\mu}{dx}}$$

que también podemos escribir:

$$\boxed{\frac{d}{dx} (\cos \mu) = -\operatorname{sen} \mu \frac{\mu}{dx}}$$

Derivada de la tangente

Siendo $y = \operatorname{tg} \mu$ donde $\mu = f(x)$

como $\operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{sen} \mu}{\cos \mu}$

la función se transforma en

$$y = \frac{\operatorname{sen} \mu}{\cos \mu}$$

Aplicando la fórmula

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\mu}{v} \right) = \frac{v \frac{d\mu}{dx} - \mu \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \mu \frac{d}{dx} \operatorname{sen} \mu - \operatorname{sen} \mu \frac{d}{dx} \cos \mu}{\cos^2 \mu}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos \mu \cos \mu + \operatorname{sen} \mu \operatorname{sen} \mu) \frac{d\mu}{dx}}{\cos^2 \mu}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos^2 \mu + \operatorname{sen}^2 \mu) \frac{d\mu}{dx}}{\cos^2 \mu}$$

Por la relación trigonométrica que establece:

$$\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A = 1, \text{ se tiene}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \mu} \frac{d\mu}{dx}$$

es decir

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \sec^2 \mu \frac{d\mu}{dx}}$$

o sea

$$\boxed{\frac{d}{dx} \operatorname{tg} \mu = \sec^2 \mu \frac{d\mu}{dx}}$$

4. Derivada de la cotangente

Siendo $y = \operatorname{ctg} \mu$ donde $\mu = f(x)$

$$\text{como } \operatorname{ctg} \mu = \frac{\cos \mu}{\operatorname{sen} \mu}$$

$$y = \frac{\cos \mu}{\operatorname{sen} \mu}$$

entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} \mu \frac{d}{dx} \cos \mu - \cos \mu \frac{d}{dx} \operatorname{sen} \mu}{\operatorname{sen}^2 \mu}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[\operatorname{sen} \mu (-\operatorname{sen} \mu) - \cos \mu \cos \mu] \frac{d\mu}{dx}}{\operatorname{sen}^2 \mu}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-\operatorname{sen}^2 \mu - \cos^2 \mu) \frac{d\mu}{dx}}{\operatorname{sen}^2 \mu}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{(\operatorname{sen}^2 \mu + \cos^2 \mu) \frac{d\mu}{dx}}{\operatorname{sen}^2 \mu}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \mu} \frac{d\mu}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\operatorname{csc}^2 \mu \frac{d\mu}{dx}}$$

o sea

$$\boxed{\frac{d}{dx} \operatorname{ctg} \mu = -\operatorname{csc}^2 \mu \frac{d\mu}{dx}}$$

5. Derivada de la secante

Siendo $y = \sec \mu$ donde $\mu = f(x)$

como $\sec \mu = \frac{1}{\cos \mu}$

la función se transforma en

$$y = \frac{1}{\cos \mu}$$

Aplicando la fórmula correspondiente:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\mu}{v} \right) = \frac{v \frac{d\mu}{dx} - \mu \frac{dv}{dx}}{v^2}, \text{ resulta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos \mu \frac{d}{dx} (1) - (1) \frac{d}{dx} (\cos \mu)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \mu}{\cos^2 \mu}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(-\operatorname{sen} \mu) \frac{d\mu}{dx}}{\cos^2 \mu}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} \mu}{\cos \mu} \frac{d\mu}{dx}$$

es decir

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \mu \sec \mu \frac{d\mu}{dx}}$$

o sea

$$\boxed{\frac{d}{dx} (\sec \mu) = \operatorname{tg} \mu \sec \mu \frac{d\mu}{dx}}$$

6. Derivada de la cosecante

Siendo $y = \csc \mu$ donde $\mu = f(x)$

como $\csc \mu = \frac{1}{\operatorname{sen} \mu}$

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen} \mu}$$

entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos \mu}{\operatorname{sen}^2 \mu} \frac{d\mu}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos \mu}{\operatorname{sen} \mu \operatorname{sen} \mu} \frac{d\mu}{dx}$$

es decir

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \mu \csc \mu \frac{d\mu}{dx}}$$

o sea

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\csc \mu) = -\operatorname{ctg} \mu \csc \mu \frac{d\mu}{dx}}$$

Formulario

$$\text{I. } \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} \mu) = \cos \mu \frac{d\mu}{dx}$$

$$\text{II. } \frac{d}{dx}(\cos \mu) = -\operatorname{sen} \mu \frac{d\mu}{dx}$$

$$\text{III. } \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} \mu) = \sec^2 \mu \frac{d\mu}{dx}$$

$$\text{IV. } \frac{d}{dx} (\text{ctg } \mu) = -\text{csc}^2 \mu \frac{d\mu}{dx}$$

$$\text{V. } \frac{d}{dx} (\sec \mu) = \text{tg } \mu \sec \mu \frac{d\mu}{dx}$$

$$\text{VI. } \frac{d}{dx} (\csc \mu) = -\text{ctg } \mu \csc \mu \frac{d\mu}{dx}$$

Ejemplos

Obtener la derivada de las funciones siguientes:

$$1. \quad y = 3 \cos 5x$$

Aplicando la fórmula $\frac{d}{dx} (cv) = c \frac{dv}{dx}$,

se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = 3 \frac{d}{dx} \cos 5x$$

Por la fórmula II resulta:

$$\frac{dy}{dx} = 3(-\text{sen } 5x) \frac{d}{dx} (5x)$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = 3(-\text{sen } 5x) 5$$

$$\frac{dy}{dx} = -15 \text{ sen } 5x$$

$$2. \quad y = \frac{\operatorname{sen}^2 ax}{2}$$

Aplicando la fórmula $\frac{d}{dx} \left(\frac{\mu}{c} \right) = \frac{d\mu}{c}$

resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 ax}{2} \right)$$

es decir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \operatorname{sen} ax}{2} \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} ax)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} ax \cos ax}$$

$$3. \quad y = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$$

Aplicando la fórmula $\frac{d}{dx} \left(\frac{\mu}{v} \right) = \frac{v \frac{d\mu}{dx} - \mu \frac{dv}{dx}}{v^2}$

resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tg} x \times \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \frac{d}{dx} \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tg} x \cos x - \operatorname{sen} x \sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$$

Escribiendo la tangente y la secante en función del seno y el coseno se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec x}{\cos x} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} \frac{1}{\cos^2 x}$$

Multiplicando numerador y denominador por $\cos^2 x$, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x (\cos^2 x - 1)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

pero como $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ y $\cos^2 x - 1 = -\operatorname{sen}^2 x$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x (-\operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} x}$$

4. $y = \sqrt{\cos 2x}$

Aplicando la fórmula $\frac{d}{dx}(\sqrt{\mu}) = \frac{d\mu}{2\sqrt{\mu}}$

se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cos 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\operatorname{sen} 2x \frac{d}{dx}(2x)}{2\sqrt{\cos 2x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos 2x}}}$$

Ejercicio XII

Hallar la derivada de las funciones siguientes:

1. $y = \sec 4x$

2. $y = \operatorname{sen} 3t$

3. $y = \operatorname{csc} bx$

4. $y = 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$

5. $\sqrt[3]{\operatorname{tg} 3x}$

6. $y = \frac{4}{\sqrt{\sec x}}$

7. $y = x \cos x$

8. $y = \operatorname{tg} x - x$

9. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

10. $y = \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x$

11. $y = 4 \operatorname{sen} 5x$

12. $y = 3 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$

13. $y = \frac{\cos^3 x}{3}$

14. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x+1}$

15. $y = \operatorname{sen}^3 x + 1$

B. Funciones trigonométricas inversas**Generalidades**

Consideremos que

$$\text{si } y = \text{arc sen } \mu$$

por lo tanto

$$\mu = \text{sen } y$$

arc sen μ representa el ángulo cuyo seno es μ , donde μ está expresado en radianes.

Análogamente:

$$\text{Si } y = \text{arc cos } \mu \quad \text{por lo tanto} \quad \mu = \text{cos } y$$

$$y = \text{arc tg } \mu \quad \text{por lo tanto} \quad \mu = \text{tg } y$$

$$y = \text{arc ctg } \mu \quad \text{por lo tanto} \quad \mu = \text{ctg } y$$

$$y = \text{arc sec } \mu \quad \text{por lo tanto} \quad \mu = \text{sec } y$$

$$y = \text{arc csc } \mu \quad \text{por lo tanto} \quad \mu = \text{csc } y$$

Ambas expresiones de la lista anterior son equivalentes.

Además debemos tener en cuenta que, por ejemplo, para el caso del seno los ángulos suplementarios y lo que difieren en 2π tienen el mismo valor; por lo que **arc sen μ** corresponde a un número infinito de ángulos. Algo semejante ocurre con las demás funciones.

En conclusión, el signo de la derivada depende del ángulo.

1. Derivada de arco seno

Siendo $y = \text{arc sen } \mu$ donde $\mu = f(x)$,

como $\mu = \text{sen } y$

derivando μ con respecto a x , se tiene:

$$\frac{d\mu}{dx} = \text{cos } y \frac{dy}{dx}$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\mu}{\cos y}$$

pero $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$

entonces

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} \quad y \quad \sin y = \mu$$

por lo que sustituyendo se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}}$$

o sea

$$\frac{d}{dx}(\text{arc sen } \mu) = \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}}$$

Derivada de arco coseno

Siendo $y = \text{arc cos } \mu$ donde $\mu = f(x)$,

como $\mu = \cos y$

derivando, se tiene:

$$\frac{d\mu}{dx} = -\sin y \frac{dy}{dx}$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d\mu}{\sin y}$$

pero sen $y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$ y $\cos y = \mu$

resulta:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{d\mu}{1 - \mu^2}$$

es decir,

$$\boxed{\frac{d}{dx} (\text{arc cos } \mu) = - \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}}}$$

3. Derivada de arco tangente

Siendo $y = \text{arc tg } \mu$ donde $\mu = f(x)$

como $\mu = \text{tg } y$

derivando se tiene:

$$\frac{d\mu}{dx} = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\mu}{\sec^2 y}$$

pero

$$\sec^2 y - \text{tg}^2 y = 1,$$

entonces

$$\sec^2 y = 1 + \text{tg}^2 y \quad \text{y} \quad \text{tg } y = \mu$$

Sustituyendo resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\mu}{1 + \mu^2}$$

o sea

$$\frac{d}{dx} (\text{arc tg } \mu) = \frac{d\mu}{1 + \mu^2}$$

Derivada de arco cotangente

Siendo $y = \text{arc ctg } \mu$ donde $\mu = f(x)$

como

$$\mu = \text{ctg } y$$

derivando se tiene:

$$\frac{d\mu}{dx} = -\text{csc}^2 y \frac{dy}{dx}$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d\mu}{\text{csc}^2 y}$$

pero

$$\text{csc}^2 y - \text{ctg}^2 y = 1,$$

entonces

$$\text{csc}^2 y = 1 + \text{ctg}^2 y \quad \text{y} \quad \text{ctg } y = \mu$$

Sustituyendo resulta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d\mu}{1 + \mu^2}$$

o sea

$$\frac{dy}{dx} (\text{arc ctg } \mu) = - \frac{d\mu}{1 + \mu^2}$$

5. Derivada de arco secante

Siendo $y = \text{arc sec } \mu$ donde $\mu = f(x)$
como

$$\mu = \sec y$$

derivando, se tiene:

$$\frac{d\mu}{dx} = \sec y \operatorname{tg} y \frac{dy}{dx}$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\mu}{\sec y \operatorname{tg} y}$$

Como $\sec^2 y - \operatorname{tg}^2 y = 1$, entonces

$$\operatorname{tg} y = \sqrt{\sec^2 y - 1} \quad \text{y} \quad \sec y = \mu$$

Sustituyendo resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\mu}{\mu \sqrt{\mu^2 - 1}}$$

6. Derivada de arco cosecante

Siendo $y = \text{arc csc } \mu$ donde $\mu = f(x)$

como

$$\mu = \text{csc } y$$

derivando respecto a x , se tiene:

$$\frac{d\mu}{dx} = -\text{csc } y \text{ ctg } y \frac{dy}{dx}$$

pero $\text{csc}^2 y - \text{ctg}^2 y = 1$, entonces

$$\text{ctg } y = \sqrt{\text{csc}^2 y - 1} \quad \text{y} \quad \text{csc } y = \mu$$

Sustituyendo, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d\mu}{dx}}{\mu\sqrt{\mu^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx} (\text{arc csc } \mu) = -\frac{\frac{d\mu}{dx}}{\mu\sqrt{\mu^2 - 1}}$$

Formulario

$$\text{VII. } \frac{d}{dx} (\text{arc sen } \mu) = \frac{\frac{d\mu}{dx}}{1 - \mu^2}$$

$$\text{VIII. } \frac{d}{dx} (\text{arc cos } \mu) = - \frac{d\mu}{1 - \mu^2}$$

$$\text{IX. } \frac{d}{dx} (\text{arc tg } \mu) = \frac{d\mu}{1 + \mu^2}$$

$$\text{X. } \frac{d}{dx} (\text{arc ctg } \mu) = - \frac{d\mu}{1 + \mu^2}$$

$$\text{XI. } \frac{d}{dx} (\text{arc sec } \mu) = \frac{d\mu}{\mu \sqrt{\mu^2 - 1}}$$

$$\text{XII. } \frac{d}{dx} (\text{arc csc } \mu) = - \frac{d\mu}{\mu \sqrt{\mu^2 - 1}}$$

Ejemplos

Obtener la derivada de las funciones siguientes:

$$1. \quad y = \text{arc tg } ax \quad \mu = ax^2$$

Por la fórmula IX, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (ax^2) \\ \frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{1 + (ax^2)^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{1 + a^2 x^2}}$$

$$2. \quad y = \text{arc sen } (3x - 4x^2), \quad \mu = 3x - 4x^2$$

Por la fórmula VII, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (3x - 4x^2)$$

$$1 - (3x - 4x^2)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 8x}{1 - (9x^2 - 24x^3 + 16x^4)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 8x}{1 - 9x^2 + 24x^3 - 16x^4}$$

$$3. \quad y = \text{arc sec } \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}, \quad \mu = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Aplicando la fórmula XI, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - 1) \frac{d}{dx} (x^2 + 1) - (x^2 + 1) \frac{d}{dx} (x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - 1)2x - (x^2 + 1)2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(x^2 - 1 - x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \left[\frac{(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1)^2}{(x^2 - 1)^2} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{(x^2 - 1)^2} \left[\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \cdot x^4 + 2x^2 + 1 - x^4 + 2x^2 - 1 \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{(x^2 - 1)^2} \left[\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \cdot 4x^2 \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{2x(x^2 + 1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2 + 1}$$

$$4. \quad y = \text{arc cos } \frac{x}{2}, \quad \mu = \frac{x}{2}$$

Aplicando la fórmula VIII, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{d \left(\frac{x}{2} \right)}{1 - \mu^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{2} \frac{1}{4 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{2} \frac{1}{4 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{4 - x^2}$$

$$5. \quad y = \text{arc sec } 3x, \quad \mu = 3x$$

Por fórmula XI se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (3x) \frac{1}{3x \sqrt{9x^2 - 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{3x \sqrt{9x^2 - 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \sqrt{9x^2 - 1}}$$

Ejercicio XIII

Hallar la derivada de las funciones siguientes:

1. $y = \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{a}$

2. $y = \operatorname{arc\,sen} (x - 1)$

3. $y = \operatorname{arc\,cos} \left(1 - \frac{x}{2} \right)$

4. $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{3x}{2}$

5. $y = \operatorname{arc\,ctg} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

6. $y = \operatorname{arc\,csc} 5x$

7. $y = \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{2}$

8. $y = \operatorname{arc\,cos} \sqrt{x}$

9. $y = \operatorname{arc\,tg} (x - 1)$

10. $y = \operatorname{arc\,cos} (x - 2)$

11. $y = x \operatorname{arc\,tg} 2x$

12. $y = \operatorname{arc\,sen} x^2$

13. $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$

14. $y = \operatorname{arc\,csc} x^2$

4. Derivadas de las funciones logarítmicas y exponenciales

Generalidades

Sea a una constante y $\mu = f(x)$, a^μ es una función exponencial.

Si μ es una fracción, debemos entender que a^μ es la raíz positiva.

Ejemplos

a^x, a^{2x-1} son funciones exponenciales.

Además, si $y = a^\mu$ donde $\mu = f(x)$

entonces $\mu = \log_a y$.

Si la base es e , tendremos logaritmos naturales o neperianos.

