García, Gómez y Larios

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

García, Gómez y Larios

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

Llega esta obra, a la comunidad estudiosa del
Instituto Politécnico Nacional, sin fines de lucro.

Introducción al Cálculo Diferencial
Ricardo F. García Sosa
Pantaleón Gómez Carranza
Raul Larios García

ISBN 968-7001-56-9
Primera Edición

Impreso en México

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

PRESENTACIÓN

La actividad editorial desarrollada por el Instituto Politécnico Nacional, está encaminada al cumplimiento de objetivos fundamentales, tales como: el abatimiento del costo de los textos de apoyo para los planes de estudio de diversas carreras y disciplinas que se cursan en la institución, y el estímulo al profesorado para que su esfuerzo en el campo de la investigación técnica y científica y su experiencia en la cátedra, se plasmen en volúmenes que circulen entre el mayor número de estudiantes, docentes e investigadores.

En este contexto, iniciamos la publicación de una nueva colección de libros institucionales de carácter académico y costo reducido, que ofrece a los jóvenes estudiantes de los niveles medio superior y superior un acceso más directo hacia el conocimiento forjado en el esfuerzo y la dedicación de los docentes e investigadores del propio Instituto.

Este material bibliográfico especializado, se nutre en parte de trabajos originales de nuestra planta de profesores, lo que reviste la mayor importancia puesto que además de contemplar de forma particular los aspectos pedagógicos específicos que desarrollan en su práctica diaria, permite

incentivarlos y demuestra que en México contamos con la suficiencia científico-técnica que nos permitirá impulsar el desarrollo del país.

Este programa editorial pretende abarcar gran parte de las materias que integran el conjunto de planes de estudio del Instituto y reflejar en sus publicaciones la unificación de esfuerzos y voluntades que, sin lugar a dudas, repercutirán en una entusiasta aceptación estudiantil. Además, se inserta en el espíritu que ha distinguido siempre al Politécnico, de realizar la encomiable tarea de llevar el conocimiento científico y tecnológico a los sectores mayoritarios de nuestro país.

En un periodo histórico como el que vivimos, esta tarea reviste suma importancia, ya que se hace en extremo urgente extender la ayuda institucional para que nuestros educandos encuentren los apoyos que les faciliten el continuar sus estudios profesionales, tan necesarios para el desarrollo de la nación.

Este proyecto editorial seguramente marcará un nuevo rumbo en el proyecto académico del Instituto Politécnico Nacional, e impactará en la educación tecnológica y en el desarrollo integral del México del siglo XXI.

Diódoro Guerra Rodríguez

PROLOGO

La velocidad de la vida y la globalización del mundo se ha dado porque especialistas de diferentes áreas interactuan entre si llevándolos a tomar decisiones que afectan a un gran número de personas. Esta interacción se debe, pensamos los autores, a que las universidades e institutos de enseñanza superior tuvieron el buen tino de proponer la interdisciplinaridad en la curricula de todas sus licenciaturas. En este tiempo, al revisar los programas de los cursos básicos de cualquier licenciatura se observa que ofrecen, todos ellos , el acceso a una cultura matemática común a todo estudiante de nivel medio superior y superior.

Los puntos anteriores fueron el pretexto que nos llevo a escribir el presente curso de Cálculo Diferencial; es decir, este curso esta ideado para que un estudiante, en su último año de bachillerato o su primer curso de licenciatura, tenga acceso a la cultura matemática que, en cursos avanzados de licenciatura, darán los profesores por conocida.

Tratamos de que el estudiante tenga un acercamiento a las matemáticas más amigable pero sin descuidar el aspecto deductivo que caracterizan a estas, por eso a lo largo del trabajo se encuentra con bastantes problemas resueltos que garantizan al estudiante tener una buena herramienta para enfrentarse a los problemas propuestos sin mayores dificultades, aunque sin olvidar algunos problemas que inviten a reflexionar sobre los conceptos presentados en el libro.

Las definiciones y teoremas están enmarcados para tener un acceso rápido a la información y, a la vez, hacer menos rigida una disciplina tradicionalmente dificil. Se trató de no abusar de la notación y ejemplificar con gráficas la mayoría de los conceptos, pues el saber interpretar las gráficas lleva al profesionista a una mejor toma de decisiones.

El primer apéndice ofrece una breve introducción a la Lógica, haciendo énfasis en su aspecto deductivo. El segundo apéndice presenta un breviario de las matemáticas conocidas por todo estudiante de nivel medio superior.

Es importante decir que la elaboración de este texto cae dentro del plan que se propusieron profesores de la UPIICSA-IPN, hace cinco años, para ofrecer libros propios que sirvan de guia en la mejora del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a nivel bachillerato y superior. También agradecemos la colaboración de todos los profesores que tuvieron la paciencia y el tiempo de leer el manuscrito ofreciendo sugerencias y comentarios.

Contenido

Capítulo cuatro :
Límites y Continuidad 74

Capítulo cinco :
La derivada y funciones de clase C^k 102

Capítulo seis :
Aplicaciones de la Derivada 135

Apéndice uno :
Lógica Elemental 173

CAPITULO 1

Sobre la teoría de conjuntos

1.0. NOTACIÓN

En el desarrollo de cualquier teoría relacionada con la Matemática , resultan imprescindibles: el empleo de la notación y los conceptos relacionados con la teoría de **conjuntos**.
No definiremos lo que es un **conjunto** puesto que no está en nuestras posibilidades, sin embargo lo entenderemos como una proposición abierta que se hace verdadera con sólo ciertos sujetos , a estos sujetos los denominaremos elementos del **conjunto** .

Ejemplos
1.- La proposición abierta $x^2 - 9 = 0$, es verdadera cuando $x = 3$ y $x = -3$, es decir , el conjunto $\{ 3 , -3 \}$ es equivalente a la proposición abierta $x^2 - 9 = 0$.

2.- La proposición abierta **x es un día de la semana** , es verdadera cuando x se sustituye por : Lunes, Martes, Miércoles, Jueves , Viernes , Sábado o Domingo , es decir el conjunto { Lunes , Martes , Miércoles , Jueves , Viernes , Sábado , Domingo } es equivalente a la proposición abierta : **x es un día de la semana** .

Como el lector seguramente observó , existen dos formas de representar a un conjunto , la primera de ellas se denomina **enumeración o extensión** y consiste en proporcionar una lista de los elementos , separados por comas y encerrados por llaves .

Un conjunto está representado por **comprensión o propiedad** cuando se utiliza la notación $\{ x : P(x) \}$ (que se lee "conjunto de los elementos x tales que satisfacen la propiedad $P(x)$") , donde $P(x)$ es una proposición abierta .

Ejemplos

1.-	$A = \{ x : x^3 = 1 \}$	Por **propiedad**
	$A = \{ 1 \}$	Por **extensión**
2.-	$B = \{ 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots \}$	Por **extensión**
	$B = \{ x \in \mathbb{N} : x \text{ es impar} \}$	Por **propiedad**.

1.1. RELACIONES EN LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Generalmente los elementos de un conjunto se representan por medio de letras minúsculas del alfabeto y los conjuntos se designan por las letras mayúsculas de los alfabetos **griego** o **latino** o símbolos de mayor tamaño que los utilizados para representar a los elementos.

CAPITULO 1 SOBRE LA TEORIA DE CONJUNTOS 2

Definición 1
RELACIÓN DE PERTENENCIA
Para indicar cuando un elemento x pertenece a un conjunto utilizamos la notación :
$x \in A$
El símbolo $\in$ significa pertenece y se denomina relación de pertenencia , si x no pertenece al conjunto A , escribimos $x \notin A$.
Observación. La relación de pertenencia actúa entre un elemento y un conjunto.

Definición 2
RELACIÓN DE CONTENCIÓN
Si A y B son dos conjuntos diremos que A es **subconjunto** de B y escribiremos $A \subseteq B$ si y sólo si cada elemento de A pertenece también a B .

Proposición 1
IGUALDAD DE DOS CONJUNTOS
Sean A , B dos conjuntos , entonces $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, esta definición garantiza que dos conjuntos iguales contienen los mismos elementos .

Ejemplos
Si $A = \{ x : x > 0 \}$, entonces
$1 \in A$, $2 \notin A$, $-3 \notin A$, $0 \notin A$,
$\{ x : x > 3 \} \subseteq A$
$\{ x : x > 10 \} \subseteq A$
$\{ 1, 2, 3 \} = \{ 3, 2, 1 \} = \{ 1, 1, 2, 3 \}$.
En cada problema específico se considera un conjunto U como referencia y generalmente se trabaja con partes de este conjunto , es decir , sólo son de interés los subconjuntos de él , este conjunto fundamental varía de problema a problema , U se denomina **conjunto universo** .

Definición 3
CONJUNTO UNIVERSO
$$U = \{ x : x = x \}.$$

Puede ocurrir que un conjunto no tenga elementos, tal conjunto se denomina vacío y se representa por el símbolo $\varnothing$ o por $\{ \ \}$.

Definición 4
CONJUNTO VACÍO
$$\varnothing = \{ x : x \neq x \} \text{ o } \varnothing = \{ \ \}.$$

Los conjuntos se pueden combinar para dar origen a otros, las reglas más comunes de operación son las siguientes :

Definición 5
OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS
$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ y } x \in B \}$ **intersección de dos conjuntos**

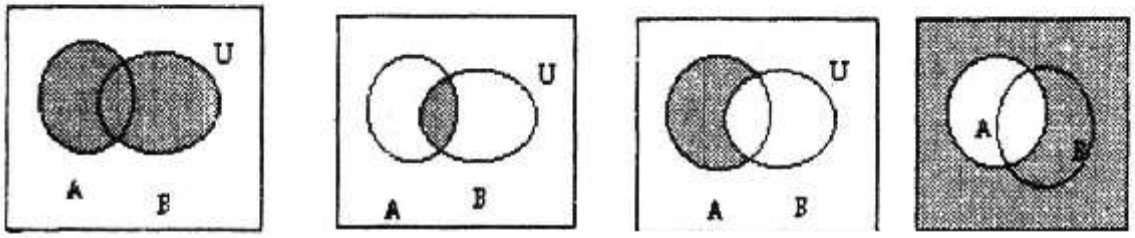
$A \cup B = \{ x : x \in A$ **ó** $x \in B$ **, o x está en ambos conjuntos** $\}$ **unión de dos conjuntos**

$A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ pero } x \notin B \} = \{ x \in U : x \notin B \}$ **diferencia de dos conjuntos**

también , si $A \subset U$ entonces el conjunto $U \setminus A$ se denomina , complemento de A y se representa como :

$$A^c = U \setminus A = \{ x \in U : x \notin A \} .$$

Estas operaciones pueden representarse gráficamente mediante dibujos que se conocen como diagramas de Venn- Euler.



$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $A - B$ $\qquad$ A^c

Figura (1.1) Representación de las operaciones entre conjuntos.

En problemas sobre combinación de conjuntos en los que existen dos o más operaciones y cierto número de símbolos de agrupamiento (paréntesis , corchetes , llaves , etc.) , es conveniente utilizar las siguientes reglas en el orden de operación :

1° Jerarquizar las operaciones involucradas de acuerdo a :

jerarquía	**operación**
Alta	$\setminus$
Media	$\cap , \cup$
Baja	^{c}

2° Una operación que esté contenida en un símbolo de agrupamiento tendrá menor jerarquía que otra que no lo esté .

Ejemplos

Si $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $A = \{ 1, 2, 5 \}$ y $B = \{ 2, 3, 4 \}$.
Evaluar :

1.- A^c , B^c.
2.- $A \cup B$, $A \cap B$.
3.- $A \setminus B$, $B \setminus A$.
4.- $(A \cap B)^c$, $(A \cup B)^c$.
5.- $(A \cup B)^c \setminus (B \setminus A)$.
6.- $A^c \setminus [A \setminus (A \cup B)]$.

7.- $\left[\; (A \cup B^c) \cup (B \setminus A) \; \right]^c$

Solución

Es conveniente aclarar que a menor número asignado , menor es la jerarquía de la operación y en consecuencia ésta se tiene que efectuar antes .

1.- $A^c = \{3,4\}$, $B^c = \{1,5\}$

2.- $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $A \cap B = \{2\}$

3.- $A \setminus B = \{1,5\}$, $B \setminus A = \{3,4\}$

4.- $(A \overset{1}{\cap} B)^c = \{2\}^c = \{1,3,4,5\}$

5.- $(A \overset{1}{\cup} B)^{\overset{3}{c}} \overset{4}{\setminus} (B \overset{2}{\setminus} A) = \{1,2,3,4,5\}^c \overset{4}{\setminus} \{3,4\}$
$= \{\quad\} \setminus \{3,4\}$
$= \varnothing$.

6.- $A^{\overset{3}{c}} \overset{4}{\setminus} (A \overset{2}{\setminus} (A \overset{1}{\cup} B)) = A^{\overset{3}{c}} \overset{4}{\setminus} (A \overset{2}{\setminus} \{1,2,3,4,5\})$
$= A^c \overset{4}{\setminus} \{\quad\}$
$= \{3,4\} \setminus \{\quad\}$
$= \{3,4\}$.

7.- $\left[\; \left[(A \overset{2}{\cup} B^{\overset{1}{c}}) \overset{4}{\cup} (B \overset{3}{\setminus} A) \right]^{\overset{3}{c}} \right] = [A \overset{2}{\cup} \{1,5\} \overset{4}{\cup} (B \overset{3}{\setminus} A)]^c$
$= [\{1,2,5\} \cup \{3,4\}]^c$
$= [\{1,2,3,4,5\}]^c$
$= \{\quad\}$.

También es posible operar con diagramas.

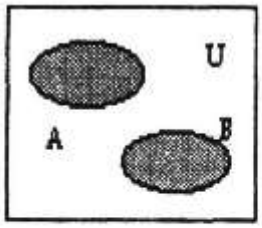
Ejemplos

Construya los diagramas de Venn - Euler para las expresiones :

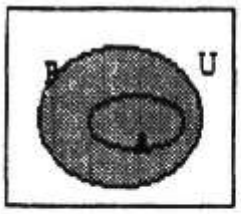
1.- $A \cup B$ si A , B son ajenos (**esto significa que** $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$) , si $A \subseteq B$, si $A = B$.
2.- $(A \cup B)^c$
3.- $(A \setminus B)^c \cup B^c$
4.- $(A \cap B^c) \setminus A$
5.- $(A \setminus B) \cup B$

Soluciones

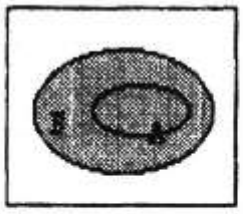
1.- $A \cup B$ si



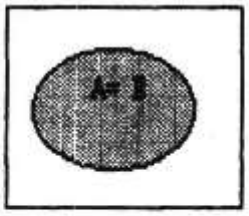
A , B son ajenos



Si $A \subseteq B$

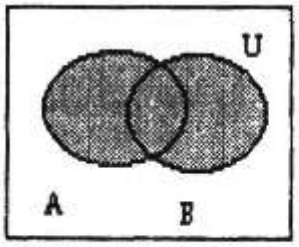


Si $B \subseteq A$

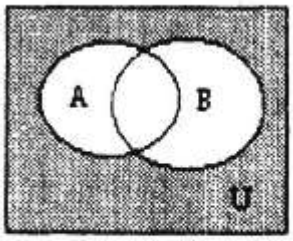


Si $A = B$

2.- $(A \overset{1}{\cup} B)^c$

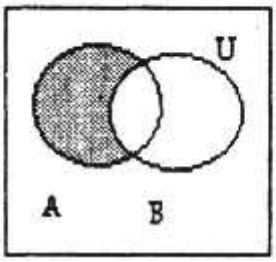


1° $A \cup B$

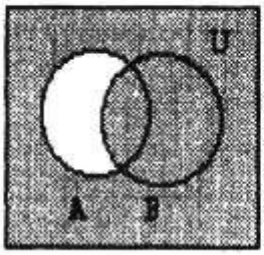


2° $(A \cup B)^c$

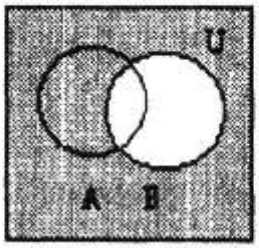
3.- $(A \overset{1}{\setminus} B)^{\overset{2}{c}} \overset{3}{\cup} B^{\overset{2}{c}}$.



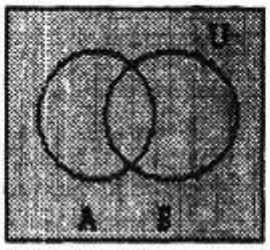
1° $A \setminus B$



2° $(A \setminus B)^c$

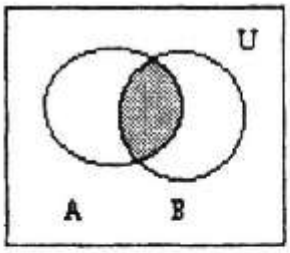


3° B^c

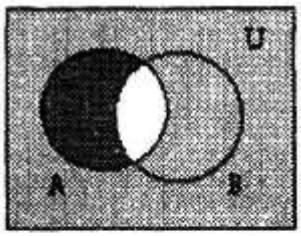


4° $(A \setminus B)^c \cup B^c$

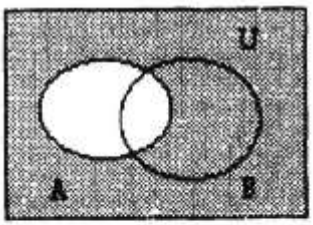
4.- $(A \overset{1}{\cap} B)^{\overset{2}{c}} \overset{3}{\setminus} A$.



1° $A \cap B$

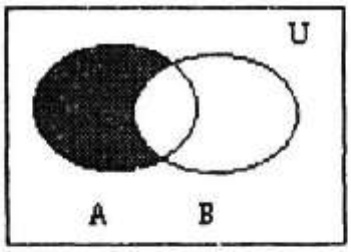


2° $(A \cap B)^c$

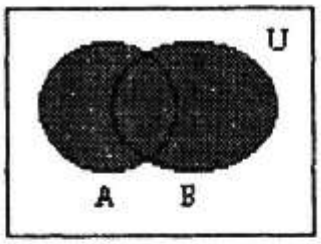


3° $(A \cap B)^c \setminus A$

5.- $(A \overset{1}{\setminus} B) \overset{2}{\cup} B$.



1° $A \setminus B$



2° $(A \setminus B) \cup B$

Las operaciones entre conjuntos , unión , intersección , diferencia y complemento satisfacen las siguientes propiedades :

Proposición 2
Propiedades de las operaciones entre conjuntos
Si A , B , C son conjuntos de un universo **U**, entonces son válidas las siguientes igualdades

1.- Idempotencia $A \cup A = A$ $\quad A \cap A = A$
2.- Conmutativa $A \cup B = B \cup A$ $\quad A \cap B = B \cap A$
3.- Asociativa $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4.- Distributiva $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5.- De Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $\quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
6.- De complemento $A^{cc} = A$, $\emptyset^c = \mathbf{U}$, $\mathbf{U}^c = \emptyset$, $A \cap A^c = \emptyset$, $A \cup A^c = \mathbf{U}$
7.- Conjunto vacío $\emptyset \subset A$, $\emptyset \cup A = A$, $\emptyset \cap A = \emptyset$.
8.- Definición de diferencia $A \setminus B = A \cap B^c$.

Ejemplos

Utilizando las propiedades anteriores simplifique las expresiones

1.- $(A^c \cap B^c)^c$
2.- $[\, A^c \cup (A^c \cup B^c)\,]^c$
3.- $(A \cap B)^c \cup B^c$
4.- $\{[(A^c \cup B) \cap [(A^c)^c \cup B]]\}^c$
5.- $(A \cap B)^c \cup B$

Soluciones

1.- $(A^c \cap B^c)^c = ((A \cup B)^c)^c = A \cup B$.

2.- $[A^c \cup (A^c \cup B^c)]^c = (A^c \cup A^c) \cup B^c)^c$
$= (A^c \cup B^c)^c$
$= A \cap B$.

3.- $(A \cap B)^c \cup B^c = ((A \cap B) \cap B)^c$
$= [(A \cap (B \cap B)]^c$
$= (A \cap B)^c$
$= A^c \cup B^c$

4.- $\{[(A^c \cup B) \cap [(A^c)^c \cup B]]\}^c = \{[(A^c \cup B) \cap [A \cup B]]\}^c$
$= [A^c \cup B]^c \cup (A \cup B)^c$
$= (A \cap B^c) \cup (A \cup B)^c$
$= (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$
$= B^c \cap (A \cup A^c)$
$= B^c \cap \mathbf{U} = B^c$

5.- $(A \cap B)^c \cup B = (A^c \cup B^c) \cup B$
$= A^c \cup (B^c \cup B)$
$= A^c \cup \mathbf{U}$
$= \mathbf{U}$.

1.1.1. Otras operaciones en la teoría de conjuntos

Frecuentemente es necesario conocer los subconjuntos que tiene un conjunto , el conjunto formado por los subconjuntos de un conjunto se denomina **conjunto potencia**.

Definición 6

CONJUNTO POTENCIA

Sea A es un conjunto no vacío , entonces

$$2^{(A)} = P(A) = \{x : x \subset A\}$$

Nótese que tanto $2^{(A)}$ como sus elementos son conjuntos es por lo tanto por claridad lógica referirnos a él como familia de conjuntos.

Ejemplos

1.- Si $A = \{a\}$, entonces $2^{(A)} = \{\varnothing, \{a\}\}$

2.- Si $A = \{1, 3, 5\}$, entonces
$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}, \{1, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$.

En la construcción del sistema cartesiano de coordenadas interviene la operación entre dos conjuntos denominado producto cartesiano.

Definición 7
PRODUCTO CARTESIANO
Si A , B son conjuntos no vacíos, el producto cartesiano o conjunto producto de A, B se define como : $A \times B = \{ (a, b) : a \in A \text{ y } b \in B \}$

Nota: En caso de que A = B se tiene el producto cartesiano de un conjunto por si mismo y se denota como A^2.
Ejemplos

1.- Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{c\}$, entonces $A \times B = \{(a, c), (b, c)\}$.
2.- $A = \{1, 2\}$, $B = \{-1, 2, 3\}$

$$A \times B = \{(1, -1), (1, 2), (1, 3), (2, -1), (2, 2), (2, 3)\}.$$

Entre las propiedades del producto cartesiano destacan

1.- $A \times B \neq B \times A$
2.- Se llama diagonal de $A \times A$ al conjunto formado por las parejas (a, a)

1.2. CARDINAL DE UN CONJUNTO

En esta sección estableceremos el concepto de cardinal de un conjunto.

Definición 8
El conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\}$, se denomina conjunto de los números **naturales**.

Definición 9
CONJUNTOS EQUIPOTENTES
Dos conjuntos A y B se dicen **equipotentes** sí y sólo si los podemos relacionar biunívocamente (esto significa que a cada elemento del conjunto A se le asocia un único elemento del conjunto B y a cada elemento del conjunto B le corresponde un sólo elemento del conjunto A) . Dos conjuntos **equipotentes** se representan como $A \sim B$.

Ejemplos
1.- Si $A = \{x : x \text{ es un día de la semana}\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, entonces $A \sim B$.
2.- Si $X = \{x : x^2 = 1\}$, $Y = \{1, 2\}$, entonces $X \sim Y$.
Ahora ya estamos en condiciones de definir el cardinal de un conjunto.

Definición 10
CONJUNTO FINITO
Diremos que un conjunto **A es finito** y que contiene **n** elementos si :

$$A \sim \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots n\}$$

Si este es el caso , **n** se denomina el **cardinal** de **A** y se representa como :

$$\#A = n \quad \text{o como} \quad n(A) = n.$$

Ejemplos
1.- Si $A = \{x : x \text{ es un día de la semana}\}$, entonces $A \sim \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $\#A = 7$.
2.- Si $X = \{x : x^2 = 1\}$, entonces $X \sim \{1, 2\}$ y $\#A = 2$.

Definición 11
CONJUNTO NUMERABLE , CONJUNTO NO NUMERABLE
1.- Un conjunto A se denomina infinito numerable , si $A \sim \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, en este caso se dice que A tiene cardinalidad **aleph - cero** .
2.- Un conjunto **finito o infinito numerable** se denomina conjunto **numerable** .
3.- Un conjunto que **no es numerable** se conoce como conjunto **no numerable** .

Ejemplos
1.- A = { x : x es un día de la semana }, es finito numerable y # A = 7.
2.- B = { 1 , 4 , 9 , 16 , 25 ,... }, es infinito numerable y # B = **aleph - cero**
3.- C = { x : x es un múltiplo de 5 }, es infinito numerable y # C = **aleph - cero** .
4.- El número de puntos en el segmento de recta [0 , 1], es no numerable .

2.2.1. Propiedades del cardinal de un conjunto

El **cardinal** de un conjunto satisface las siguientes propiedades :

Proposición 3
PROPIEDADES DEL CARDINAL DE UN CONJUNTO
Si #A y # B son los cardinales de A y B respectivamente , entonces :
1.- $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$
2.- $\#(A \cup B) = \#A + \#B$, si A y B son conjuntos ajenos.
3.- $\#(A - B) = \#A - \#(A \cap B)$
3.- Si el cardinal $\#U = n$, donde U representa un universo, entonces :
a) $\#A^c = n - \#A$
b) $\#P(A) = 2^n$
c) $\#(A \times B) = \#(A) \cdot \#(B)$ "El número de elementos de A×B, es igual al número de elementos de A por el número de elementos de B"

EJERCICIOS

I.- Escriba por extensión los conjuntos
1.- { x : x es un mes del año } .
2.- { x : x es conectivo lógico } .
3.- { x : x es un múltiplo de 5 }

II.- Escriba por propiedad los conjuntos
1.- { 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 ,... } .
2.- { 1 , 4 , 9 , 16 , 25 ,... } .

III.- Si A = { x : x = 0 }, B = { -1 , 0 , 1 }, C = { 0 , 1 , - 1 } y D = { - 1 , 1 , - 1 } ¿ Cuáles de las proposiciones dadas a continuación son correctas ? Argumente cada una de sus respuestas .

1.- A = B	2.- A = C	3.- $A \subseteq B$
4.- $A \subseteq C$	5.- $B \subseteq C$	6.- $C \subseteq A$

7.- $C \subseteq B$ 8.- $0 \in B$ 9.- $0 \notin B$ 10.- $A = D$
11.- $D \subseteq A$ 12.- $B \subseteq A$ 13.- $A \notin B$ 14.- $C \in C$

IV.- Si tomamos como universo el conjunto de los dígitos y $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ verifique que se cumplen las relaciones

1.- $A \cap B \subseteq B$.
2.- $A \subseteq A \cup B$.
3.- $B \subseteq A \cup B$.
4.- $A \cap B \subseteq A \cup B$.
5.- $B \cup B = B$.
6.- $B \cup B = B \cap B$.

V.- Si $U = \{1, 2, 3, ..., 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 3, 8, 9\}$, $B = \{7, 8, 9, 10\}$, $C = \{5, 6, 7\}$
Evalúe, cuando sea posible :

1.- $A \cup B$.
2.- $(A \cup B)^c$.
3.- $(A \cup B) \setminus C$.
4.- $(A^c \cap B) \cup C$.
5.- $(C \cup A)^c \cup B$.
6.- $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
7.- $(A \cap C)^c \cup (A^c \cup C)$.
8.- $[A \times (A \cup C)]$.
9.- $[C^c \cup B^c \cup A^c]$.
10.- $(A \times B) \cap (B \cup A)$.
11.- $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$.
12.- $(A^c \cup B^c)^c \cup C^c$.
13.- $(A \cap B) \setminus (A \cup B)$.

VI.-¿ Es posible definir conjuntos tales que ?

1.- ¿ $A = A^c$?
2.- ¿ $A \subset A^c$?

VII .- Construya el diagrama de Venn-Euler correspondiente a las expresiones:
1.- $A^c \cap B^c \cap C$.
2.- $A \setminus (B \cup C)$.
3.- $(R \cap Q) \setminus S^c$
4.- $(R \cup S \cup Q) \cap (R \setminus S)$.
5.- $(M \cup N) \cup (M \setminus N) \cup (M \cap N)$.

VIII.- Utilizando diagramas de Venn-Euler verifique las propiedades del álgebra de conjuntos .

IX.- Utilizando las propiedades del álgebra de conjuntos simplifique
1.- $(A^c \cap B) \cup A$.
2.- $A \cup (B \cup A)^c$

3.- $A \setminus A^c$.
4.- $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
5.- $A^c \cap (A \cup B)^c$.

X.- Utilizando las propiedades del álgebra de conjuntos verifique

1.- $(B \cap C) \cup A = A \cup (B \cap C)$.
2.- $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$.
3.- $A \cup (A^c \cap B) = (A \cup B)$.
4.- $A \cup (A \cap B) = A$.

XI.- Determine $P(*)$ si

1.- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
2.- $B = \{1, 7\}$
3.- $C = \{1\}$
4.- $P(A \cup B)$ con los conjuntos anteriores
5.- $P(A \setminus B)$ con los conjuntos anteriores
6.- $P(A \cap B)$ con los conjuntos anteriores

XII.- Si $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$ y $\mathbf{U} = \{1, 2, 3, 4\}$ verifique
1.- $(A \cup B) \times C = (A \times B) \cup (B \times C)$.
2.- $A^c \times B^c$.
3.- $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$.

XIII.- Establezca una relación entre los conectivos lógicos y las operaciones entre conjuntos.

XIV.- Generalice las definiciones de operaciones entre conjutos.

XV.- ¿Cuales de las propiedades del álgebra de conjuntos satisface la operación "producto cartesiano" ?

XVI.- Si $\mathbf{U} = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 3, 8, 9\}$, $B = \{7, 8, 9, 10\}$, $C = \{5, 6, 7\}$ determine el cardinal de los siguientes conjuntos cuando este tenga sentido :

1.- $A \cup B$.
2.- $(A \cup B)^c$.
3.- $(A \cup B) \setminus C$.
4.- $(A^c \cap B) \cup C$.
5.- $(C \cup A)^c \cup B$.
6.- $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
7.- $(A \cap C)^c \cup (A^c \cup C)$.
8.- $[A \times (A \cup C)]$.
9.- $[C^c \cup B^c \cup A^c]$.
10.- $(A \times B) \cap (B \cup A)$.
11.- $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$.
12.- $(A^c \cup B^c)^c \cup C^c$.
13.- $(A \cap B) \setminus (A \cup B)$.
14.- $P(A)$, $P(\mathbf{U})$, $P(C)$.

CAPÍTULO 2

Propiedades de los números reales

2.1. CONJUNTOS DE NÚMEROS

Existen diversos métodos para introducir al estudiante el sistema de los números reales , el más común consiste en iniciar presentando el conjunto de los números **naturales** que está compuesto por los enteros positivos :

$$\aleph = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$$

Nota : Es conveniente aclarar que algunos autores incluyen al **cero** en este conjunto .
Para luego construir un sistema más amplio que cumpla un número de propiedades determinadas, utilizando el sistema anterior como base, se introduce el conjunto de los números **enteros**

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots \}$$

Que al extenderlo da origen al conjunto de los números **racionales** (cocientes de números enteros , que también se conocen como fraccionarios) .

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in Z \text{ y } n \neq 0 \right\}$$

El conjunto anterior se utiliza en la construcción de los números **irracionales** (números tales como : π , e , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, que no son racionales , un estudio con mayor detalle se desarrolla al final de este capítulo) .

El paso relativamente más complicado en la construcción de los números reales es el que nos lleva de los números **racionales** a los números **irracionales** .

Consideraremos al conjunto de los números **reales** como entes u objetos que satisfacen cierto número de propiedades denominadas axiomas, este conjunto se representa mediante el símbolo $\Re$.
Notación
Las letras del alfabeto **a** , **b** , **c** , ... , **x** , **y** , **z** que aparecen en los axiomas representan a los números reales , estos axiomas se presentan a continuación y se clasifican en tres categorías :

2.1.1. Axiomas de 1ª Categoría

En el conjunto de los números reales se supone la existencia de dos operaciones fundamentales denominadas suma y producto , que operan entre dos cualquiera números reales.

Axioma 1 Propiedad de cerradura

$$a + b \in \Re \qquad a \cdot b \in \Re$$

Establece que la suma y el producto de dos números reales siempre será un número real.

Axioma 2 Propiedad conmutativa .

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a \ .$$

Axioma 3 Propiedad asociativa .

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) c \ .$$

Axioma 4 Propiedad distributiva .

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Esta propiedad relaciona la operación suma con la operación producto .

Axioma 5 Existencia de neutros .

Para todo $a \in \Re$, existe $0 \in \Re$ tal que $a + 0 = 0 + a$ (neutro aditivo) .
Para todo $a \in \Re$, existe **un único** $1 \in \Re$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (neutro multiplicativo) .

Axioma 6 Existencia de inversos .

Para todo $a \in \Re$ existe un único $-a \in \Re$ tal que $a + (- a) = (- a) + a = 0$
(inverso aditivo) .
Este axioma define la operación que conocemos como resta .

Para todo $a \neq 0 \in \Re$ existe un único $a^{-1} \neq 0 \in \Re$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$
(inverso multiplicativo) .
Este axioma , además de introducir la división, prohibe **dividir por el cero** .

Los axiomas anteriores originan la rama de las Matemáticas comunmente conocida como Algebra y su estudio se efectua en cursos anteriores y su manejo será fundamentalmente en la comprensión de los capítulos subsecuentes.

2.1.2. Axiomas de 2ª Categoría

En el conjunto $\Re$ se puede establecer una relación de orden , por medio de esta relación , se puede decidir si un número es mayor , menor o igual que otro.

Definición 1

RELACIONES DE ORDEN TOTAL

La relación de orden la representamos por medio del símbolo > y la denominaremos relación de orden total (o desigualdad estricta) , la interpretaremos según la dirección que consideremos en su lectura .

" El número de la izquierda es mayor que el número de la derecha ".

$$\overrightarrow{a > b} \quad \text{o equivalente} \quad \overrightarrow{b < a}$$

" El número de la derecha es menor que el número de la izquierda ".

Observe que el número más pequeño se encuentra en la parte más aguda de la relación de orden .

Ejemplo

$7 > 5$ se lee : "siete es mayor que cinco" o "cinco es menor que siete "

El conjunto $\Re$ se divide en dos clases o categorías , el punto que las separa se denomina origen y corresponde al número 0

$\Re^+$ " El conjunto de los números reales positivos ".

$\Re^-$ " El conjunto de los números reales negativos ".

además $\Re^+ \cup \{ 0 \} \cup \Re^- = \Re$

Definición 2

RELACIONES DE ORDEN PARCIAL

Diremos que $a < b$ si $b - a \in \Re^+$; $a \leq b$ quiere decir que $a < b$ o $a = b$ y el símbolo $\leq$ se denomina desigualdad no estricta o relación de orden parcial .

En consecuencia se tiene que $a > 0$ si y sólo si $a \in \Re^+$, si $a < 0$ se dice, a es negativo y se escribe $a \in \Re^-$

A partir de las definiciones anteriores es posible establecer y demostrar las propiedades de la relación de orden (que se utilizan en la solución de las desigualdades o inecuaciones) , a continuación se proporcionan las más importantes :

Proposición 1

PROPIEDADES DE LA RELACIÓN DE ORDEN TOTAL .

a) **Transitiva** si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

b) **Traslación** si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.

c) Si $a < b$ y $c \in \Re^+$ entonces $ac < bc$.

d) $\frac{1}{a}$ tiene el signo de a .

e) Si $a < b$ y ambos tienen el mismo signo, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

f) Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$ (El cuadrado de un número diferente de cero es positivo) .

g) Si $a < b$ y $c \in \Re^-$ entonces $a \cdot c > b \cdot c$ (obsérvese que al multiplicar o dividir los miembros de una desigualdad por un número negativo , la relación de orden se invierte) .

h) Si $a \cdot b > 0$ entonces $a , b \in \Re^+$ ó $a , b \in \Re^-$

A continuación se demuestran unas de estas propiedades :

1.- Propiedad transitiva. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

Supongamos que:	$a < b$	Hipótesis
	$b - a \in \Re^+$	Definición

$b - a + 0 \in \Re^+$	Neutro aditivo
$b - a + c - c \in \Re^+$	Inverso aditivo
$b + c - (a + c) \in \Re^+$	Asociativa, conmutativa y distributiva.
$a + c < b + c$	Definición.

□

2.- Propiedad si $a < b$ y $c \in \Re^-$ $\Rightarrow$ $ac > bc$

Supongamos que

$a < b$ y $c \in \Re^-$	Hipótesis
$b - a \in \Re^+$	
$(b - a)c \in \Re^-$	Ley de los signos
$bc - ac \in \Re^-$	Ley distributiva
$ac > bc$	Definición.

□

Es conveniente tener en cuenta que la relación **de orden parcial** " $\leq$ " (también llamada desigualdad no estricta) satisface las mismas propiedades que la relación **<** .

2.1.3. Intervalos

En el cálculo diferencial se utilizan subconjuntos de los números reales que se denominan intervalos y están estrechamente relacionados con las relaciones de orden . Algunas veces es importante distinguir entre intervalos que incluyen a sus extremos y aquellos que no lo incluyen .

Definición 3

TIPOS DE INTERVALOS

1.- Intervalo abierto

Notación en forma de Intervalo — Notación en forma de conjunto

(a, b) — $\{ x \in \Re : a < x < b \}$

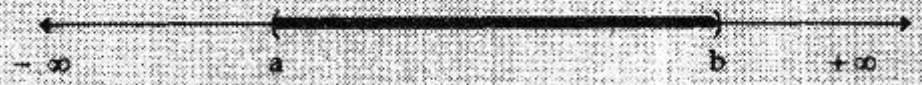


Figura (2.1) Representación gráfica de un intervalo **abierto** en la recta real .

Características :

No incluye los extremos .

Se asocia a una desigualdad estricta .

2.- Intervalo cerrado

Notación en forma de Intervalo — Notación en forma de conjunto

$[a, b]$ — $\{ x \in \Re : a \leq x \leq b \}$

Figura (2.2) Representación gráfica de un intervalo **cerrado** en la recta real .

Características :

Incluye los extremos .

Se relaciona con la desigualdad no estricta .

3.- Intervalos semiabiertos

Notación en forma de Intervalo — Notación en forma de conjunto

$[a, b)$ — $\{ x \in \Re : a \leq x < b \}$

Figura (2.3) Representación gráfica de un intervalo **semiabierto** en la recta real.

Características :

Incluyen un sólo extremo .

Notación en forma de Intervalo — Notación en forma de conjunto

$(a, b]$ — $\{ x \in \Re : a < x \leq b \}$

Figura (2.4) Representación gráfica de un intervalo **semiabierto** en la recta real.

4.- Intervalos infinitos

$(a, +\infty) = \{ x \in \Re : x > a \}$

$[a, +\infty) = \{ x \in \Re : x \geq a \}$

$(-\infty, a) = \{ x \in \Re : x < a \}$

$(-\infty, a] = \{ x \in \Re : x \leq a \}$

2.2. SOLUCIÓN DE INECUACIONES

En el estudio del comportamiento de una función frecuentemente es necesario resolver ciertas expresiones algebraicas que involucran a la relación de orden y que comunmente se denominan **inecuaciones** o **desigualdades** , las siguientes secciones tienen como objeto proporcionar los métodos elementales para solucionar éste tipo de expresiones .

2.2.1. Un primer método en la determinación de intervalos solución

Las propiedades de la relación de orden presentadas en la sección anterior son útiles en la solución de inecuaciones , a continuación se presentan algunos ejemplos :

Ejemplos
Resolver las siguientes inecuaciones y expresar la solución en términos de intervalos.

1.- $13x + 2 > 7$

$13x > 5$

$x > \frac{5}{13}$

$\therefore \quad x \in [\frac{5}{13}, +\infty)$.

2.- $(x+1)^2 + 3 \geq (x-1)^2 - 2$

$x^2 + 2x + 1 + 3 \geq x^2 - 2x + 1 - 2$

$4x \geq -5$

$x \geq -\frac{5}{4}$

$\therefore \quad x \in [-\frac{5}{4}, +\infty)$

3.- $16x + 2 \leq 23x - 1$

$-7x \leq -3$

$x \geq \frac{-3}{-7}$

$x \geq \frac{3}{7}$

$\therefore \quad x \in [\frac{3}{7}, +\infty)$.

4.- $3x > 6x + 2 - 3x + 3$.

$3x > 3x + 5$

$0 > 5$

Como esto último es una contradicción , el conjunto solución es el conjunto vacío , es decir $x \in \varnothing$.

5.- $x^2 > x^2 - 3$

$0 > -3$

Esta proposición siempre es válida por lo que la solución es el conjunto de los números reales.

$\therefore \quad x \in \Re$.

No todas las desigualdades se resuelven de manera tan sencilla como las anteriores , por ejemplo la solución de desigualdades cuadráticas requiere un mayor esfuerzo , las reglas de los signos juegan un papel fundamental en esto por lo que es conveniente reescribirlas de la siguiente forma :

Orden total	**Orden parcial**
$(>0)(>0)=>0$	$(\geq 0)(\geq 0)=\geq 0$
$(>0)(<0)=<0$	$(\geq 0)(\leq 0)=\leq 0$
$(<0)(>0)=<0$	$(\leq 0)(>0)=\leq 0$
$(<0)(<0)=>0$	$(\leq 0)(\leq 0)=\geq 0$

6.- $x^2 + 4x + 3 \geq 0$

Se factoriza como $(x+3)(x+1) \geq 0$, para que el producto de dos cantidades sea positivo, ambas deben tener el mismo signo , entonces :

Caso 1

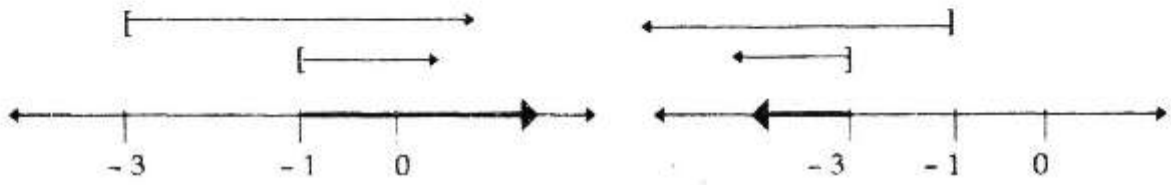
$x+3 \geq 0$ y $x+1 \geq 0$ ó

$x \geq -3$ y $x \geq -1$

Caso 2

$x+3 \leq 0$ y $x+1 \leq 0$

ó $x \leq -3$ y $x \leq -1$



$\therefore \quad x \in (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$.

7.- $x^2 + 6x - 16 < 0$

Solución

Esta desigualdad se factoriza como $(x+8)(x-2) < 0$

Ahora , las cantidades deben tener signos diferentes :

Caso 1

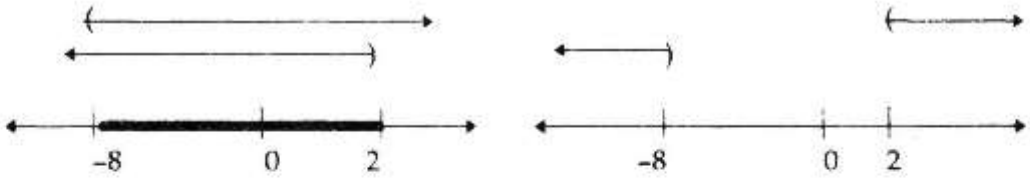
$x+8 > 0$ y $x-2 < 0$ ó

$x > -8$ y $x < 2$

Caso 2

$x+8 < 0$ y $x-2 > 0$

ó $x < -8$ y $x > 2$



$\therefore \quad x \in (-8, 2) \cup \varnothing = (-8, 2)$

8.- $x^2 + 6x + 100 > 0$

El lector notará que el polinomio de la izquierda no admite factorización en $\Re$, en este caso es posible construir un trinomio cuadrado perfecto que ayudara a resolver el problema procede de la siguiente manera :

Solución

$x^2 + 6x > 100$

$x^2 + 6x + 9 > -100 + 9$ (se completó el trinomio cuadrado perfecto).

$$(x+3)^2 > -91$$

Ahora recordemos que el cuadrado de todo número real diferente de cero es positivo por lo que la relación anterior siempre es válida, $\therefore \quad x \in \Re$.

9.- $x^2 + 6x + 30 \leq 0$

Esta inecuación es similar al ejemplo anterior , no es posible factorizar , siguiendo la idea del ejemplo anterior tenemos que :

$x^2 + 6x + 30 \leq 0$

$x^2 + 6x + 9 \leq -30 + 9$

$(x+3)^2 \leq -21$ Obtenemos una contradicción , así que $x \in \varnothing$.

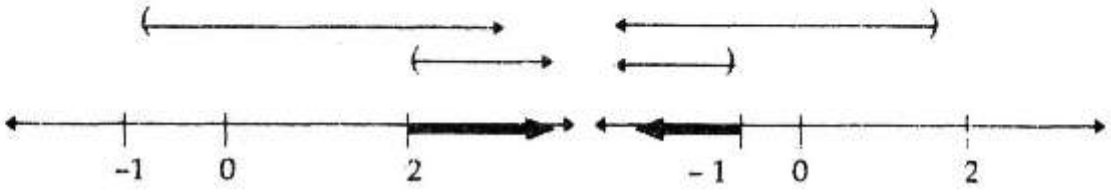
En el caso de desigualdades que involucran cocientes, es posible utilizar las ideas empleadas en los ejemplos anteriores, pero también es necesario recordar las " Leyes de los signos para la división ".

10.- $\dfrac{x+1}{x-2} > 0$

El numerador y el denominador deben tener el mismo signo

Solución

Caso 1				Caso 2			
$x+1>0$	y	$x-2>0$	ó	$x+1<0$	y	$x-2<0$
$x>-1$	y	$x>2$	ó	$x<-1$	y	$x<2$



$$\therefore \quad x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty).$$

11.- $\dfrac{x+1}{x-2} > 2$

Solución

Es conveniente que el miembro derecho de la desigualdad sea cero (para así utilizar el método descrito en el problema anterior) .

$$\frac{x+1}{x-2} > 2 \quad ;$$

$$\frac{x+1}{x-2} - 2 > 0 \; ; \qquad \frac{x+1-2(x-2)}{x-2} > 0 \; ;$$

$$\frac{-x+5}{x-2} > 0$$

Caso 1				Caso 2			
$-x+5>0$	y	$x-2>0$	ó	$-x+5<0$	y	$x-2<0$	
$x<5$	y	$x>2$	ó	$x>5$	y	$x<2$	

$$\therefore \quad x \in (2,5) \; .$$

12.- $\dfrac{2}{x^2-x-2} \leq 0$

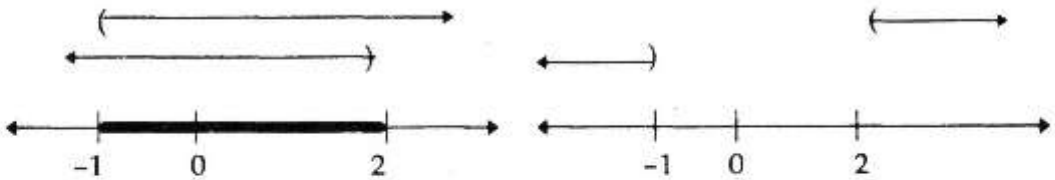
Solución

Algunas veces sólo es necesario considerar el denominador . Note que el numerador es positivo y por lo tanto el denominador es necesariamente menor que cero , es decir :

$$x^2-x-2<0 \; ; \; (x-2)(x+1)<0$$

Por lo que tenemos los siguientes casos :

Caso 1				Caso 2			
$x-2<0$	y	$x+1>0$	ó	$x-2>0$	y	$x+1<0$	
$x<2$	y	$x>-1$	ó	$x>2$	y	$x<-1$	



$$\therefore \quad x \in (-1,2) \cup \varnothing = (-1,2) \, .$$

2.2.2. Otro método de solución de inecuaciones

Existen otros métodos para resolver desigualdades que aún cuando son menos formales que el descrito antes , en muchas ocasiones simplifican el trabajo, a continuación se describe uno de ellos por medio de los siguientes ejemplos :

Ejemplos

1.- $(x-1)(x-2)(x+3) \geq 0$

Solución

Los ceros de la inecuación (puntos de división) son $x=1$, $x=2$ y $x=-3$; si los graficamos sobre la recta real obtenemos los intervalos :

$$(-\infty,-3]$$
$$[-3,1]$$

$$[\ 1,\ 2\ ]$$
$$[\ 2,\ \infty\ )$$

de cada uno de estos intervalos se toma un punto x (llamémosles puntos de prueba y los denotaremos por **pp**) , digamos :

intervalo	pp
$(-\infty, -3]$	-4
$[-3, 1]$	0
$[1, 2]$	1.5
$[2, \infty)$	3

Sustituimos los puntos de prueba en la desigualdad original y en caso de que la desigualdad se satisfaga , el intervalo correspondiente pertenecerá a la solución , en nuestro ejemplo.

intervalo	pp	prueba	
$(-\infty, -3]$	-4	$(-5)(-6)(-1) \geq 0$	Falso
$[-3, 1]$	0	$(-1)(-2)(3) \geq 0$	Cierto
$[1, 2]$	1.5	$(.5)(-.5)(-1.5) \geq 0$	Falso
$[2, \infty)$	3	$(2)(1)(6) \geq 0$	Cierto

Finalmente unimos los intervalos seleccionados

$$\therefore \quad x \in [-3, 1] \cup [2, \infty).$$

2.- $\dfrac{(3x-2)(x-1)}{(3-x)(x+2)} \geq 0$

Solución

Los puntos de división se obtienen de : $3x - 2 = 0$, $x - 1 = 0$, $3 - x = 0$ y $x + 2 = 0$; y los intervalos son

intervalo	pp	prueba	
$(-\infty, -2)$	-3	$\dfrac{[3(-3)-2](-3-1)}{[3-(-3)][(-3)+2]} \geq 0$	Falso
$(-2, \frac{2}{3}]$	0	$\dfrac{(-2)(-1)}{(3)(2)} \geq 0$	Cierto
$[\frac{2}{3}, 1]$	$\frac{4}{5}$	$\dfrac{3[(\frac{4}{5})-2](\frac{4}{5}-1)}{(3-\frac{4}{5})(\frac{4}{5}+2)} \geq 0$	Falso
$[1, 3]$	2	$\dfrac{[3(2)-2](2-1)}{(3-2)(2+2)} \geq 0$	Cierto
$[3, \infty)$	4	$\dfrac{[3(4)-2](4-1)}{(3-4)(4+2)} \geq 0$	Falso

$\therefore\ x \in (-2, \frac{2}{3}] \cup [1, 3]$, observese que no se consideraron los ceros del denominador en la solución .

3.- $\dfrac{x-1}{x+2} < 5$

Solución

Se puede escribir como $\dfrac{4x+11}{x+2} > 0$, los puntos de división corresponden a $x = -\dfrac{11}{4}$ y $x = -2$.

Intervalos	**PP**	**prueba**	
$(-\infty, -\frac{11}{4})$	-10	$\dfrac{4(-10)+11}{-10+2} > 0$	Cierto
$(-\frac{11}{4}, -2)$	-2.9	$\dfrac{4(-\frac{11}{4})+11}{-\frac{11}{4}+2} > 0$	Falso
$(-2, \infty)$	0	$\dfrac{11}{2} > 0$	Cierto

$$\therefore\quad x \in (-\infty, -\frac{11}{4}) \cup (-2, \infty).$$

2.3. VALOR ABSOLUTO

En el conjunto de los números reales se puede definir una métrica y está dada en términos del valor absoluto , este se define a continuación :

Si $x \in \Re$ entonces

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

obsérvese que el valor absoluto es un número real no negativo , su significado geométrico es el siguiente : el valor absoluto de un número x , representa la distancia existente entre el número x y el origen .

Ejemplos

1.- $|27| = +(+27)$ Justificación , al ser $27 > 0$ según la primera parte de la definición de valor absoluto , solamente hay que suprimir las barras de valor absoluto .

2.- $|-13| = 13$ Justificación , como $-13 < 0$, entonces para calcular el valor absoluto hay que preceder a la cantidad contenida en las barras de valor de un signo negativo , es decir :

$$|-13| = -(-13) = 13.$$

2.3.1. Propiedades del valor absoluto

Operar solamente con la definición de valor absoluto resulta ser demasiado complicado por lo que es convieniente establecer propiedades que faciliten esta tarea , en la siguiente proposición se presentan las más útiles.

Proposición 2
PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO
Si $x, y \in \Re$ entonces se cumplen :
1.- $|x|^2 = x^2$. Como consecuencia directa de esta propiedad tenemos :
2.- $|x| = +\sqrt{x^2}$.
3.- $|-x| = |x|$.

Demostración
$|-x| = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|$

□

4.- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ (léase "el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos") .
Demostración

$|x \cdot y| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$

□

5.- Si $y \neq 0$ entonces $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

6.- $x \leq |x|$ y $x \geq -|x|$ ó $-|x| \leq x \leq |x|$.

7.- Si $y > 0$, entonces $|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y$ (esto significa que $-y < x$ y $x < y$).

8.- Si $y > 0$, entonces $|x| \geq y \Leftrightarrow x \geq y$ ó $-y \geq x$.

9.- Desigualdad del triángulo , $|x + y| \leq |x| + |y|$.

El valor absoluto presenta más propiedades en caso de ser necesarias se proporcionarán en la parte conveniente. A continuación se proporcionan una serie de ejemplos de desigualdades que involucran al valor absoluto.

Ejemplos
1.- $|x + 5| < 2$
Solución
Por la propiedad 7 este valor absoluto es equivalente al par de desigualdades :

$-2 < x + 5 < 2$ es decir $x + 5 < 2$ y $-2 < x + 5$, entonces :

$$x < -3 \quad \textbf{y} \quad x > -7$$

en consecuencia $x \in (-7, -3)$.

2.- $|3x - 2| \geq 5$

Solución

Por la **propiedad 8** obtenemos las desigualdades :

$$3x - 2 \geq 5 \quad \text{ó} \quad -5 \geq 3x - 2,$$

Simplificándolas :

$$3x \geq 5 + 2 \quad \text{ó} \quad -3 \geq 3x$$

$$x \geq \frac{7}{3} \quad \text{ó} \quad x \leq -1$$

así la solución es $x \in [\frac{7}{3}, +\infty) \cup (-\infty, -1)$.

3.- $|8x^2 - 160| < -231$.

Solución

La solución es el conjunto vacío , recuerde que el valor absoluto de cualquier cantidad es positivo o cero.

4.- $|x - 5| < 2$

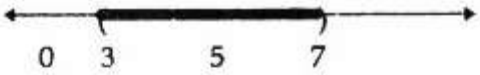
Solución

De acuerdo a la propiedad 7, es posible eliminar las barras de valor absoluto y escribir :

$$-2 < x - 5 < 2$$

$$3 < x < 7$$

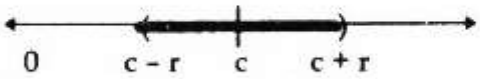
$$x \in (3, 7) \ .$$



5.- $|x - c| < r, \ r > 0$.

Solución

$$|x - c| < r$$



Obsérvese que tenemos un intervalo con centro en el número c y de radio **r** .

6.- $|2x + 8| < 17$

Solución

Utilizando las propiedades del valor absoluto obtenemos :

$$|2(x + 4)| < 7$$

$$|2||x + 4| < 7$$

$$|x + 4| < \frac{17}{2}$$

7.- $|-x| < 5 + x$

Solución

Si en la inecuación $| -x | < 5 + x$, utilizamos las propiedades del valor absoluto obtenemos :

$$-(5+x) < x < 5+x$$
$$-5-x < x \quad y \quad x < 5+x$$
$$-\frac{5}{2} < x \text{ y } 0 < 5$$

Es decir, $x \in (-\frac{5}{2}, +\infty) \cap \Re = (-\frac{5}{2}, +\infty)$.