Entonces:

Si $y = e^\mu$ donde $\mu = f(x)$ $\mu = \ln y$

Derivadas de las funciones logarítmicas

Siendo $y = \log_a \mu$ donde $\mu = f(x)$

derivando por la regla general, se tiene:

$$(I) \quad y + \Delta y = \log_a (\mu + \Delta\mu)$$

$$(II) \quad \Delta y = \log_a (\mu + \Delta\mu) - \log_a \mu$$

Aplicando la fórmula

$$\log A - \log B = \log \frac{A}{B},$$

resulta:

$$\Delta y = \log_a \left(\frac{\mu + \Delta\mu}{\mu} \right)$$

por lo tanto

$$\Delta y = \log_a \left(1 + \frac{\Delta\mu}{\mu} \right)$$

$$(III) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta\mu}{\mu} \right)}{\Delta x}$$

Multiplicando numerador y denominador por $\frac{\Delta\mu}{\mu}$, se obtiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta\mu}{\mu} \right)}{\frac{\Delta\mu}{\mu} \Delta x} \cdot \frac{\Delta\mu}{\mu}$$

es decir

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta\mu}{\mu} \right)}{\frac{\Delta\mu}{\mu}} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\Delta\mu}{\Delta x}$$

luego

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mu}{\Delta\mu} \log_a \left(1 + \frac{\Delta\mu}{\mu} \right) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\Delta\mu}{\Delta x}$$

Aplicando la fórmula $\eta \log A = \log A^\eta$, resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta \mu}{\mu} \right)^{\frac{\mu}{\Delta \mu}} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\Delta \mu}{\Delta x}$$

$$(IV) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta \mu}{\mu} \right)^{\frac{\mu}{\Delta \mu}} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\Delta \mu}{\Delta x}$$

pero, por lo estudiado en el artículo 7.2, se tiene que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta \mu}{\mu} \right)^{\frac{\mu}{\Delta \mu}} = \log_a e,$$

la expresión (IV) se transforma en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_a e}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx}$$

o sea

$$\frac{d}{dx} (\log_a \mu) = \frac{\log_a e}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx}$$

2. Siendo $y = \ln \mu$ donde $\mu = f(x)$

como $\ln \mu = \log_e \mu$, entonces

$$y = \log_e \mu$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_e e}{\mu} \frac{d\mu}{dx}$$

es decir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx}$$

por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\mu}{\mu}$$

o sea

$$\frac{d}{dx} (\ln \mu) = \frac{d\mu}{\mu}$$

B. Derivadas de las funciones exponenciales

1. Siendo $y = a^\mu$ donde $\mu = f(x)$

tomando logaritmos naturales se tiene:

$$\ln y = \mu \ln a$$

Derivando con respecto a x , resulta:

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{d\mu}{dx} \ln a \quad \text{porque } \ln a \text{ es constante}$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a \frac{d\mu}{dx}$$

por lo tanto

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a^\mu \ln a \frac{d\mu}{dx}}$$

o sea

$$\boxed{\frac{d}{dx} (a^\mu) = a^\mu \ln a \frac{d\mu}{dx}}$$

2. Siendo $y = e^{\mu}$ donde $\mu = f(x)$

aplicando la fórmula anterior, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\mu} \ln e \frac{d\mu}{dx}$$

como $\ln e = 1$

luego

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = e^{\mu} \frac{d\mu}{dx}}$$

o sea

$$\boxed{\frac{d}{dx} (e^{\mu}) = e^{\mu} \frac{d\mu}{dx}}$$

Formulario

$$\text{XIII. } \frac{d}{dx} (\log_a \mu) = \frac{\log_a e}{\mu} \frac{d\mu}{dx}$$

$$\text{XIV. } \frac{d}{dx} (\ln \mu) = \frac{d\mu}{\mu dx}$$

$$\text{XV. } \frac{d}{dx} (a^{\mu}) = a^{\mu} \ln a \frac{d\mu}{dx}$$

$$\text{XVI. } \frac{d}{dx} (e^{\mu}) = e^{\mu} \frac{d\mu}{dx}$$

Ejemplos

Obtener la derivada de las funciones siguientes:

$$1. \quad y = \log_a 3x, \quad \mu = 3x$$

$$\frac{dy}{dx} = \log_a e \cdot \frac{d}{dx} (3x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \log_a e}{3x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\log_a e}{x}}$$

$$2. \quad y = \log(5x + 2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{5x + 2} \cdot \frac{d}{dx} (5x + 2)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{5 \log e}{5x + 2}}$$

$$3. \quad y = 10^{2x-1} \quad \mu = 2x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 10^{2x-1} \ln 10 \cdot \frac{d}{dx} (2x - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (2) 10^{2x-1} \ln 10$$

$$4. \quad y = e^{-x} \quad \mu = \sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}$$

$$5. \quad y = e^{\operatorname{sen} x} \quad \mu = \operatorname{sen} x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = e^{\operatorname{sen} x} \cos x}$$

Ejercicio XIV

Hallar la derivada de las funciones siguientes:

$$1. \quad y = \ln(x^2 + a)$$

$$2. \quad y = a^{3x^2}$$

$$3. \quad y = be^{x^2+x^2}$$

$$4. \quad y = e^{\cos x}$$

$$5. \quad y = \ln(x^2 - 2x + 1)$$

$$6. \quad y = \ln(x^2 - 4x + 4)$$

$$7. \quad y = \ln \sec^2 x$$

$$8. \quad y = \log \frac{2x}{1+x}$$

$$9. \quad y = a^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$$

$$10. \quad y = \log(x^2 - 2x)$$

$$11. \quad y = e^{x^2}$$

$$12. \quad y = a^{2x}$$

$$13. \quad y = a^{2x-1}$$

$$14. \quad y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

$$15. \quad y = \ln^3 x$$

$$16. \quad y = \ln(ax^2 + b)$$

$$17. \quad y = \ln(ax^2 + b)^2$$

$$18. \quad y = \frac{\operatorname{sen} x}{e^x}$$

$$19. \quad y = 10^{ax+b}$$

$$20. \quad y = \operatorname{tg} e^x$$

Capítulo VIII

Diferenciales

8.1. Generalidades

La derivada de $y = f(x)$ es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

Como hemos visto en el Capítulo III, artículo 3.4, el símbolo $\frac{dy}{dx}$ no se debe considerar una fracción ordinaria en la que **dy** es el **numerador** y **dx** el **denominador**, sino que en rigor representa un límite, es decir:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

En conclusión, la diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente.

8.3. Fórmulas de las diferenciales de funciones algebraicas

De acuerdo con lo estudiado en el artículo anterior, resulta el formulario siguiente:

I. Diferencial de una constante

$$\text{Si } \frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$d(x) = 0 \quad \text{I}$$

II. Diferencial de una variable con respecto a sí misma

$$\text{Si } \frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$d(x) = dx \quad \text{II}$$

III. Diferencial de una suma de funciones

$$\text{Si } \frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v) - \frac{d}{dx}(w)$$

$$d(u + v - w) = du + dv - dw \quad \text{III}$$

IV. Diferencial del producto de una constante por una función

$$\text{Si } \frac{d}{dx}(cv) = c \frac{d}{dx}(v)$$

$$d(cv) = cdv \quad \text{IV}$$

V. Diferencial del producto de dos funciones

$$\text{Si } \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$d(uv) = u dv + v du \quad \text{V}$$

VI. Diferencial del producto de un número fijo de funciones

$$\text{Si } \frac{d}{dx}(v_1 v_2 v_3 \dots v_n) = (v_2 v_3 \dots v_n) \frac{dv_1}{dx} + (v_1 v_3 \dots v_n) \frac{dv_2}{dx} +$$

$$+ \dots + (v_1 v_2 v_3 \dots v_{n-1}) \frac{dv_n}{dx}$$

$$d(v_1 v_2 v_3 \dots v_n) = (v_2 v_3 \dots v_n) dv_1 + (v_1 v_3 \dots v_n) dv_2 +$$

$$+ \dots + (v_1 v_2 v_3 \dots v_{n-1}) dv_n \quad \text{VI}$$

VII. Diferencial de una función con exponente constante

$$\text{Si } \frac{d}{dx}(v^n) = n v^{n-1} \frac{dv}{dx}$$

$$d(v^n) = n v^{n-1} dv \quad \text{VII}$$

Caso particular

$$\text{Si } \frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1} \frac{dx}{dx}$$

$$d(x^n) = n x^{n-1} dx \quad \text{VIII}$$

IX. Diferencial de un cociente de funciones

$$\text{Si } \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$d \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad \text{IX}$$

X. Diferencial del cociente de una función entre una constante

$$\text{Si } \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{c} \right) = \frac{du}{c}$$

$$d \left(\frac{u}{c} \right) = \frac{du}{c} \quad \text{X}$$

XI. Diferencial de la raíz cuadrada de una función

$$\text{Si } \frac{d}{dx} (\sqrt{u}) = \frac{1}{2} \frac{du}{u}$$

$$d(\sqrt{u}) = \frac{1}{2} \frac{du}{u} \quad \text{XI}$$

Caso particular

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \frac{dx}{x}$$

$$d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \frac{dx}{x}$$

es decir

$$d\left(\frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{2-x} \quad \text{XII}$$

porque $dx = 1$

8.4. Obtención de diferenciales de funciones algebraicas

Mediante la aplicación de las fórmulas anteriores podemos obtener las diferenciales de las funciones algebraicas.

Ejemplos

Hallar la diferencial de cada una de las funciones siguientes:

1. $y = x^2 - 2x$

Por las fórmulas III, VIII y IV resulta

$$dy = (2x - 2) dx$$

2. $y = x^3 - 2x - 5$

Por las fórmulas III, VIII, IV y I resulta

$$dy = (3x^2 - 2) dx$$

3. $y = \frac{2}{x}$

Transformando la función en un producto tenemos

$$y = 2x^{-1}$$

Por las fórmulas IV y VIII resulta

$$dy = -2x^{-2}$$

Transformando tenemos

$$dy = -\frac{2}{x^2} dx$$

4. $y = \frac{1}{x}$

Transformando tenemos

$$y = \frac{1}{x^2}$$

o sea

$$y = x^{-2}$$

Por la fórmula VIII resulta

$$dy = -\frac{1}{2} x^{-2-1} dx$$

Transformando tenemos

$$dy = -\frac{1}{2} x^{-3} dx$$

$$dy = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3} dx$$

$$dy = -\frac{1}{2x^3} dx$$

$$5. \quad y = 4x(x - 2)$$

Por la fórmula V resulta

$$dy = 4x d(x - 2) + (x - 2) d(4x)$$

$$dy = 4x dx + (x - 2) 4 dx$$

$$dy = 4x dx + 4x dx - 8 dx$$

$$dy = (8x - 8) dx$$

$$6. \quad \frac{x + 1}{x - 1}$$

Por la fórmula IX

$$dy = \frac{(x - 1) d(x + 1) - (x + 1) d(x - 1)}{(x - 1)^2}$$

$$dy = \frac{(x - 1)(1) - (x + 1)(1)}{(x - 1)^2} dx$$

$$dy = \frac{x - 1 - x - 1}{(x - 1)^2} dx$$

$$dy = \frac{-2}{(x - 1)^2} dx$$

$$dy = -\frac{2 dx}{(x - 1)^2}$$

$$7. \quad y = 3x - 5$$

Por la fórmula XI

$$dy = \frac{1}{2} \frac{1}{3x - 5} d(3x - 5)$$

$$dy = \frac{1}{2} \frac{1}{3x - 5} (3dx)$$

$$dy = \frac{3dx}{2(3x - 5)}$$

$$8. \quad y = (ax + b)^2 \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son constantes}$$

Por la fórmula VII tenemos

$$dy = 2(ax + b) d(ax + b)$$

$$dy = 2(ax + b)^2 (adx)$$

$$dy = 2a(ax + b)^2 dx$$

$$9. \quad y = ax^2 + bx + c \text{ donde } a, b \text{ y } c \text{ son constantes}$$

Por la fórmula III tenemos

$$dy = d(ax^2) + d(bx) + d(c)$$

Aplicando las fórmulas correspondientes a cada sumando resulta

$$dy = (2ax + b)dx$$

$$10. y = x + \frac{2}{x}$$

Transformando tenemos

$$y = x + 2x^{-1}$$

Aplicando la fórmula III tenemos

$$dy = d(x) + d(2x^{-1})$$

$$dy = \left(1 - 2x^{-2}\right) dx$$

Transformando resulta

$$dy = \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) dx$$

$$11. y = a^2 + x^2 \quad \text{donde } a \text{ es constante}$$

Aplicando la fórmula XI tenemos

$$dy = \frac{1}{2(a^2 + x^2)} d(a^2 + x^2)$$

$$dy = \frac{1}{2(a^2 + x^2)} (2x dx)$$

$$dy = \frac{2x}{2(a^2 + x^2)} dx$$

$$dy = \frac{x}{a^2 + x^2} dx$$

Ejercicio XV

Obtener la diferencial de las funciones siguientes:

1. $y = x^2 - 2x + 6$

2. $y = x^5 + x^4 - x^3$

3. $y = \frac{3}{x^2}$

4. $y = 5x$

5. $y = 2x(x - 1)$

6. $y = \frac{1+x}{1-x}$

7. $y = (2x + 5)(3x - 2)$

8. $y = \frac{2}{2x}$

9. $y = \sqrt{2x - 1}$

10. $y = (x - 1)^3$

11. $y = (ax - b)^2$ donde **a** y **b** son constantes

12. $y = (ax - 2)(bx - 1)$ donde **a** y **b** son constantes

13. $y = \frac{x+a}{x-a}$ donde **a** es constante

14. $y = \frac{1}{2x}$

15. $y = ax - b$ donde **a** y **b** son constantes

16. $y = x^2 \cdot a^2 - x^2$ donde a es constante

17. $y = \frac{a - x}{a + x}$ donde a es constante

18. $y = -x^3 + x^2 - x$

19. $y = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$ donde a es constante

20. $y = a^2 - bx + c$ donde a y b son constantes

21. $x^2 + y^2 = 1$

22. $2x^2 - 3xy + 4y^2 = 10$

23. $x^3 - 3xy + 2y^2 = 20$

24. $x^2 - 2xy + y^2 = 0$

25. $x^2 + y^2 = a$ donde a es constante

8.5. Fórmulas de diferenciales de funciones trascendentes

Con un razonamiento análogo al que hicimos con las funciones algebraicas, podemos establecer el formulario para las funciones trascendentes.¹

¹ Se continúa con números romanos la numeración de las diferenciales de funciones trascendentes.

R. Trigonómicas directas

XIII. Diferencial del seno

$$\text{Si } \frac{d}{dx} (\text{sen } u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$d(\text{sen } u) = \cos u \, du \quad \text{XIII}$$

XIV. Diferencial del coseno

$$\text{Si } \frac{d}{dx} (\cos u) = -\text{sen } u \frac{du}{dx}$$

$$d(\cos u) = -\text{sen } u \, du \quad \text{XIV}$$

XV. Diferencial de la tangente

$$\text{Si } \frac{d}{dx} (\text{tg } u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$d(\text{tg } u) = \sec^2 u \, du \quad \text{XV}$$

XVI. Diferencial de la cotangente

$$\text{Si } \frac{d}{dx} (\text{ctg } u) = -\text{csc}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$d(\text{ctg } u) = -\text{csc}^2 u \, du \quad \text{XVI}$$

XVII. Diferencial de la secante

$$\text{Si } \frac{d}{dx} (\sec u) = \text{tg } u \sec u \frac{du}{dx}$$

$$d(\sec u) = \text{tg } u \sec u \, du \quad \text{XVII}$$

XVIII. Diferencial de la cosecante

$$\text{Si } \frac{d}{dx} (\csc u) = -\operatorname{ctg} u \csc u \frac{du}{dx}$$

$$d(\csc u) = -\operatorname{ctg} u \csc u du \quad \text{XVIII}$$

B. Trigonómicas inversas

XIX. Diferencial de arc sen

$$\text{Si } \frac{d}{dx} (\operatorname{arc} \operatorname{sen} u) = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$d(\operatorname{arc} \operatorname{sen} u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{XIX}$$

XX. Diferencial de arc cos

$$\text{Si } \frac{d}{dx} (\operatorname{arc} \operatorname{cos} u) = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$d(\operatorname{arc} \operatorname{cos} u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{XX}$$

XXI. Diferencial de arc tg

$$\text{Si } \frac{d}{dx} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} u) = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

$$d(\operatorname{arc} \operatorname{tg} u) = \frac{du}{1+u^2} \quad \text{XXI}$$

XXII. Diferencial de arc ctg

$$\text{Si } \frac{d}{dx} (\text{arc ctg } u) = -\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

$$d(\text{arc ctg } u) = -\frac{du}{1+u^2} \quad \text{XXII}$$

XXIII. Diferencial de arc sec

$$\text{Si } \frac{d}{dx} (\text{arc sec } u) = \frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$d(\text{arc sec } u) = \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} \quad \text{XXIII}$$

XXIV. Diferencial de arc csc

$$\text{Si } \frac{d}{dx} (\text{arc csc } u) = -\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$d(\text{arc csc } u) = -\frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} \quad \text{XXIV}$$

C. Logarítmicas

XXV. Si $\frac{d}{dx} (\log_a u) = \frac{\log_a e}{u} \frac{du}{dx}$ donde $u = f(x)$, a y e constantes²

$$d(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u} du \quad \text{XXV}$$

² $e = 2.718\dots$, es la base de los logaritmos naturales, como vimos en el artículo 7.2, Capítulo VII.

$$\text{XXVI. Si } \frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{du}{u}$$

$$d(\ln u) = \frac{du}{u} \quad \text{XXVI}$$

D. Exponenciales

$$\text{XXVII. Si } \frac{d}{dx} (a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$d(a^u) = a^u \ln a \, du \quad \text{XXVII}$$

$$\text{XXVIII. Si } \frac{d}{dx} (e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

$$d(e^u) = e^u \, du \quad \text{XXVIII}$$

8.6. Obtención de diferenciales de funciones trascendentes

Mediante la aplicación de las fórmulas anteriores podemos obtener las diferenciales de las funciones trascendentes.