8.- $| x+1 | > | x-2 |$

Solución

Observamos que si $a, b \in \Re$ y $a > b$ entonces $a^2 > b^2 > 0$, en consecuencia.

$| x+1 |^2 > | x-2 |^2$

$$x^2 + 2x + 1 > x^2 - 4x + 4$$
$$6x > 3$$
$$x > \frac{1}{2} \; ; \; x \in (\frac{1}{2}, +\infty).$$

otra forma :

$| x+1 | > | x-2 |$, se puede escribir como $\frac{|x+1|}{|x-2|} > 1$ o como $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| > 1$ que de acuerdo a la **propiedad 8** equivale a las desigualdades : $\frac{x+1}{x-2} > 1$ o $-1 > \frac{x+1}{x-2}$, utilizando algunos de los métodos para resolver desigualdades obtenemos : $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$.

9.- $| x+3 | = 4$

Solución

$| x+3 | = 4$ si y sólo si $x+3 = 4$ ó $-(x+3) = 4$, en consecuencia

$$x_1 = 1 \; , \quad x_2 = -7.$$

10.- $| 2x-4 | + | 3x-9 | \leq 16$

Solución

Por la definición del valor absoluto se tiene los siguientes casos :

Caso I

$2x-4 \geq 0 \quad y \quad 3x-9 \geq 0 \quad y \quad 2x-4+3x-9 \leq 16$

es decir $\quad x \geq 2 \;\; y \;\; x \geq 3 \;\; y \;\; x \leq \frac{29}{5}$

entonces $x \in [3, \frac{29}{5}]$.

Caso II

$2x-4 \geq 0 \quad y \quad 3x-9 < 0 \quad y \quad 2x-4-(3x-9) \leq 16$

$x \geq 2 \quad y \quad x < 3 \quad y \quad x \geq -11$

entonces $x \in [2, 3)$.

Caso III

$2x - 4 < 0$ y $3x - 9 > 0$ y $-(2x - 4) + (3x - 9) \leq 16$

$x < 2$ y $x > 3$ y $x \leq 21$

entonces $x \in \varnothing$.

Caso IV

$2x - 4 < 0$ y $3x - 9 < 0$ y $-(2x - 4) - (3x - 9) \leq 16$

$x < 2$ y $x < 3$ y $x \geq -\frac{3}{5}$

entonces $x \in [-\frac{3}{5}, 2)$.

Por lo que la solución total es : $x \in [2, 3) \cup [-\frac{3}{5}, 2) \cup [3, \frac{29}{5}]$

$$x \in [-\frac{3}{5}, \frac{29}{5}] .$$

2.4. AXIOMAS DE 3ª CATEGORÍA (COMPLETITUD)

Cuando en álgebra se pretende resolver la ecuación cuadrática $x^2 = 2$, de los **axiomas de primera categoría** no puede deducirse la existencia de un número x racional que cumpla con esta ecuación (de hecho puede demostrarse que no es posible encontrar un número racional tal que al elevarse al cuadrado se obtenga el 2).

El **axioma de completitud** permite introducir los números racionales al conjunto o sistema de los números reales (esto proporciona a $\Re$ la propiedad de continuidad que es fundamental en algunas ramas de las Matemáticas) .

Definición 4

COTAS DE UN CONJUNTO

Sea A un conjunto de números reales, si existe un número real M tal que $x \leq M$ para toda x de A se dice que M es una cota superior de A y que A está acotado superiormente por M.

Obsérvese que cada número mayor que M es también cota superior de A . Cuando una cota superior M es también elemento de A , M se denomina elemento máximo de A) ; esto se denota por :

$$M = \max A$$

Las definiciones de los términos cota inferior, acotado inferiormente y elemento mínimo pueden definirse similarmente.

Ejemplos

1.- $\Re^-$ no está acotado inferiormente .

2.- $[0, 1]$ está acotado superiormente e inferiormente .

3.- $[0, a)$ está acotado superiormente, pero carece de elemento máximo .

4.- $(-a, 0)$ está acotado y no tiene elementos máximos y mínimos .
En la práctica, al extremo superior de un conjunto se denomina "supremo" y si este existe, es único .

Definición 5
SUPREMO DE UN CONJUNTO
Un número M se llama el supremo de un conjunto A , si M es una cota superior de A y ningún número menor que M es cota superior de A .
El supremo de un conjunto se representa por M = supA .

Axioma 8
AXIOMA DEL SUPREMO
Si A es un conjunto no vacío de números reales, acotado superiormente, entonces A tiene un supremo en $\Re$.

Finalizamos esta sección comentando que el conjunto de los **números racionales no satisface el axioma del supremo** , lo que garantiza la existencia de otro conjunto de números que se denominan :

Números Irracionales.

En conclusión : $\Re = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

EJERCICIOS

1.- Resuelva cada una de las siguientes desigualdades , proporcione la solución , y represéntela como un intervalo sobre la recta de los números reales .

1.- $3x - 7 \geq 2 - 2x$

2.- $x^2 - 2x + 1 \leq 0$

3.- $2x < 5 - 3x$

4.- $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

5.- $-4 \leq 2 - 3x \leq -2$

6.- $x^2 - 5x + 10 \geq 0$

7.- $7 - \dfrac{3}{x} > 4$

8.- $x^2 - 5x + 10 < 0$

9.- $-3 < 5 - \dfrac{2}{x} < 1$

10.- $|3x - 7| < 4$

11.- $\dfrac{x+1}{(x+2)(x-2)} > 0$

12.- $|5x - 14| \geq 9$

13.- $\dfrac{3x-1}{x+2} \geq 1$

14.- $|x - a| > r,\ r > 0$

15.- $\dfrac{x^2+1}{x} > 0$

16.- $\left|4 - \dfrac{1}{x}\right| < 1$

17.- $\dfrac{3x-2}{x^2+4} > 0$

18.- $\left|6 + \dfrac{4}{x}\right| \geq 0$

19.- $\dfrac{(X+5)^2(X+3)^2}{X^2-1} < 0$

20.- $|x-3| \le |x+2|$

21.- $\dfrac{(X-1)^2(X-2)^3(X+3)^4}{X(X+3)^2(X+7)^4} \le 0$

22.- $\dfrac{1}{|X-1|} < \dfrac{1}{|X+2|}$

23.- $\dfrac{3}{X} > \dfrac{2}{X-1}$

24.- $|X|\,|X^2+1| < 1$

25.- $7x+3 \ge (x^2+2)$

26.- $\dfrac{|X-1|}{|X-2|} < 4$

27.- $(2x+1)^2 + 7 \le (2x-1)^2 - 3$

28.- $\dfrac{|3X^2+7|}{|X^2+16|} > -2$

29.- $\dfrac{X+1}{(X+3)^{10}} < 0$

30.- $\dfrac{|3^x+7|}{|X^4+X^2+20|} < -7$

31.- $x^2 + x - 3 > 3$

32.- $|x^2 - 7| = 25$

33.- $|3x^2 + 16| = 2$

34.- $|x+1| - |x+2| > 20$

35.- $|3x+1| - |3x+5| < 13$

35.b $|3x+1| + |3x+5| < 13$

36.- ¿ En qué condiciones son válidas las siguientes igualdades ?

a) $|x+y| = |x| + |y|$

b) $|x-y| = |x| - |y|$

c) $|x+y| = |x| - |y|$

d) $|x-y| = |x| + |y|$

37.- Comprobar que $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$ si $y \ne 0$.

38.- Si $y > x$ y $y + x > 0$ demostrar que $y^2 > x^2$.

39.- Demostrar que $x^2 + y^2 \ge 2xy$.

40.- Determine la mínima cota superior, la máxima cota superior si es que existen en cada uno de los siguientes conjuntos.

$A = \{ x : |x-2| < 5 \}$

$B = \{ x : x^2 - x - 6 < 0 \}$

$C = \{ x : x^2 - x - 20 \ge 0 \}$

$D = \{ x : x\,|x-1| \le 3 \}$

$E = \{ x : \frac{x}{|x|} < 0 \}$.

Para cada una de las siguientes desigualdades determine el intervalo solución y represéntelo sobre la recta real .

41.- $\frac{2X-1}{X-1} > X$

42.- $\frac{X-6}{X^2+3} \leq 0$

43.- $|x+3| > |x-6|$

44.- $\frac{3}{2X} > 5$

45.- $\frac{6-7X}{X-6} \geq -1$

46 .- $(x^2-2x-3)(x^2-2x+1) \geq 0$

47.- $(x-1)^2 > (x-3)(x+3)$

48.- $x^2 + \frac{1}{x} < 0$

49.- $\sqrt{9-X^2} \geq 0$

50.- $\frac{3X}{\sqrt{5-X}} > 0$

51.- $\sqrt{X+\sqrt{X}} \geq 2$

52.- $\frac{6}{7-3X} \geq \frac{1}{X}$

53.- $\frac{F(X)-6}{3} \geq F(X)$

54.- $|f(x)-17| < \varepsilon$

55.- $|3f(x)-6| \leq f(x)-3$

56.- $|f(x)-1| < \varepsilon$

57.- $|x-x_0| < \delta$

58.- $|x-|x|| > 2$

59.- $|x-7| > |x|+2$

60.- $(x-3)(x-4)(x-5)(x-10) < 0$

61.- $\frac{6(X-1)}{(3X-1)(2X+3)} \geq 0$

62.- $\frac{1}{X} < 0$

63.- $\frac{1}{X(X+2)} > -3$

64.- $\frac{1}{X^2(X^2+6)(X^2+8)(X+10)} > 0$

65.- $|1-x| < \frac{1}{x}$

66.- $|x-a| < r$ ¿ Qué ocurre si : r se aproxima a cero , si r es negativo , si se invierte el orden ?

67.- $x|x+1| \leq 0$

68.- $3x|x-1| \leq |x-2|$

69.- $\frac{7x}{|x|} < 6$

70.- $|x|-3 \leq |x-3|$

CAPÍTULO 3

Relaciones Funcionales

3.0. INTRODUCCION

En esta sección se presenta uno de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial , el de **función** , la noción de función es fundamental para todas las ramas de las Matemáticas en la búsqueda de la solución de un problema generalmente se pretende determinar una **función** para luego estudiarla y así obtener la máxima información sobre el problema .
Los valores de una cantidad variable a menudo dependen de los valores de otra cantidad que también puede variar , por ejemplo :
El área de un terreno cuadrado depende del tamaño del lado , esto se escribe como :

$$S(l) = l^2$$

El volumen de una esfera variará conforme cambie su radio de acuerdo a la relación

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{etc.}$$

No todas las relaciones entre dos variables son funciones, esto se aclara con la siguiente definición .

3.1. Dominio y rango de una función

Definición 1
FUNCIÓN , PREIMÁGEN E IMÁGEN
Sean A y B conjuntos y f una regla que asigna a cada elemento $x \in A$ un único elemento en B (que denotaremos por $f(x)$) , diremos entonces que f es una función que va del conjunto A al conjunto B , esta situación la denotaremos por :

$$f : A \to B \qquad \text{ó} \qquad A \xrightarrow{f} B .$$

x se denomina preimágen , f (x) es la imágen de x .

Ejemplo
Si $A = B = \Re$ y $f(x) = x^3$, entonces :
la imágen de $x = 3$ es $f(3) = 27$, la imágen de $x = -2$ es $f(-2) = -8$.

Definición 2
DOMINIO Y CONTRADOMINIO DE UNA FUNCIÓN
Dada una función $f : A \to B$, el conjunto A se denomina **dominio** (es decir , el dominio de la función $f(x)$ está formado por las preimágenes) de f y se denota por D_f . El conjunto B se conoce como **codominio** o **contradominio** de $f(x)$ se denota por C_f .

Definición 3

RANGO DE UNA FUNCIÓN

El rango o recorrido de la función f (x) , es el conjunto , $R_f = \{ f(x) : x \in D_f \}$, es decir, el rango de una función está formado por el conjunto de todas las imágenes.

Es conveniente tener en cuenta que $R_f \subset C_f$

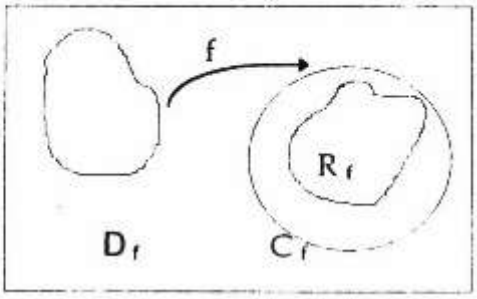


Figura (3.1) Representación de los elementos que forman una función .

Cuando $R_f = C_f$ diremos que f (x) aplica o transforma D_f en R_f .

Intuitivamente , podemos imaginar a una función como una máquina con una entrada y una salida (véase la **figura 3.2**) , D_f es el conjunto de objetos introducibles (o materia prima) y f (x) es el producto producido al haber introducido x , la condición que debe cumplir esta máquina es que al introducir un mismo objeto, debemos obtener un mismo producto.

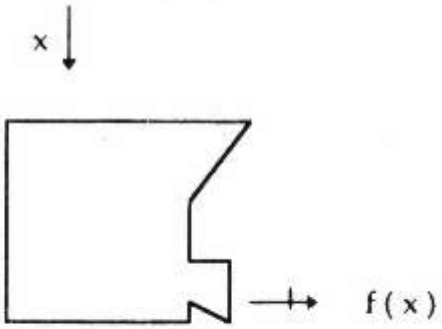


Figura (3.2) Representación esquemática de una función .

Frecuentemente se habla de funciones en términos de variables, la variable independiente asume los valores del dominio (nosotros la controlamos) y la variable dependiente está compuesta por todos los valores del rango.

Por ejemplo, supongamos que se lanza un objeto verticalmente con una velocidad de 30 m/s, la altura h del objeto puede considerarse como una función t del tiempo transcurrido desde el momento en que se soltó el objeto es decir

$$h = f(t) = 30t - 9.8\,t^2$$

En este texto sólo consideraremos **funciones reales de una variable real**

$$\mathbf{f : A \subset \Re \to \Re} \ .$$

Los primeros problemas que se presentan en la teoría de funciones, es el de determinar el dominio de esta , el rango y bosquejar la gráfica correspondiente, para resolver el primero de estos es conveniente tener en cuenta las siguientes reglas

1.- Los valores que anulan al denominador de una función no pertenecen al dominio .
2.- Los valores que hacen negativo a un radicando cuyo radical tiene índice par , no pertenecen al dominio de la función .

Ejemplos
A continuación determinamos los dominios de algunas funciones:

1.- $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$, si $a > 0$.

Solución

$D_{f(x)} = \{ x : x^2 - a^2 > 0 \} = (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$.

2.- $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-3}}{x-3}$

Solución

$D_{f(x)} = \{ x : 2x - 3 > 0 \quad y \quad x - 3 \neq 0 \} = [\frac{3}{2}, 3) \cup (3, \infty)$.

3.- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$.

Solución

$D_{f(x)} = \{ x : \dfrac{x}{x-1} \geq 0 \} = [-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

4.- $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2x-3}{x^2-9}}$.

Solución

$D_{f(x)} = \{ x : x^2 - 9 \neq 0 \} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$.

5.- $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Solución

El único número que no podemos sustituir en $f(x)$ es $x = -1$, así : $D_{f(x)} = \Re - \{-1\}$

6.- $f(x) = \dfrac{x+7}{x^2 - 7x + 6}$

Solución

La función se indetermina cuando $x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6) = 0$, es decir , si $x = 1$ ó $x = 6$.

Entonces $D_{f(x)} = \Re - \{1, 6\}$.

7.- ¿ Cuál es el dominio de $f(x) = \sqrt{x+1}$?

Solución

Para que f (x) tenga sentido se debe cumplir la desigualdad $x + 1 \geq 0$, por lo que :

$$D_{f(x)} = [-1, \infty) .$$

8.- Determine el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Solución

En este caso, el denominador no se anula y siempre es positivo , por lo tanto :

$$D_{f(x)} = \Re .$$

9.- ¿ Cuál es el dominio de la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$?

Solución

Necesariamente $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$, si se resuelve esta desigualdad se obtiene el intervalo

$$D_{f(x)} = [-1, 1) \quad \text{¿ por qué desigualdad estricta ? .}$$

Definición 4

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

La gráfica de una función esta formada por los elementos del conjunto :

$$G_f = \{ (x, y) : y = f(x) \}.$$

Si se conoce la gráfica de una función es posible determinar facilmente el rango correspondiente.

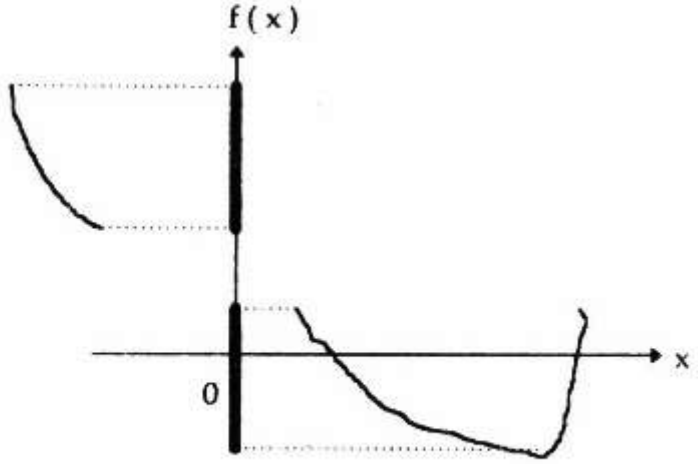


Figura (3.3) El rango de la función f (x) es la proyección de la gráfica de f (x) en el eje vertical .

EJERCICIOS

I.- Dada la función $f(x) = 3x - 2$, determinar

a) $f(0)$ b) $f(-3)$ c) $f(b)$ d) $f(x-1)$

II.- Si $f(x) = x^2 - 3x + 2$ determinar

a) $f(\frac{1}{2})$ b) $f(-1)$ c) $f(\frac{1}{a})$ d) $f(x+h)$.

III.- Si $f(x) = x\sqrt{x}$ determine

a) $f(3)$ b) $f(-3)$ c) $f(x+h)-f(x)$ d) $f(5x+h)-f(5)$.

IV.- Si $f(x) = |x|+2$ determine :

a) $f(6)$ b) $f(-6)$ c) $f(x^2)$ d) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

V.- Si $f(x) = x^3 - x$, evalúe :

a) $f(6)$ b) $f(-1)$ c) $f(\frac{1}{a})$ d) $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

e) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

VI.- Si $f(x) = \frac{1}{x}$, completar la tabla :

x	f(x)
-2	
-1	
-10^{-1}	
-10^{-6}	
0	
10^{-6}	
10^{-3}	
10^{-1}	
1	
2	

¿ qué concluye en x = 0 ?

VII.- Si $f(x) = \frac{1}{(x-6)^2}$, tabule

x	f(x)
0	
5	
5.9	
5.99	
5,9999	
6	
6.0001	
6.01	
6.1	
6.11	

¿qué ocurre en x = 6 ?

VIII.- Determine el dominio y grafique cada una de las siguientes funciones, ¿ cual es el rango de cada una de ellas?

1.- $f(x) = 3x - 2$

2.- $f(x) = 4 - \sqrt{16 - x^2}$

3.- $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 1 \\ 3x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

4.- $f(x) = x - |x|$

5.- $f(x) = x^2 - 2x - 1$

6.- $f(x) = \sqrt{x - 1}$

7.- $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

IX.- ¿ Cuáles de las siguientes expresiones representan una función ?

1.- $\{(x, y) : x^2 + x^2 y^2 = 9\}$

2.- $\{(x, y) : y = \sqrt{4 - x^2}\}$

3.- $\{(x, y) : x + y = 1\}$

4.- $\{(x, y) : y^2 = x, x \in (0, \infty)\}$

5.- $\{(x, y) : y^2 = 1 - x^2, x \in [-1, 1]\}$

X.- Determine una función con las características pedidas

1.- $f(-2) = 0$, $f(3) = 0$ y $f(0) = -36$

2.- Dominio en $[-2, 2]$ y $f(-2) = f(0) = f(2) = 0$

3.2. TIPOS DE FUNCIONES

El conocer ciertos tipos de funciones ayuda a una mejor comprensión y facilita el estudio de los conceptos del Cálculo Diferencial , las más importantes se estudian a continuación .

3.2.1. Funciones Lineales

Estas funciones se caracterizan porque su gráfica es una linea recta , las más comunes son las siguientes

a) **Función constante** $f(x) = c$, $D_c = \Re$, $R_C = \{c\}$.

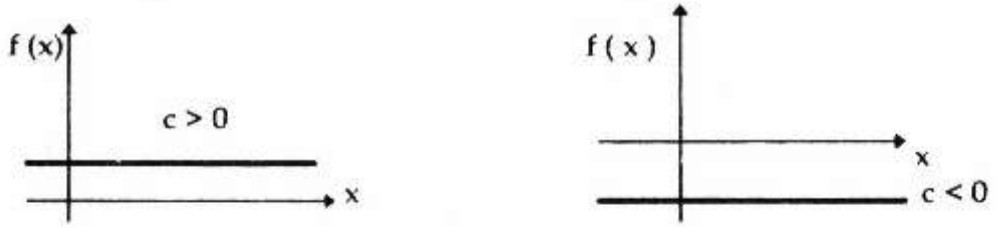


Figura (3. 4) Gráfica de la función constante .

b) Función **identidad** , $f(x) = x$, evidentemente : $D_x = \Re$ y $R_x = \Re$

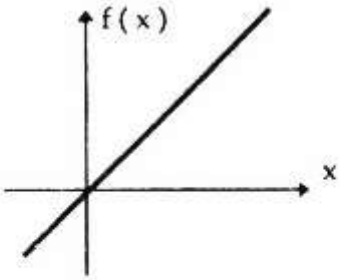


Figura (3.5) La gráfica corresponde a una recta a 45°.

c) Función **Translación** $f(x) = x + b$, donde $b \neq 0$, claramente : $D_{f(x)} = \Re$, si se proyecta la gráfica de la función sobre el eje y se obtiene : $R_{f(x)} = \Re$

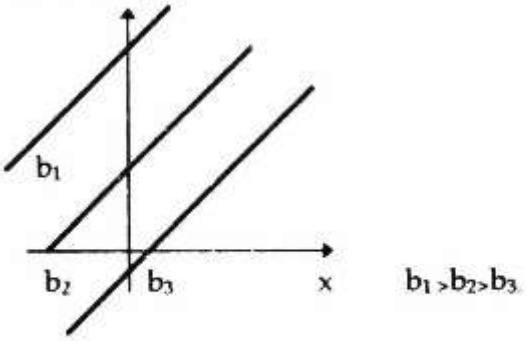


Figura (3.6) Gráfica de la función translación , b se conoce como ordenada al origen e indica donde la recta intersecta al eje y .

Obsérvese que el término b indica el número de unidades que la gráfica de la función f (x) se encuentra transladada verticalmente con respecto al origen .

d) Función **Homotecia** $f(x) = ax$, $a \neq 0$.
Claramente $D_{f(x)} = \Re$, $R_{f(x)} = \Re$.

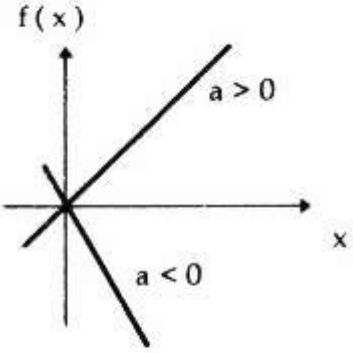


Figura (3.7) Gráfica de la función homotecia , el número a se conoce como pendiente e indica el grado de inclinación de la recta.

Obsérvese que el coeficiente a indica el grado de inclinación de la gráfica de la función f (x) respecto al eje horizontal .

e) Función **valor absoluto** , $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Tiene la característica de estar definida por dos reglas de correspondencia , su gráfica consiste de dos semirrectas perpendiculares que se intersectan en el origen , claramente : $D_{|x|} = \Re$, $R_{|x|} = [0, \infty)$.

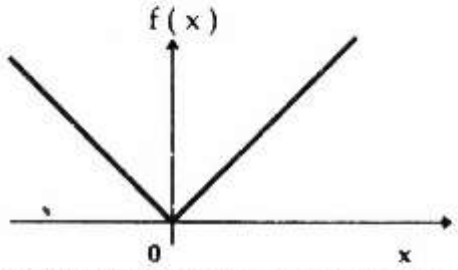


Figura (3.8) Gráfica de la función valor absoluto .

3 . 2 . 2 . Funciones polinomiales

Funciones relativamente más complicadas que las lineales son las funciones polinomiales, la forma general es $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, con $a_0 , a_1 , \ldots a_n \in \Re$, $n \in \aleph$. Evidentemente $D_{P(x)} = \Re$, el rango de P (x) dependerá de la forma específica del polinomio

Ejemplos

a) Función **potencial par** $f(x) = x^{2n}$ con $n > 0$ y par .

$D_{x^{2n}} = \Re$ y $R_{x^{2n}} = [0, \infty)$

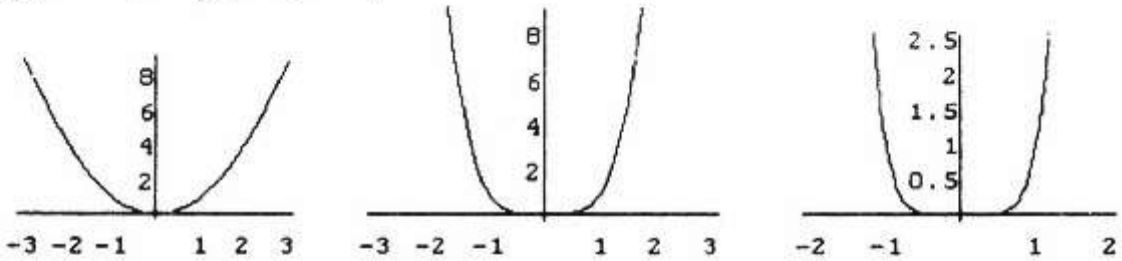


Figura (3.9) Gráficas de las funciones $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$ y $f(x) = x^6$ respectivamente, observese como al crecer la potencia , la inclinación de estas crece y se acerca más a las rectas verticales x = 1 y x = - 1.

b) Función **potencial impar** $f(x) = x^{2n+1}$ con $n > 1$. $D_{x^{2n+1}} = \Re$ y $R_{x^{2n+1}} = [-\infty , \infty)$

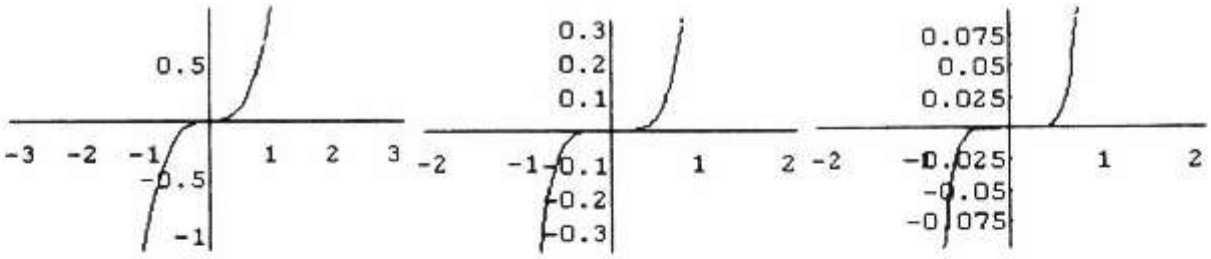


Figura (3.10) Gráficas de las funciones $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$ y $f(x) = x^7$ respectivamente, observese como al crecer la potencia la inclinación de estas crece y se acerca más a las rectas verticales $x = 1$ y $x = -1$.

3 . 2 . 3 . Funciones racionales

El cociente de dos funciones polinomiales se denomina función racional , esto es

$$Q(x) = \frac{a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \ldots\ldots + b_mx^m}$$

donde a_0 , b_0 , a_1 , b_1 ,..... $\in \Re$, $m, n \in \aleph$.

$D_{Q(x)} = \Re - \{ b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \ldots\ldots + b_mx^m = 0 \}$ y $R_{Q(x)}$, depende de la función específica.

Ejemplos

$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \aleph$.

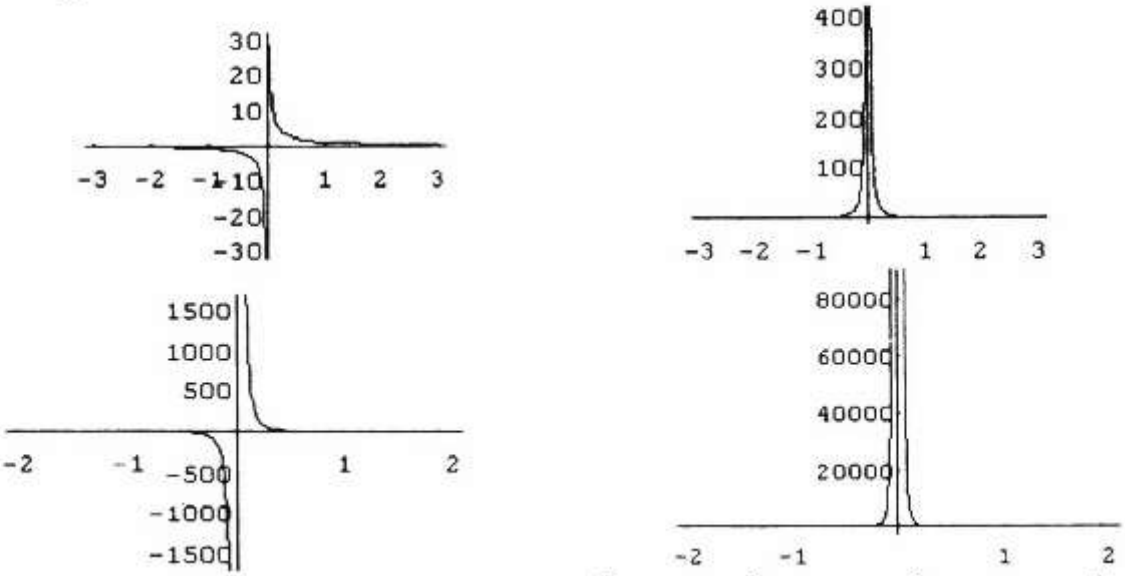


Figura (3.11) Gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ y $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$, cuando la potencia es impar los ejes coordeanados son asintotas de las gráficas, si el exponente es par , la parte positiva del eje y es asíntota de la gráfica.

obsérvese que :

1.- Si en el denominador se encuentra el término de la forma x^n con **n impar** , la gráfica de la función se acerca a la recta vertical $x = 0$ conforme x tiende a cero , por la derecha crece infinitamente , por la izquierda decrece infinitamente .

2.- Si en el denominador se encuentra el término x^n con **n par**, la gráfica de la función crece infinitamente aproximándose a la recta $x = 0$, tanto por la derecha como por la izquierda.
Las rectas mencionadas se denominan **asíntotas verticales**.
Posteriormente se proporcionarán otras técnicas para determinar la gráfica y el rango de funciones racionales más complejas.

3.2.4. Funciones algebraicas

En esta categoría se consideran aquellas funciones que involucran potencias fraccionarias, es decir, que poseen radicales.
Tanto el dominio como el rango dependerán de la forma específica de la función, sin embargo, en la determinación del dominio es conveniente tener en cuenta las reglas:
1º No incluir los ceros del denominador
2º No incluir valores que originen radicandos negativos en radicales de índice par

Ejemplos
Es fácil verificar que las gráficas de las funciones:
$f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $f(x)=\sqrt[5]{x}$ y $f(x)=\sqrt[6]{x}$.
son las que se muestran a continuación:

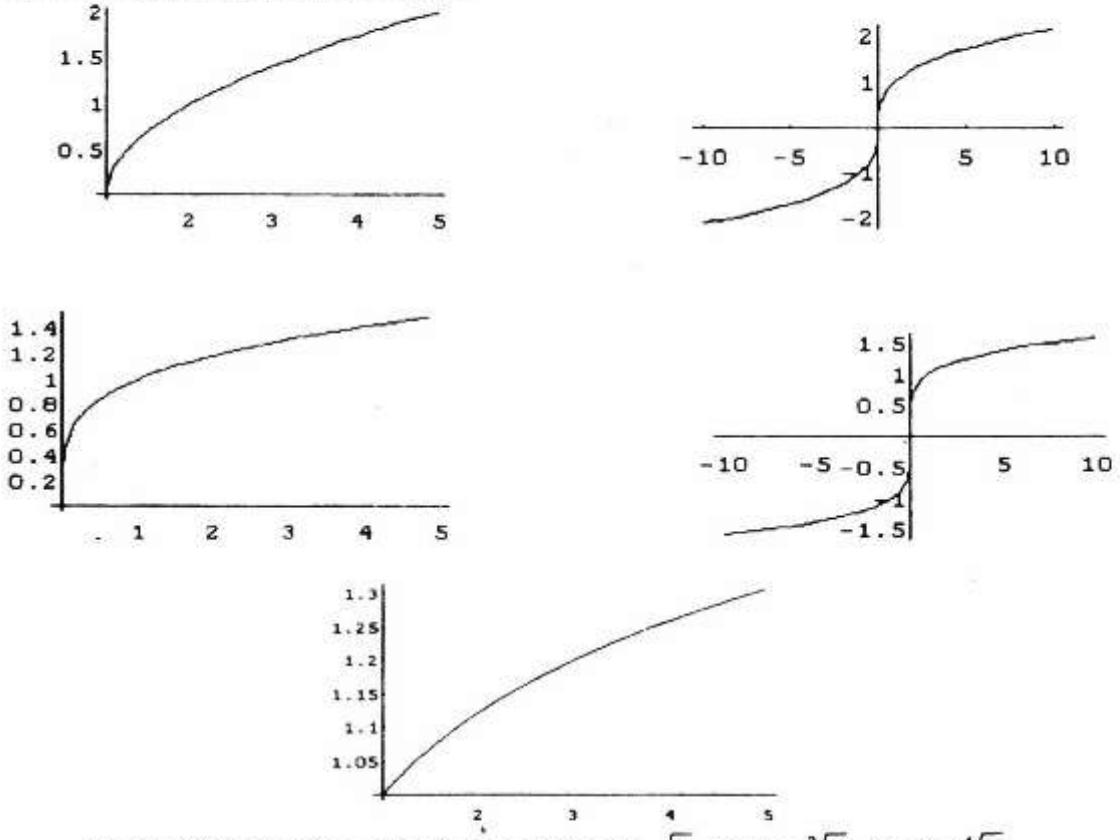


Figura (3.12) Gráficas de las funciones $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $f(x)=\sqrt[5]{x}$, $f(x)=\sqrt[6]{x}$, obsérvese que si el índice del radical indica que tan rápido crece la gráfica, crece menos rápido si este es mayor.

Por lo tanto : $\sqrt[n]{x} : [\,0\,,\infty\,) \rightarrow [\,0\,,\infty\,)$ si **n** es un **número natural par** .
$\sqrt[n]{x} : [-\infty\,,\infty\,) \rightarrow [-\infty\,,\infty\,)$ si **n** es un **número natural impar** .

3.2.5. Funciones características

Cuando la regla de correspondencia se proporciona por intervalos, la función se denomina característica , el dominio estará determinado por la unión de los dominios de las funciones seccionalmente definidas , esto también es válido para el rango.

Ejemplos

1.- $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le a \\ -x + 2a & \text{si} \quad a < x \le 2a \end{cases} \qquad D_{f(x)} = [\,0\,,2a\,]\,,$

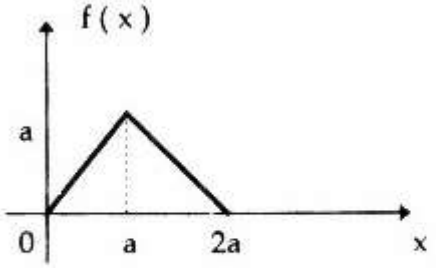


Figura (3.13) Gráfica de una función característica, estas funciones están definidas de manera diferente en intervalos diferentes.

la proyección sobre el eje vertical es el rango : $R_{f(x)} = [\,0\,,a\,]$.

2.- Función escalón unitaria de Heaviside $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \le x \le \infty \\ 0 & \text{si} \quad x < a \end{cases}$

$D_{f(x)} = \Re \;,\quad R_{f(x)} = \{\,1\,,0\,\}$

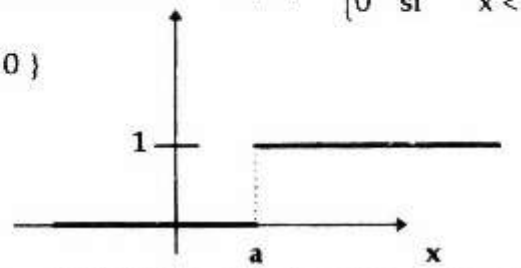


Figura (3.14) Gráfica de la función escalón unitaria

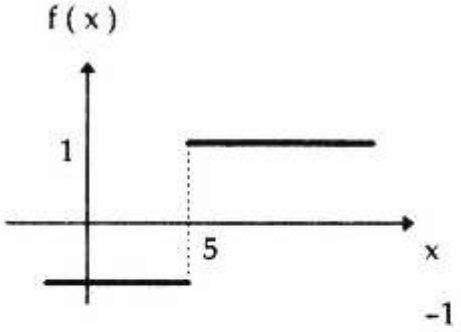
3.- $f(x) = \dfrac{|\,x-5\,|}{x-5}$

Solución

Recordando la definición de la función valor absoluto

$$\frac{|x-5|}{x-5} = \begin{cases} \dfrac{x-5}{x-5} & \text{si} \quad x-5 \geq 0 \\ \dfrac{-(x-5)}{x-5} & \text{si} \quad x-5 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 5 \\ -1 & \text{si} \quad x < 5 \end{cases}$$



$$D_{f(x)} = \Re - \{5\}, \quad R_{f(x)} = \{1, -1\}.$$

3.2.6. Funciones circulares o trigonométricas

De grán importancia son las funciones generadas por la **circunferencia de radio 1** cuyo centro se encuentra anclado en el origen de coordenadas. De la definición de las relaciones trigonométricas se obtiene que el triángulo rectángulo formado por el eje x , el radio y el segmento de recta que baja del punto de intersección del radio con la circunferencia y en forma paralela al **eje vertical** , tiene como dimensiones :

base : $\cos\theta$
altura : $\operatorname{sen}\theta$

En el triángulo rectángulo formado por la prolongación del radio , la recta x = 1 y el **eje x** la altura se define como **tanθ.**

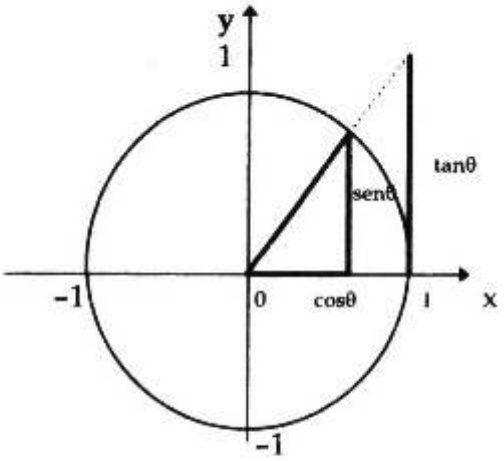


Figura (3.15) Representación de las funciones senθ , cosθ , tanθ .

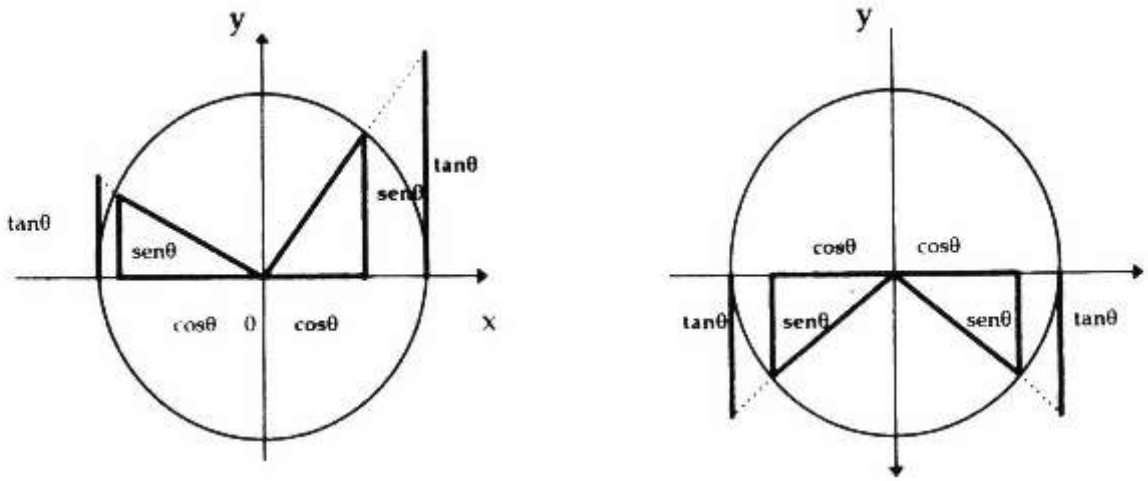


Figura (3.16) Comportamiento de las funciones sen θ , cos θ , tan θ .

Angulo	**sen θ**	**cos θ**	**tan θ**
0	0	1	0
I.- $0 < \theta < \pi/2$	crece de 0 a 1	decrece de 1 a 0	crece de 0 a ∞
$\pi/2$	**1**	**0**	∞
II.- $\pi/2 < \theta < \pi$	decrece de 1 a 0	decrece de 0 a -1	crece de $-\infty$ a 0
π	**0**	**-1**	**0**
III.- $\pi < \theta < 3\pi/2$	decrece de 0 a -1	crece de -1 a 0	crece de 0 a ∞
$3\pi/2$	**-1**	**0**	∞
IV.- $3\pi/2 < \theta < 2\pi$	crece -1 a 0	crece de 0 a 1	crece de $-\infty$ a 0
2π	**0**	**1**	**0**

Si se sigue incrementando el ángulo θ, su comportamiento será el mismo que el descrito en la tabla anterior, como consecuencia

$y = \operatorname{sen}\theta$,

$D_{\operatorname{sen}\theta} = \Re$

$R_{\operatorname{sen}\theta} = [-1, 1]$

$y = \cos\theta$

$D_{\cos\theta} = \Re$

$R_{\cos\theta} = [-1, 1]$

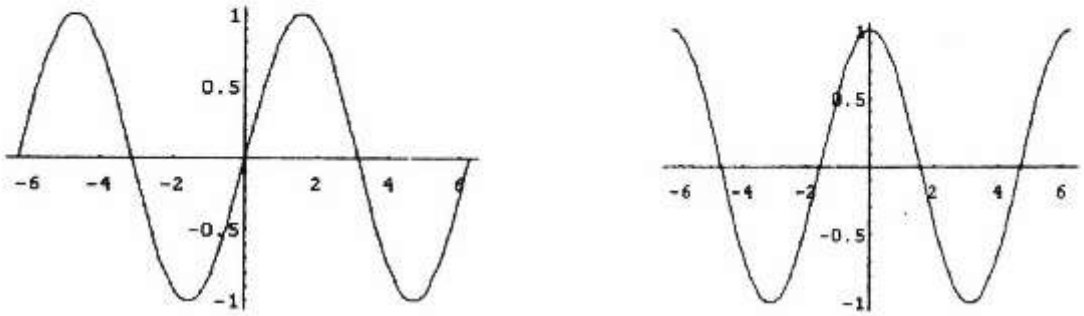


Figura (3.17) gráficas de las funcione sen θ , cos θ .

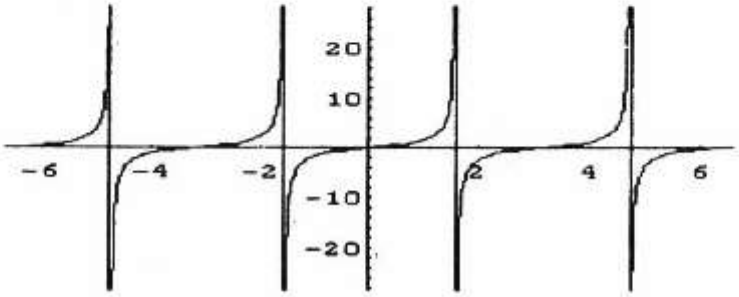


Figura (3.18) gráfica de las función tan θ .

$$D_{\tan\theta} = \Re - \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{2} : n \in \aleph \right\}, \qquad R_{\tan\theta} = \Re .$$

3.2.7. La función exponencial

La función exponencial puede definirse de varias maneras, unas más elegantes que otras , sin embargo , debido a que en este momento contamos con un material relativamente escaso optamos por definirla de la forma más práctica .

Definición 5
FUNCIÓN EXPONENCIAL
Si x es un número real y $a > 0$ entonces $f(x) = a^x$ se denomina función exponencial con base a. $D_{a^x} = \Re$ y $R_{a^x} = (0, \infty)$.

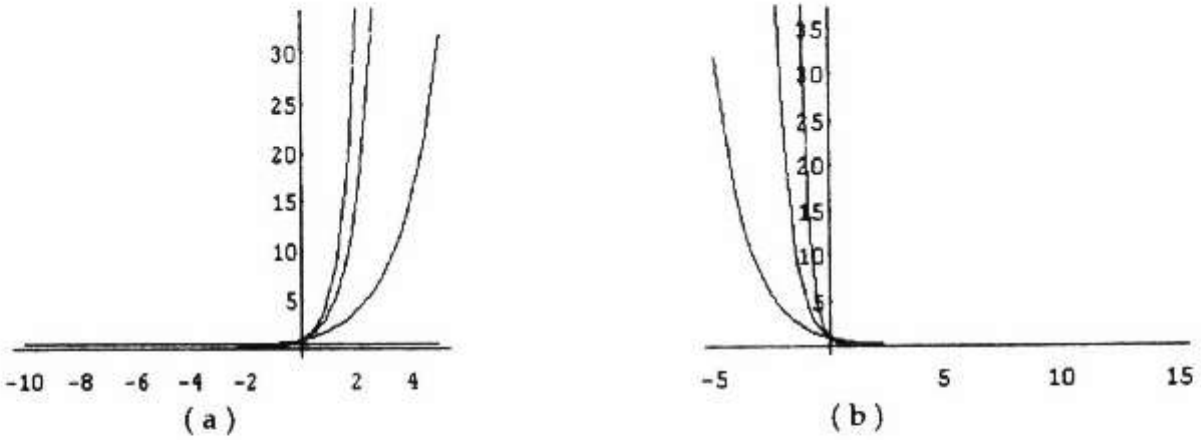


Figura (3.19) Gráficas de la función $f(x) = a^x$ para varios valores de **a**,
a) con $1 < a_1 < a_2 < a_3$
b) $0 < a < 1$.

De las gráficas anteriores se concluye que: $D_{a^x} = \Re$ y $R_{a^x} = (0, \infty)$.

Cuando **a = 2.7182818284...** representamos a la función exponencial por $f(x) = e^x$ así, cuando $x = 1$, $f(1) = e$, este valor se denomina **base de los logaritmos** naturales.

Las funciones $f(x) = e^x$ y $f(x) = a^x$ están relacionadas por $a^x = e^{x \ln a}$.

Proposición 1
PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL
Si $a, b \in \Re$, entonces e^x satisface las siguientes relaciones :

1.- $e^x : \Re \to (0, \infty)$

2.- $e^0 = 1$

3.- $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

4.- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.

5.- $e^{a^b} = e^{a \cdot b}$

3.3. ALGUNAS TÉCNICAS EN LA GRAFICACIÓN DE FUNCIONES

Además de la **translación vertical** y la **homotecia** existen otras propiedades que facilitan la construcción de la gráfica de una función , estas se exponen a continuación :

1.- La gráfica de $-f(x)$ es la imágen física de la gráfica de $f(x)$ respecto al **eje horizontal**.

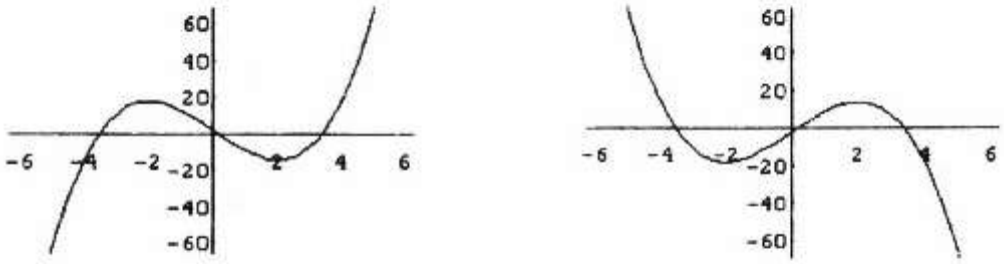


Figura (3.20) Imagen física de una función respecto al eje x .

2.- La gráfica de $f(-x)$ es la imágen física de la gráfica de $f(x)$ respecto al **eje vertical** .

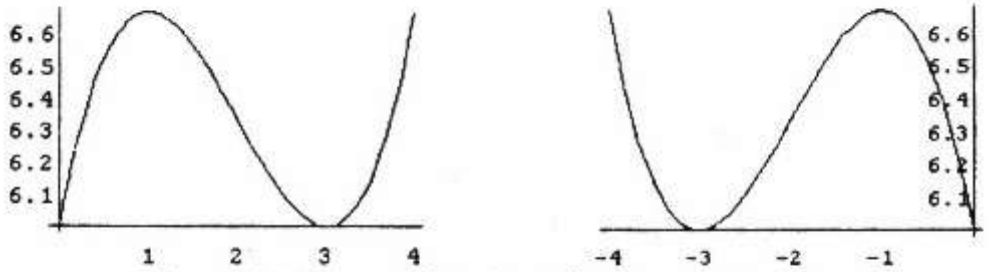


Figura (3.21) Imagen física de una función respecto al eje y .

3.- Si $a > 0$, la gráfica de $f(x-a)$ es la translación horizontal de la gráfica de $f(x)$.

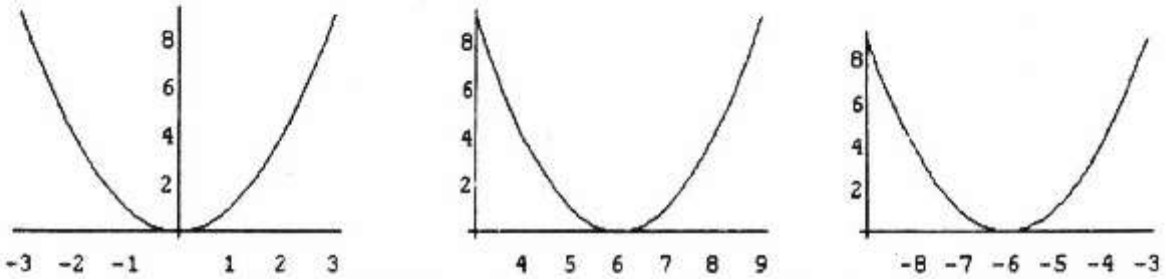


Figura (3.22) Translación horizontal de la gráfica de una función .

Ejemplos

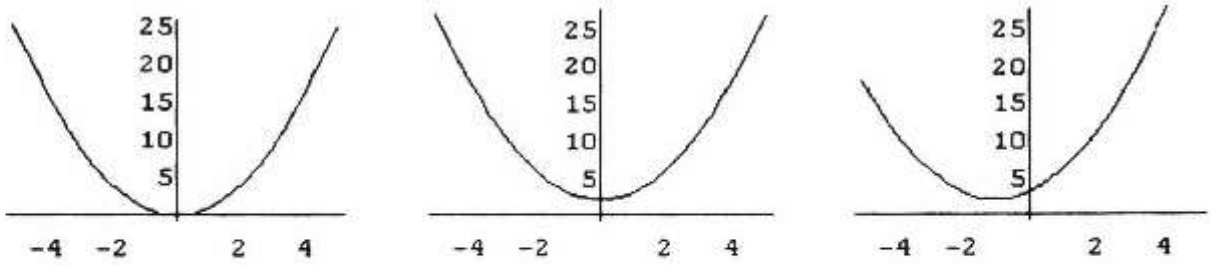
Grafique y determine el rango de las siguientes funciones :

1.- $f(x) = x^2 + 2x + 3$

Solución

nótese que $f(x) = x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2$

$f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$, esto significa que la gráfica es una parábola con una **translación vertical** hacia la recta $y = 2$ y una **translación horizontal** a la recta $x = -1$.

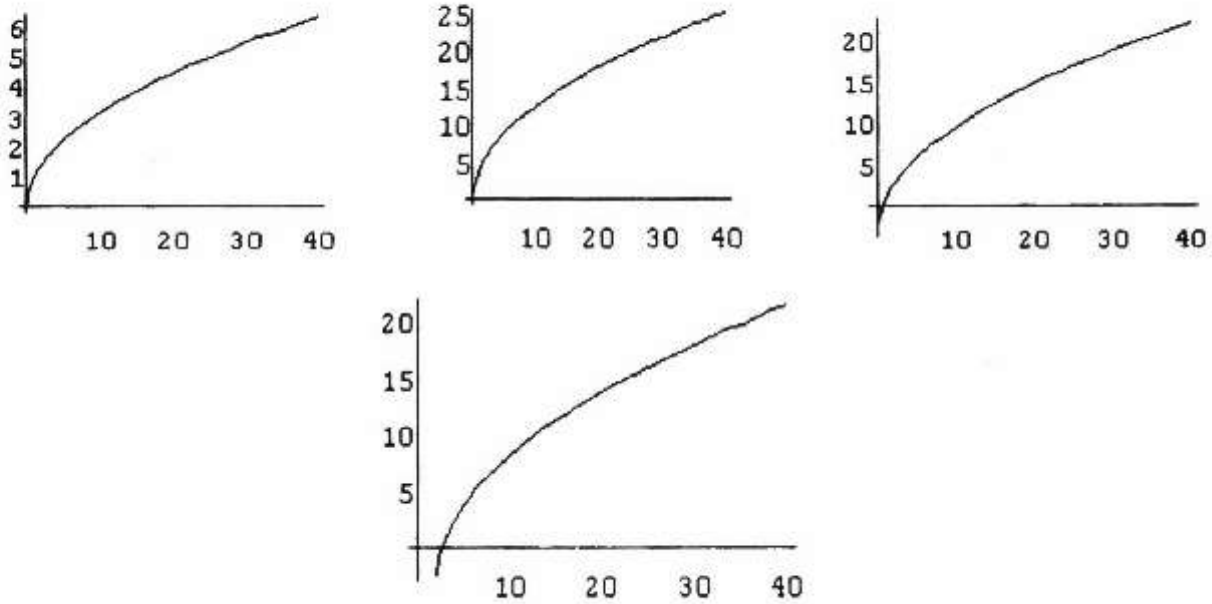


Al proyectar sobre el eje vertical obtenemos : $R_{f(x)} = [\,2\,,\infty\,]$.

2.- $f(x) = 4\sqrt{x-2} - 3$

Solución

Tomemos como base la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, existe una **homotecia (4)** que hace que la gráfica crezca más rápido que la tomada como base , posee **una translación vertical** hacia la recta $y = -3$, también la gráfica está **transladada horizontalmente** hacia $x = 2$.