Ejemplos

Hallar la diferencial de cada una de las funciones que siguen:

1. $y = \text{sen } 5x$

Por la fórmula XIII se tiene:

$$d(\operatorname{sen} 5x) = \cos 5x d(5x)$$

$$d(\operatorname{sen} 5x) = 5 \cos 5x dx$$

porque $d(5x) = 5dx$

2. $y = \operatorname{tg}^3 x$

Por la fórmula VII

$$d(\operatorname{tg}^3 x) = 3 \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x)$$

$$d(\operatorname{tg}^3 x) = 3 \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x dx$$

porque de acuerdo con la fórmula XIV

$$d(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x dx$$

3. $y = a^{3x+1}$

Por la fórmula XXVII

$$d(a^{3x+1}) = a^{3x+1} \ln a d(3x+1)$$

pero de acuerdo con las fórmulas III, IV y I

$$d(3x+1) = 3dx$$

luego

$$d(a^{3x+1}) = 3a^{3x+1} \ln a dx$$

4. $y = \ln(ax + b)$ donde a y b son constantes

Por la fórmula XXVI

$$d \ln(ax + b) = \frac{d(ax + b)}{ax + b}$$

pero de acuerdo con las fórmulas III, IV, I se tiene:

$$d(ax + b) = (a + 0) dx$$

resulta

$$d \ln(ax + b) = \frac{adx}{ax + b}$$

5. $y = \frac{1}{e^{2x}}$

Transformando resulta

$$y = e^{-2x}$$

Por la fórmula XXVIII

$$d(e^{-2x}) = e^{-2x} d(-2x)$$

pero como $d(-2x) = -2dx$ por la fórmula IV

$$d(e^{-2x}) = e^{-2x} (-2)dx$$

es decir

$$d(e^{-2x}) = -2e^{-2x} dx$$

$$d(e^{-2x}) = -\frac{2dx}{e^{2x}}$$

6. $y = \text{arc ctg } \frac{x}{2}$

Por la fórmula XXVIII

$$d\left(\text{arc ctg } \frac{x}{2}\right) = -\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \frac{x^2}{2^2}}$$

Pero como

$$d\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{dx}{2}, \text{ por la fórmula X, se tiene}$$

$$d\left(\text{arc ctg } \frac{x}{2}\right) = -\frac{\frac{1}{2} dx}{1 + \frac{x^2}{2^2}}$$

Transformando, resulta

$$d\left(\text{arc ctg } \frac{x}{2}\right) = -\frac{\frac{1}{2} dx}{2^2 + x^2}$$

$$d\left(\text{arc ctg } \frac{x}{2}\right) = -\frac{2 dx}{4 + x^2}$$

7. $y = e^{\text{tg } x}$

Por la fórmula XXVIII

$$d(e^{\text{tg } x}) = e^{\text{tg } x} d(\text{tg } x)$$

pero como $d(\text{tg } x) = \sec^2 x dx$

$$d(e^{\text{tg } x}) = \sec^2 x e^{\text{tg } x} dx$$

8. $y = \ln \text{sen } x$

Por la fórmula XXVI

$$d(\ln \text{sen } x) = \frac{d(\text{sen } x)}{\text{sen } x}$$

pero como $d(\operatorname{sen} x) = \cos x \, dx$
resulta

$$d(\ln \operatorname{sen} x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx$$

es decir

$$d(\ln \operatorname{sen} x) = \operatorname{ctg} x \, dx$$

Ejercicio XVI

Obtener la diferencial de las funciones siguientes:

1. $y = \log cx$ donde c es una constante

2. $y = \log \cos x$

3. $y = e^{x+2}$

4. $y = \sec 5x$

5. $y = e^x \cos 3x$

6. $y = \ln(3x - 4)^2$

7. $y = 10^{-x}$

8. $y = x \cos 3x$

9. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$

10. $y = \ln \frac{x-4}{5}$

11. $y = e^{1-x}$

12. $y = \sqrt{e^{x+1}}$

13. $y = 2 \operatorname{sen} 3x$

14. $y = ae^{bt}$ donde a , b y t son constantes

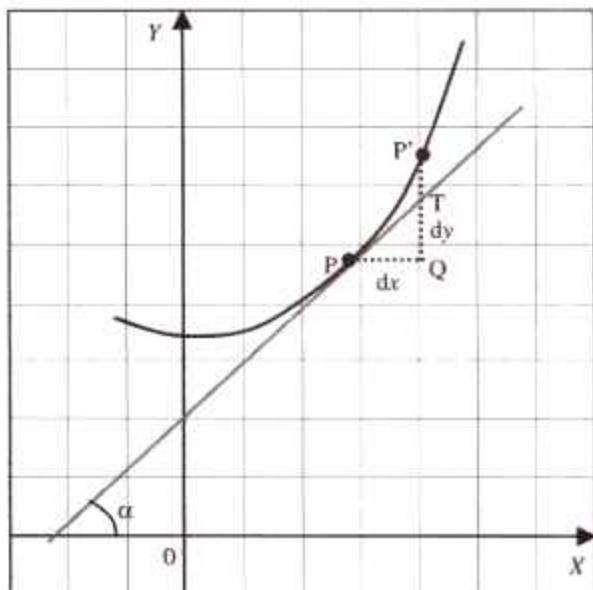
15. $y = e^x \cos \pi x$

8.7. Interpretación geométrica de la diferencial

Dada la curva $y = f(x)$

por lo estudiado en el artículo 3.6. del Capítulo III, su derivada en el punto P es

$f'(x)$



Entonces, si tomamos $dx = PQ$, se tiene:

$$dy = f'(x)dx$$

es decir,

$$dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot PQ \quad \text{porque } f'(x) = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{y} \quad dx = PQ$$

luego

$$dy = \frac{QT}{PQ} \cdot PQ = QT \quad \text{porque } \operatorname{tg} \alpha = \frac{QT}{PQ}$$

Se concluye que dy , o sea $df(x)$ es el incremento (\overline{QT}) de la ordenada de la tangente que corresponda a dx .

Se puede observar que la diferencial dy y el incremento Δy generalmente no son iguales. Aquí se advierte que

$$\Delta y = QP' \quad \text{y} \quad dy = QT.$$

8.8. La diferencial como aproximación del incremento

En la figura del artículo 8.7 podemos apreciar que Δy , o sea QP' , y dy , o sea \overline{QT} , son aproximadamente iguales, cuando dx , o sea PQ , tiende a cero, es decir, si PQ es pequeño.

Por esta razón, para obtener el valor aproximado del incremento de una función, resulta más sencillo calcular el valor de la diferencial correspondiente y utilizar este valor.

Ejemplo

Hallar el volumen de la lámina empleada para construir un tinaco esférico, si su diámetro exterior mide 200 cm y la lámina tiene un espesor de 0.5 cm.

Siendo la fórmula para calcular el volumen de una esfera de diámetro x , la siguiente:

$$V = \frac{1}{6} \pi x^3$$

El volumen de la lámina empleada para su construcción será la diferencia ΔV entre dos esferas macizas de diámetros 200 cm y 199 cm respectivamente. El segundo de estos diámetros medirá 1 cm menos que el primero, o sea, el doble de 0.5 cm.

El valor aproximado de ΔV , o sea dv , será:

$$dv = \frac{1}{2} \pi x^2 dx$$

Sustituyendo x por su valor 200 cm, π por 3.1416 y dx por 1 cm, resulta

$$dV = \frac{1}{2} (3.1416) (200)^2 (1)$$

$$dV = \frac{1}{2} (3.1416) (40000)$$

$$dV = (3.1416) (20000)$$

$$dV = 62832 \text{ cm}^3$$

que es aproximadamente el volumen de la lámina empleada.

Lo que se puede comprobar calculando por la fórmula geométrica tradicional, el volumen de cada una de las dos esferas macizas y encontrando la diferencia entre ambos volúmenes.

Capítulo IX

Integrales

9.1. Integración

La operación inversa de la diferenciación es la integración.¹ De esta manera, dada la función

$$y = \int (x)$$

su derivada es

$$\frac{d}{dx} \int (x) = x$$

su diferencial es

$$df(x) = \int (x) dx$$

¹ Conocemos varias operaciones inversas, como adición y sustracción; multiplicación y división; elevación a potencias y extracción de raíces y ahora, agregamos diferenciación e integración.

El problema del **cálculo integral** consiste en hallar la función a que corresponde una determinada derivada o diferencial.

El procedimiento mediante el cual hallamos la función a que corresponde cierta derivada o diferencial se llama **integración**, y se indica por el signo \int "integral de", escrito delante de la derivada o diferencial.

Así, podemos escribir

$$\int f'(x) = f(x)$$

$$\int f'(x) dx = f(x)$$

dx indica que x es la variable de integración.

Comúnmente, en el cálculo integral se emplean diferenciales en vez de derivadas.

Observemos algunos ejemplos:

1. Si $f(x) = x^3$ entonces $d(x^3) = 3x^2$
luego

$$\int 3x^2 dx = x^3$$

2. Si $f(x) = \text{sen } x$, entonces $d \text{ sen } x = \text{cos } x dx$
luego

$$\int \text{cos } x dx = \text{sen } x$$

3. Si $f(x) = \text{arc tg } x$, entonces $d \text{ arc tg } x = \frac{dx}{1+x^2}$
luego

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x$$

4. Si $f(x) = e^x$, entonces $d e^x = e^x dx$
luego

$$\int e^x dx = e^x$$

5. Si $f(x) = \ln x$, entonces $d \ln x = \frac{dx}{x}$
luego

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

9.2. Constante de integración

Consideremos los ejemplos siguientes:

1. Si $d(x^3) = 3x^2 dx$ por lo tanto $\int 3x^2 dx = x^3$

Si $d(x^3 + 2) = 3x^2 dx$ por lo tanto $\int 3x^2 dx = x^3 + 2$

Si $d(x^3 - 5) = 3x^2 dx$ por lo tanto $\int 3x^2 dx = x^3 - 5$

Si $d(x^3 + C) = 3x^2 dx$ por lo tanto $\int 3x^2 dx = x^3 + C$

2. Si $d \sin x = \cos x dx$ por lo tanto $\int \cos x dx = \sin x$

Si $d \sin x + 4 = \cos x dx$ por lo tanto $\int \cos x dx = \sin x + 4$

Si $d \sin x + C = \cos x dx$ por lo tanto $\int \cos x dx = \sin x + C$

En la misma forma podemos proceder en otros casos, por lo que concluimos que una diferencial tiene un número infinito de

integrales que sólo difieren en una constante. La constante **C** se llama **constante de integración**.

Las integrales como las de los ejemplos anteriores, reciben el nombre de **integrales indefinidas**.

Es decir, si $y = f(x)$, $df(x) = f'x \, dx$

luego

$$\int f'x \, dx = f(x) + C \quad \text{integral indefinida.}$$

Como la constante **C** es desconocida, o sea que tiene un valor indefinido, la expresión $f(x) + C$ se llama **integral indefinida**.

9.3. Propiedades fundamentales

En el proceso de integración debemos tener en cuenta dos propiedades fundamentales:

- I. La integral de una suma algebraica de diferenciales es igual a la suma de las integrales de cada diferencial.

Es decir, si $f(x) = u + v - w$,

luego $df(x) = du + dv - dw$

Entonces, $\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$

- II. Un factor constante puede escribirse antes del signo de integral o después de él.

Es decir, si $f(x) = av$

luego $df(x) = adv$

Entonces, $\int adv = a \int dv$

9.4. Formulario de integrales

A partir de las fórmulas de las diferenciales establecidas en el artículo 8.3 del Capítulo VIII, podemos obtener un formulario de integrales, como el que sigue:

$$I. \int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$$

$$II. \int a dx = a \int dx$$

Estas dos primeras fórmulas corresponden a las dos propiedades fundamentales.

$$III. \int dx = x + C$$

porque

$$\text{si } f(x) = x + C \quad \text{por lo tanto}$$

$$d(x + C) = dx + 0 = dx$$

entonces,

$$\int dx = x + C$$

$$IV. \int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C, \text{ excepto para } n = -1$$

porque

$$d \left(\frac{v^{n+1}}{n+1} + C \right) = \frac{(n+1)v^{n+1-1}}{n+1} dv + 0 = v^n dv$$

con la excepción indicada, puesto que si $n = -1$, la integral resulta una indeterminación.

$$V. \int \frac{dv}{v} = \ln v + C$$

porque

$$d(\ln v + C) = \frac{dv}{v} + 0 = \frac{dv}{v}$$

$$VI. \int a^v dv = \frac{a^v}{\ln a} + C$$

porque

$$d\left(\frac{a^v}{\ln a} + C\right) = a^v + 0 = a^v dv$$

$$VII. \int e^v dv = e^v + C$$

porque

$$d(e^v + C) = e^v dv + 0 = e^v dv$$

$$VIII. \int \operatorname{sen} v dv = -\operatorname{cos} v dv + C$$

porque

$$d(-\operatorname{cos} v dv + C) = \operatorname{sen} v dv + 0 = \operatorname{sen} v dv$$

$$\text{IX. } \int \cos v \, dv = \text{sen } v + C$$

porque

$$d(\text{sen } v + C) = \cos v \, dv + 0 = \cos v \, dv$$

$$\text{X. } \int \sec^2 v \, dv = \text{tg } v + C$$

porque

$$d(\text{tg } v + C) = \sec^2 v \, dv + 0 = \sec^2 v \, dv$$

Mediante un razonamiento similar en cada caso podemos justificar las fórmulas que siguen:

$$\text{XI. } \int \csc^2 v \, dv = -\text{ctg } v + C$$

$$\text{XII. } \int \sec v \, \text{tg } v \, dv = \sec v + C$$

$$\text{XIII. } \int \csc v \, \text{ctg } v \, dv = -\csc v + C$$

$$\text{XIV. } \int \text{tg } v \, dv = -\ln \cos v + C = \ln \sec v + C$$

$$\text{XV. } \int \text{ctg } v \, dv = \ln \text{sen } v + C$$

$$\text{XVI.} \quad \int \sec v \, dv = \ln(\sec v + \operatorname{tg} v) + C$$

$$\text{XVII.} \quad \int \csc v \, dv = \ln(\csc v - \operatorname{ctg} v) + C$$

$$\text{XVIII.} \quad \int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v}{a} + C$$

$$\text{XIX.} \quad \int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{v - a}{v + a} + C$$

$$\text{XX.} \quad \int \frac{dv}{a^2 + v^2} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{v}{a} + C$$

$$\text{XXI.} \quad \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln \left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2} \right) + C$$

Para facilitar su manejo, este formulario se repite en las páginas finales del libro.

Ejercicio XVII

Mediante un razonamiento análogo al que se hizo en cada una de las fórmulas anteriores, justificar las fórmulas de la XI a la XXI.

9.5. Integrales inmediatas

Las integrales que podemos obtener como resultado de aplicar de una manera directa las fórmulas anteriores, reciben el nombre de integrales inmediatas. En algunos casos, antes de aplicar la fórmula que corresponda, es necesario hacer algunas transformaciones algebraicas sencillas.

Ejemplos

$$1. \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C \quad \text{por IV}$$

$$2. \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C \quad \text{por IV}$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2} = x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C \quad \text{por IV}$$

$$4. \int ax^4 dx = a \int x^4 dx = \frac{ax^5}{5} + C \quad \text{por II y IV}$$

$$5. \int \frac{2dx}{\sqrt{x}} = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 4x^{\frac{1}{2}} + C = 4\sqrt{x} + C$$

por II y IV

$$6. \int (3x^2 + x - 1) dx = \int (3x^2 dx + x dx - dx) =$$

$$\int 3x^2 dx + \int x dx - \int dx = 3 \int x^2 dx + \int x dx - \int dx =$$

$$\frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c = x^3 + \frac{x^2}{2} + x + c \quad \text{por I, II, III y IV}$$

$$7. \int \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \frac{x^2}{4} dx - \int \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{4} \int x^2 dx - \int x^{-2} dx =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^3}{12} + x^{-1} + C = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x} + C \quad \text{por I, II, III y IV}$$

$$8. \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C \quad \text{por IV}$$

$$9. \int \frac{x^2 - 4x + 3}{x} dx = \int \frac{x^2}{x} dx - \int \frac{4x}{x} dx + \int 3 \frac{dx}{x} =$$

$$\int x dx - \int 4 dx + \int 3 \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} - 4x + 3 \ln x \quad \text{por I, II, IV y V}$$

$$10. \int (a^2 + b^2 x^2) dx$$

Para reducir esta integral a la fórmula IV se puede razonar así:

$$\text{Si } v = a^2 + b^2 x^2, \quad dv = 2b^2 dx, \quad dx = \frac{dv}{2b^2}$$

la integral podemos transformarla en

$$\int (a^2 + b^2 x^2) dx = \frac{1}{2b^2} \int \frac{2b^2 dx}{x^2 + b^2 x^2}$$

Esta transformación resulta de escribir antes de la integral el factor constante $\frac{1}{2b^2}$ para tener la integral de la fórmula IV. $\int \frac{dv}{v}$

Entonces,

$$\int (a^2 + b^2 x^2) dx = \frac{1}{2b^2} \ln(a^2 + b^2 x^2) + C$$

11. $\int \frac{3x dx}{b^2 + cx^2}$

Para reducir esta integral a la fórmula V, se puede razonar así:

Si $v = b^2 + cx^2$, $dv = 2cx dx$, $x dx = \frac{dv}{2c}$, entonces la integral se transforma en

$$\int \frac{3x dx}{b^2 + cx^2} = \frac{3}{2c} \int \frac{x dx}{b^2 + cx^2} = \frac{3}{2c} \ln(b^2 + cx^2) + C$$

12. $\int \frac{x^2 dx}{x-1}$

Dividiendo x^2 entre $x-1$ se tiene

$$\begin{array}{r} x-1 \overline{) x^2 + 1} \\ \underline{x^2} \\ -x + 1 \\ \underline{-x + 1} \\ 1 \end{array}$$

luego

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{x-1} &= \int \left(x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \int x dx + \int dx + \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln(x-1) + C \end{aligned}$$

Ejercicio XVIII

Obtener el valor de cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por medio de la diferenciación.