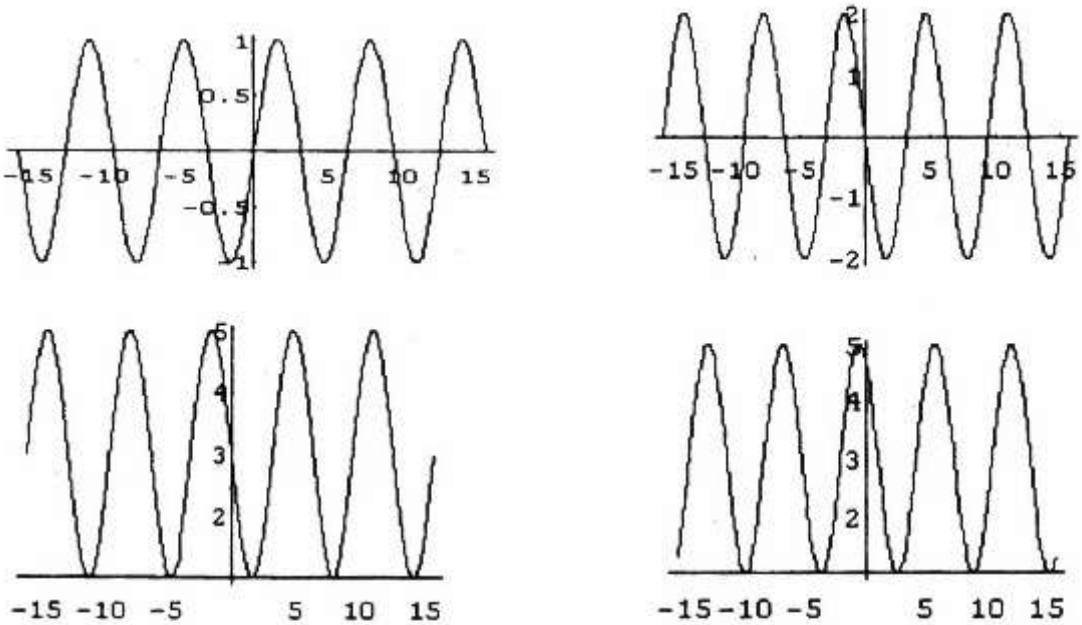


Al proyectar sobre el eje vertical obtenemos : $R_{f(x)} = [\,-3\,,\infty\,]$.

3.- $f(x) = 3 - 2\text{sen}\,(x-1)$

Solución

Tomemos como base la gráfica de $f(x) = \text{sen}\,x$, existe una **homotecia (- 2)** que hace que la gráfica crezca más rápido que la tomada como base y la **refleja** respecto al eje x , posee **una translación vertical** hacia la recta $y = 3$, también la gráfica está **transladada horizontalmente** hacia $x = 1$.



Etapas en la construcción de la grafica de la función $f(x) = 3 - 2\,\text{sen}(x - 1)$.

Al proyectar sobre el eje vertical obtenemos : $R_{f(x)} = [1, 5]$.

EJERCICIOS

I.-Grafique las funciones constantes si $c = 1, 4, 7, 9, -3, -6, -9$.

II.-¿ Cuales propiedades de campo satisfacen las funciones constantes ?

III.-¿ Bajo que condiciones una función polinomial es también lineal ?

IV.-¿ Cuales propiedades de campo satisfacen las funciones polinomiales ?

V.-Determine el dominio y el rango de los siguientes polinomios

1.- $p(x) = a x^3$ con $a = 1, -1, -5, 5, 8, -8$.
2.- $p(x) = a x^3 + b$ con $a = 2$ y $b = 1, -1, -5, 5, 8, -8$.
3.- $p(x) = a x^4 + 4$ con $a = 1, -1, -5, 5, 8, -8$.

VI.- Determine el dominio y el rango de las siguientes funciones

1.- $q(x) = \dfrac{x + a}{x + b}$ con $a = 2$ y $b = 1, -1, -5, 5, 8, -8$.

2.- $q(x) = \dfrac{a}{a + x}$ para $a = 1, -1, -5, 5, 8, -8$.

3.- $q(x) = \dfrac{a}{(x - a)^2}$ para $a = 1, 2, 3, 4, 5, -3, -5$.

4.- $q(x) = \dfrac{a}{a+x} + \dfrac{a}{(x-a)^2}$

5.- $f(x) = |5x|$
6.- $f(x) = |5x - 1|$
7.- $f(x) = |5x + 1|$
8.- $f(x) = |5x + 3|$
9.- ¿ Que puede concluir sobre la función $f(x) = |ax + b|$?

VII.- Construya la gráfica , determine el dominio y el rango de las siguient

1.- $f(x) = e^{ax}$, para $a = 1, 2, 4$.
2.- $f(x) = ae^{ax}$, para $a = 1, 2, 4$.
3.- $f(x) = a^x$, para $a = 1, 2, 7, 9, -2, -7, -9$.
4.- $f(x) = a + e^{ax}$ si $a > 1$, si $a < 1$.
5.- $f(x) = a \operatorname{sen} x$, para $a = 1, 3, 5, -1, -3, -5, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.
6.- $f(x) = a \cos x$, para $a = 1, 3, 5, -1, -3, -5, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.
7.- $f(x) = a + \operatorname{sen} x$, para $a = 1, 3, 5, -1, -3, -5, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.
8.- $f(x) = a + \cos x$, para $a = -1, -3, -5, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.
9.- $f(x) = \operatorname{sen} ax$, para $a = 2, 3, 4, 5, 6$.
10.- $f(x) = \cos ax$, para $a = 2, 3, 4, 5, 6$.
11.- $f(x) = a \tan x$, para $a = 1, 3, 5, 1, -3, -5, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.
12.- $f(x) = \tan x$, para $a = 1, 3, 5, -$ a=1, 3, 5, -1, -3, -5, -1/2, 1/4.
13.- $f(x) = a + \tan x$, para $a = 1, 3, 5, -1, -3, -5, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

VIII.- Construir la gráfica , hallar el dominio y el rango de las funciones

1.- $f(x) = -2^x$
2.- $f(x) = 2^{x+3}$
3.- $f(x) = \frac{1}{3} 3^x$
4.- $f(x) = 2 + e^x$
5.- $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$
6.- $y = e^{(x-3)}$
7.- $y = -\operatorname{sen} x$
8.- $y = \operatorname{sen}(-x)$
9.- $y = 3 \operatorname{sen} x$
10.- $y = 5 \operatorname{sen} x$
11.- $y = 2 + \cos x$
12.- $y = -2 + \cos x$
13.- $y = x + \cos x$
14.- $y = \operatorname{sen} 2x$

3.4. FUNCIONES INVERTIBLES

En este momento es preciso aclarar que para que **dos funciones sean iguales**, no basta con que las reglas de correspondencias que las definen sean algebraicamente equivalentes, esto se formaliza a continuación :

Definición 5
IGUALDAD DE FUNCIONES
Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son iguales si y sólo si :
1.- $D_f = D_g$
2.- $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D_f = D_g$,
geométricamente, esto quiere decir que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ coinciden.

Definición 6
OPERACIÓN RESTRICCIÓN Y OPERACIÓN EXTENSIÓN
Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones, se dirá que $f(x)$ es una **restricción** de $g(x)$ ó equivalentemente, $g(x)$ es una **extensión** de $f(x)$, si y sólo si :
1.- $D_f \subset D_g$
2.- para todo $x \in D_f$ se cumple que $f(x) = g(x)$,
geometricamente, esto significa que la gráfica de $f(x)$ es una parte de la gráfica de $g(x)$.

Ejemplos

1.- Si $f(x) = \left(\sqrt{2x}\right)^2$ y $g(x) = 2x$, es claro que $f(x)$ es una restricción de $g(x)$ puesto que $D_f = [0, \infty)$ y $D_g = \Re$, además $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D_f$.

2.- Si $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ y $g(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + x - 1}$

entonces $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ siempre que $x \neq 1$

en consecuencia $g(x)$ es una extensión de $f(x)$ ya que $D_f = \Re - \{1\}$ y $D_g = \Re$ y $f(x) = g(x)$ si $x \in D_f$.

Esta operación se aplica fundamentalmente en la obtención de **funciones inversas**, las que serán estudiadas a continuación.

Si $f(x)$ es una función que **transforma al conjunto A** en otro **conjunto B**, se puede costruir una nueva función que convierta los elemento del conjunto B en elementos de A, si esto es posible denotaremos a la nueva función por f^{-1} y la llamaremos **función inversa** de f, así pues, si $f(10) = 5$ entonces $f^{-1}(5) = 10$, de manera más general, si $f(x) = y$, entonces $f^{-1}(y) = x$, a continuación se formaliza esta idea.

Definición 7
FUNCIÓN INVERTIBLE
Sea f (x) una función , **diremos que f (x) es invertible si existe una función $f^{-1}(x)$ tal que y = f (x) y $f^{-1}(y) = x$ son equivalentes , si esto ocurre $f^{-1}(x)$ se denomina la inversa de f (x) y $f^{-1}(x)$ es la inversa de f (x) .**

Ejemplos

1.- Si f (x) = 3x - 2 , la ecuación y = 3x - 2 es equivalenmte a $x = \frac{y+2}{3}$, entonces

f (x) = 3x - 2 es invertible y $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$.

Obsérvese que $f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x+2}{3}) = 3(\frac{x+2}{3}) - 2 = x$.

2.- Sea $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$, si despejamos x de $y = 2 - \frac{1}{x}$, obtenemos : $x = \frac{1}{2-y}$ por lo que pareciera que la función inversa correspondiente es $f^{-1}(x) = \frac{1}{2-x}$, sin embargo esto no es cierto , para comprobarlo basta revisar los dominios de definición .

Existe una relación entre las gráficas de las funciones **f (x) y $f^{-1}(x)$** , la gráfica de $f^{-1}(x)$ es la imágen física de la gráfica de f (x) **respecto a la función identidad** .

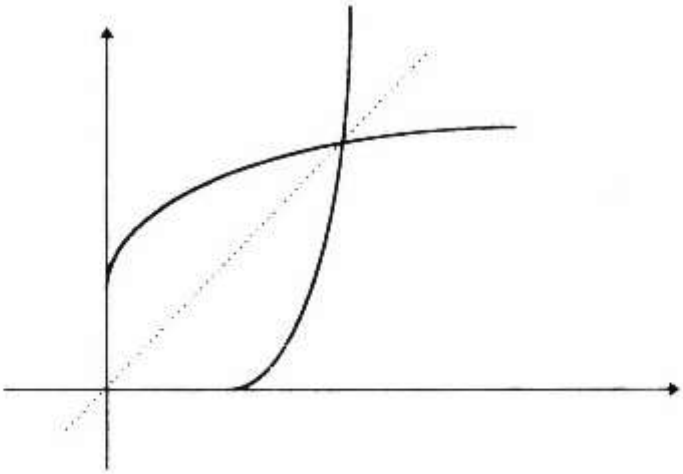


Figura (3.23) Relación entre las gráficas de dos funciones inversas .

3 . 4 . 1 . Propiedades de las funciones invertibles

Debemos tener en cuenta que no siempre es posible construir la función inversa de una función y que en caso de existir , esta última satisface las propiedades enunciadas en la el siguiente teorema :

Teorema 1

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES INVERTIBLES

Si $f(x)$ es una función que tiene inversa, entonces :

a) $D_{f^{-1}} = R_f \quad R_{f^{-1}} = D_f$

b) $f(f^{-1}(x)) = x \in R_f, \quad f^{-1}(f(x)) = x \in D_f$

c) $f^{-1}(x)$ es invertible y $(f^{-1}(x))^{-1} = f(x)$

d) Si $f(x)$ es una función real de variable real, la gráfica de $f^{-1}(x)$ es la imágen física de la gráfica de $f(x)$ en la recta $y = x$.

Ejemplos

1.- $f(x) = x^2 + 1$ no tiene inversa.

En efecto, $f^{-1}(x)$ tendría como gráfica la curva que es imágen física de la gráfica de $f(x)$ en la recta $y = x$, $T = \{(x, y) : x = \sqrt{x-1}\}$, pero esta no representa la gráfica de una función.

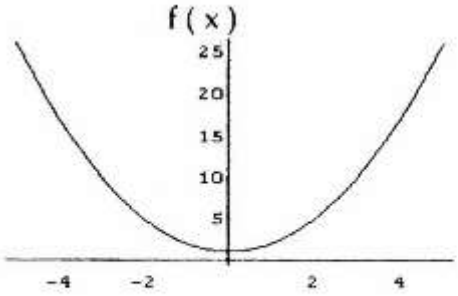


Figura (3.24) La función $f(x) = x^2 + 1$ no es invertible.

2.- Sea $f(x) = \sqrt{x-1}$

Notemos que $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$, entonces $f(x)$ es invertible y $f^{-1}(x) = x^2 + 1$

además $f^{-1} : [0, \infty) \to [1, +\infty)$

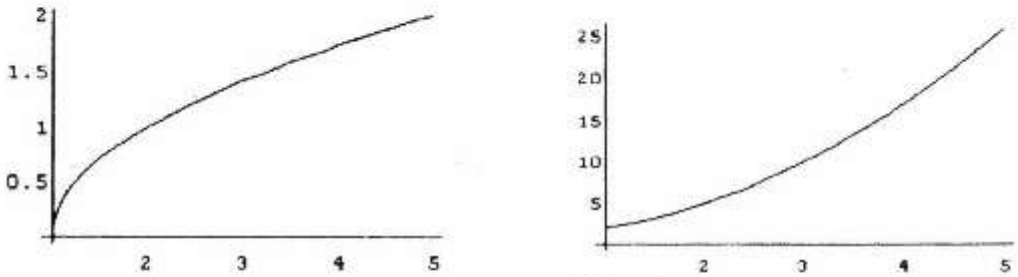


Figura (3.25) La función $f(x) = \sqrt{x-1}$ es invertible.

Como hemos visto, no todas las funciones son invertibles, a continuación establecemos las condiciones bajo las cuales es posible construir la inversa de una función :

Estrechamente relacionado con el método de inversión de una función está el concepto de inyectividad.

Definición 8
FUNCIÓN INYECTIVA
Una función se denomina **inyectiva** si y sólo si para cualquier par de puntos x_1 , x_2 en su dominio con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ó equivalentemente :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Geométricamente, esta definición puede interpretarse (en una grán cantidad de casos) como la gráfica de una función que siempre crece o que siempre decrece .

Ejemplos

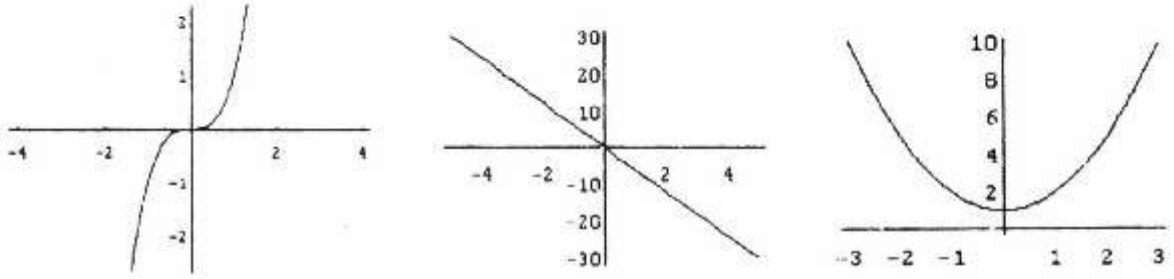


Figura (3.26) Las funciones inyectivas sólo crecen o sólo decrecen.

a) $f(x) = x^3$ es inyectiva $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^3 \neq x_2^3$.

b) $f(x) = mx$ con $m < 0$ es inyectiva ; $x_1 \neq x_2 \Rightarrow mx_1 \neq mx_2$

c) $f(x) = x^2 + 1$ no es inyectiva; $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2+1 \neq x_2^2+1$, por ejemplo , $1 \neq -1$ y $(1)^2 + 1 = (-1)^2 + 1$.

Proposición 2
Una función $f(x)$ es invertible si y sólo si es inyectiva .

Corolario 1
Toda función $f(x)$ creciente (o decreciente) es invertible . Conviene aclarar que una función es creciente si $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (similarmente $f(x)$ es decreciente si : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$) , es decir la gráfica de $f(x)$ aumenta en altura al incrementarse x (es decir la gráfica de $f(x)$ disminuye en altura al incrementarse x) . Un estudio mas amplio sobre las funciones crecientes será desarrollado posteriormente .

Ejemplos

1.- $f(x) = x^2$ restringida a $[0, \infty)$ es creciente e inyectiva por lo que es invertible y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, es su función inversa .

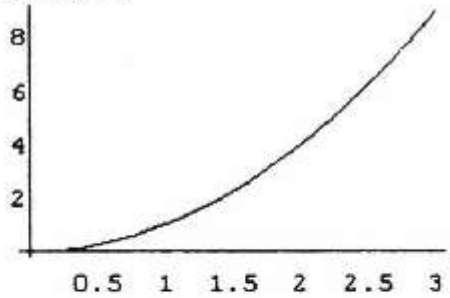


Figura (3.27) La función $f(x) = x^2$ restringida al intervalo $[0, \infty)$ invertible .

2.- $f(x) = e^{-x^2}$ restringida a $[0, \infty)$ es invertible, observese que si $x \geq 0$, al aumentar x, e^{-x^2} decrece.

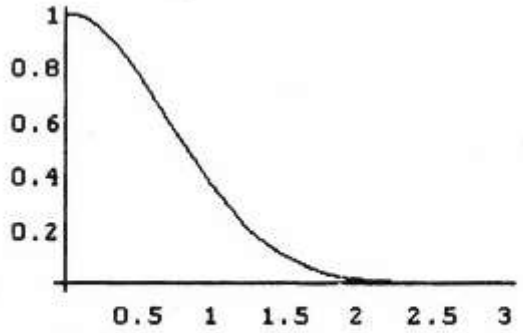


Figura (3.28) La función $f(x) = e^{-x^2}$ restringida al intervalo $[0, \infty)$ es invertible.

Por lo que $f(x) = e^{-x^2}$ es inyectiva y posee inversa sobre $[0, \infty)$, no así en $\Re$.

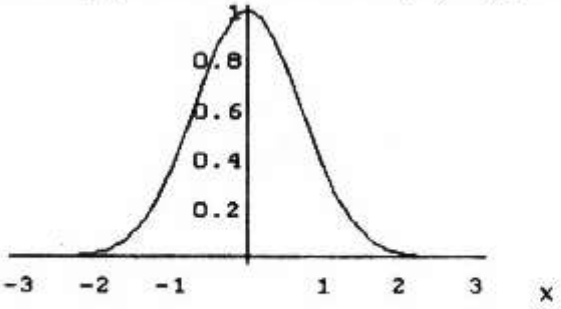
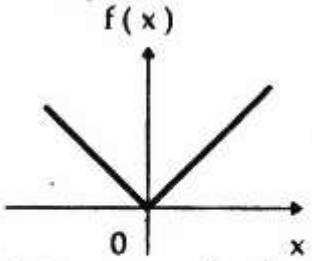


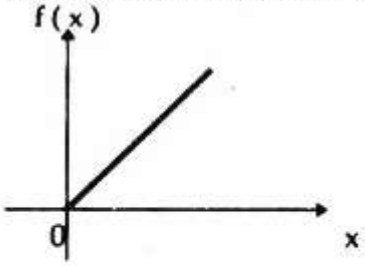
Figura (3.29) La función $e^{-x^2} : \Re \to (0,1]$, no es invertible.

3.- La función $f(x) = |x|$, tiene como gráfica :



por lo que carece de inversa si se define como $|x| : \Re \to [0, \infty)$.

4.- Pero si $f(x) = |x|$, se define como $|x| : [0, \infty) \to [0, \infty)$,



entonces $f(x) = |x|$ es siempre creciente y tiene inversa sobre $[0, \infty)$.

3.4.2. Funciones trigonométricas inversas

A continuación construiremos las funciones inversas más importantes en el Cálculo Diferencial.

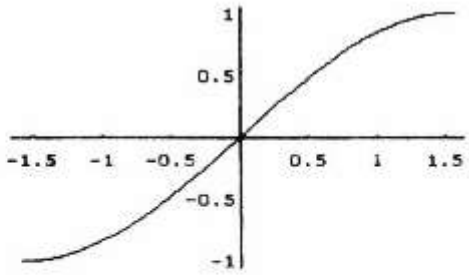
Ejemplos

1.- Construya la función inversa de $f(x) = \text{sen } x$.

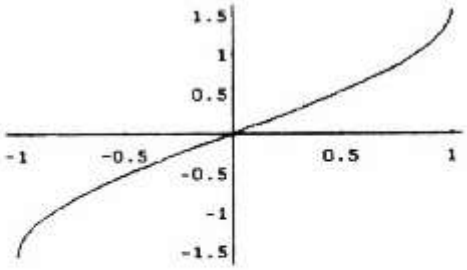
Solución

Si restringimos la función $f(x) = \text{sen}x$ al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ en donde es creciente, entonces

$$\text{sen } x : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1] \therefore x = \text{Sen}^{-1} y \text{ , definimos}$$
$$\text{angsen } x : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2] \text{ con } \text{sen}^{-1} x = \text{angsen } x.$$



a) f (x) = sen x restringido a $[-\pi/2, \pi/2]$



b) f (x) = angsen x

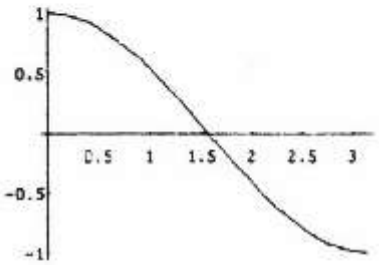
Figura (3.30) construcción y gráfica de la función angsen x .

2.- Construya la función inversa de $f(x) = \cos x$.

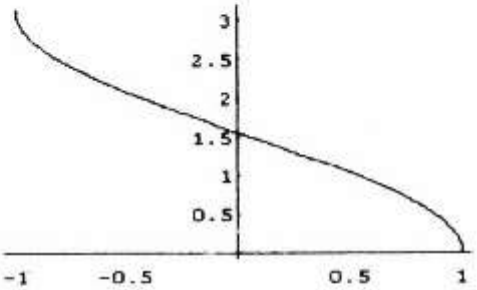
Solución

Se restringe $f(x) = \cos x$ al intervalo $[0, \pi]$ en donde es decreciente,

Sí $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$ definimos $\text{angcos } x : [-1, 1] \to [0, \pi]$ y $f^{-1}(x) = \text{angcos } x$.



a) f (x) = cos x restringido a $[0, \pi]$



b) f (x) = angcos x .

Figura (3.31) construcción y gráfica de la función angcos x .

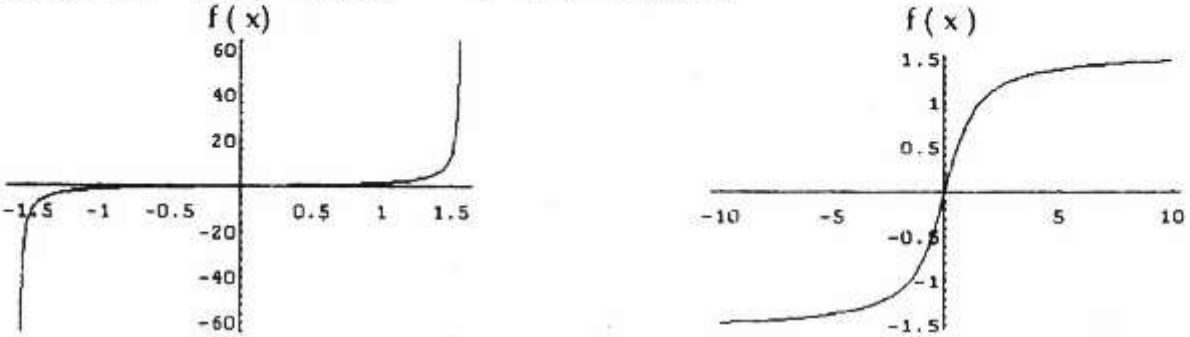
3.- Construir la función inversa de $f(x) = \tan x$.

Solución

Se restringe $f(x) = \tan x$ al intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ en donde es creciente.

$$\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \Re \qquad y \qquad \text{angtan } x : \Re \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$$

entonces sí $f(x) = \tan x$, $f^{-1}(x) = \text{angtan } x$



a) $f(x) = \tan x$ en $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\pi)$ b) $f^{-1}(x) = \text{angtan } x$

Figura (3.32) Definición y gráfica de la función angtan x .

5.- Construir la función inversa de $f(x) = e^x$.

Solución

Como $e^x : \Re \to (0, \infty)$, y si denotamos su inversa por $\ln x$, entonces

$$\ln x : (0, \infty) \to \Re$$

La función $f^{-1}(x) = \ln x$ se denomina **logaritmo natural** y satisface las siguientes propiedades :

Proposición 2

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

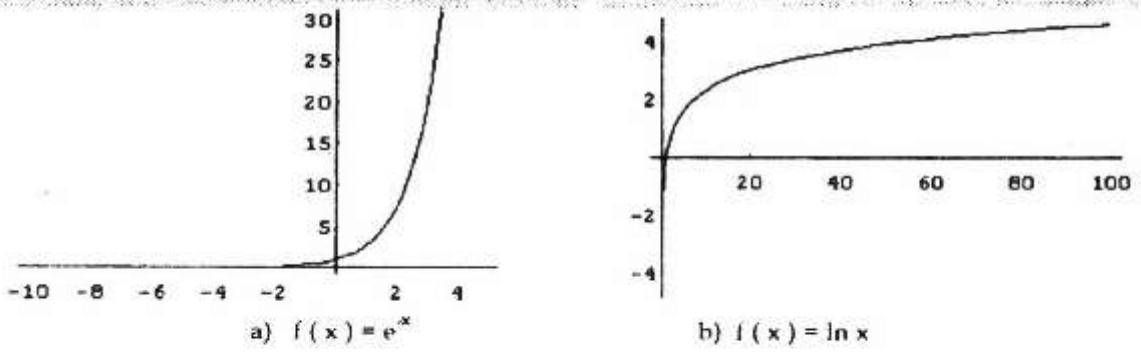
si $x_1, x_2 > 0$ $r \in \Re$, entonces se cumplen :

1.- $\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$.

2.- $\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$.

3.- $\ln x^r = r \ln x$.

4.- $\ln 1 = 0$.



a) $f(x) = e^x$ b) $f(x) = \ln x$

Figura (3.33) Gráfica de la función ln x .

EJERCICIOS

I.- En cada uno de los siguientes pares de funciones, en caso de que estas existan , determinar quién es la extensión y quién es la restricción .

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^6-1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$. b) $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x+1}}$ d) $f(x) = \sqrt{1-3x} + \sqrt{|x|}$, $g(x) = \sqrt{|1-3x|} + \sqrt{x}$

II.- Demostrar que los pares de funciones dadas son funciones inversas utilizando el hecho de que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, graficar $f(x)$ y $g(x)$ en un mismo sistema coordenado .

1.- $f(x) = x^6 + 1$ $\qquad g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

2.- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad g(x) = \dfrac{1}{x}$

3.- $f(x) = 6x - 3$ $\qquad g(x) = \dfrac{x+3}{6}$

4.- $f(x) = x^2 + 9$ $\qquad g(x) = \sqrt{x-9}$

5.- $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad x \geq 0$ $\qquad g(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ $\quad 0 < x \leq 1$

III.- Para las siguientes funciones determinar $f^{-1}(x)$ (en caso de existir) , incluyendo dominio y rango , así como su gráfica .

1.- $f(x) = 3x - 4$ $\qquad$ 2.- $f(x) = 5x$

3.- $f(x) = x^3 - 3$ $\qquad$ 4.- $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ $\quad 0 \leq x \leq 3$

5.- $f(x) = x^{2/3}$ $\quad x \geq 0$ $\qquad$ 6.- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+8}}$

7.- $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ $\qquad$ 8.- $f(x) = x$

9.- $f(x) = 1 - 3x$ $\qquad$ 10.- $f(x) = 2\text{sen } 3x$

11.- $f(x) = \ln 3x$ $\qquad$ 12.- $f(x) = e^{2x-1}$

13.- $f(x) = e^{x^2+1}$ $\qquad$ 14.- $f(x) = \ln(x-1)$

IV.- Para cada una de las funciones dadas determinar un intervalo donde posean inversa y determinar la función inversa en ese intervalo.

1.- $f(x) = 3x+5$, $x \in \Re$ $\qquad$ 2.- $f(x) = x^3 + 4x - 5$, $x \in \Re$

3.- $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $-1 < x < \infty$ $\qquad$ 4.- $f(x) = 3 - 2x + x^2$, $x \in \Re^+$

5.- $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad 0 \leq x < 2$

V.- Construir la gráfica , hallar el dominio, el rango, investigar cuales son invertibles y determinar su inversa , tanto su rango , su dominio y su regla de correspondencia de las funciones.