1. $\int x^6 dx$

2. $\int \sqrt{x} dx$

3. $\int \frac{dx}{x^5}$

4. $\int ax^4 dx$

5. $\int (3x^3 - 2x^2) dx$

6. $\int x^3 dx$

7. $\int \frac{dx}{x^3}$

8. $\int \sqrt[3]{x} dx$

9. $\int (5x^3 + 3x^2 - 2x + 1) dx$

10. $\int x\sqrt{x} dx$

11. $\int (x^3 - 3x^2 + 4x - 7) dx$

12. $\int \left(\frac{4x}{2} - \frac{2}{x^2} \right) dx$

13. $\int \frac{4x - 2\sqrt{x}}{x} dx$

14. $\int x(2x - 5) dx$

15. $\int \frac{x^4 - 10^2 + 5}{x^2} dx$

16. $\int 4x dx$

17. $\int \frac{ax^2 dx}{b}$

18. $\int \sqrt{3x} dx$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}}$

20. $\int \sqrt{2x} dx$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

22. $\int \frac{dx}{(x-2)^2}$

23. $\int (x^3 - x)(3x^2 - 6) dx$

24. $\int (2x - 5x^2)(1 - x) dx$

25. $\int 2 \operatorname{sen}^2 x \cos x dx$

26. $\int -\cos^2 x \operatorname{sen} x dx$

27. $\int -2 \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x \, dx$

28. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$

29. $\int \frac{x^3 - 4x^2 + 2}{x^2} \, dx$

30. $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \, dx$

Capítulo X

Métodos de integración. Integral definida

10.1. Integración por sustitución

Este método nos permite determinar el valor de muchas integrales. Consiste en tomar como nueva variable u alguna función de x .

De esta manera, mediante una **sustitución**, la diferencial se transforma en otra que se integra fácilmente por las fórmulas conocidas, dado que sólo difiere de ellas por un factor constante.

Conviene advertir que algunas de las integrales cuyo valor se obtuvo en el artículo 9.5 del Capítulo IX de este libro, de hecho, se calcularon por el método de sustitución, al hacer ciertas transformaciones algebraicas previas.

Veamos nuevos ejemplos

$$1. \int \sqrt{1+2x} \, dx = \int (1+2x)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

Podemos razonar así:

$$\text{si } u = 1 + 2x, \quad du = 2dx, \quad dx = \frac{1}{2} du$$

luego

$$\begin{aligned} \int (1 + 2x) dx &= \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{(1 + 2x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C \end{aligned}$$

$$2. \quad \int \cos 3x dx =$$

Podemos razonar así:

$$\text{si } u = 3x, \quad du = 3dx, \quad dx = \frac{du}{3}$$

luego

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos u du = \frac{1}{3} \operatorname{sen} u + C = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + C$$

$$3. \quad \int \frac{3ax dx}{h^2 + c^2x^2} = 3a \int \frac{x dx}{h^2 + c^2x^2}$$

Podemos razonar así:

$$\text{si } u = h^2 + c^2x^2, \quad du = 2c^2x dx, \quad x dx = \frac{du}{2c^2}$$

luego

$$\int \frac{3ax \, dx}{b^2 + c^2 x^2} = \frac{3a}{2c^2} \int \frac{du}{u} = \frac{3a}{2c^2} \ln u + C = \frac{3a}{2c^2} \ln(b^2 + c^2 x^2) + C$$

4. $\int \sin^2 x \cos x \, dx =$

Podemos razonar así:

si $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$

luego

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int u^2 \, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

5. $\int \frac{\sin \frac{1}{2} x \, dx}{1 + \cos \frac{1}{2} x} =$

Podemos razonar así:

si $u = 1 + \cos \frac{1}{2} x$, $du = -\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} x \, dx$

luego

$$\int \frac{\sin \frac{1}{2} x \, dx}{1 + \cos \frac{1}{2} x} = 2 \int \frac{du}{u} = -2 \ln u + C = -2 \ln \left(1 + \cos \frac{1}{2} x \right) + C$$

6. $\int \frac{2x-1}{2x+3} dx =$

Podemos razonar así:

$$2x+3 \overline{\begin{array}{r} 1 \\ 2x-1 \\ -2x-3 \\ \hline -4 \end{array}}$$

entonces,

$$\int \frac{2x-1}{2x+3} dx = \int \left(1 - \frac{4}{2x+3} \right) dx = \int dx - 4 \int \frac{dx}{2x+3}$$

luego

$$\text{si } u = 2x+3, \quad du = 2dx, \quad dx = \frac{du}{2},$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{2x+3} dx &= \\ &= \int dx - 4 \int \frac{dx}{2x+3} = x - \frac{4}{2} \int \frac{du}{u} = x - 2 \ln u + C = \\ &= x - 2 \ln(2x+3) + C = x - \ln(2x+3)^2 + C \end{aligned}$$

Ejercicio XIX

Obtener el valor de las integrales siguientes, aplicando en los casos necesarios el método de integración por sustitución.

1. $\int \frac{x^3 dx}{x+1}$

2. $\int (\operatorname{tg} x + \sec x) \sec x dx$

3.
$$\int \frac{dx}{5 - 4x}$$

4.
$$\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x dx$$

5.
$$\int x e^{x^2} dx$$

6.
$$\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x dx$$

7.
$$\int \sqrt{e^x} dx$$

8.
$$\int \frac{dx}{5 e^x}$$

9.
$$\int \frac{x dx}{x^2 + 1}$$

10.
$$\int \operatorname{sen} \frac{x}{2} dx$$

11.
$$\int \operatorname{tg} 5x dx$$

12.
$$\int \sec 4x dx$$

13.
$$\int \sqrt{ax} dx$$

14.
$$\int x(2x + 1)^2 dx$$

15.
$$\int \frac{dx}{2 + 3x}$$

16.
$$\int \frac{x^2 dx}{2 + x^3}$$

17.
$$\int \frac{t dt}{a + bt^2} \quad \text{donde } t = f(x)$$

18.
$$\int \frac{(2x + 3)dx}{x^2 - 3x}$$

19.
$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}$$

20.
$$\int \frac{x^2 - 4}{x^4} dx$$

21.
$$\int \frac{2x + 3}{x + 2} dx$$

22.
$$\int \frac{(x^2 + 2)dx}{x + 1}$$

23. $\int \frac{x+4}{2x+3} dx$

25. $\int \left(\frac{\sqrt{5x}}{5} + \frac{5}{\sqrt{5x}} \right) dx$

24. $\int (x^3 + 3x^2) dx$

26. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} dx$

10.2. Integración por partes

Este método de integración es muy útil. Parte de considerar que si u y v son funciones de la misma variable independiente, de acuerdo con la fórmula estudiada para obtener la diferencial de un producto de dos funciones (fórmula V, artículo 8.3, Capítulo VIII), podemos escribir:

$$d(uv) = u dv + v du$$

o sea, también

$$u dv = d(uv) - v du$$

Integrando, se obtiene la fórmula inversa, es decir:

$$(A) \quad \int u dv = uv - \int v du$$

comúnmente llamada **fórmula de integración por partes**, en la que, sin duda, el valor de la integral depende de du y dv .

Con el siguiente ejemplo, se ilustra la manera de manejar el método de integración por partes.

Sea obtener

$$\int x \operatorname{sen} x dx$$

Se observa que la diferencial por integrar es el producto de x por $\text{sen } dx$.

Entonces,

$$\text{Si } u = x \text{ y } dv = \text{sen } x \, dx, \quad du = dx \quad \text{y} \quad v = \int \text{sen } x \, dx = -\cos x$$

Sustituyendo en (A) resulta

$$\int \frac{x \text{ sen } x \, dx}{u \, dv} = \frac{x}{u} \underbrace{(-\cos x)}_v - \int \underbrace{(-\cos x)}_v \frac{(dx)}{du}$$

Simplificando, se tiene

$$\int x \text{ sen } x \, dx = x (-\cos x) + \text{sen } x + C$$

$$\int x \text{ sen } x \, dx = -x \cos x + \text{sen } x + C$$

Comprobación

$$\begin{aligned} d(-x \cos x + \text{sen } x + C) &= d(-x \cos x) + d(\text{sen } x) + dC = \\ &= (-x)(-\text{sen } x) \, dx - \cos x \, dx + \cos x \, dx + 0 \\ &= x \text{ sen } x \, dx - \cos x \, dx + \cos x \, dx = x \text{ sen } x \, dx \end{aligned}$$

por lo que se verifica el procedimiento seguido.

Otros ejemplos:

$$1. \int x \ln 2x \, dx$$

$$\text{Si } u = \ln 2x, \quad dv = x \, dx$$

$$du = \frac{d(2x)}{2x} = \frac{2 \, dx}{2x} = \frac{dx}{x}$$

$$v = \frac{x^2}{2}$$

Sustituyendo en (A), resulta

$$\int x \ln 2x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln 2x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}$$

es decir,

$$\int x \ln 2x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln 2x - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

$$\int x \ln 2x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln 2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x \ln 2x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln 2x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int x \ln 2x \, dx = \frac{x^2}{2} \left(\ln 2x - \frac{1}{2} \right) + C$$

Comprobación

$$d \left(\frac{x^2}{2} \ln 2x \right) - d \left(\frac{x^2}{4} \right) + d(C) =$$

Obteniendo por separado la diferencial de $\frac{x^2}{2} \ln 2x$, se tiene

$$\begin{aligned} d \left(\frac{x^2}{2} \ln 2x \right) &= \frac{x^2}{2} d(\ln 2x) + \ln 2x \, d \left(\frac{x^2}{2} \right) = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \frac{d(2x)}{2x} + \ln 2x \left(\frac{2x}{2} \right) = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{2x} + x \ln 2x = \frac{x}{2} + x \ln 2x \end{aligned}$$

Sustituyendo

$$\int x \ln 2x \, dx = \frac{x}{2} + x \ln 2x - \frac{2x}{4} + C = \frac{x}{2} + x \ln x - \frac{x}{2} = x \ln x$$

Lo que verifica el procedimiento seguido.

2. $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$

Si $u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$ y $dv = dx$

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{y} \quad v = x$$

Sustituyendo en (A), resulta:

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \int x \left(\frac{dx}{1+x^2} \right)$$

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2}$$

Obteniendo por separado la integral de $\frac{x \, dx}{1+x^2}$, se tiene:

si $u = 1 + x^2$, $du = 2x \, dx$, $x \, dx = \frac{du}{2}$,

entonces,

$$\int \frac{x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln u = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Por consiguiente,

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$3. \int xe^x dx =$$

$$\text{Si } u = e^x \quad \text{y} \quad dv = x dx \quad du = e^x dx \quad \text{y} \quad \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

Sustituyendo en (A) resulta:

$$\int xe^x dx = e^x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x dx$$

Como no es fácil integrar la expresión $\int \frac{x^2}{2} e^x dx$, quiere decir que no hemos escogido el mejor camino. Esto ocurre en muchos casos, por lo que es conveniente realizar nuestro razonamiento de otra manera; parece indicado partir de considerar

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = e^x dx, \quad du = dx \quad \text{y} \quad v = \int e^x dx = e^x$$

Sustituyendo en (A) resulta

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

es decir

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

Comprobación

$$d(xe^x - e^x + C) = d(xe^x) -$$

Obteniendo por separado la diferencial de xe^x , se tiene:

$$d(xe^x) = x d(e^x) + e^x dx$$

entonces,

$$d(xe^x - e^x + C) = x + e^x dx - e^x dx$$

$$d(xe^x - e^x + C) = xe^x dx$$

lo que verifica el procedimiento seguido.

Conviene advertir que en general para aplicar la fórmula de integración por partes, es necesario descomponer la diferencial dada en dos factores, **u** y **du**.

Además se debe tener en cuenta:

1. Que **dx** es siempre parte de **dv**.
2. Que sea posible integrar **dv**.
3. Que si se tiene el producto de dos funciones conviene elegir la que aparentemente es más complicada, siempre que sea posible su integración como parte de **dv**.

También se debe hacer notar que en términos generales la integración es una operación más complicada que la diferenciación y que existen integrales de apariencia sencilla cuyo valor no es posible calcular.

En este caso se encuentra $\int \sqrt{x} \operatorname{sen} x \, dx$, que no se puede calcular porque no hay función cuya diferencial sea $\sqrt{x} \operatorname{sen} x$.

Ejercicio XX

Obtener el valor de cada una de las integrales siguientes aplicando el método de integración por partes.

1. $\int x \cos x \, dx$

2. $\int x \cos ax \, dx$

3. $\int x \operatorname{sen}^2 x \, dx$

4. $\int x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x^2 \, dx$

5. $\int x \operatorname{sen}^2 3x \, dx$

6. $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

7. $\int \sec^3 x \, dx$

8. $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$

9. $\int x^3 e^{2x} \, dx$

10. $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} u \, du$

11. $\int \operatorname{arc} \operatorname{sen} u \, du$

12. $\int x\sqrt{1+x} \, dx$

13. $\int x^2 \ln x \, dx$

14. $\int \operatorname{arc} \operatorname{sen} x^2 \, dx$

15. $\int e^x \cos x \, dx$

16. $\int x^2 e^x \, dx$

17. $\int x^a \ln x \, dx$

18. $\int \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x \, dx$

Capítulo XI

Integral definida

11.1. Diferencial del área limitada bajo una curva

Al considerar la función continua $f(x)$ y además $y = f(x)$ como la ecuación correspondiente a la curva AB , tenemos que si \overline{CD} es una ordenada fija, \overline{MP} una ordenada variable y S la medida del área de $CMPD$, según se observa en la figura de la siguiente página, cuando x toma un incremento Δx . S toma un incremento (área $MNPQ$).

Al completar los rectángulos $MNR P$ y $MNQ T$ observamos que

$$\text{Área } MNR P < \text{Área } MNQ P < \text{Área } MNQ T.$$

Es decir:

$$MP \cdot \Delta x < \Delta S < NQ \cdot \Delta x$$

11.2. Integral definida

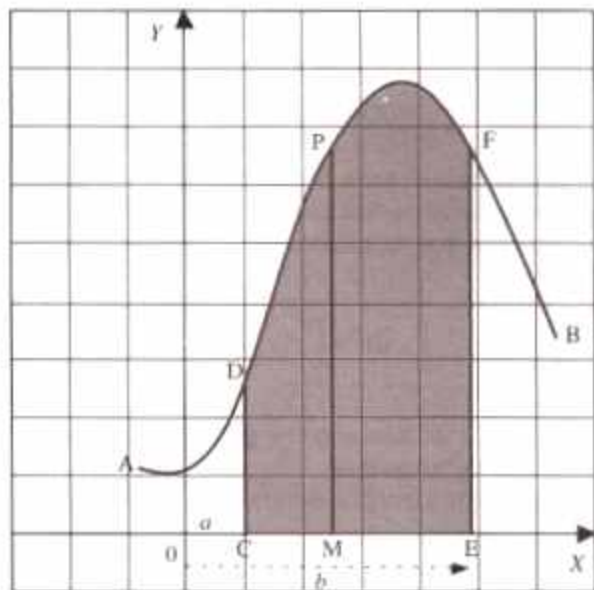
Dada la curva **AB** cuya ecuación es $y = f(x)$, por lo que vimos en el artículo 11.1,

$$dS = f(x) dx$$

o sea también

$$dS = y dx \quad (1)$$

donde dS equivale a la diferencial del área entre la curva, el eje de las x y las ordenadas \overline{CD} y \overline{EF} .



Integrando se tiene

$$S = \int f(x) dx = \int y dx$$

o sea

$$S = f(x) + c \quad (2)$$

Para determinar la constante de integración C , tenemos en cuenta que $S = 0$ cuando $x = a$.

Sustituyendo en (2), resulta

$$0 = f(a) + C$$

Despejando se tiene

$$C = -f(a)$$

por lo que (2) puede transformarse en

$$S = f(x) - f(a) \quad (3)$$

Como el área que se desea obtener es $C E F D$, cuando $x = b$, tenemos

$$S = f(b) - f(a)$$

Por consiguiente, la diferencial de los valores de $\int y dx$ para $x = a$ y $x = b$, determina el área limitada por la curva, de ordenada y , el eje de las x y las ordenadas correspondientes a $x = a$ y $x = b$.

Esto se representa por la expresión:

$$\int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx$$

que se lee "integral de a hasta b de $y dx$ " donde a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**.

Como tiene un valor siempre definido recibe el nombre de **integral definida**.

En general

$$\text{Si } \int y dx = f(x) + C$$

luego

$$\int_a^b y dx = \left[f(x) + C \right]_a^b = \left[f(b) + C \right] - \left[f(a) + C \right]$$

o sea

$$\int_a^b y \, dx = f(b) - f(a)$$

Puede observarse que desaparece la **constante de integración**.

11.3. Valor de una integral definida

El valor de una integral definida se puede calcular de acuerdo con lo estudiado en los dos artículos anteriores.

El procedimiento comprende dos pasos:

- I. Integrar la diferencial dada.
- II. Sustituir la variable de la integral obtenida, primero por el valor del límite superior y después por el valor del límite inferior; por último, restar el segundo resultado del primero.

Ejemplo

Sea obtener el valor de $\int_2^4 x^3 \, dx$

$$\int_2^4 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_2^4 = \left[\frac{(4)^4}{4} - \frac{(2)^4}{4} \right] = \frac{256}{4} - \frac{16}{4} = 64 - 4 = 60$$

Como se explicó con anterioridad, la constante de integración desaparece.

Otros ejemplos

$$\begin{aligned} 1. \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \left[\text{arc sen } \frac{x}{a} \right]_0^{\pi} = \text{arc sen } \frac{\pi}{a} - \text{arc sen } \frac{0}{a} \\ &= \text{arc sen } \frac{\pi}{a} - 0 = \text{arc sen } \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1 - 0 = 1$$

$$3. \int e^x \, dx = [e^x]_1^2 = e^2 - e^1 = 2.718^2 - 2.718 = 4.669$$

$$4. \int_2^8 \frac{dx}{x} = [\ln x]_2^8 = \ln 8 - \ln 2 = 2.0794 - 0.6932 = 1.3862$$

Ejercicio XXI

Obtener el valor de cada una de las integrales definidas siguientes:

$$1. \int_1^e \frac{dx}{x}$$

$$2. \int_0^1 (3x^2 - 5x + 4) \, dx$$

$$3. \int_2^4 4x^2 \, dx$$

$$4. \int_1^2 \sqrt{x} \, dx$$

$$5. \int_a^b x \, dx$$

$$6. \int_0^1 x^3 \, dx$$

$$7. \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx$$

$$8. \int_0^1 \frac{x \, dx}{1+x^2}$$

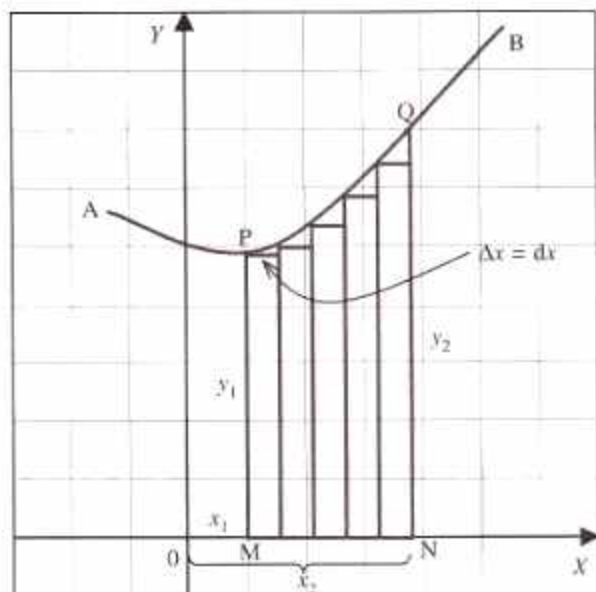
$$9. \int_0^1 \frac{x^2}{2} \, dx$$

$$10. \int_a^b (ax^2 + x^3) \, dx$$

11.4. Áreas

Una de las principales aplicaciones del cálculo integral consiste en la determinación del área de superficies limitadas por curvas.

Así, por ejemplo, si tenemos la curva **AB** de ecuación $y = f(x)$



Si trazamos $\overline{PM} \perp Ox$ y $\overline{QN} \perp Ox$, se tiene la curva comprendida entre P y Q .

Al considerar

$$\overline{OM} = x_1 \quad \overline{ON} = x_2$$

$$\overline{PM} = y_1 \quad \overline{QN} = y_2$$

el área **PMNQ** será igual a la suma de las fajas de base dx y altura y .

Al pensar que y es la altura media y dx la base, puede hacerse tan pequeña como se quiera. Concluimos:

Área de una faja = $y \, dx$,

pero siendo S el área total,

entonces el área de una faja será dS .

De esta manera y de acuerdo con lo que vimos en el artículo 11.1, tenemos:

$$\text{Área total } S = \int dS = \int y \, dx$$

Entonces, para hallar el valor de S , basta integrar $y \, dx$.

Mas, como ésta sería el área total subtendida por la curva, para obtener únicamente el área de $PMNQ$, es necesario integrar entre dos límites, es decir, cuando x vale x_2 y cuando x vale x_1 .

En conclusión, así:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y \, dx$$

Ejemplos

1. Si la curva tiene por ecuación $y = 3 + 4x^2$

$$S = \int_2^6 (3 + 4x^2) \, dx$$

luego

$$S = \left[3x + \frac{4x^3}{3} \right]_2^6$$

$$S = \left[3(6) + \frac{4(216)}{3} \right] - \left[3(2) + \frac{4(8)}{3} \right] =$$

$$S = 18 + 288 - 6 - \frac{32}{3} = 300 - \frac{32}{3} = \frac{868}{3}$$

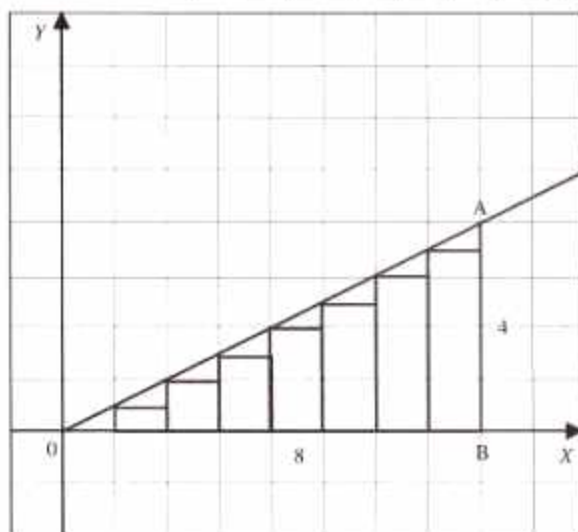
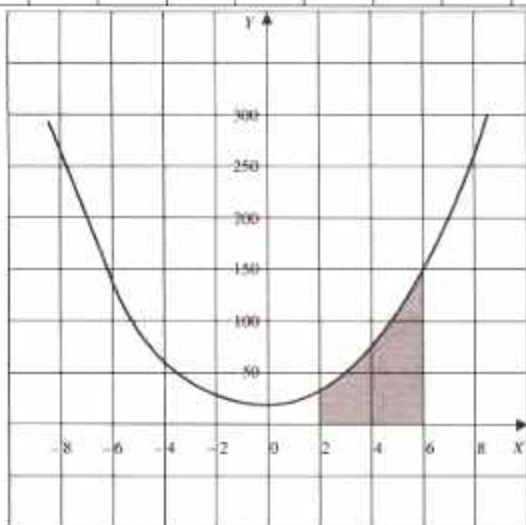
Consideremos 2 y 6 en metros

$$S = 289,3 \, \text{m}^2$$

A manera de ilustración tenemos una representación gráfica aproximada:

Tabla de $y = 3 + 4x^2$

| | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|----|----|----|---|---|----|----|-----|-----|
| x | -8 | -6 | -4 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| y | 259 | 147 | 67 | 19 | 7 | 3 | 7 | 19 | 67 | 147 | 259 |



En el papel milimétrico podría hacerse una gráfica más precisa.

Con el mismo criterio podemos calcular el área de un triángulo de base 8 y altura 4. De antemano sabemos que el área tiene 16 unidades cuadradas.

En realidad el ejemplo se ofrece como una confirmación del procedimiento empleado.

En este caso, el ΔAOB está subtendido por la recta OA , cuya ecuación es del tipo $y = mx$; pero como

$$m = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

la ecuación de OA será $y = \frac{1}{2}x$.

Entonces:

$$S = \int_0^8 \frac{1}{2}x \, dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^8 = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^8$$

$$S = \left[\frac{(8)^2}{4} - \frac{0}{4} \right] = \frac{64}{4} - 0 = 16$$

$S = 16$ unidades cuadradas.

Otros ejemplos

1. Obtener el área limitada por la curva de ecuación $y = 2x - x^2$, el eje Ox y las ordenadas que parten de $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$.

Se tiene:

$$S = \int_0^1 (2x - x^2) \, dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right]_0^1 = \left[x^2 - \frac{x^3}{2} \right]_0^1$$

$$S = \left[(1)^2 - \frac{(1)^3}{2} \right] - \left(0 - \frac{0^3}{2} \right) = 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

2. Hallar el área limitada por la parábola de ecuación $y^2 = 4x$ en los límites $x_1 = 4$ y $x_2 = 9$.

Se tiene

$$y = \sqrt{4x} \quad \text{o sea} \quad y = 2\sqrt{x}$$

$$S = \int_4^9 2\sqrt{x} \, dx = 2 \int_4^9 x^{\frac{1}{2}} \, dx$$

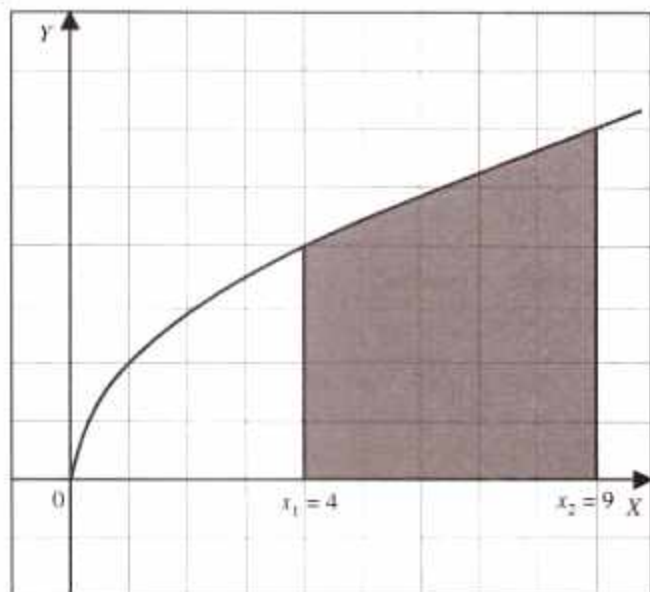
$$S = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_4^9 = \left[\frac{4}{3} \sqrt{x^3} \right]_4^9$$

luego

$$S = \frac{4}{3} \sqrt{729} - \frac{4}{3} \sqrt{64} = \frac{4}{3}(27) - \frac{4}{3}(8) = 36 - 10.66 = 25.34$$

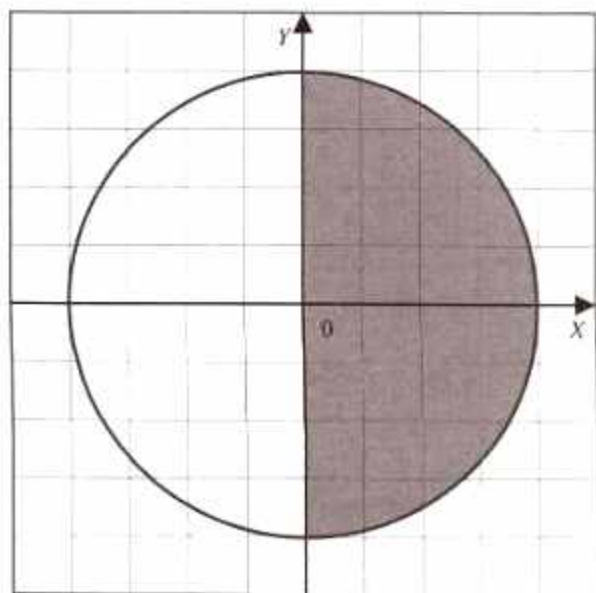
Representación gráfica:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 9 | 4 | 1 | 0 |
| y | 6 | 4 | 2 | 0 |



3. Hallar el área de la superficie limitada por la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ y las rectas cuyas ecuaciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$.

Por la forma de su ecuación se trata de una circunferencia con centro en el origen y de radio 4.



La ecuación será

$$y^2 = 16 - x^2$$

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

Integrando, resulta

$$S = \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx = \left[\frac{x^2}{2} \sqrt{16 - x^2} + \frac{x^2}{2} \arcsin \frac{x}{4} \right]_0^4$$

$$S = \left[8 \arcsin(1) - 0 \right] = 8 \arcsin(1) = 8\pi$$

$S = 25.28$ unidades cuadradas, que vienen a ser el área de la semicircunferencia.

Ejercicio XXII

Hallar el valor del área limitada por las curvas de ecuaciones dadas y las rectas cuyas ecuaciones se indican en cada caso.

1. $y = x$ $x_1 = 0$ $x_2 = 4$

2. $y = x^2 + x + 5$ $x_1 = 0$ $x_2 = 6$

3. $y = x - x^2$ $x_1 = 0$ $x_2 = 4$

4. $y = 2x - 1$ $x_1 = 1$ $x_2 = 2$

5. $x^2 + y^2 = 9$ $x_1 = 0$ $x_2 = 3$

6. $x^2 + y^2 = 25$ $x_1 = -5$ $x_2 = 5$

7. Hacer la gráfica que corresponda a cada uno de los seis ejercicios anteriores.



Godofredo Guillermo Leibniz (1646-1716). Filósofo, matemático, físico, teólogo, jurista, diplomático y filólogo alemán. Inventó a la vez que Newton el cálculo infinitesimal. Introdujo la notación dx y dy , así como el signo de integral. Fue célebre su disputa con Newton respecto a quién inventó el cálculo infinitesimal. En verdad los historiadores reconocen que se trató de dos inventos simultáneos.

Apéndice

Respuestas a los ejercicios

Ejercicio I (pág. 18)

- a) algebraica
- b) algebraica
- c) trascendente
- d) algebraica
- e) trascendente
- f) trascendente
- g) trascendente
- h) algebraica
- i) trascendente
- j) algebraica

Explicitas: a), d), e), f), g), h), i), j)

Implícitas: b), c)

3. Racionales: a), c), d), f), g), i), j)

Irracionales: b), c), h)

Ejercicio II (pág. 32)

- | | | | |
|-----|---------------|-----|-----------------|
| 1. | -2 | 16. | $-\frac{1}{3}$ |
| 2. | 0 | 17. | 0 |
| 3. | $\frac{5}{2}$ | 18. | $\frac{1}{5}$ |
| 4. | -2 | 19. | 3 |
| 5. | 0 | 20. | 1 |
| 6. | 1 | 21. | 0 |
| 7. | $\frac{1}{5}$ | 22. | 1 |
| 8. | 8 | 23. | 0 |
| 9. | -1 | 24. | 0 |
| 10. | $2x^2$ | 25. | ∞ |
| 11. | 0 | 26. | 4 |
| 12. | $\frac{3}{8}$ | 27. | 1 |
| 13. | 0 | 28. | $\frac{2}{\pi}$ |
| 14. | 2 | 29. | $\frac{4}{3}$ |
| 15. | $\frac{5}{3}$ | 30. | $a + b + c$ |

Ejercicio III (pág. 50)

1. $y' = 8x$

2. $y' = 3 - 2x$

3. $s' = -5$

4. $y' = m$

5. $y' = x$

6. $A' = 2\pi r$

7. $s' = \frac{2}{(2t+1)^2}$

8. $y' = x^2 - 1$

9. $y' = -\frac{1}{x}$

10. $y' = -\frac{1}{(1-x^2)^2}$

11. $y' = -\frac{x+4}{x^3}$

12. $y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

13. $y' = 2x + 4$

14. $y' = 10x - 6$

15. $y' = -2(a-x)$

16. $y' = 2x + 3$

17. $y' = 3(b+x)^2$

18. $y' = \frac{-4}{(x-2)^2}$

19. $s' = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$

20. $y' = \frac{x(4-x)}{(2+x)^2}$

Ejercicio IV (pág. 54)

1. a) $m = -625,$

b) $m = -4,$

c) $m = -1,$

d) $m = 2,$

e) $m = 8,$

f) $Om = -1,$

$\alpha = 176^\circ 30'$

$\alpha = 104^\circ$

$\alpha = 135^\circ$

$\alpha = 63^\circ 50'$

$\alpha = 82^\circ 53'$

$\alpha = 135^\circ$

2. $P\left(-\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}\right)$

3. $P(2, 4)$

4. Para $x = 3$, $m = -1$, $\alpha = 135^\circ$

Para $x = -3$, $m = -1$, $\alpha = 135^\circ$

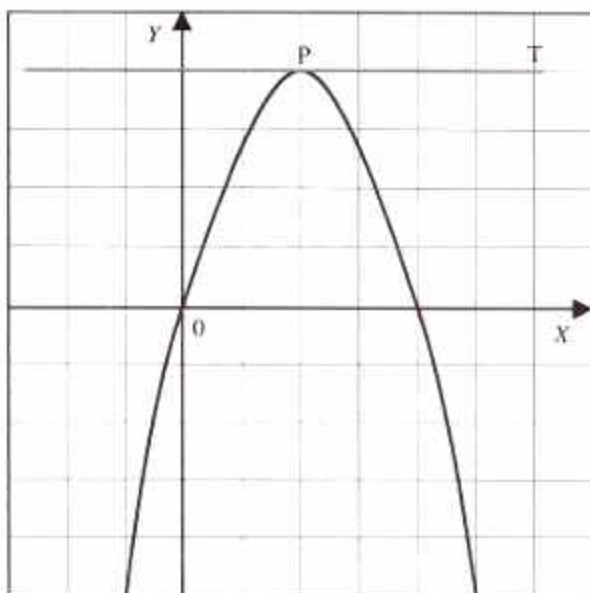
5. $y = 4x - x^2$

| | | | | | |
|-----|----|---|---|---|-----|
| x | 5 | 4 | 2 | 0 | -2 |
| y | -5 | 0 | 4 | 0 | -12 |

$m = 0$

$\alpha = \text{ang tg}(0)$

$\alpha = 0$



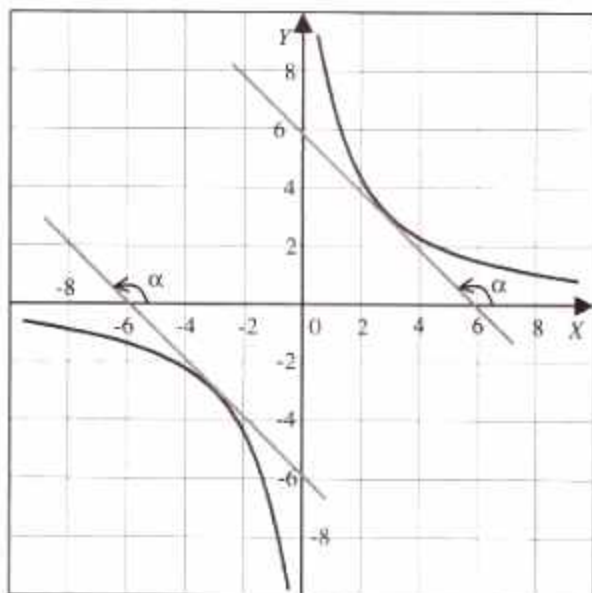
6. $y = \frac{9}{x}$

| | | | | | | | |
|-----|---|----------------|---|----------|----|-----------------|----|
| x | 9 | 4 | 3 | 0 | -3 | -4 | -9 |
| y | 1 | $2\frac{1}{4}$ | 3 | ∞ | -3 | $-2\frac{1}{4}$ | -1 |

$m = -1$

$\alpha = \text{ang tg } (-1)$

$\alpha = 135^\circ$



Ejercicio V (pág. 78)

De 1 a 15: como se pide.