1.- $f(x) = -2^x$

2.- $f(x) = 2^{x+3}$

3.- $f(x) = \frac{1}{3}\, 3^x$

4.- $f(x) = 2 + e^x$

5.- $f(x) = e^{x/2}$

6.- $f(x) = -\ln x$

7.- $y = \ln(-x)$

8.- $y = 5 \ln x$

9.- $y = 1 + \ln(x+1)$

10.- $y = e^{x+3}$

11.- $y = -\operatorname{sen} x$

12.- $y = \operatorname{sen}(-x)$

13.- $y = 3 \operatorname{sen} x$

14.- $y = 5 \operatorname{sen} x$

15.- $y = 2 + \cos x$

16.- $y = -2 + \cos x$

17.- $y = x + \cos x$

18.- $y = \operatorname{sen} 2x$

19.- $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

20.- $y = 4 \cos x$

21.- $y = 3 \tan x$

22.- $y = 6 \tan x$

23.- $y = 3 + \tan x$

24.- $y = 8 + \tan x$

25.- $y = \tan \frac{x}{2}$

26.- $y = \tan 2x$

27.- $y = \tan 4x$

28.- $y = |\operatorname{sen} x|$

29.- $y = |\cos x|$

30.- $y = \sec x$

31 - $y = \csc x$

32.- $y = |\tan x|$

33.- $y = 3 \operatorname{ang} \tan x$

34.- $y = 3 \operatorname{ang} \operatorname{sen} x$

35.- $y = 4 \operatorname{ang} \cos x$

36.- $y = 8 \operatorname{ang} \cos x$

37.- $y = 1 + \operatorname{ang} \tan x$

38.- $y = 1 + \operatorname{ang} \operatorname{sen} x$

39.- $y = \operatorname{ang} \cos \frac{x}{2}$

40.- $y = \operatorname{ang} \cos 2x$

41.- $y = \operatorname{ang} \operatorname{sen} 2x$

42.- $y = \operatorname{ang} \sec x$

43.- $y = \operatorname{ang} \csc x$

3.5. COMBINACIÓN DE FUNCIONES

Dos o más funciones pueden combinarse para originar una nueva función , los métodos más comunes de combinaciones de funciones se definen a continuación :

Definición 9
COMPOSICIÓN DE FUNCIONES
Dadas las funciones

$$g : A \to B \quad y \quad f : B \to C,$$

la composición de f y g (ó g seguida de f) es la función $f \circ g : A \to C$ tal que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ para toda $x \in A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f \circ g"] \arrow[dr, "g"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Figura (3.34) composición de f y g .

De forma más general , si f (x) y g (x) son funciones , entonces (f ° g) (x) es una función con dominio en :

$$D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f\}$$

tal que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ para toda $x \in D_{f \circ g}$.

Definición 10
OPERACIONES ELEMENTALES ENTRE FUNCIONES
Sean f , g funciones , entonces f + g , f − g , f · g y f/g son funciones tales que :

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ $\quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $\quad D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x : g(x) = 0\}$

Ejemplos

1.- Si $f(x) = 3x^3 + 6$ y $g(x) = 3x + 4$, determinar $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ y $(\frac{f}{g})(x)$.

Solución
Primero observemos que :
$D_f = \Re$, $D_g = \Re$, en consecuencia
$D_{f \pm g} = \Re$.

a) $(f+g)(x) = 3x^2 + 6 + 3x + 4 = 3x^2 + 3x + 10$

b) $(f-g)(x) = 3x^2 + 6 - (3x + 4) = 3x^2 - 3x + 2$

c) $(f \cdot g)(x) = (3x^2 + 6)(3x + 4) = 9x^3 + 12x^2 + 18x + 24$

d) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{3x^2 + 6}{3x + 4}$, $D_{f/g} = \Re - \{ -(\frac{4}{3}) \}$.

2.- Determinar $\frac{f}{g}$ y $\frac{g}{f}$ si : $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{3-x}$.

Solución

$D_f = \{ x \mid x - 1 \geq 0 \} = [1, \infty)$

$D_g = \{ x \mid 3 - x \geq 0 \} = (-\infty, 3]$

La reglas de correspondencia son

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x}} \text{ y } \quad (\frac{g}{f})(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}} \text{ respectivamente,}$$

con dominios: $D_{f/g} = [1, +\infty) \cap (-\infty, 3] - \{3\} = [1, 3] - \{3\} = [1, 3)$

$D_{g/f} = (-\infty, 3] \cap [1, \infty) - \{1\} = (1, 3]$

3.- Represente $F(x) = (3x^2 - 2)^7$ como una función compuesta $g \circ f$.

Solución

Sea $F(x) = g[f(x)] = (3x^2 - 2)^7 = g(3x^2 - 2) = (3x^2 - 2)^7$ tal que $g(x) = x^7$ y $f(x) = 3x^2 - 2$.

4.- Exprese la función $F(x) = \cos(1 - x^2)$ como una composición de funciones.

Solución

Una forma es , $F(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(1 - x^2) = \cos(1 - x^2)$,

en consecuencia $f(x) = \cos x$ y $g(x) = 1 - x^2$.

En el **ejemplo 1** podemos observar que la operación composición no es conmutativa .

Intuitivamente , si consideramos a una función como una máquina que produce algo , la función $f \circ g$ se obtiene conectando la salida de $g(x)$ a la entrada de $f(x)$, (vease la figura 3.35).

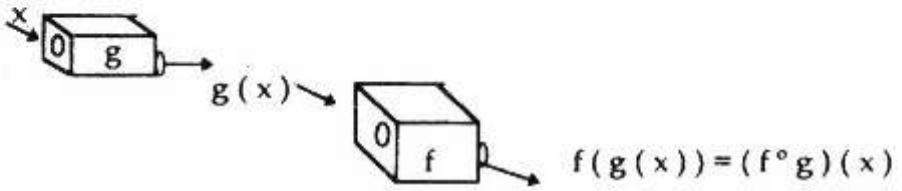


Figura (3.35) Representación de una composición de funciones.

5.- Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \text{sen } x$

entonces $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\text{sen } x) = (\text{sen } x)^2 + 1$,

también

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \text{sen}(x^2 + 1)$.

Obsérvese que $f \circ g \neq g \circ f$.

6.- Sean $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$ y $g(x) = \sqrt{18x}$, Determine $(f \circ g)(x)$ y su dominio.

Solución

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{18x}) = \frac{\sqrt{18x}}{18x-9}$$

$D_f = \Re - \{3, -3\}$, $D_g = [0, \infty)$, $R_g = [0, \infty)$, entonces

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g \text{ y } g(x) \in D_f\} = [0, \infty) \cap [0, \infty) - \{3, -3\},$$
$$= [0, \infty) - \{3, -3, \frac{1}{2}\}.$$

EJERCICIOS

I.- Si $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ y $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ determine

1.- $(f+g)(2)$
2.- $(f \circ g)(\sqrt{15})$
3.- $(f \cdot g)(1)$
4.- $(f/g)(4)$
5.- $(f \circ g)(1)$
6.- $(g \circ f)(1)$

II.- Si $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = \dfrac{2}{x+3}$.

1.- $(f-g)(2)$
2.- $g^3(3) = (g \circ g \circ g)(3)$
3.- $(g \circ f)(1)$
4.- $(f/g)(2) - (f \circ g)(1)$
5.- $g^5(3)$

III.- Si $f(x) = \sqrt{x-4}$ y $g(x) = |x-1|$, determine (si esto es posible)

1.- $(f \circ g)(x)$
2.- $(g \circ f)(x)$, $((g \circ g) \circ f)(x)$

IV.- Encuentre f y g tales que $F = g \circ f$

1.- $F(x) = (x^3-7)^8$
2.- $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$
3.- $f(x) = \dfrac{3}{x^2-2x+2}$
4.- $f(x) = \ln(x^2-1)$
5.- $f(x) = \operatorname{sen} x^2$
6.- $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

3.6. PARIDAD Y PERÍODICIDAD

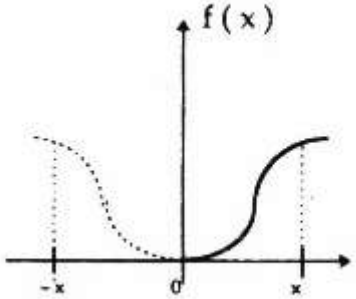
Un concepto útil en los cursos de matemáticas superiores es el de paridad y en esta sección se describe brevemente.

Definición 11
FUNCIÓN PAR Y FUNCIÓN IMPAR

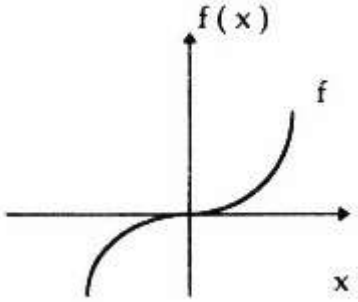
1.- Una función $f(x)$ que satisface la condición $f(x) = f(-x)$ para toda $x \in D_f$ se conoce como función par.

2.- Una función $f(x)$ que satisface la condición $f(x) = -f(-x)$ para toda $x \in D_f$ se denomina función impar.

Geométricamente, la gráfica de una función par presenta simetría respecto al eje vertical y la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.



a) Gráfica de una función par, obsérvese que la imagen de la parte positiva de $f(x)$ coincide con la parte negativa de $f(x)$.



b) Gráfica de una función impar, en este caso la imagen de la función impar $f(x)$ es simétrica respecto al origen.

Figura (3.36) Paridad de una función.

Es conveniente observar que hay funciones que no son pares o impares.
A continuación se proporcionan algunos ejemplos que ayudarán a comprender los conceptos de paridad.

Ejemplos

1.- Discuta la paridad de la función $f(x) = x^2 + 8$.
Solución
$f(x) = x^2 + 8$
$f(-x) = (-x)^2 + 8 = x^2 + 8$, en consecuencia $f(x) = f(-x)$ por lo que $f(x) = x^2 + 8$ es una función par.

2.- Discuta la paridad de la función $f(x) = x^2 - x$.
Solución
Si $f(x) = x^2 - x$, entonces $f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x$ y $-f(-x) = -x^2 - x$

por lo tanto : $f(x) \neq -f(-x) \neq f(-x)$.
Este es un ejemplo de una función que no es par y tampoco es impar .

Proposición 3
PROPIEDADES DE LA PARIDAD DE UNA FUNCIÓN
1.- El producto de dos funciones pares es par.
2.- El producto de dos funciones impares es impar.
3.- El producto de una función par y una impar es impar.

Ejemplos

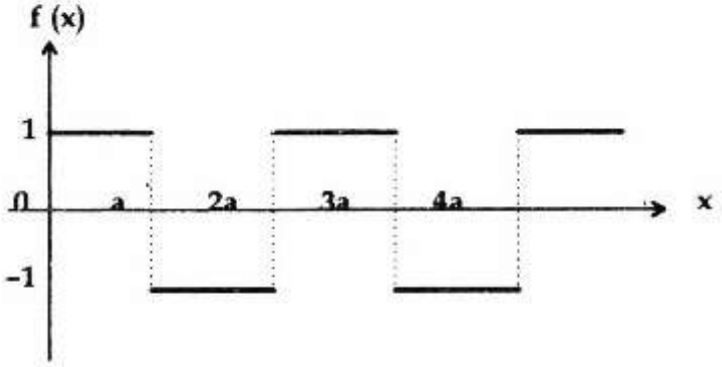
1.- Construir la prolongación par de $f(x) = x^2 + 1$, si $x \in [0, 2]$.
Solución
Prolongación par $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ si $x \in [-2, 0]$.
Prolongación impar $-f(-x) = -[(-x)^2 + 1] = -x^2 - 1$, si $x \in [-2, 0]$.

2.- Construir las prolongaciones par e impar de $f(x) = x - 2$, si $x \in [0, 3]$.
Solución
Prolongación par si $f(x) = x - 2$ en $[0, 3]$, $f(-x) = -x - 2$ en $[-3, 0]$.
Prolongación impar si $f(x) = x - 2$ en $[0, 3]$, $-f(-x) = -(-x - 2) = x + 2$ en $[-3, 0]$.

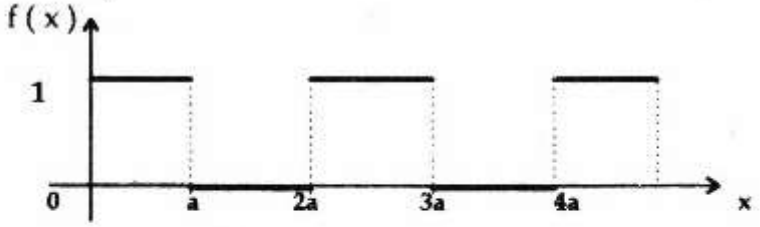
Definición 11
FUNCIÓN PERIÓDICA
Diremos que una función $f(x)$ es periódica de período T, si existe un número $T \neq 0$ tal que $f(x) = f(x + T)$ para todo $x \in D_f$. El número T se denomina período de la función $f(x)$, el período mínimo de $f(x)$ se denomina período principal de $f(x)$.

Ejemplos

1.- Función serpentina, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq a \\ -1 & \text{si} \quad a < x \leq 2a \end{cases}$, $f(x) = f(x + 2a)$.



2.- Función onda cuadrada $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le a \\ 0 & \text{si} \quad a < x \le 2a \end{cases}$, en este caso $f(x) = f(x + 2a)$.

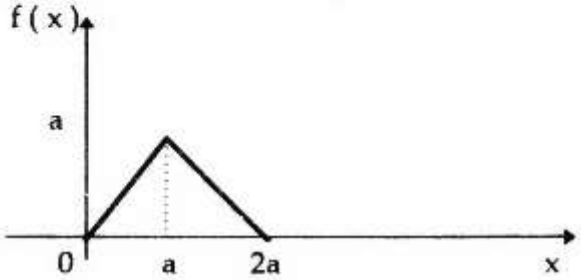


3.-Las funciones trigonométricas sen x , cos x , tan x , cot x , sec x y csc x son periódicas ¿ cual es el período de cada una de ellas ?
Si se conoce el período T de una función periódica f (x) se puede construir la gráfica completa de la función f (x) , esto se hace tomando la gráfica de cualquier período y duplicándola sobre intervalos subsecuentes de longitud igual al período T , esta construcción se denomina extensión periódica de la función f (x) .

Ejemplos

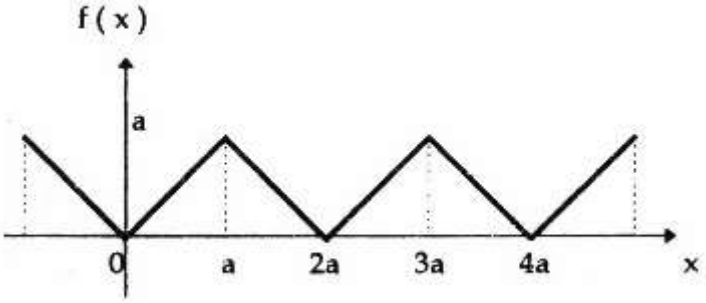
1.- Determine la extensión periódica de la Función onda triangular ,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le a \\ -x + 2a & \text{si} \quad a < x \le 2a \end{cases}$$



Solución

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le a \\ -x + 2a & \text{si} \quad a < x \le 2a \end{cases}$$



Tal que $f(x) = f(x + 2a)$.

Proposición 4

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES PERIÓDICAS .

1.- Si $c \in \Re$ y $f(x)$ es una función periódica entonces $cf(x)$ es también periódica , más general .

2.- Si $\alpha, \beta \in \Re$ y $f(x), g(x)$ son funciones de período T , entonces $\alpha f(x) + \beta g(x)$ es una función periódica .

EJERCICIOS

I.- Determine el tipo de paridad de las siguientes funciones :

1.- $f(x) = x - 1$
2.- $f(x) = 3x + 2$
3.- $f(x) = 0$
4.- $f(x) = -2$
5.- $f(x) = 6$
7.- $f(x) = x^3 + x + 1$
8.- $f(x) = x^5 - x$
10.- $f(x) = 2x^4 + 4x^2$
11.- $f(x) = x^{12} - x^3$
12.- $f(x) = 12x^6$
13.- $f(x) = \text{sen } x$
14.- $f(x) = \text{sen } 2x^2$
15.- $f(x) = \cos x$
16.- $f(x) = \ln x$
17.- $f(x) = e^x$
18.- $f(x) = e^{-3x}$
19.- $f(x) = \sqrt{x}$
20.- $f(x) = |x|$
21.- $f(x) = \sqrt{|x|}$
22.- $f(x) = \tan x$

II.- ¿ La suma de las funciones pares es par o impar ? Justifique su respuesta , de ejemplos .

III.- ¿ La suma de las funciones impares es impar ? Justifique su respuesta dé ejemplos .

IV.- ¿ Considera usted, que es posible que el cociente de dos funciones impares pueda ser par o bien impar ?

V.- Defina ,la parte par, y la parte impar de las funciones que a continuación se presentan

1.- $f(x) = x^3 + 2$ $\quad x \in [0, 2]$
2.- $f(x) = x + 1$ $\quad x \in [0, 1]$
3.- $f(x) = 2x^2 - 7$ $\quad x \in [-5, 0]$

VI.- Construir las gráficas de las funciones extendidas periódicamente de las funciones dadas.

1.- $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si} \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{si} \quad \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

2.- $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$

3.- $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ -x & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$

4.- $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ \ln x & \text{si} \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$

VII.-¿ El producto de funciones periódicas es una función periódica ?

VIII.- Compruebe que Si $c \in \Re$ y $f(x)$ es una función periódica entonces $c \cdot f(x)$ es también periódica .

IX.-¿ De que otra forma se podría definir la función onda triangular de manera que fuese periódica ?

CAPÍTULO 4

Límites y Continuidad

4.1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Es ahora el momento preciso de abordar el concepto más importante del Cálculo Diferencial, sin duda alguna el de **límite de una función**, debido a las grandes dificultades que presenta su comprensión, comenzaremos de una manera intuitiva apoyándonos en la **figura (4.1)**.

Diremos que la función f (x) tiende al límite **L** (o se aproxima al valor **L**) cerca del valor $x = \mathbf{x}_0$, si se puede hacer que f (x) esté tan cerca como queramos (*) de **L** haciendo que x esté lo suficientemente cerca de $\mathbf{x}_0$, pero sin ser igual a $\mathbf{x}_0$.

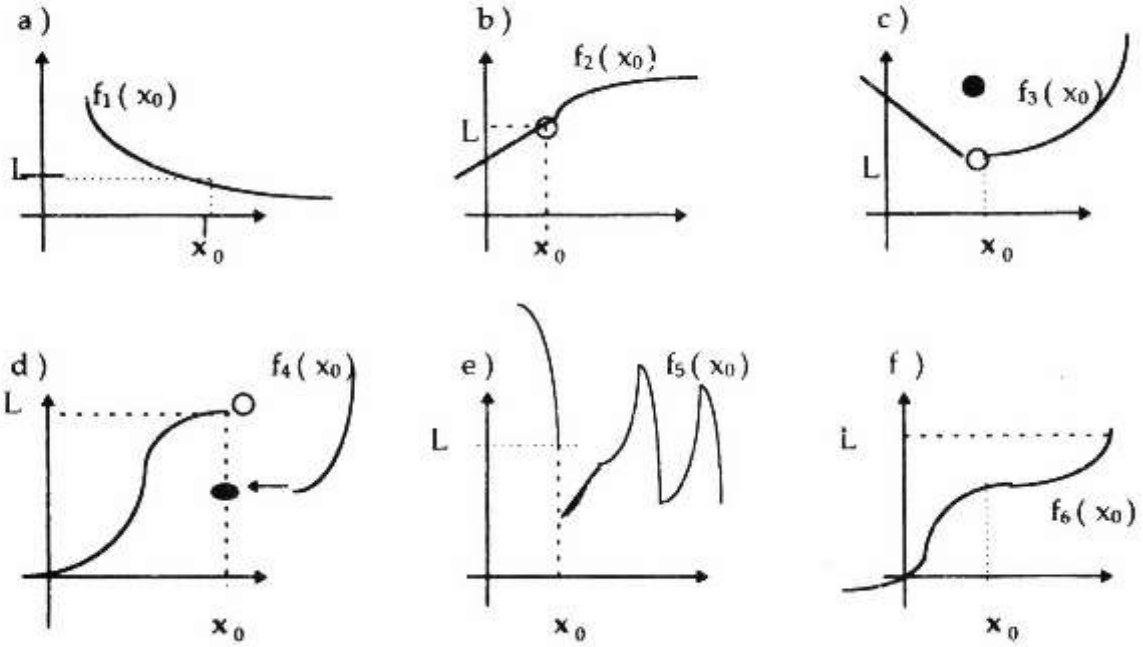


Figura (4.1) Solamente las funciones con gráficas a) , b) y c) tienden a **L** en el valor $x = \mathbf{x}_0$, nótese que no interesa quién sea $f(\mathbf{x}_0)$, incluso puede no estar definido, por ejemplo en $f_2(\mathbf{x}_0)$.

Consideremos nuevamente la frase (*) y la escribiremos de manera formal, f (x) tan cerca de **L** como queramos, se representará formalmente por $|f(x) - \mathbf{L}| < \varepsilon$ donde $\varepsilon > 0$ y lo

podemos manejar arbitrariamente , si $\varepsilon = 0$, entonces : $f(x) = L$, que x esté lo suficientemente cerca de x_0 pero sin ser igual a x_0 , se escribe , $0 < |x - x_0| < \delta$. Si se compactan las observaciones anteriores , se obtiene :

Definición 1

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

La expresión $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ (se lee " El límite de $f(x)$ cuando x tiende x_0 es L")

Si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta_\varepsilon > 0$ tal que para todo x , si $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

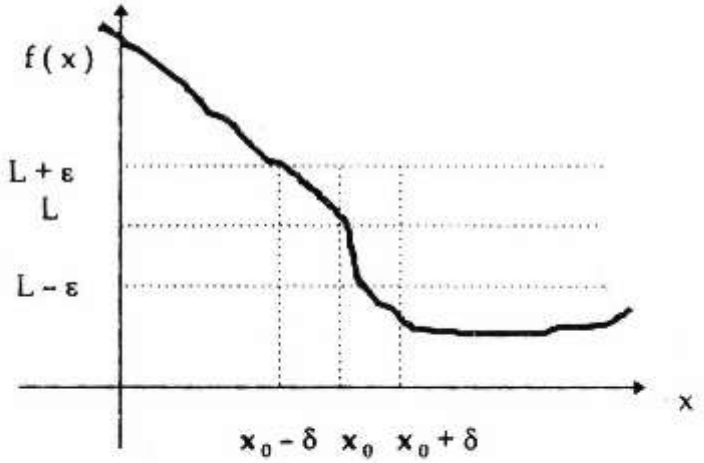


Figura (4.2) Representación geométrica de la definición de límite .

Así , la expresión $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ indica que si x está próximo a x_0 entonces $f(x)$ está cerca de **L** .

4 . 1 . 1 Propiedades fundamentales de los límites

Teorema 1

UNICIDAD DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

El límite de una función es único .

Supóngase que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$ entonces $L_1 = L_2$.

(Este teorema afirma que en el valor $x = x_0$, la función $f(x)$ sólo puede tener un límite) .

Proposición 1

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE

El límite en cualquier punto x_0 de la función constante $f(x) = c$ es c , es decir :

Si $f(x) = c$, $c \in \Re$, entonces para toda $x_0 \in D_f$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$.

Proposición 2

LÍMITE DE LA FUNCIÓN IDENTIDAD

$\lim_{x \to x_0} x = x_0$

La demostración de estas tres proposiciones es inmediata y se recomienda efectuarlas .

Teorema 2
ÁLGEBRA DE LÍMITES.
Si f, g son funciones tales que :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = M$$

entonces :

$$a)\ \lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

$$b)\ \lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = L\cdot M$$

$$c)\ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{siempre que } M \neq 0 .$$

De este teorema se deduce que para calcular el límite de una cierta función en un punto es suficiente efectuar las operaciones algebraicas sobre las variables mismas y que en muchos casos el cálculo del límite de una función es apenas una simple sustitución en la regla de correspondencia .

Teorema 3
LÍMITE DE UNA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES .
Sean f, g funciones , a y b $\in \Re$ tales que f (b) esté bien definida y además se satisface :

$$\lim_{x\to b} f(x) = f(b) \quad y \quad \lim_{x\to a} g(x) = b ,$$

entonces :

$$\lim_{x\to a} f[g(x)] = f(b) .$$

Proposición 3
LÍMITE DE LA FUNCIÓN RAIZ ENÉSIMA .

Si $n \in \aleph$, $L > 0$ y $\lim_{x\to a} f(x) = L$ entonces $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$.

En seguida se presentan varios ejemplos con el fin de facilitar la comprensión y manejo de los teoremas anteriores .

Ejemplos

Evaluar los siguientes límites .

1.- $\lim_{x\to 20} 6$.

Solución

Por el **Teorema 1** tenemos : $\lim_{x\to 20} 6 = 6$.

2.- $\lim_{y\to 2} 3x$

Solución

En este caso , la variable es y , en consecuencia 3x es una función constante , entonces por el **Teorema 1** tenemos :

$\lim_{y \to 2} 3x = 3x$.

3.- Límite de una función lineal , $\lim_{x \to a} (mx + b)$.

Solución

Solamente sustituimos x por a y obtenemos $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$.

4.- $\lim_{x \to 2} (5x - 11)$.

Solución

Sustituyendo $\lim_{x \to 2} (5x - 11) = 5 (2) - 11 = - 1$.

5.- No todos los límites existen .

Calcular $\lim_{x \to -2} \sqrt{x}$.

Solución

El $\lim_{x \to -2} \sqrt{x}$, no existe , la función $\sqrt{x}$ no está definida alrededor de $- 2$.

6.- El siguiente límite no existe : $\lim_{x \to 6} \sqrt{36 - x^2}$

Solución

No es posible acercarnos a 6 por la derecha puesto que la función $\sqrt{36 - x^2}$ no está definida para estos valores , en consecuencia $\lim_{x \to 6} \sqrt{36 - x^2}$ no existe .

Este tipo de límites se estudiará más adelante .

7.- Límite de un polinomio , calcular $\lim_{x \to c} (a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n)$.

Solución

Basta sustituir x por c , $\lim_{x \to c} (a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n) = (a_0 + a_1 c + \ldots a_n c^n)$.

8.- Evaluar $\lim_{x \to 1} (8 + x + 2x^2 + 3x^3)$.

Solución

Solamente sustituimos x por 1 , $\lim_{x \to 1} (8 + x + 2x^2 + 3x^3) = 8 + 1 + 2 (1)^2 + 3 (1)^3 = 14$.

9.- Límite de una función racional.

Si P (x) y Q (x) son polinomios de grados **m** y **n** respectivamente con $Q (a) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{P (x)}{Q (x)} = \frac{P (a)}{Q (a)} .$$

10.- Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2x+1}{x+3}$.

Solución

Basta con sustituir , $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2x+1}{x+3}=\dfrac{2+2(2)+1}{2+3}=\dfrac{7}{5}$.

11.- Evaluar los límites :

a) $\lim\limits_{x\to a}\text{sen } x$

b) $\lim\limits_{x\to a}\cos x$

c) $\lim\limits_{x\to a}\tan x$

d) $\lim\limits_{x\to a}\cot x$

e) $\lim\limits_{x\to a}\sec x$

f) $\lim\limits_{x\to a}\csc x$.

Solución

a) $\lim\limits_{x\to a}\text{sen } x = \text{sen } a$

b) $\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos a$

c) $\lim\limits_{x\to a}\tan x = \tan a$ (en este caso a no debe ser : $\pm\dfrac{\pi}{2}$, $\pm\dfrac{3}{2}\pi$, $\pm\dfrac{5}{2}\pi$,.... ¿Por qué ?)

d) $\lim\limits_{x\to a}\cot x = \cot a$ (siempre y cuando a no sea de la forma : 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$,...¿ Por qué ?)

e) $\lim\limits_{x\to a}\sec x = \sec a$ (¿ que condición debe cumplir a ?)

f) $\lim\limits_{x\to a}\csc x = \csc a$ (ahora $a \neq 0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$,...)