16. $y' = 9x^2 - 4x + 5$

17. $y' = 5 - 3x^2$

18. $s' = 4at^3 - 6bt$

19. $s' = v$

20. $A' = 8\pi r$

21. $A' = 2\pi r$

22. $e' = b + ct$

23. $f'(x) = x - 2x^5$

24. $f'(x) = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

25. $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax}}$

26. $y' = -9(2 - 3x)^2$

27. $y' = -6(1 - 2x)^2$

28. $y' = \frac{3}{4\sqrt[4]{3 - 5x}}$

29. $y' = -2abx - b^2$

30. $f'(x) = \frac{8x^2 - 16}{x^5}$

31. $f'(x) = \frac{1 - x}{\sqrt{1 - 2x}}$

32. $f'(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{1 + x^2}}$

33. $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{(2 - x^2)^3}}$

34. $r' = \frac{-15\theta^2 + 80}{2 \cdot 2 - 3\theta}$

35. $y' = -\frac{2}{(1 + ax)\sqrt{1 - a^2x^2}}$

36. $y' = -\frac{2c^2x}{\sqrt{c^4 - x^4}}$

37. $y' = \frac{7x^2 + 2x}{\sqrt[3]{(1 + 3x)^2}}$

38. $y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

39. $y' = 16x^3(x^4 - 5)^2$

40. $y' = 3x^2 + 10x + 1$

41. $y' = 8x^3 + 21x^2 - 6x + 7$

42. $y' = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1 - x)^2}$

43. $y' = \frac{-7x^2 - 6x + 4}{(x^2 - x + 1)^2}$

44. $y' = \frac{-3x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 1)^2}$

45. $y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^4}}$

46. $y' = \frac{1}{\sqrt{(x + 1)^3}}$

47. $y' = \frac{3x + a}{2\sqrt{x + a}}$

48. $y' = \frac{3 - 4x}{3\sqrt[3]{(3x - 2x^2)^2}}$

$$49. y' = \frac{21x + 7}{\sqrt{1 + 2x}}$$

$$50. y' = \frac{2}{x(2-x)^2}$$

$$51. m = -1.5 \quad \alpha = 123^\circ 40'$$

$$52. m = -0.25 \quad \alpha = 166^\circ$$

$$53. m = -4 \quad \alpha = 104^\circ$$

$$54. P_1(0, -4) \quad P_2(-2, 0)$$

$$55. m = 1 \quad \alpha = 45^\circ$$

Ejercicio VI (pág. 93)

$$1. \text{ a) } \begin{aligned} y &= 10x - 2 \\ y' &= 10 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \begin{aligned} y &= 1 - 2x + 3x^2 \\ y' &= 6x - 2 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \begin{aligned} y &= -3a(1 - ax)^2 \\ y' &= 6a^2(1 - ax) \end{aligned}$$

$$\text{d) } \begin{aligned} y &= \frac{-2ab}{(ax - b)^2} \\ y' &= \frac{4a^2b}{(ax - b)^3} \end{aligned}$$

$$\text{e) } \begin{aligned} y &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \\ y' &= \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

$$\text{f) } y' = \frac{b}{2\sqrt{1 - bx}}$$

$$y'' = -\frac{b^2}{4\sqrt{(1 - bx)^3}}$$

$$\text{g) } \begin{aligned} y &= v \\ y' &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{h) } y' = \frac{a}{2\sqrt{(x - 1)^3}}$$

$$y'' = \frac{3a}{4\sqrt{(x - 1)^5}}$$

$$\text{i) } \begin{aligned} y &= 3x^2 - 4x - 1 \\ y' &= 6x - 4 \end{aligned}$$

$$\text{j) } \begin{aligned} y &= 2x \\ y' &= 2 \end{aligned}$$

2. a) $y' = -\frac{x}{y}$

b) $y' = \frac{1-y}{x-1}$

c) $y' = -\frac{x+y}{x}$

d) $y' = \frac{3x^2+y}{-x+1}$

e) $y' = -\frac{x+y}{x+1}$

f) $y' = \frac{y}{y-x}$

g) $y' = \frac{-1-3y}{3x+1}$

3. a) $y' = -\frac{x}{y}$

$$y'' = -\frac{x^2+y^2}{y^3}$$

b) $y' = \frac{P}{y}$

$$y'' = -\frac{P^2}{y^3}$$

c) $y' = \frac{-1-y}{x+1}$

$$y'' = \frac{2y+2}{(x+1)^2}$$

d) $y' = \frac{y}{y-x}$

$$y'' = \frac{-x+y-xy}{(y-x)^3}$$

Ejercicio VII (pág. 102)

1. a) $v = 40$ m por seg
 $a = 44$ m por (seg)²
 $s = 24$ m

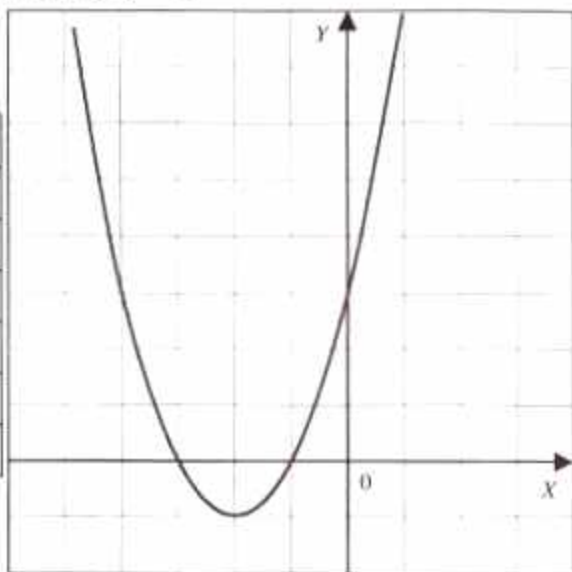
b) $v = 62$ m por seg
 $a = 6$ m por (seg)²
 $s = 316$ m

- c) $v = 0$
 $a = 0$
 $s = 0.5 \text{ m}$
- d) $v = 20 \text{ m por seg}$
 $a = 6 \text{ m por (seg)}^2$
 $s = 16 \text{ m}$
- e) $v = 1.89 \text{ m por seg}$
 $a = 4.54 \text{ m por (seg)}^2$
 $s = 3.16 \text{ m}$
2. a) $s = 92 \text{ m}$
 b) 42 m por seg
 c) $v = 34 \text{ m por seg}$
 d) $s = 312.5 \text{ m}$
 e) $v = 0 \text{ m por seg}$
3. a) $v = 40t - 9.8t \text{ m por seg}$
 $a = 32.2 \text{ m por (seg)}^2$
 b) 15.1 m
 c) 60.4 m
 d) $v = 60.4 \text{ m por seg}$
 $a = 32.2 \text{ m por (seg)}^2$
4. a) $v = 0.8 - \frac{8t}{(4 + t^2)^2}$
 $a = \frac{24t^2 - 32}{(4 + t^2)^3}$
 b) $v = 0.792 \text{ m por seg}$
 c) $a = 0.025 \text{ m por (seg)}^2$

Ejercicio VIII (pág. 120)

1. a)
- $y = -1$
- , mínimo, para
- $x = -2$

| x | y |
|-----|-----|
| -4 | 3 |
| -3 | 0 |
| -2 | -1 |
| -1 | 0 |
| 0 | 3 |
| 1 | 8 |



- b)
- $y = 4$
- , mínimo, para
- $x = 1$
- gráfica, como se pide

- c)
- $y = 6$
- , máximo, para
- $x = 0$

$$y = 4.82, \text{ mínimo, para } x = \frac{4}{3} \text{ gráfica, como se pide}$$

- d)
- $y = \frac{9}{4}$
- , mínimo, para
- $x = \frac{3}{2}$
- gráfica, como se pide

- e)
- $y = -3$
- , mínimo, para
- $x = 1$
- gráfica, como se pide

2. a)
- $y = -1$
- , mínimo, para
- $x = 3$

- b)
- $y = 9$
- , máximo, para
- $x = 1$

- c)
- $y = 4$
- , mínimo, para
- $x = -1$

- d)
- $y = -6.57$
- , mínimo, para
- $x = \sqrt{3}$

- e)
- $y = 4$
- , mínimo, para
- $x = 0$

f) $y = 0.1406$, máximo, para $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$

g) $y = 4\frac{3}{4}$, mínimo, para $x = -\frac{1}{2}$

h) $y = -5$, mínimo, para $x = 0$

$y = -\frac{4}{9}$, máximo, para $x = -\frac{2}{3}$

i) $y = 2.45$, mínimo, para $x = \frac{2}{3}$

$y = 9$, máximo, para $x = -2$

j) $y = 2$, máximo, para $x = 1$

$y = -2$, mínimo, para $x = -1$

Ejercicio IX (pág. 136)

A. 1. $y = -1$, mínimo, para $x = 0$
 $y = 2$, máximo, para $x = 1$
 $y = 2$, máximo, para $x = -1$

2. $y = 1$, mínimo, para $x = 3$
 $y = \frac{7}{3}$, máximo, para $x = 1$

3. $y = 8$, mínimo, para $x = 1$
 $y = 2\frac{14}{27}$, máximo, para $x = \frac{1}{3}$

4. $y = 0$, mínimo, para $x = 1$

$$y = \frac{32}{27} \cdot \text{máximo, para } x = -\frac{1}{3}$$

B. 1. $\text{Altura} = \sqrt{\frac{4}{3}} r$

2. $\text{Base} = \frac{P}{4}$ La figura es un cuadrado, $\text{Altura} = \frac{P}{4}$

3. $\text{Volumen} = 20 \frac{\pi}{3}$

4. $\text{Radio} = 0.6828$

$\text{Altura} = 0.6828$

5. $\text{Altura} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{1.33} = 1.15 \text{ m}$

6. $A = 5\sqrt{75}$ Es un triángulo equilátero

7. $\text{Largo} = 120 \text{ m}$

$\text{Ancho} = 90 \text{ m}$

8. $\text{Lado de la base} = 24 \text{ cm}$

$\text{Altura} = 12 \text{ cm}$

9. $\text{Cuarto lado} = 20 \text{ m}$

10. $\text{Ancho} = 27.713 \text{ cm}$

$\text{Profundidad} = 39.1 \text{ cm}$

11. Altura = 20 cm

12. Catetos iguales con dimensión $\sqrt{\frac{h^2}{2}}$

Ejercicio X (pág. 144)

1. 1

6. $\frac{a}{b}$

2. 1

7. 0

3. 1

8. π

4. $\frac{1}{2}$

9. $\frac{3}{4}$

5. 3

10. 0

Ejercicio XI (pág. 148)

1. $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

6. $e^0 = 1$

2. e

7. $e^0 = 1$

3. $e^{\bar{3}}$

8. $e^0 = 1$

4. e^{ab}

9. e^3

5. $e^0 = 1$

10. $e^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{e}$

Ejercicio XII (pág. 159)

1. $y' = -4 \operatorname{tg} 4x \sec 4x$

8. $y' = \operatorname{tg}^2 x$

2. $y' = 3 \cos 3t$

9. $y' = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

3. $y' = -b \cot bx \csc bx$

10. $y' = 0$

4. $y' = -\operatorname{csc}^2 \frac{x}{2}$

11. $y' = 20 \cos 5x$

5. $y' = \frac{\sec^2 3x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 3x}}$

12. $y' = 3 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

6. $y' = \frac{2 \cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

13. $y' = -\cos^2 x \operatorname{sen} x$

7. $y' = -x \operatorname{sen} x + \cos x$

14. $y' = \frac{x \cos x + \cos x - \operatorname{sen} x}{x+1}$

15. $y' = 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x$

Ejercicio XIII (pág. 170)

1. $y' = -\frac{a}{a^2 + x^2}$

3. $y' = \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$

2. $y' = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x}}$

4. $y' = \frac{6}{4 + 9x^2}$

$$5. y' = \frac{2x}{x^4 + 1}$$

$$10. y' = -\frac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x - 3}}$$

$$6. y' = -\frac{1}{x\sqrt{25x^2 - 1}}$$

$$11. y' = \frac{2x}{1 + 4x^2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x$$

$$7. y' = \frac{1}{x\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}}$$

$$12. y' = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

$$8. y' = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$$

$$13. y' = \frac{1}{2\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3}}$$

$$9. y' = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

$$14. y' = \frac{2}{x\sqrt{x^4 - 1}}$$

Ejercicio XIV (pág. 177)

$$1. y' = \frac{2x}{x^2 + a}$$

$$5. y' = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$2. y' = 6x a^{3x^2} \ln a$$

$$6. y' = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 4}$$

$$3. y' = 2bx e^{b^2 + x^2}$$

$$7. y' = 2 \operatorname{tg} x$$

$$4. y' = -e^{\cos x} \operatorname{sen} x$$

$$8. y' = \frac{\log e}{x(1 + x)}$$

9. $y' = \frac{a^{ax} \log a \ln a}{1+x^2}$

10. $y' = \frac{(2x-2) \log e}{x^2-2x}$

11. $y' = 2x e^{x^2}$

12. $y' = 2a^{2x} \ln a$

13. $y' = 2a^{2x-1} \ln a$

14. $y' = \sec x$

15. $y' = \frac{3 \ln^2 x}{x}$

16. $y' = \frac{2ax}{ax^2+b}$

17. $y' = \frac{4ax}{ax^2+b}$

18. $y' = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{e^x}$

19. $y' = a 10^{ax \cdot b} \ln 10$

20. $y' = e^x \sec^2 e^x$

Ejercicio XV (pág. 189)

1. $dy = (2x-2) dx$

2. $dy = (5x^4 + 4x^3 - 3x^2) dx$

3. $dy = -\frac{6 dx}{x^3}$

4. $dy = \frac{5 dx}{2\sqrt{5x}}$

5. $dy = (4x-2) dx$

6. $dy = \frac{2 dx}{(1-x)^2}$

7. $dy = (12x-11) dx$

8. $dy = \frac{2 dx}{\sqrt{2x}}$

9. $dy = \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$

10. $dy = 3(x-1)^2 dx$

11. $dy = 2a(ax+b) dx$

12. $dy = (2abx - 2b + a) dx$

$$13. dy = \frac{-2x dx}{(x-a)^2}$$

$$19. dy = \frac{dx}{2a} - \frac{adx}{2x^2 \cdot a}$$

$$14. dy = \frac{dx}{4x^2 \sqrt{2x}}$$

$$20. dy = -b dx$$

$$15. dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax+b}}$$

$$21. dy = -\frac{x dx}{y}$$

$$22. dy = \frac{3y-4x}{8y-3x}$$

$$16. dy = \frac{-3x^3 + 2ax}{a^2 - x^2} dx$$

$$23. dy = \frac{(-3x^2 + 3y) dx}{-3x + 4y}$$

$$17. dy = -\frac{x dx}{\sqrt{(a-x)(a+x)^3}}$$

$$24. dy = \frac{(-x+y) dx}{-x+y} = dx$$

$$18. dy = (3x^2 + 2x - 1) dx$$

$$25. dy = \frac{x dx}{y}$$

Ejercicio XVI (pág. 198)

$$1. dy = \frac{\log e}{a} dx$$

$$4. dy = 5 \sec 5x \operatorname{tg} 5x dx$$

$$2. dy = -\operatorname{tg} x \log e$$

$$5. dy = e^x (\cos 3x - 3x \operatorname{sen} 3x) dx$$

$$3. dy = e^{x^2} dx$$

$$6. dy = \frac{6 dx}{3x-4}$$

7. $dy = 10^{\sqrt{x}} \ln 10 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

8. $dy = (\cos 3x - 3x \operatorname{sen} 3x) dx$

9. $dy = -\frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x} \operatorname{csc} x dx}{2}$

10. $dy = \frac{dx}{x-4}$

11. $dy = -e^{1-x} dx$

12. $dy = \frac{1}{2} \sqrt{e^{1+x}} dx$

13. $dy = 6 \cos 3x dx$

14. $dy = a b e^{ax} dt$

15. $dy = e^x (\cos \pi x - \pi \operatorname{sen} \pi x) dx$

Ejercicio XVII (pág. 210)

Proceder a realizar con cada fórmula de la XI a la XXI un razonamiento como los que se hicieron con las fórmulas de la I a la X.

Ejercicio XVIII (pág. 214)

1. $\frac{x^7}{7} + C$

2. $\frac{2}{3} x^3 + C, \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$

3. $-\frac{1}{4x^4} + C$

4. $\frac{ax^5}{5} + C$

5. $\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + C$

6. $\frac{x^4}{4} + C$

7. $\frac{1}{2x^2} + C$

8. $\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$

9. $5x^4 + x^3 - x^2 + x + C$

10. $\frac{2\sqrt{x^5}}{5} + C$

11. $\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x^2 - 7x + C$

21. $\frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + C$

12. $x^2 + \frac{2}{x} + C$

22. $-\frac{1}{x-2} + C$

13. $4x - 4\sqrt{x} + C$

23. $\frac{x^6}{2} - 3x^3 + 3x^2 + C$

14. $\frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + C$

24. $x^2 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^4 + C$

15. $\frac{x^3}{3} - 10x - \frac{5}{x} + C$

25. $2 \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx = 2 \operatorname{sen}^3 x \cos x$

16. $2x^2 + C$

26. $\frac{\cos^3 x}{3} + C$

17. $\frac{ax^3}{3b} + C$

27. $-\frac{2 \operatorname{tg}^5 x}{5} + C$

18. $\frac{2}{3} \sqrt{3x^3} + C$

28. $\frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C$

19. $2\sqrt{\frac{x}{a}} + C$

29. $\frac{x^2}{2} - 4x - \frac{2}{x} + C$

20. $\frac{\sqrt{2x^3}}{3} + C$

30. $x + \frac{3}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C$

Ejercicio XIX (pág. 220)

1. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1) + C$

2. $\sec x + \operatorname{tg} x + C$

3. $-\frac{\sqrt{5-4x}}{2} + C$

4. $\frac{\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} 2x}{4} + C$

5. $\frac{1}{2} e^{x^2} + C$

6. $-e^{\cos x} + C$

7. $2\sqrt{e^x} + C$

8. $-\frac{1}{5e^x} + C$

9. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$

10. $-2 \cos \frac{x}{2} + C$

11. $-\frac{1}{5} \ln \cos x + C$

12. $\frac{1}{4} (\sec 4x + \operatorname{tg} 4x) + C$

13. $\frac{2x\sqrt{ax}}{3} + C$

14. $x^4 + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$

15. $\frac{1}{3} \ln(2 + x^3) + C$

16. $\frac{1}{3} \ln(2 + 3x) + C$

17. $\frac{\ln(a + bt^2)}{ab} + C$

18. $2 \ln x + 3 \ln \left(1 - \frac{3}{x}\right) + C$

19. $\ln(x^2 + 3x) + C$

20. $-\frac{1}{x} + \frac{4}{3x^3} + C$

21. $2x - \ln(x + 2) + C$

24. $\frac{x^4}{4} + x^3 + C$

22. $\frac{x^2}{2} - x + 3 \ln(x + 1) + C$

25. $\frac{2x\sqrt{5x}}{15} + 2\sqrt{5x} + C$

23. $\frac{x}{2} + \frac{5 \ln(2x + 3)}{4} + C$

26. $\ln(1 - \cos x) + C$

Ejercicio XX (pág. 227)

1. $x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

2. $\frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \operatorname{sen} ax}{a} + C$

3. $x \operatorname{tg} x + \ln \cos x + C$

4. $\frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2}$

5. $\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{12} x \operatorname{sen} 6x - \frac{1}{12} \cos 6x + C$

6. $\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} x + C$

7. $\frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C$

8. $-x^2 + \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$

9. $e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8} \right) + C$

10. $u \operatorname{arc} \operatorname{tg} u - \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) + C$

11. $u \operatorname{arc} \operatorname{sen} u + \sqrt{1 - u^2} + C$

12. $\frac{2}{3} x \sqrt{(1+x)^3} - \frac{4}{15} \sqrt{(1+x)^5} + C$

13. $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

14. $\frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x^2 + \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^4} + C$

15. $\frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + C$

16. $e^x (x^2 - 2x + 2) + C$

17. $\frac{x^{a+1}}{a+1} \left(\ln x - \frac{1}{a+1} \right) + C$

18. $x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$

Ejercicio XXI (pág. 234)

1. 1

2. 6

3. 0

4. -1

5. $\frac{b^2 - a^2}{2}$

6. $\frac{b^2 - a^2}{3}$

7. 0

8. 1

9. $\frac{7}{6}$

10. $\frac{3a^4}{4}$

Ejercicio XXII (pág. 241)

1. 5.3

2. 114

3. 29.33

4. 3

5. 14.1372

6. 78.54

7. Gráficas como se piden.

Formulario

| Núm. | Derivadas | Diferenciales |
|------|---|---|
| I | $\frac{dc}{dx} = 0$ | $d(c) = 0$ |
| II | $\frac{dx}{dx} = 1$ | $d(x) = dx$ |
| III | $\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$ | $d(u + v - w) = du + dv - dw$ |
| IV | $\frac{d}{dx}(cv) = c \frac{dv}{dx}$ | $d(cv) = cdv$ |
| V | $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ | $d(uv) = u dv + v du$ |
| VI | $\frac{d}{dx}(v_1 v_2 v_3 \dots v_n) = (v_2 v_3 \dots v_n) \frac{dv_1}{dx} + \dots + (v_1 v_2 v_3 \dots v_{n-1}) \frac{dv_n}{dx}$ | $d(v_1 v_2 v_3 \dots v_n) = (v_2 v_3 \dots v_n) dv_1 + (v_1 v_3 \dots v_n) dv_2 + \dots + (v_1 v_2 v_3 \dots v_{n-1}) dv_n$ |
| VII | $\frac{d}{dx}(v^n) = n v^{n-1} \frac{dv}{dx}$ | $d(v^n) = n v^{n-1} dv$ |

| Núm. | Derivadas | Diferenciales |
|-------|---|---|
| VIII | $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ | $d(x^n) = nx^{n-1} dx$ |
| IX | $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$ | $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$ |
| X | $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{du}{c}$ | $d\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{du}{c}$ |
| XI | $\frac{d}{dx}(\sqrt{u}) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}$ | $d(\sqrt{u}) = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$ |
| XII | $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ |
| XIII | $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$ | $d(\operatorname{sen} u) = \cos u du$ |
| XIV | $\frac{d}{dx}(\operatorname{cos} u) = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$ | $d(\operatorname{cos} u) = -\operatorname{sen} u du$ |
| XV | $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$ | $d(\operatorname{tg} u) = \sec^2 u du$ |
| XVI | $\frac{d}{dx}(\operatorname{ctg} u) = -\operatorname{csc}^2 u \frac{du}{dx}$ | $d(\operatorname{ctg} u) = -\operatorname{csc}^2 u du$ |
| XVII | $\frac{d}{dx}(\operatorname{sec} u) = \operatorname{tg} u \operatorname{sec} u \frac{du}{dx}$ | $d(\operatorname{sec} u) = \operatorname{tg} u \operatorname{sec} u du$ |
| XVIII | $\frac{d}{dx}(\operatorname{csc} u) = -\operatorname{ctg} u \operatorname{csc} u \frac{du}{dx}$ | $d(\operatorname{csc} u) = -\operatorname{ctg} u \operatorname{csc} u du$ |
| XIX | $\frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \operatorname{sen} u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ | $d(\operatorname{arc} \operatorname{sen} u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| XX | $\frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \operatorname{cos} u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ | $d(\operatorname{arc} \operatorname{cos} u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| XXI | $\frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \operatorname{tg} u) = \frac{du}{1+u^2}$ | $d(\operatorname{arc} \operatorname{tg} u) = \frac{du}{1+u^2}$ |

| Núm. | Derivadas | Diferenciales |
|--------|---|--|
| XXII | $\frac{d}{dx} (\text{arc ctg } u) = -\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$ | $d(\text{arc ctg } u) = -\frac{du}{1+u^2}$ |
| XXIII | $\frac{d}{dx} (\text{arc sec } u) = \frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$ | $d(\text{arc sec } u) = \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$ |
| XXIV | $\frac{d}{dx} (\text{arc csc } u) = -\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$ | $d(\text{arc csc } u) = -\frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$ |
| XXV | $\frac{d}{dx} (\log_a u) = \frac{\log_a e}{u} \frac{du}{dx}$ | $d(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u} du$ |
| XXVI | $\frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{du}{u}$ | $d(\ln u) = \frac{du}{u}$ |
| XXVII | $\frac{d}{dx} (a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}$ | $d(a^u) = a \ln a du$ |
| XXVIII | $\frac{d}{dx} (e^u) = \frac{du}{dx}$ | $d(e^u) = e^u du$ |

Límites fundamentales

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

| Núm | Integrales |
|------------|---|
| I | $\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$ |
| II | $\int a \, dx = a \int dx$ |
| III | $\int dx = x + C$ |
| IV | $\int v^n \, dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$ excepto para $n = -1$ |
| V | $\int \frac{dv}{v} = \ln v + C$ |
| VI | $\int a^v \, dv = \frac{a^v}{\ln a} + C$ |
| VII | $\int e^v \, dv = e^v + C$ |
| VIII | $\int \operatorname{sen} v \, dv = -\cos v + C$ |
| IX | $\int \cos v \, dv = \operatorname{sen} v + C$ |
| X | $\int \sec^2 v \, dv = \operatorname{tg} v + C$ |
| XI | $\int \csc^2 v \, dv = -\operatorname{ctg} v + C$ |
| XII | $\int \sec v \operatorname{tg} v \, dv = \sec v + C$ |
| XIII | $\int \csc v \operatorname{ctg} v \, dv = -\csc v + C$ |
| XIV | $\int \operatorname{tg} v \, dv = -\ln \cos v + C$ o $\ln \sec v + C$ |

| Núm. | Integrales |
|-------|--|
| XV | $\int \operatorname{ctg} v \, dv = \ln \operatorname{sen} v + C$ |
| XVI | $\int \sec v \, dv = \ln(\sec v + \operatorname{tg} v) + C$ |
| XVII | $\int \operatorname{csc} v \, dv = \ln(\operatorname{csc} v - \operatorname{ctg} v) + C$ |
| XVIII | $\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v}{a} + C$ |
| XIX | $\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{v-a}{v+a} + C$ |
| XX | $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 + v^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{v}{a} + C$ |
| XXI | $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln \left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2} \right) + C$ |

Logaritmos naturales (base e)
Tabla I. Números 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, ... hasta 5.4

| | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1.0 | 0.0000 | 0.0100 | 0.0198 | 0.0296 | 0.0392 | 0.0488 | 0.0583 | 0.0677 | 0.0770 | 0.0862 |
| 1.1 | 0.0953 | 0.1044 | 0.1133 | 0.1222 | 0.1310 | 0.1398 | 0.1484 | 0.1570 | 0.1655 | 0.1740 |
| 1.2 | 0.1823 | 0.1906 | 0.1989 | 0.2070 | 0.2151 | 0.2231 | 0.2311 | 0.2390 | 0.2469 | 0.2546 |
| 1.3 | 0.2624 | 0.2700 | 0.2776 | 0.2852 | 0.2927 | 0.3001 | 0.3075 | 0.3148 | 0.3221 | 0.3293 |
| 1.4 | 0.3365 | 0.3436 | 0.3507 | 0.3577 | 0.3646 | 0.3716 | 0.3784 | 0.3853 | 0.3920 | 0.3988 |
| 1.5 | 0.4055 | 0.4121 | 0.4187 | 0.4253 | 0.4318 | 0.4383 | 0.4447 | 0.4511 | 0.4574 | 0.4637 |
| 1.6 | 0.4700 | 0.4762 | 0.4824 | 0.4886 | 0.4947 | 0.5008 | 0.5068 | 0.5128 | 0.5188 | 0.5247 |
| 1.7 | 0.5306 | 0.5365 | 0.5423 | 0.5481 | 0.5539 | 0.5596 | 0.5653 | 0.5710 | 0.5766 | 0.5822 |
| 1.8 | 0.5878 | 0.5933 | 0.5988 | 0.6043 | 0.6098 | 0.6152 | 0.6206 | 0.6259 | 0.6313 | 0.6366 |
| 1.9 | 0.6419 | 0.6471 | 0.6523 | 0.6575 | 0.6627 | 0.6678 | 0.6729 | 0.6780 | 0.6831 | 0.6881 |
| 2.0 | 0.6932 | 0.6981 | 0.7031 | 0.7080 | 0.7129 | 0.7178 | 0.7227 | 0.7275 | 0.7324 | 0.7372 |
| 2.1 | 0.7419 | 0.7467 | 0.7514 | 0.7561 | 0.7608 | 0.7655 | 0.7701 | 0.7747 | 0.7793 | 0.7839 |
| 2.2 | 0.7885 | 0.7930 | 0.7975 | 0.8020 | 0.8065 | 0.8109 | 0.8154 | 0.8198 | 0.8242 | 0.8286 |
| 2.3 | 0.8329 | 0.8373 | 0.8416 | 0.8459 | 0.8502 | 0.8544 | 0.8587 | 0.8629 | 0.8671 | 0.8713 |
| 2.4 | 0.8755 | 0.8796 | 0.8838 | 0.8879 | 0.8920 | 0.8961 | 0.9002 | 0.9042 | 0.9083 | 0.9123 |
| 2.5 | 0.9163 | 0.9203 | 0.9243 | 0.9282 | 0.9322 | 0.9361 | 0.9400 | 0.9439 | 0.9478 | 0.9517 |
| 2.6 | 0.9555 | 0.9594 | 0.9632 | 0.9670 | 0.9708 | 0.9746 | 0.9783 | 0.9821 | 0.9858 | 0.9895 |
| 2.7 | 0.9933 | 0.9969 | 1.0006 | 1.0043 | 1.0080 | 1.0116 | 1.0152 | 1.0188 | 1.0225 | 1.0260 |
| 2.8 | 1.0296 | 1.0332 | 1.0367 | 1.0403 | 1.0438 | 1.0473 | 1.0508 | 1.0543 | 1.0578 | 1.0613 |
| 2.9 | 1.0647 | 1.0682 | 1.0716 | 1.0750 | 1.0784 | 1.0818 | 1.0852 | 1.0886 | 1.0919 | 1.0953 |
| 3.0 | 1.0986 | 1.1019 | 1.1053 | 1.1086 | 1.1119 | 1.1151 | 1.1184 | 1.1217 | 1.1249 | 1.1282 |
| 3.1 | 1.1314 | 1.1346 | 1.1378 | 1.1410 | 1.1442 | 1.1474 | 1.1506 | 1.1537 | 1.1569 | 1.1600 |
| 3.2 | 1.1632 | 1.1663 | 1.1694 | 1.1725 | 1.1756 | 1.1787 | 1.1817 | 1.1848 | 1.1878 | 1.1909 |
| 3.3 | 1.1939 | 1.1969 | 1.2000 | 1.2030 | 1.2060 | 1.2090 | 1.2119 | 1.2149 | 1.2179 | 1.2208 |
| 3.4 | 1.2238 | 1.2267 | 1.2296 | 1.2326 | 1.2355 | 1.2384 | 1.2413 | 1.2442 | 1.2470 | 1.2499 |
| 3.5 | 1.2528 | 1.2556 | 1.2585 | 1.2613 | 1.2641 | 1.2669 | 1.2698 | 1.2726 | 1.2754 | 1.2782 |
| 3.6 | 1.2809 | 1.2837 | 1.2865 | 1.2892 | 1.2920 | 1.2947 | 1.2975 | 1.3002 | 1.3030 | 1.3056 |
| 3.7 | 1.3083 | 1.3110 | 1.3137 | 1.3164 | 1.3191 | 1.3218 | 1.3244 | 1.3271 | 1.3297 | 1.3324 |
| 3.8 | 1.3350 | 1.3376 | 1.3403 | 1.3429 | 1.3455 | 1.3481 | 1.3507 | 1.3533 | 1.3558 | 1.3584 |
| 3.9 | 1.3610 | 1.3635 | 1.3661 | 1.3686 | 1.3712 | 1.3737 | 1.3762 | 1.3788 | 1.3813 | 1.3838 |
| 4.0 | 1.3863 | 1.3888 | 1.3913 | 1.3938 | 1.3962 | 1.3987 | 1.4012 | 1.4036 | 1.4061 | 1.4085 |
| 4.1 | 1.4110 | 1.4134 | 1.4159 | 1.4183 | 1.4207 | 1.4231 | 1.4255 | 1.4279 | 1.4303 | 1.4327 |
| 4.2 | 1.4351 | 1.4375 | 1.4398 | 1.4422 | 1.4446 | 1.4469 | 1.4493 | 1.4516 | 1.4540 | 1.4563 |
| 4.3 | 1.4586 | 1.4609 | 1.4633 | 1.4656 | 1.4679 | 1.4702 | 1.4725 | 1.4748 | 1.4771 | 1.4793 |
| 4.4 | 1.4816 | 1.4839 | 1.4861 | 1.4884 | 1.4907 | 1.4929 | 1.4951 | 1.4974 | 1.4996 | 1.5019 |
| 4.5 | 1.5041 | 1.5063 | 1.5085 | 1.5107 | 1.5129 | 1.5151 | 1.5173 | 1.5195 | 1.5217 | 1.5239 |
| 4.6 | 1.5261 | 1.5282 | 1.5304 | 1.5326 | 1.5347 | 1.5369 | 1.5390 | 1.5412 | 1.5433 | 1.5454 |
| 4.7 | 1.5476 | 1.5497 | 1.5518 | 1.5539 | 1.5560 | 1.5581 | 1.5602 | 1.5623 | 1.5644 | 1.5665 |
| 4.8 | 1.5686 | 1.5707 | 1.5728 | 1.5748 | 1.5769 | 1.5790 | 1.5810 | 1.5831 | 1.5851 | 1.5872 |
| 4.9 | 1.5892 | 1.5913 | 1.5933 | 1.5953 | 1.5974 | 1.5994 | 1.6014 | 1.6034 | 1.6054 | 1.6074 |
| 5.0 | 1.6094 | 1.6114 | 1.6134 | 1.6154 | 1.6174 | 1.6194 | 1.6214 | 1.6233 | 1.6253 | 1.6273 |
| 5.1 | 1.6292 | 1.6312 | 1.6332 | 1.6351 | 1.6371 | 1.6390 | 1.6409 | 1.6429 | 1.6448 | 1.6467 |
| 5.2 | 1.6487 | 1.6506 | 1.6525 | 1.6544 | 1.6563 | 1.6582 | 1.6601 | 1.6620 | 1.6639 | 1.6658 |
| 5.3 | 1.6677 | 1.6696 | 1.6715 | 1.6734 | 1.6752 | 1.6771 | 1.6790 | 1.6808 | 1.6827 | 1.6845 |
| 5.4 | 1.6864 | 1.6882 | 1.6901 | 1.6919 | 1.6938 | 1.6956 | 1.6974 | 1.6993 | 1.7011 | 1.7029 |