12.- Límite de la función ln x .

Evaluar los límites :

a). $\lim\limits_{x\to a}\ln x$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\ln x$

Solución

a) Solamente hay que sustituir $\lim\limits_{x\to a}\ln x = \ln a$ si $a > 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\ln x$, no existe (recordar el dominio de definición de ln x)

13.- Límite de la función exponencial .

Evaluar $\lim\limits_{x\to a} e^x$

Solución

Sólo hay que sustituir , $\lim\limits_{x\to a} e^x = e^a$.

Como seguramente el lector notó , los límites en los ejemplos anteriores fueron obtenidos por sustitución directa del valor al cual tiende x en la función f (x) , sin embargo esto no siempre es posible , por ejemplo en $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^8-1}{x-1}$ al sustituir obtenemos el cociente $\dfrac{0}{0}$ que no está definido por lo que se denomina **indeterminación** . Si al efectuar la sustitución obtenemos una **indeterminación** de la forma $\dfrac{0}{0}$ muchas veces es posible determinar el límite buscado

mediante la construcción de una función restricción a partir de la función original , generalmente la función restricción se construye factorizando y simplificando la función original de manera adecuada , este procedimiento lo justifica el siguiente teorema :

Teorema 4

Sea $h \in \Re^+$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo x tal que $0 < |x - a| < h$, sea $\lim_{x \to a} g(x) = L$, entonces :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Este teorema afirma que es posible obtener una función restringida $g(x)$ tal que $g(x) = f(x)$ en el intervalo $0 < |x - a| < h$ en la cual es factible obtener el límite de la función $g(x)$.

14.- Evaluar $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - x^2}{x - 1}$

Solución

Sustituyendo obtenemos $\dfrac{0}{0}$, entonces :

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} -\frac{(1 - x)(1 + x)}{1 - x} = -\lim_{x \to 1}(1 + x) = -2.$$

15.- Calcular $\lim_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}}$

Solución

Por sustitución directa se obtiene una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, por lo que es posible utilizar el teorema anterior .

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}} = \lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 5)}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x + 2}{x + 5}} = \sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

16.- Calcular $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$.

Solución

La sustitución directa da $\dfrac{0}{0}$ entonces :

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} (x^2 - 2x + 4) = 12.$$

17.- Calcular $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

Solución

La sustitución directa da $\dfrac{0}{0}$ entonces :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\,(x+1)} = \frac{0}{2} = 0 .$$

En algunos otros casos es necesario aplicar un "artificio matemático" que consiste en multiplicar la función por un 1 de manera adecuada , el artificio generalmente funciona en indeterminaciones de la forma $\dfrac{0}{0}$ y expresiones de la forma : $\sqrt{\ } - \sqrt{\ }$, $\sqrt{\ } - f(u)$ o $f(u) - \sqrt{\ }$

18.- Evaluar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

Solución

Sustituyendo directamente obtenemos la **forma indeterminada** $\dfrac{0}{0}$, entonces .

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{0}{2} = 0 .$$

19.- Evaluar $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$.

Solución

Por sustitución directa obtenemos **la forma indeterminada** $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2) = 4 .$$

20.- Evaluar $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{10}}{x-10}$

Solución

La sustitución directa **da la forma indeterminada** $\dfrac{0}{0}$.

Por lo tanto es conveniente multiplicar por **uno** pero de manera adecuada, recordando que $x - y$ se factoriza como

$$x - y = (x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}})(x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}} y^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{n-3}{n}} y^{\frac{2}{n}} + x^{\frac{n-4}{n}} y^{\frac{3}{n}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x y^{\frac{n-2}{n}} + y^{\frac{n-1}{n}})$$

Entonces :

$$\lim_{x\to 10} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{10}}{x-10} \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} 10^{\frac{1}{3}} + 10^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} 10^{\frac{1}{3}} + 10^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to 10} \frac{x-10}{(x-10)\,(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} 10^{\frac{1}{3}} + 10^{\frac{2}{3}})} .$$

$$= \lim_{x\to 10} \frac{1}{(10^{\frac{2}{3}} + 10^{\frac{1}{3}} 10^{\frac{1}{3}} + 10^{\frac{2}{3}})} = \frac{1}{3\,(10^{\frac{2}{3}})} .$$

21.- Evaluar $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$

Solución

La sustitución directa **da la forma indeterminada** $\dfrac{0}{0}$.

Puesto que los radicales son de índices diferentes es conveniente utilizar el cambio de variable : $\mathbf{x = y^6}$ (nótese que el exponente de la nueva variable es el producto de los índices de los radicales) .

Si $\mathbf{x = y^6}$ entonces $y = \sqrt[6]{x}$ y en consecuencia $\begin{cases} \sqrt[3]{x} \to y^2 \\ \sqrt{x} \to y^3 \\ y \to 2 \end{cases}$ por tanto

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8} = \lim_{y\to 2} \frac{y^2-4}{y^3-8}$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{(y-2)(y+2)}{(y-2)(y^2+2y+4)}$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{(y+2)}{(y^2+2y+4)} = \frac{1}{3}$$

22.- Evaluar $\lim\limits_{x \to 64} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8}$.

Solución

La sustitución directa nos lleva a la **forma indeterminada** $\dfrac{0}{0}$.

Puesto que los radicales son de índices diferentes es conveniente utilizar el cambio de variable : $\mathbf{x = y^{12}}$ (nótese que el exponente de la nueva variable es el producto de los índices de los radicales) .

Si $\mathbf{x = y^{12}}$ entonces $y = \sqrt[12]{x}$ $\therefore$ $\begin{cases} \sqrt[4]{x} = y^3 \\ \sqrt[3]{x} = y^4 \\ y \to 1 \end{cases}$ por lo que :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = \lim_{y \to 1} \frac{y^4 - 1}{y^3 - 1}$$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{(y-1)(y^3 + y^2 + y + 1)}{(y-1)(y^2 + y + 1)}$$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{(y^3 + y^2 + y + 1)}{(y^2 + y + 1)} = \frac{4}{3} .$$

Si al pretender evaluar cierto límite obtenemos la **forma indeterminada** $\dfrac{b}{0}$ donde $b \in \Re - \{0\}$, entonces diremos que este límite **no existe** .

23.- Evaluar $\lim\limits_{x \to 64} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 12}{\sqrt{x} - 8}$.

Solución

Por sustitución directa obtenemos :

$\lim\limits_{x \to 64} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 12}{\sqrt{x} - 8} = -\dfrac{8}{0}$, es decir **éste límite no existe** .

24.- Evaluar $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 8}{\sqrt{x + 1} - 2}$

Solución

Por sustitución directa obtenemos **la forma indeterminada** $-\dfrac{5}{0}$, por lo tanto **éste límite no existe** .

EJERCICIOS

I.- Evaluar los límites :

1.- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+6}{x^2-3}$

2.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{1-x}$

3.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{3(x^3-x)}$

4.- $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \dfrac{2(x^2-3)}{x^4+x^2+1}$

5.- $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^3+6x^2+4x}{x^2-x-6}$

6.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)}{x^2-1}\sqrt{3-x}$

7.- $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

8.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$

9.- $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

10.- $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x(x-1)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

11.- $\lim\limits_{x\to 3} \left(3\dfrac{x+2}{x^2-5x+9}+2\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$

12.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

13.- $\lim\limits_{x\to 1} 2\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

14.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$

15.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$

16.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-2}{x-2}$

17.- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$

18.- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$

19.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{5x}$

20.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

21.- $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}}$

22.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 + x}} - 1\right)$

23.- $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}}$

24.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^{\frac{3}{2}} - 1}{x}$

25.- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^6 - 720}{x - 3}$

26.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}$, $a \neq 0$

27.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}$, $a < 0$

28.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x}$

29.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x^2 + x} - \dfrac{1}{2}}{2x}$

30.- $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{1}{x - 1}\right)$

31.- $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^2 - 25x + 3}$

32.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x}}{x}$

33.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 1}{|x|}$

4.1.2. Límites al Infinito

En ocasiones es necesario conocer el **comportamiento global** de una función real (comportamiento de la función lejos del origen) , esto significa que se debe efectuar el estudio de la función en los extremos del dominio , interés especial requiere el caso en que estos extremos son $-\infty$, ∞ .

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, notemos que posee simetría respecto al eje vertical y que los valores que alcanza son siempre menores que 1 , además conforme x crece , la gráfica se aproxima a la recta horizontal (asíntota) $y = 1$.

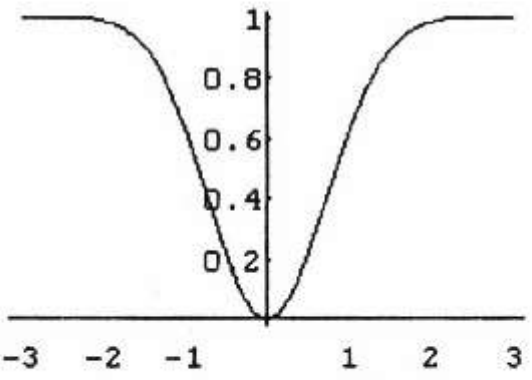


Figura (4.3) Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, obsérvese que conforme x crece o decrece indefinidamente , f (x) se aproxima a 1 .

Intuitivamente , diremos que f (x) , tiene el límite L si y sólo si se puede conseguir que f (x) esté tan próxima a L como queramos al tomar x suficientemente grande , esto lo simbolizaremos como sigue :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Formalmente , el párrafo anterior se escribe como :

Definición 2
LÍMITE AL INFINITO

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{si y sólo si}$$

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \Re^+$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x > A$.

Análogamente se define $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, en la definición anterior basta reemplazar $x > A$ por $x < -A$, así obtenemos :

Definición 3
LÍMITE A MENOS INFINITO

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad \text{si y sólo si}$$

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \Re^+$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $x < -A$.

Es necesario tener en cuenta que los teoremas sobre unicidad y operaciones (suma , resta , producto , cociente , etc.) son válidos en la evaluación de límites al infinito .

Teorema 5
LÍMITES FUNDAMENTALES

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \ , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \ .$$

Teorema 6
TEOREMA DE ALTO GRADO
Dado el polinomio real de **grado n** $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_nx^n$, entonces :
$\lim_{x\to\infty}(a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_nx^n) = \lim_{x\to\infty}a_nx^n$ **(orden n)** .
Esto quiere decir que el **comportamiento** del polinomio **en el infinito** es de **orden n** .

Corolario
Sean $p(x)$ y $q(x)$ polinomios cuyos términos de mayor grado son respectivamente ax^n y bx^n, entonces :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{bx^n} \quad y \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{bx^n}$$

Esto significa que para evaluar el límite de un cociente de funciones polinomiales y x crece indefinidamente se ignoran todos los términos a excepción de aquel de mayor grado de cada uno de los polinomios.
Estas dos últimas proposiciones pueden generalizarse para funciones con estructura similar a un polinomio .

Ejemplos

1.- Evaluar $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{2x^2-1}$.

Solución

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

2.- Evaluar $\lim_{x\to\infty}\frac{6x-8}{5-x^2}$.

Solución

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-8}{5-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{x}=0 \ .$$

3.- Evaluar $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+7}{x-6}$.

Solución

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x+7}{x-6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty .$$

4.- Evaluar $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{3-\sqrt{x}}$.

Solución

El teorema anterior se vale en algunos otros casos :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{3-\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}} = -1 .$$

5.- Evalúe $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[4]{2x}+\sqrt[3]{8x}}{\sqrt[5]{32x}-\sqrt[3]{x}}$.

Solución

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[4]{2x}+\sqrt[3]{8x}}{\sqrt[5]{32x}-\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{\sqrt[3]{8x}}{\sqrt[3]{x}} = -2 .$$

7.- Evalúe $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Solución

Antes es necesario multiplicar por 1 de manera adecuada :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0 .$$

8.- Evalúe $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+9}-x^2\right)$.

Solución

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-x^2\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+9}-x^2\right)\left(\sqrt{x^2+9}+x^2\right)}{\sqrt{x^2+9}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+9-x^4}{\sqrt{x^2+9}+x^2}$$

EJERCICIOS

I.- Evalúe los siguientes límites.

1.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8}{\sqrt{x}}$

2.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{5-4x}$

3.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{x+6}$

4.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x+3}}{x}$

5.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-6}{x^2-8}$

6.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+2}}$

7.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-7}{x^2+7x}$

8.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+7x-4}{x^3}$

9.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$

10.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$

11.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+7x-4}{x^3}$

12.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

13.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$

14.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$

15.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$

16.- $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$

17.- $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right)$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)$

19.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

20.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[2]{x}+\sqrt[3]{x}+1}{3\sqrt{2x}-\sqrt[4]{x}+5}$

21.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+3x}+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2+3}+\sqrt[5]{x}}$

22.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)^8(x-5)^{13}}{8x^{21}+4x^5}$

23.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^2(x-3)^6(x-8)^{13}}{(x-2)^{21}+6}$

24.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-3}{x^2+3x-2}$

25.- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+7x}-x}{3x^{\frac{2}{3}}+5x+7x^2}$

26.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-1}{x^u-3}$

27.- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(-x)}{x-3}$

28.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-8}{\sqrt{x^2-8}-3x}$.

II.- En cada uno de los límites anteriores sustituya ∞ por $-\infty$ ó $-\infty$ por ∞ según sea el caso y evalúelos ¿ tiene sentido este cambio? justifique su respuesta .

4.1.3. Límites Laterales

Como ocurrió en dos de los ejemplos anteriores , es probable que no sea posible aproximarse al valor x_0 por medio de un intervalo centrado en este valor y en consecuencia no existir $\lim_{x \to x_0} f(x)$, sin embargo , muchas veces en estos casos es posible aproximarse a x_0 ya sea por valores que se encuentran sólo a la derecha de x_0 o por valores que se encuentran a la izquierda de x_0 , esto nos lleva a la definición de los **límites laterales** , esto se aclara y se formaliza a continuación .

Supongamos que la gráfica de cierta función se comporta como se ilustra en la siguiente figura :

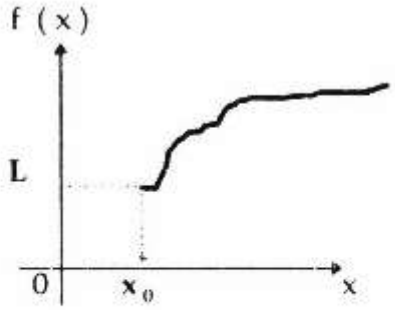


Figura (4.4) Gráfica de una función definida para valores mayores que a x_0 , en este caso sólo es posible aproximarse a x_0 por la derecha

Observemos que la función f (x) no está definida para los valores x menores que x_0 , en consecuencia no es posible evaluar $\lim_{x \to x_0} f(x)$ (Por definición , no existe el número $\delta > 0$) . tal que f (x) esté definida para los valores x tales que $0 < | x - x_0 | < \delta$) , sin embargo podemos estudiar el comportamiento de f (x) cuando los valores de x estén en un sólo lado del valor de x_0 .

Esto induce de forma natural a definir los **límites laterales** , su definición es semejante a la definición de límite proporcionada en la sección anterior con la única diferencia de que x tiende al número x_0 por los valores que están a un sólo lado de x_0 .

Definición 4.
LÍMITE LATERAL DERECHO
Sean f (x) una función real , x_0 , $L \in \Re$, decimos que el límite de f (x) es L cuando x tiende al valor x_0 por la derecha y escribimos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

Si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $| f(x) - L | < \varepsilon$ siempre que $0 < x - x_0 < \delta$.

LÍMITE LATERAL IZQUIERDO

Decimos que el límite de f (x) es L cuando x tiende al valor x_0 por la izquierda y lo representamos por

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $| f(x) - L | < \varepsilon$ siempre que $-\delta < x - x_0$.

Nota : Es necesario tener en cuenta que los signos índice $-$, $+$ carecen de carácter operativo y solamente indican por que parte se está efectuando la aproximación al valor x_0 .

En la evaluación de los límites laterales son válidas todas las técnicas descritas en las secciones anteriores , sin embargo debemos verificar previamente que sea **posible aproximarnos al valor x_0 indicado** .

Ejemplos

1.- Evaluar $\lim_{x \to 2^+} 6$, $\lim_{x \to 2^-} 6$.

Solución

Por ser $f(x) = 6$ una función constante ,

$$\lim_{x \to 2^+} 6 = 6, \quad \lim_{x \to 2^-} 6 = 6 .$$

2.- Evaluar $\lim_{x \to 3^-} (6x - 3)$.

Solución

$$\lim_{x \to 3^-} (6x - 3) = 6(3) - 3 = 15 .$$

3.- Evaluar $\lim_{x \to 5^+} \dfrac{x - 5}{x^2 - 25}$.

Solución

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{x - 5}{x^2 - 25} = \lim_{x \to 5^+} \frac{x - 5}{(x - 5)(x + 5)} = \lim_{x \to 5^+} \frac{1}{x + 5} = \frac{1}{5 + 5} = \frac{1}{10} .$$

4.- Evaluar $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$.

Solución

como $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ entonces $\dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$\text{en consecuencia} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 .$$

5.- Evaluar los límites $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{|x-2|}$, $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{|x-2|}$.

Solución

$$\text{como } |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases} \text{ , entonces } \frac{x-2}{|x-2|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 2 \\ -1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$\text{y } \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = 1 .$$

Similarmente $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{|x-2|} = -1$

6.- Evaluar $\lim_{x\to 4^-} \frac{16-x^2}{\sqrt{4+3x-x^2}}$.

Solución

Factorizando obtenemos : $\frac{16-x^2}{\sqrt{4+3x-x^2}} = \frac{(4-x)(4+x)}{\sqrt{(4-x)(1+x)}} = \frac{(4+x)\left(\sqrt{4-x}\right)}{\sqrt{1+x}}$.

en consecuencia

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{16-x^2}{\sqrt{4+3x-x^2}} = 0 .$$

7.- $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{x-1}$

Solución

$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{x-1}$, no existe, no es posible aproximarnos a 1 por su izquierda , si lo intentásemos obtendríamos raices cuadradas de números negativos .

8.- Evaluar $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{1-x^2}$.

Solución

$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{1-x^2}$, no existe , el aproximarse a uno por la derecha implica dar valores mayores a 1 a la función $\sqrt{1-x^2}$ para los cuales no está definida .

Existe una estrecha relación entre los límites laterales y los límites descritos en la sección anterior , esta relación se encuentra determinada por el siguiente teorema .

Teorema 5

RELACIÓN ENTRE EL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN Y SUS LÍMITES LATERALES

Si f (x) es una función y a , L son números reales , entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L .$$

La demostración es una consecuencia inmediata de las definiciones de límites laterales , sólo basta unirlas .

El teorema anterior garantiza la existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$ cuando ambos límites laterales existen y tienen el mismo valor .

Ejemplos

En caso de existir , calcular los límites :

1.- $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$.

Solución

Evaluamos los límites laterales en x = 1

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} (x-1) = 0 ,$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} (x-1) = 0 , \text{ por lo tanto}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-1} = 0 .$$

2.- Evaluar $\lim_{x\to 4} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+4}{4} & \text{si } x \le 4 \\ \dfrac{12-3x}{4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

Solución

$$\text{si } x \le 4 , \ f(x) = \frac{x+4}{4} \ \text{ y } \ \lim_{x\to 4^-} f(x) = \frac{4+4}{4} = 2$$

$$\text{si } x > 4 , \ f(x) = \frac{12-3x}{4} \ \text{ y } \ \lim_{x\to 4^+} f(x) = \frac{12-3(4)}{4} = 0$$

en consecuencia $\lim_{x\to 4} f(x)$ **no existe** .

3.- Evaluar : $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{1-x^2}$, $\lim_{x\to 1} \sqrt{1-x^2}$.

Solución

El dominio de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es $[-1, 1]$ que no incluye puntos a la derecha de 1 o a la izquierda de -1 por lo tanto :

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{1-x^2} \text{ no existe , y } \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} \text{ no existe .}$$

También $\lim_{x\to 1} \sqrt{1-x^2}$ no existe .

4.- $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

Solución

Como $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$ entonces $\frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 2 \\ -1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

entonces $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ no existe puesto que los límites laterales izquierdo y derecho son 1 y -1 respectivamente .

EJERCICIOS

I.- Evaluar los siguientes límites laterales

1.- $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{4-x^2}$

2.- $\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{4-x^2}$

3.- $\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

4.- $\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

5.- $\lim_{x\to 0^+} x\sqrt{x+\frac{1}{x}}$

6.- $\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^4}}$

7.- $\lim_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^n}$, si n es impar .

8.- $\lim_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^n}$, si n es par

9.- $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right)$

10.- $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$

II.- En las expresiones del problema anterior cambie el sentido de aproximación al valor x_0 indicado y evalúe los límites laterales de las expresiones así obtenidas .

III.- Utilizando límites laterales , si es que existe , evalúe el límite pedido en el (los) punto (s) x_0 indicados .

1.- $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ $\quad x_0 = 3 \, , \; -3 \, , \; 1 \, .$

2.- $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ $\quad x_0 = 2 \, , \; -2 \, , \; 1 \, .$

3.- $f(x) = \left(9 - x^2\right)^{\frac{1}{3}}$ $\quad x_0 = 3 \, .$

4.- $f(x) = \begin{cases} 1 + x^3 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 - x^3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ $\quad$ en $x_0 = 0 \, .$

5.- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ $\quad$ en $x_0 = 0 \, .$

6.- $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \operatorname{sen} 3x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ $\quad$ en $x_0 = 0 \, .$

7.- $f(x) = \frac{|x - a|}{x - a}$ $\quad$ en $a = 0 \, .$

4.1.4. Límites Trigonométricos Especiales

Ante todo se hace necesario establecer el **teorema del sandwich** resultado sumamente útil en el cálculo de ciertos límites.

Teorema 7
DEL SANDWICH
Si las funciones $g(x)$ y $h(x)$ tienen como límite **L** en el punto x_0 y si

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

alrededor de x_0 entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L .$$

Existen dos límites que frecuentemente aparecen en ciertos cálculos matemáticos, el primero de ellos es $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$, la evaluación de este límite se basa en la siguiente figura :

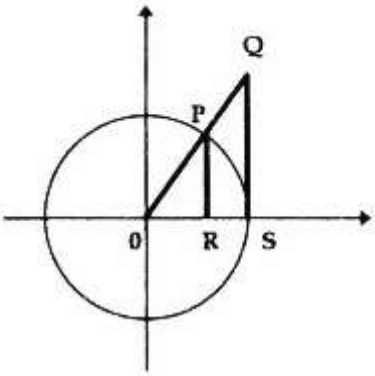


Figura (4 . 5) Evaluación del límite $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$.

En la figura anterior, el área del triángulo **OPR** es menor al área del sector circular **OPS** y esta es a su vez es menor que el área del triángulo **OQS** además :

$$\text{área } \Delta_{OPR} = \frac{1}{2} |OR||RP| = \frac{1}{2} \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\text{área } \Delta_{ORS} = \frac{1}{2} |OS||SQ| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan\theta$$

$$\text{área del sector circular } \mathbf{OPS} = \pi \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$$

Por lo que se tiene : $\frac{1}{2}\cos\theta \operatorname{sen}\theta \leq \frac{1}{2}\theta \leq \frac{1}{2}\tan\theta$, válida para $\theta \in [\,0, \frac{\pi}{2}\,]$.

De la desigualdad : $\frac{1}{2}\cos\theta \operatorname{sen}\theta \leq \frac{1}{2}\theta$

obtenemos $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta}$,

también de la desigualdad

$$\frac{1}{2}\theta \le \frac{1}{2}\tan\theta$$

se obtiene que

$$\cos\theta \le \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta},$$

combinando estos dos resultados :

$$\cos\theta \le \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \le \frac{1}{\cos\theta},$$

si tomamos el límite en cada una de las partes de la desigualdad obtenemos :

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta \le \lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta},$$

En consecuencia , por el **teorema del sandwich** ,

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 .$$

Si θ **es negativo**,

$$\frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{-\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta},$$

por lo que el valor del límite es el mismo .

□

Como consecuecia inmediata tenemos

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0 .$$

Demostración

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta(1+\cos\theta)} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$$, pero

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 \text{ y } \lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = 0$$, por lo tanto

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = 0$$

□

Ejemplos

1.- Evalúe $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 10x}{x}$.

Solución

Para evaluar este límite se utiliza una nueva variable de manera que la función se tranforme en una expresión ya conocida :

sea $u = 10x$ si $x \to 0$ entonces $u \to 0$ y $x = \frac{u}{10}$, sustituyendo obtenemos :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 10x}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{\frac{u}{10}} = 10\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u} = 10\cdot 1 = 10$$

2.- Evalúe $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cos x = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1.$$

3.- Evalúe $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5x^2} = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right)\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}(1)^2\frac{1}{2} = \frac{1}{10}.$$

EJERCICIOS

I.- Evalúe los siguientes límites .

1.- $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

2.- $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} ax}{x}$

3.- $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{x}$

4.- $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 5x}{x^2}$

5.- $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{x}$

6.- $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

7.- $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$

8.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\text{ang sen } x}{31x}$

9.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{sen} 2x}$

10.- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{\tan x} \right)$

11.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sec 3x}{\sec 2x}$

12.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

13.- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2 - 1\right)}{x - 1}$

14.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x \cot x}$

15.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cot^2 x}{4x^2}$

16.- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen} 2(x - 1)}{x - 1}$

17.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{4x^2}$

18.- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{\tan^3 2x}$

4.2. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Una de las preocupaciones fundamentales de los teólogos consiste en saber si un ángel puede moverse de un punto A a otro punto B justamente, y si en tal caso tiene el ángel que pasar por el espacio intermedio, sin entrar en discusiones, no es arriesgado afirmar que los movimientos cotidianos observados no muestran este tipo de discontinuidades.

Supongamos que un automóvil circula por la carretera México-Toluca , que esta autopista es una recta en la que se ha introducido un sistema de coordenadas como referencia, que $f(t)$ es la coordenada del automóvil en el tiempo t , que en el tiempo t_0, el automóvil se encuentra a la mitad de un túnel de longitud 2ε . Evidentemente el automóvil debió haber estado un tiempo (aunque haya sido muy corto) en el túnel anterior a t_0 y seguirá dentro del túnel a otro tiempo t después de t_0.

Analíticamente , lo descrito en párrafo anterior se representa de la siguiente forma

$$\text{Existe } T < t_0 \text{ tal que si } T < t < t_0 \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon .$$

La segunda parte se representa como :

Existe T' tal que si $t_0 < T'$ y $t_0 \leq t < T' \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$
Sea $\delta = \text{mín}\{t_0 - T, T' - t_0\}$, si $|t - t_0| < \delta$ entonces $T < t \leq t_0$ o $t_0 \leq t < T$.
En cualquiera de los casos , $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$. Puesto que el túnel fué elegido arbitrariamente , al resumir obtenemos :
Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo t se cumple

$$|t - t_0| < \delta, \text{ siempre que } |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon .$$

Recordando la definición de límite, la expresión anterior puede escribirse como

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0) .$$

Definición 5
CONTINUIDAD PUNTUAL
Se dice que una función f es continua en un punto $x_0 \in \Re$ si y solamente si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) .$$

o equivalentemente , para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$,

$$\text{si } |x - x_0| < \delta \text{ entonces } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Definición 6
CONTINUIDAD EN UN INTERVALO
Se dice que la función $f(x)$ es continua en un (o sobre un) conjunto $I \subset \Re$ si sólo si es continua en cada punto del conjunto I .

Un criterio útil y sencillo para demostrar que una función es continua en un punto determinado lo proporciona el siguiente teorema :

Teorema 8

CRITERIO DE CONTINUIDAD PUNTUAL

Una función $f(x)$ es continua en un punto x_0 si y sólo si se cumplen las siguientes propiedades :

1.- $f(x_0)$ debe existir

2.- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ debe existir y ser finito .