Logaritmos naturales (base e)
Tabla I. Números 5.5, 5.6, 5.7, ... hasta 9.9

| | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 5.5 | 1.7047 | 1.7066 | 1.7084 | 1.7102 | 1.7120 | 1.7138 | 1.7156 | 1.7174 | 1.7192 | 1.7210 |
| 5.6 | 1.7228 | 1.7246 | 1.7263 | 1.7281 | 1.7299 | 1.7317 | 1.7334 | 1.7352 | 1.7370 | 1.7387 |
| 5.7 | 1.7405 | 1.7422 | 1.7440 | 1.7457 | 1.7475 | 1.7492 | 1.7509 | 1.7527 | 1.7544 | 1.7561 |
| 5.8 | 1.7579 | 1.7596 | 1.7613 | 1.7630 | 1.7647 | 1.7664 | 1.7681 | 1.7699 | 1.7716 | 1.7733 |
| 5.9 | 1.7750 | 1.7766 | 1.7783 | 1.7800 | 1.7817 | 1.7834 | 1.7851 | 1.7868 | 1.7884 | 1.7901 |
| 6.0 | 1.7918 | 1.7934 | 1.7951 | 1.7967 | 1.7984 | 1.8001 | 1.8017 | 1.8034 | 1.8050 | 1.8066 |
| 6.1 | 1.8083 | 1.8099 | 1.8116 | 1.8132 | 1.8148 | 1.8165 | 1.8181 | 1.8197 | 1.8213 | 1.8229 |
| 6.2 | 1.8245 | 1.8262 | 1.8278 | 1.8294 | 1.8310 | 1.8326 | 1.8342 | 1.8358 | 1.8374 | 1.8390 |
| 6.3 | 1.8405 | 1.8421 | 1.8437 | 1.8453 | 1.8469 | 1.8485 | 1.8500 | 1.8516 | 1.8532 | 1.8547 |
| 6.4 | 1.8563 | 1.8579 | 1.8594 | 1.8610 | 1.8625 | 1.8641 | 1.8656 | 1.8672 | 1.8687 | 1.8703 |
| 6.5 | 1.8718 | 1.8733 | 1.8749 | 1.8764 | 1.8779 | 1.8795 | 1.8810 | 1.8825 | 1.8840 | 1.8856 |
| 6.6 | 1.8871 | 1.8886 | 1.8901 | 1.8916 | 1.8931 | 1.8946 | 1.8961 | 1.8976 | 1.8991 | 1.9006 |
| 6.7 | 1.9021 | 1.9036 | 1.9051 | 1.9066 | 1.9081 | 1.9095 | 1.9110 | 1.9125 | 1.9140 | 1.9155 |
| 6.8 | 1.9169 | 1.9184 | 1.9199 | 1.9213 | 1.9228 | 1.9242 | 1.9257 | 1.9272 | 1.9286 | 1.9301 |
| 6.9 | 1.9315 | 1.9330 | 1.9344 | 1.9359 | 1.9373 | 1.9387 | 1.9402 | 1.9416 | 1.9430 | 1.9445 |
| 7.0 | 1.9459 | 1.9473 | 1.9488 | 1.9502 | 1.9516 | 1.9530 | 1.9544 | 1.9559 | 1.9573 | 1.9587 |
| 7.1 | 1.9601 | 1.9615 | 1.9629 | 1.9643 | 1.9657 | 1.9671 | 1.9685 | 1.9699 | 1.9713 | 1.9727 |
| 7.2 | 1.9741 | 1.9755 | 1.9769 | 1.9782 | 1.9796 | 1.9810 | 1.9824 | 1.9838 | 1.9851 | 1.9865 |
| 7.3 | 1.9879 | 1.9892 | 1.9906 | 1.9920 | 1.9933 | 1.9947 | 1.9961 | 1.9974 | 1.9988 | 2.0001 |
| 7.4 | 2.0015 | 2.0028 | 2.0042 | 2.0055 | 2.0069 | 2.0082 | 2.0096 | 2.0109 | 2.0122 | 2.0136 |
| 7.5 | 2.0149 | 2.0162 | 2.0176 | 2.0189 | 2.0202 | 2.0215 | 2.0229 | 2.0242 | 2.0255 | 2.0268 |
| 7.6 | 2.0281 | 2.0295 | 2.0308 | 2.0321 | 2.0334 | 2.0347 | 2.0360 | 2.0373 | 2.0386 | 2.0399 |
| 7.7 | 2.0412 | 2.0425 | 2.0438 | 2.0451 | 2.0464 | 2.0477 | 2.0490 | 2.0503 | 2.0516 | 2.0528 |
| 7.8 | 2.0541 | 2.0554 | 2.0567 | 2.0580 | 2.0592 | 2.0605 | 2.0618 | 2.0631 | 2.0643 | 2.0656 |
| 7.9 | 2.0669 | 2.0681 | 2.0694 | 2.0707 | 2.0719 | 2.0732 | 2.0744 | 2.0757 | 2.0769 | 2.0782 |
| 8.0 | 2.0794 | 2.0807 | 2.0819 | 2.0832 | 2.0844 | 2.0857 | 2.0869 | 2.0882 | 2.0894 | 2.0906 |
| 8.1 | 2.0919 | 2.0931 | 2.0943 | 2.0956 | 2.0968 | 2.0980 | 2.0992 | 2.1005 | 2.1017 | 2.1029 |
| 8.2 | 2.1041 | 2.1054 | 2.1066 | 2.1078 | 2.1090 | 2.1102 | 2.1114 | 2.1126 | 2.1138 | 2.1150 |
| 8.3 | 2.1163 | 2.1175 | 2.1187 | 2.1199 | 2.1211 | 2.1223 | 2.1235 | 2.1247 | 2.1259 | 2.1270 |
| 8.4 | 2.1282 | 2.1294 | 2.1306 | 2.1318 | 2.1330 | 2.1342 | 2.1353 | 2.1365 | 2.1377 | 2.1389 |
| 8.5 | 2.1401 | 2.1412 | 2.1424 | 2.1436 | 2.1448 | 2.1459 | 2.1471 | 2.1483 | 2.1494 | 2.1506 |
| 8.6 | 2.1518 | 2.1529 | 2.1541 | 2.1552 | 2.1564 | 2.1576 | 2.1587 | 2.1599 | 2.1610 | 2.1622 |
| 8.7 | 2.1633 | 2.1645 | 2.1656 | 2.1668 | 2.1679 | 2.1691 | 2.1702 | 2.1713 | 2.1725 | 2.1736 |
| 8.8 | 2.1748 | 2.1759 | 2.1770 | 2.1782 | 2.1793 | 2.1804 | 2.1815 | 2.1827 | 2.1838 | 2.1849 |
| 8.9 | 2.1861 | 2.1872 | 2.1883 | 2.1894 | 2.1905 | 2.1917 | 2.1928 | 2.1939 | 2.1950 | 2.1961 |
| 9.0 | 2.1972 | 2.1983 | 2.1994 | 2.2006 | 2.2017 | 2.2028 | 2.2039 | 2.2050 | 2.2061 | 2.2072 |
| 9.1 | 2.2083 | 2.2094 | 2.2105 | 2.2116 | 2.2127 | 2.2138 | 2.2148 | 2.2159 | 2.2170 | 2.2181 |
| 9.2 | 2.2192 | 2.2203 | 2.2214 | 2.2225 | 2.2235 | 2.2246 | 2.2257 | 2.2268 | 2.2279 | 2.2289 |
| 9.3 | 2.2300 | 2.2311 | 2.2322 | 2.2332 | 2.2343 | 2.2354 | 2.2364 | 2.2375 | 2.2386 | 2.2396 |
| 9.4 | 2.2407 | 2.2418 | 2.2428 | 2.2439 | 2.2450 | 2.2460 | 2.2471 | 2.2481 | 2.2492 | 2.2502 |
| 9.5 | 2.2513 | 2.2523 | 2.2534 | 2.2544 | 2.2555 | 2.2565 | 2.2576 | 2.2586 | 2.2597 | 2.2607 |
| 9.6 | 2.2618 | 2.2628 | 2.2638 | 2.2649 | 2.2659 | 2.2670 | 2.2680 | 2.2690 | 2.2701 | 2.2711 |
| 9.7 | 2.2721 | 2.2732 | 2.2742 | 2.2752 | 2.2762 | 2.2773 | 2.2783 | 2.2793 | 2.2803 | 2.2814 |
| 9.8 | 2.2824 | 2.2834 | 2.2844 | 2.2854 | 2.2865 | 2.2875 | 2.2885 | 2.2895 | 2.2905 | 2.2915 |
| 9.9 | 2.2925 | 2.2935 | 2.2946 | 2.2956 | 2.2966 | 2.2976 | 2.2986 | 2.2996 | 2.3006 | 2.3016 |

Logaritmos naturales (base e)
Tabla II. Números 1, 2, 3, 4, ... hasta 200

| N | Log. Nat. | N | Log. Nat. | N | Log. Nat. | N | Log. Nat. | N | Log. Nat. |
|----|-----------|----|-----------|-----|-----------|-----|-----------|-----|-----------|
| 0 | —∞ | 40 | 3.68 888 | 80 | 4.38 203 | 120 | 4.78 749 | 160 | 5.07 517 |
| 1 | 0.00 000 | 41 | 3.71 357 | 81 | 4.39 445 | 121 | 4.79 579 | 161 | 5.08 140 |
| 2 | 0.69 315 | 42 | 3.73 767 | 82 | 4.40 672 | 122 | 4.80 402 | 162 | 5.08 760 |
| 3 | 1.09 861 | 43 | 3.76 120 | 83 | 4.41 884 | 123 | 4.81 218 | 163 | 5.09 375 |
| 4 | 1.38 629 | 44 | 3.78 419 | 84 | 4.43 082 | 124 | 4.82 028 | 164 | 5.09 987 |
| 5 | 1.60 944 | 45 | 3.80 666 | 85 | 4.44 265 | 125 | 4.82 831 | 165 | 5.10 595 |
| 6 | 1.79 176 | 46 | 3.82 864 | 86 | 4.45 435 | 126 | 4.83 628 | 166 | 5.11 199 |
| 7 | 1.94 591 | 47 | 3.85 015 | 87 | 4.46 591 | 127 | 4.84 419 | 167 | 5.11 799 |
| 8 | 2.07 944 | 48 | 3.87 120 | 88 | 4.47 734 | 128 | 4.85 203 | 168 | 5.12 396 |
| 9 | 2.19 722 | 49 | 3.89 182 | 89 | 4.48 864 | 129 | 4.85 981 | 169 | 5.12 990 |
| 10 | 2.30 259 | 50 | 3.91 202 | 90 | 4.49 981 | 130 | 4.86 753 | 170 | 5.13 580 |
| 11 | 2.39 790 | 51 | 3.93 183 | 91 | 4.51 086 | 131 | 4.87 520 | 171 | 5.14 166 |
| 12 | 2.48 491 | 52 | 3.95 124 | 92 | 4.52 179 | 132 | 4.88 280 | 172 | 5.14 749 |
| 13 | 2.56 495 | 53 | 3.97 029 | 93 | 4.53 260 | 133 | 4.89 035 | 173 | 5.15 329 |
| 14 | 2.63 906 | 54 | 3.98 898 | 94 | 4.54 329 | 134 | 4.89 784 | 174 | 5.15 906 |
| 15 | 2.70 805 | 55 | 4.00 733 | 95 | 4.55 388 | 135 | 4.90 527 | 175 | 5.16 479 |
| 16 | 2.77 259 | 56 | 4.02 535 | 96 | 4.56 435 | 136 | 4.91 265 | 176 | 5.17 048 |
| 17 | 2.83 321 | 57 | 4.04 305 | 97 | 4.57 471 | 137 | 4.91 998 | 177 | 5.17 615 |
| 18 | 2.89 037 | 58 | 4.06 044 | 98 | 4.58 497 | 138 | 4.92 725 | 178 | 5.18 178 |
| 19 | 2.94 444 | 59 | 4.07 754 | 99 | 4.59 512 | 139 | 4.93 447 | 179 | 5.18 739 |
| 20 | 2.99 573 | 60 | 4.09 434 | 100 | 4.60 517 | 140 | 4.94 164 | 180 | 5.19 296 |
| 21 | 3.04 452 | 61 | 4.11 087 | 101 | 4.61 512 | 141 | 4.94 876 | 181 | 5.19 850 |
| 22 | 3.09 104 | 62 | 4.12 713 | 102 | 4.62 497 | 142 | 4.95 583 | 182 | 5.20 401 |
| 23 | 3.13 549 | 63 | 4.14 313 | 103 | 4.63 473 | 143 | 4.96 284 | 183 | 5.20 949 |
| 24 | 3.17 805 | 64 | 4.15 888 | 104 | 4.64 439 | 144 | 4.96 981 | 184 | 5.21 494 |
| 25 | 3.21 888 | 65 | 4.17 439 | 105 | 4.65 396 | 145 | 4.97 673 | 185 | 5.22 036 |
| 26 | 3.25 810 | 66 | 4.18 965 | 106 | 4.66 344 | 146 | 4.98 361 | 186 | 5.22 575 |
| 27 | 3.29 584 | 67 | 4.20 469 | 107 | 4.67 283 | 147 | 4.99 043 | 187 | 5.23 111 |
| 28 | 3.33 220 | 68 | 4.21 951 | 108 | 4.68 213 | 148 | 4.99 721 | 188 | 5.23 644 |
| 29 | 3.36 730 | 69 | 4.23 411 | 109 | 4.69 135 | 149 | 5.00 395 | 189 | 5.24 175 |
| 30 | 3.40 120 | 70 | 4.24 850 | 110 | 4.70 048 | 150 | 5.01 064 | 190 | 5.24 702 |
| 31 | 3.43 399 | 71 | 4.26 268 | 111 | 4.70 953 | 151 | 5.01 728 | 191 | 5.25 227 |
| 32 | 3.46 574 | 72 | 4.27 667 | 112 | 4.71 850 | 152 | 5.02 388 | 192 | 5.25 750 |
| 33 | 3.49 651 | 73 | 4.29 046 | 113 | 4.72 739 | 153 | 5.03 044 | 193 | 5.26 269 |
| 34 | 3.52 636 | 74 | 4.30 407 | 114 | 4.73 620 | 154 | 5.03 695 | 194 | 5.26 786 |
| 35 | 3.55 535 | 75 | 4.31 749 | 115 | 4.74 493 | 155 | 5.04 343 | 195 | 5.27 300 |
| 36 | 3.58 352 | 76 | 4.33 073 | 116 | 4.75 359 | 156 | 5.04 986 | 196 | 5.27 811 |
| 37 | 3.61 092 | 77 | 4.34 381 | 117 | 4.76 217 | 157 | 5.05 625 | 197 | 5.28 320 |
| 38 | 3.63 759 | 78 | 4.35 671 | 118 | 4.77 068 | 158 | 5.06 260 | 198 | 5.28 827 |
| 39 | 3.66 356 | 79 | 4.36 945 | 119 | 4.77 912 | 159 | 5.06 890 | 199 | 5.29 330 |
| 40 | 3.68 888 | 80 | 4.38 203 | 120 | 4.78 749 | 160 | 5.07 517 | 200 | 5.29 832 |

Esta obra se terminó de imprimir en Febrero del 2011
en los talleres de Litográfica Ingramex, S.A. de C.V.
Centeno 162-1 Col. Granjas Esmeralda
México, D.F. 09810

Iniciación al Cálculo diferencial e integral

Iniciación al Cálculo Diferencial e Integral se puede utilizar como libro de texto o de consulta para estudiantes de educación media superior y como auxiliar didáctico en los cursos iniciales o propedéuticos que imparten algunas escuelas de nivel superior. Por tratarse de un curso de introducción, su contenido se expone mediante explicaciones sencillas sobre temas básicos, ejemplos resueltos y numerosos problemas y ejercicios, con el propósito de afirmar, ampliar y aplicar los conocimientos.

Sin duda, el aprovechamiento de este material ayudará al estudiante a avanzar con seguridad en la adquisición de conocimientos y acumulación de experiencias, así como en el desarrollo de hábitos y habilidades deseables para lograr una auténtica comprensión de la matemática.

EDITORIAL ESFINGE, S. DE R. L. DE C. V.
Esfuerzo 18-A
Cal. Industrial Atoto
Naucalpan, Estado de México
C. P. 53519
Tel. 5359 1111, Fax 5576 1343
www.esfinge.com.mx
editorial@esfinge.com.mx



9 789707 821583