3.- $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

La demostración de este teorema es inmediata , solo basta con sustituir la condición 3. en la definición de límite .

Definición 7

TIPOS DE DISCONTINUIDADES

Si no se cumple la condición **2.-** se dice que la función $f(x)$ presenta una **discontinuidad esencial** en el punto x_0, geométricamente este tipo de discontinuidades se manifiestan por un "salto" en la gráfica de la función .

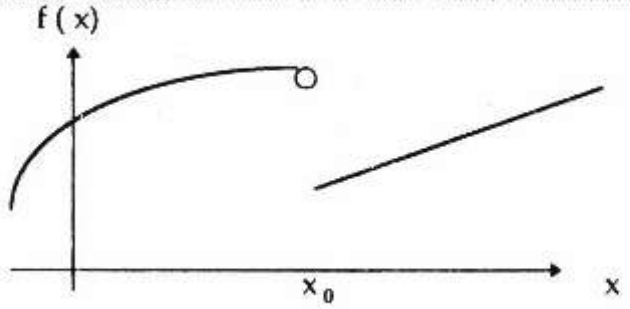


Figura (4.6) Discontinuidad esencial .

Si no se cumple la condición **1.-** pero si la condición **2.-**, **la discontinuidad se denomina removible** , se manifiesta como un hueco en la gráfica de $f(x)$ en el valor x_0 .

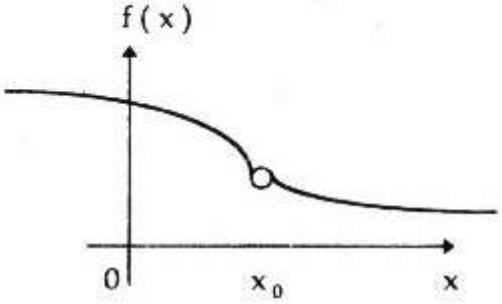


Figura (4.7) Discontinuidad removible .

Ejemplos

1.- Analizar la continuidad de La función $f(x) = c$ en todo punto x_0

Solución

1.- $f(x_0) = c$.

2.- $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$.

3.- $f(x_0) = c = \lim\limits_{x \to x_0} c$.

2.- ¿ Es continua la función $f(x) = x^2$ en todo x_0 ?

Solución

1.- $f(x_0) = x_0^2$, existe .

2.- $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$

3.- $f(x_0) = x_0^2 = \lim\limits_{x \to x_0} x^2$.

3.- Investigar si la función $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 8x + 12}$ es continua en cualquier punto $x_0 \in \Re$.

Solución

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 8x + 12} = \frac{x+2}{(x-2)(x-6)}$$

los puntos de interés son

$$x_0 = 2 \ , \ x_1 = 6$$

Analicemos el punto $x_0 = 2$.

1.- Pero $f(2)$ está indeterminado , en consecuencia $f(x)$ es discontinua en el punto $x_0 = 2$

2.- Además $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{(x-2)(x-6)}$ no existe , por lo tanto la discontinuidades es esencial .

Analicemos el punto $x_0 = 6$..

1.- Pero $f(6)$ está indeterminado , en consecuencia $f(x)$ es discontinua en el punto $x_0 = 6$

2.- Además $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x+6}{(x-2)(x-6)}$ no existe , por lo tanto la discontinuidad es esencial .

4.- Investigar si $f(x) = \dfrac{4x^2 - 9}{2x - 3}$ es continua en $\Re$.

Solución

1.- $f(\frac{3}{2})$ no existe .

2.- $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} \dfrac{4x^2-9}{2x-3} = \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} \dfrac{(2x-3)(2x+3)}{2x-3} = \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} (2x+3) = 6$.

La función es discontinua en $x = \dfrac{3}{2}$, sin embargo la discontinuidad es removible y la función anterior puede hacerse continua si se vuelve a definir como :

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2-9}{2x-3} & \text{si} \quad x \neq \dfrac{3}{2} \\ 6 & \text{si} \quad x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

5.- Investigar si la función $f(x) = \begin{cases} x-4 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ x^2-6 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$ es continua en $\Re$.

Solución

El posible punto de discontinuidad es $x_0 = 2$ (puesto que en este punto cambia la regla de correspondencia) .

1.- $f(x_0 = 2) = 2 - 4 = -2$.

2.- Para ver si $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe, calculamos los siguienteslos límites laterales .

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x-4) = -2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(x^2-6\right) = (2)^2 - 6 = -2$

en consecuencia $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -2$.

3.- $f(x_0) = -2 = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = -2 \quad \therefore$ la función $f(x)$ es continua en $\Re$.

6.- Investigar si la función $f(x) = \dfrac{|x-10|}{x-10}$ es continua en cualquier punto x_0 .

Solución

1.- $f(10)$ no existe .

2.- Para evaluar $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{|x-10|}{x-10}$ recordemos que

$|x-10| = \begin{cases} x-10 & \text{si} \quad x \geq 10 \\ -(x-10) & \text{si} \quad x < 10 \end{cases}$, por lo tanto

$\dfrac{|x-10|}{x-10} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 10 \\ -1 & \text{si} \quad x < 10 \end{cases}$ y en consecuencia

$\lim\limits_{x\to 10^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 10^+} (1) = 1$

$$\lim_{x\to 10^-} f(x) = \lim_{x\to 10^-}(-1) = -1$$

Por lo que $\lim_{x\to 10}\frac{|x-10|}{x-10}$ no existe y la función posee una discontinuidad escencial en el punto $x_0 = 10$.

Teorema 8
ALGEBRA DE FUNCIONES CONTINUAS

Si f y g son funciones continuas en el punto x_0 entonces
1.- $f \pm g$ es continua en x_0.
2.- $f \cdot g$ es continua en x_0.
3.- $\frac{1}{g}$ es continua en x_0 si $g(x_0) \neq 0$.

La demostración es una consecuencia directa del **teorema 1**.

Teorema 9
COMPOSICIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS
Si g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$ entonces $f \circ g$ es continua en x_0.

7.- Partiendo del hecho de que las funciones $f(x) = c$ y $f(x) = x$ son continuas en x_0, se puede aplicar el **teorema 7** para concluir que las funciones lineales y que las funciones polinomiales son continuas en todo punto x_0 de $\Re$

$$p(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_nx^n .$$

8.-También que las funciones racionales, $Q(x) = \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}$ son continuas en todos los puntos x_0 de $\Re$ tales que $\{ x : b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^m \neq 0 \}$.

9.- La función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es discontinua en $x_0 = 0$.

Solución

$f(x) = \frac{1}{x}$ es discontinua en $x_0 = 0$, entonces $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no puede ser continua en x_0

10.- La función $f(x) = \left|\frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+2}\right|$ es continua en todo x_0.

Solución

$f(x)$ es la composición de $f(x)=\dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2+2}$ y $g(x)=|x|$, pero $f(x)=\dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2+2}$ es continua en x_0 y $g(x)=|x|$ es continua en todo x_0, por el **teorema 8** $f(x)$ es continua en todo x_0.

4.2.1. Continuidad en un intervalo cerrado

Es posible definir el concepto de continuidad en un intervalo cerrado, esto se hace de la siguiente manera.

Definición 6
CONTINUAD SOBRE UN INTERVALO CERRADO

Se dice que una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si:

1.- $f(x)$ es continua sobre (a, b).
2.- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.
3.- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Esta definición significa que en los extremos del intervalo de definición de la función no presenta huecos en su gráfica.

Ejemplos

1.- Investigue la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ sobre el intervalo $[-2, 3]$.

Solución

Evidentemente $f(x)$ es continua en $(-2, 3)$, además:

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0=f(-2)$, por lo que es continua en $[-2, 3)$,
pero $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe por lo que es discontinua en $[-2, 3]$.

2.- Investigue la continuidad de la función $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ en $[0, 1]$.

Solución

Evidentemente $f(x)$ es continua en $(0, 1)$, también $\lim\limits_{x\to 0^+} x(1+\dfrac{1}{x})=1$, pero $f(0)$ no existe, por lo que $f(x)$ no es continua sobre el intervalo $[0, 1]$.

Finalizamos esta sección proporcionando las propiedades mas importantes de las funciones continuas sobre intervalos cerrados y acotados .

Teorema 10
DE LOS VALORES EXTREMOS
Sea f (x) continua sobre [a , b] , entonces f (x) tiene un valor mínimo m y un valor máximo M sobre [a , b] , es decir , existen números α , β en [a , b] tales que

$$f(\alpha) = m \,,\; f(\beta) = M \;\; y \;\; m \le f(x) \le M \;\; \textbf{para todo} \;\; x \in [a, b]$$

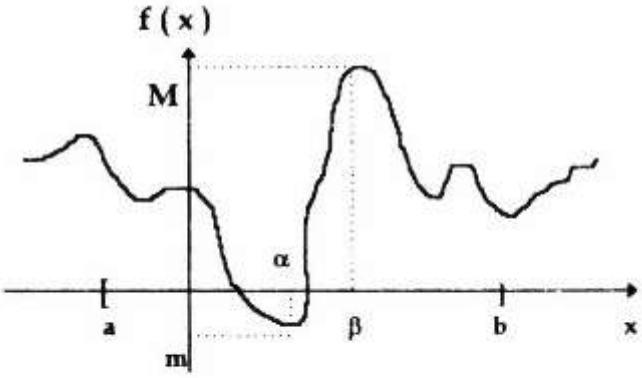


Figura (4. 8) Representación del teorema de los valores extremos la función continua en $a \le x \le b$ alcanza su valor máximo M y su valor mínimo m.

Este teorema es fundamental en el desarrollo de la teoría sobre máximos y mínimos que será estudiada posteriormente .

Teorema 11
DEL VALOR INTERMEDIO
Si f (x) es continua en el intervalo cerrado [a , b] y si N es cualquier número comprendido entre f (a) y f (b) , entonces existe c entre a y b tal que f (c) = N .

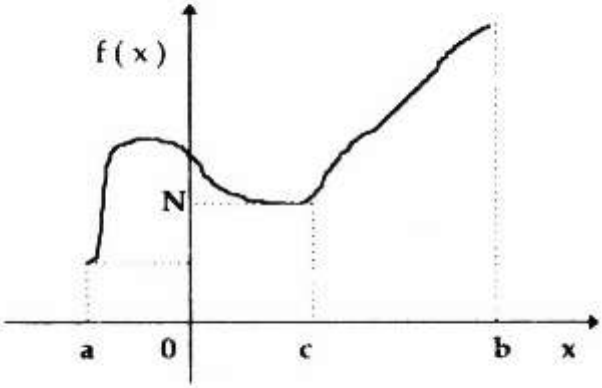


Figura (4.8) La función f (x) continua sobre [a , b] toma todos los valores N comprendidos entre f (a) y f (b) .

La demostración de los teoremas anteriores requieren del empleo de la propiedad de completez de los números reales vista de una manera un tanto más profunda por lo que no

no se proporciona aquí , sin embargo puede consultarse en los textos de la bibliografía recomendada .

Ejemplos

1.-Verifique que la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ tiene al menos un cero en $\Re$.

Solución

$f(2) = 4 - 8 + 3 = -5$ y $f(4) = 4^2 - 4(4) + 3 = 3$, obsérvese que la función $f(x)$ cambia de signo , por lo tanto , por el teorema del valor intermedio , existe $c \in [2,4]$ tal que

$$f(c) = 0 .$$

2.-Verifique que la función $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ satisface el teorema del valor intermedio y determine el valor c que garantiza dicho teorema si $N = 4$ Utilice $[0, 3]$.

Solución

Debemos tener en cuenta que $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ es continua sobre $[0, 3]$, $f(0) = -2$ y $f(3) = 19$, entonces como $-2 < N < 19$, existe $c \in [0,3]$ tal que $c^3 - c^2 + c - 2 = 4$ es decir $c^3 - c^2 + c - 6 = 0$ y una de las raíces es $c = 2$.

Ejercicios

I.- Demuestre que la función $f(x)$ es continua en el punto indicado .

1.-$f(x) = \sqrt{3x+7} + 2x \qquad x_o = 1$

2.-$f(x) = 5x^2 + 6 - \dfrac{1}{\sqrt{-x}} \qquad x_o = -2$

3.-$f(x) = \dfrac{x}{x^2+16} \qquad x_o = 1$

4.-$f(x) = \sqrt[3]{x^2+1} \qquad x_o = 2$

5.-$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1} \qquad x_o = 1$.

II.- Localizar todos los puntos de discontinuidad de cada una de las funciones e identificarel tipo de discontinuidad .

1.-$f(x) = \dfrac{x}{x^2-26}$

2.-$f(x) = \sec x$

3.-$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

4.-$f(x) = \dfrac{\cos x}{|\cos x|}$

5.-$f(x) = \dfrac{3x-4}{2x^2-x-3}$

6.-$f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}$.

7.-$f(x) = \dfrac{|x-9|}{x-9}$

8.-$f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

9.-$f(x) = \dfrac{6}{x^3-x^2}$

10.-$f(x) = \dfrac{3x-2}{(x-1)(x^2-5x+6)}$

11.-$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}\sqrt{16-x^2}}{x-4}$

III.- Verificar que la función $f(x)$ es continua en el intervalo indicado .

1.- $f(x) = \sqrt{x-6}$ en $[0, 6]$

2.- $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ en $(0, \infty)$

3.- $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ en $(-2, 2)$

4.- $f(x) = |x|$ en $[0, 6]$

5.- $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ en $[-5, 5]$

6.- $f(x) = \dfrac{x}{x^2+6}$ en $[-3, 16]$

7.- $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$ en $[-1, 1]$

8.- $f(x) = \dfrac{x^2-2}{3x-21}$ en $[0, 6]$

9.- $f(x) = \dfrac{\pi}{x+\pi}$ en $[0, 6]$

10.- $f(x) = \dfrac{\pi^2}{\pi x+1}$ en $[-4, 4]$

11.- $f(x) = |x-3|$ en $[-a, a]$

12.- $f(x) = 1-|x|$ en $(-a, 0)$

13.- $f(x) = \dfrac{1}{(x-5)(x-6)}$ en $(0, 5)$

14.- $f(x) = \dfrac{2x-\pi}{x-2\pi}$ en $[0, 6]$.

IV.- Determine las discontinuidades en las siguientes funciones e indique cuales son removibles y cuales son esenciales,demuestre su respuesta .

1.- $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

2.- $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$

3.- $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-1}$

4.- $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$

5.- $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3x-10}$

6.- $f(x) = \begin{cases} 2x & x \le 1 \\ 2x^2 & x > 1 \end{cases}$

7.- $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & x < 1 \\ x^2 & x \ge 1 \end{cases}$

8.- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3}+2 & x \le 1 \\ 3-x & x > 1 \end{cases}$

9.- $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$

10.- $f(x) = \dfrac{|a-x|}{x-a}$

11.- $f(x) = \begin{cases} |x-2|+3 & x < 0 \\ x+5 & x \ge 0 \end{cases}$

12.- $f(x) = \tan\dfrac{\pi x}{-2}$

V.- En que caso sea posible, redefina la función f (x) de manera que sea continua en $\Re$.

1.- $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1-x^3}$

2.- $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

3.- $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

4.- $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3x-10}$

5.- $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-16}$

6.- $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x}$

7.- $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

8.- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

9.- $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

VI.- Determine los valores de las constantes para que las funciones indicadas sean continuas en $\Re$.

1.- $f(x)=\begin{cases} 2 & x\le -1 \\ ax+h & -1<x<3 \\ -2 & x\ge 3 \end{cases}$

2.- $f(x)=\begin{cases} c^{2x} & x<2 \\ 3cx-3 & x\ge 2 \end{cases}$

3.- $f(x)=\begin{cases} c & x<-3 \\ \dfrac{9-x^2}{4-\sqrt{x+9}} & -3<x<3 \\ d & x\ge 3 \end{cases}$

4.- $f(x)=\begin{cases} -2\operatorname{sen} x & x\le -\dfrac{\pi}{2} \\ 4\operatorname{sen} x+B & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

5.- $f(x)=\begin{cases} cx^2-8 & x\le 4 \\ cx+6 & x>4 \end{cases}$

VII.-¿Tendrá la función $f(x)=8x^2-2x-2$ algún cero en $\Re$?

VIII.-Utilice el teorema del valor intermedio y verifique que la ecuación $2x^3+x^2-x+1=15$ tiene solución sobre $[1,2]$.

IX.- verifique que la funciónf $(x) = x + \operatorname{sen}x - 1$ satisface las condiciones del teorema del valor intermedio en $[0,\pi]$.

X.-¿ Tiene solución la ecuación $x^3=2^x$? .

CAPÍTULO 5

La derivada y funciones de clase c^k

El Cálculo se centra en dos operaciones básicas que se encuentran estrechamente relacionadas entre si , Integración y derivación . De cierta manera, se pueden estudiar separadamente , sin embargo , su punto de unión se denomina **teorema fundamental del cálculo.**

5 . 1 . RAZONES DE CAMBIO

Una manera de estudiar los fenómenos es mediante el análisis de los cambios de las variables principales involucradas en éste fenómeno . Supongamos que las variables principales de cierto fenómeno en proceso de estudio son x , $y = f(x)$, entonces es posible obtener el comportamiento de la variable $y = f(x)$ conforme cambia la variable x .
Si y_1 y y_2 son dos datos observados para la variable $y = f(x)$ y $y_1 > y_2$ en el intervalo $[x_1 , x_2]$, el fenómeno crece en este intervalo , si $y_1 < y_2$ en el intervalo $[x_1 , x_2]$, el fenómeno decreció en este intervalo etc.
Si se efectúa una comparación por medio de un cociente la variación de la cantidad $y = f(x)$ conforme varío la cantidad x obtenemos la expresión :

$$\frac{\textbf{variación de y}}{\textbf{variación de x}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Esta expresión representa la variación media de cantidad **y** al cambiar la cantidad x .
Si queremos saber cual es la variación instantanea (**o infinetesimal**) , es suficiente que x_2 este demasiado cerca de x_1 es decir $x_2 \to x_1$ por lo que **la variación instantánea** puede obtenerse por medio de la fórmula :

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Esta fórmula se conoce como **Cociente de Fermat** de la derivada .
Según la historia de las matemáticas , el cálculo diferencial fue desarrollado de manera independiente por Newton y Leibnitz . La idea central del Cálculo Diferencial es el concepto de derivada , este concepto fué originado por la idea geométrica de encontrar la tangente en un punto arbitrario de una curva , sin embargo , su mayor aplicación consiste en ser un instrumento para el estudio sobre la variación de una función respecto a un cambio en la abcisa , a continuación se formaliza esta idea .
Consideremos la figura **5.1**

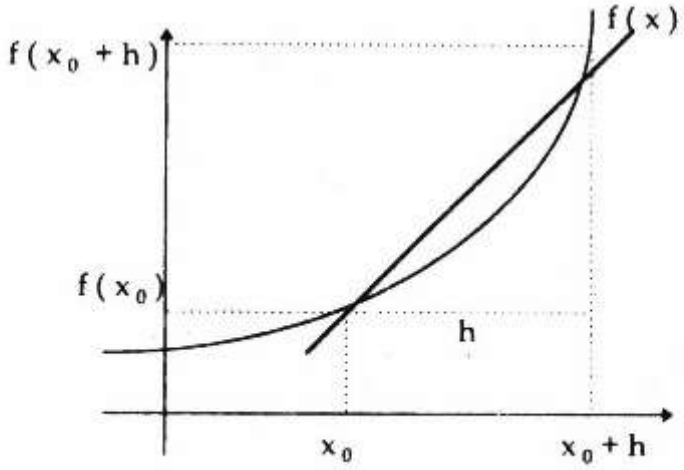


Figura (5.1) Recta secante cuya pendiente es $m_{sec} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Si $h \neq 0$, los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$ determinan una recta secante cuya pendiente esta dada por la fórmula

$$m_{sec} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

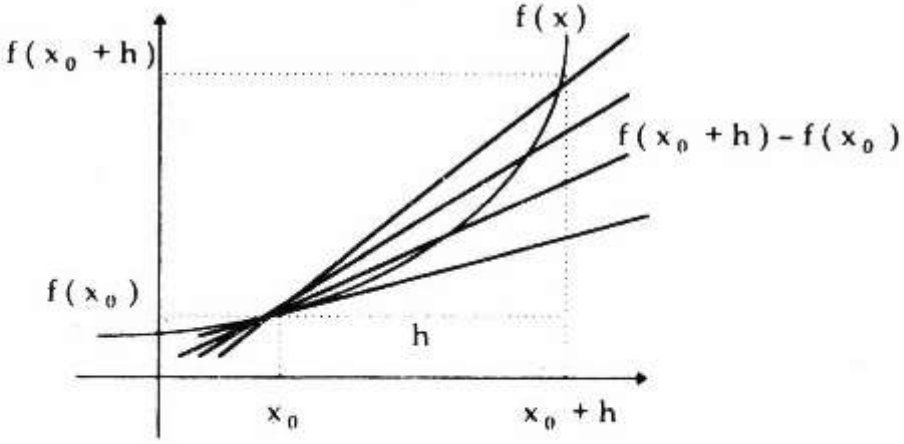


Figura (5.2) Límite de las secantes.

La recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$, de alguna manera parece ser el límite de estas secantes conforme h se aproxima a cero (observe que si $h \to 0$ entonces $x_0 + h \to x_0$), el límite de sus pendientes cuando $h \to 0$, es la pendiente de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$.

$$m_{tg} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

formalicemos esta idea :

5.1.1. Derivadas elementales

Definición 1
DERIVADA EN UN PUNTO .
Sea $f : D \to \Re$ una función y sea x_0 un punto en D . Se dice que la función $f(x)$ es derivable (o derivable) en el punto x_0 si existe el límite :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

En este caso el límite se indica por :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

y se denomina la derivada de $f(x)$ en x_0 , la fórmula anterior se conoce como cociente de Newton .

OBSERVACIÓN
Si en el cociente de Newton se efectúa la sustitución $h = x - x_0$ fórmula

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

fórmula conocida como cociente de Fermat su interpretación geométrica es la misma que la del cociente de Newton .

Definición 2
FUNCIÓN DERIVABLE.
Se dice que una función $f(x)$ **es derivable** , si $f(x)$ **es derivable en todo punto** x_0 en el dominio de $f(x)$.
Antes de proporcionar algunos ejemplos es conveniente aclarar que :

1° Se define la tangente a la gráfica de $f(x)$ en $(x_0 , f(x_0))$ como la recta que pasa por $(x_0 , f(x_0))$ y tiene por pendiente $f'(x_0)$, (la derivada es la extensión del concepto de tangente) .

2° La derivada de una función $f(x)$ designada por $f'(x)$ es una función cuyo dominio es el conjunto de todos los números x_0 tales que $f(x)$ es derivable en x_0 y cuyo valor para x_0 está dado por

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{o} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3° En la literatura , frecuentemente se utiliza el simbolo Δx en lugar de h , y el símbolo $\frac{df(x_0)}{dx}$ (notación de Leibnitz) en lugar de $f'(x_0)$.
Ahora calcularemos las derivadas de algunas funciones especificas .

Ejemplos
1.- Calcule la derivada de la **función constante** $f(x) = c$.

Solución

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

2.- Calcule la derivada de la función $f(x) = x^2 + 10$.

Solución

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2+10-(x_0^2+10)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2x_0h+h^2}{h} = 2x_0.$$

3.- Obtenga la derivada de la **función lineal** $f(x) = mx + b$.

Solución

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{m(x_0+h)+b-(mx_0+b)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{mh}{h} = m.$$

4.- Derive la función $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Solución

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h+1}}{h} - \frac{\sqrt{x_0+1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h+1}-\sqrt{x_0+1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x_0+h+1}+\sqrt{x_0+1}}{\sqrt{x_0+h+1}+\sqrt{x_0+1}} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x_0+h+1-(x_0+1)}{h\left(\sqrt{x_0+h+1}+\sqrt{x_0+1}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x_0+h+1}+\sqrt{x_0+1}\right)} = \frac{1}{2\left(\sqrt{x_0+1}\right)}. \end{aligned}$$

5.- Obtenga la derivada de la función $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Solución

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)+\dfrac{1}{x_0+h}-\left[x_0+\dfrac{1}{x_0}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h+\dfrac{x_0-(x_0+h)}{(x_0+h)x_0}}{h} = \lim_{h\to 0}\left(1-\frac{1}{x_0(x_0+h)}\right) = 1-\frac{1}{x_0^2}.$$

6.- Obtenga la derivada de la función $f(x) = x^n$, si **n** es un número entero positivo.

Solución

Del álgebra elemental tenemos que

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Si $a = x_0 + h$ y $b = x_0$, entonces

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\left((x_0+h)^k\right)x_0^{n-k-1}$$

En la suma hay n términos, si $h \to 0$, $(x_0+h)^n \to x_0{}^n$ y el k- ésimo sumando tiende a $x_0^k x_0^{n-1-k} = x_0^{n-1}$ y en consecuencia la suma de los n términos tiende a nx_0^{n-1}. Por lo tanto

$$f'(x_0) = n\,x_0^{n-1}.$$

Esta expresión tambié es válida si $n \in \Re$.

7.- Obtenga la derivada de la raiz enésima.
Solución

Si $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$,

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^{\frac{1}{n}}-(x_0)^{\frac{1}{n}}}{h}$$

Si $u^n = x_0 + h$, $v^n = x$, entonces $h = u^n - v^n$ y

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{u-v}{u^n - v^n} = \frac{1}{u^{n-1}+u^{n-2}v+\ldots+uv^{n-2}+v^{n-1}},$$

Pero $u \to v$ cuando $h \to 0$ y cada término a la derecha de u^{n-1} tiende a v^{n-1}, entonces

como en total hay **n** términos y $v = x^{\frac{1}{n}}$ entonces $f'(x_0) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

5.- Hallar $f'(x)$ para la función $f(x) = |x|$.
Solución

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{|x_0+h|-|x_0|}{h}$$

Por la ley de tricotomía se consideran tres casos

Caso I Si $x_0 > 0$ $f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h} = 1$.

Caso II Si $x_0 < 0$ $f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{-x_0-h+x_0}{h} = -1$

Caso III Si $x_0 = 0$, $f'(0) = \lim_{h\to 0}\begin{cases}1 & \text{si } h>0\\ -1 & \text{si } h<0\end{cases}$ por lo que el límite no existe.

Este es un ejemplo de una función no derivable en $x_0 = 0$, gráficamente ocurre que la función posee un pico en $x_0 = 0$.

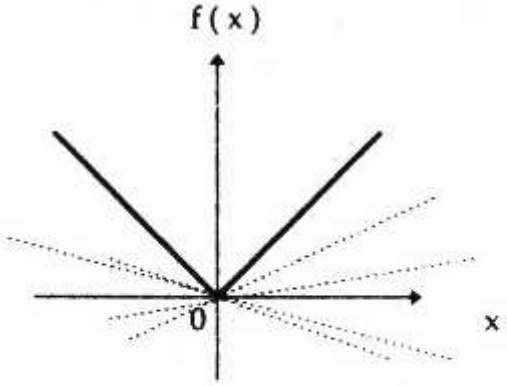


Figura (5.3) Gráfica de $f(x) = |x|$, obsérvese que en (0, 0) existen muchas rectas tangentes por lo que $f'(0)$ no existe.

Cuando una función f (x) no es derivable en un punto x_0, muchas veces , esto se manifiesta como un "PICO" en la gráfica de la función , obsérvese en la figura anterior que en $x_0 = 0 = f(x_0)$ es posible trazar un número indeterminado de rectas tangentes a la gráfica de la función .

9.- Si $f(x) = \text{sen } x$, obtenga $f'(x_0)$.

Solución

Se sabe que $\text{sen}(x_0 + h) = \text{sen } x_0 \cos h + \text{sen } h \cos x_0$,

entonces

$$\frac{\text{sen}(x_0+h) - \text{sen}(x_0)}{h} = \text{sen}(x_0)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x_0)\frac{\text{sen}(h)}{h}$$

$$\text{pero } \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(h)}{h} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0,$$

por lo tanto

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\text{sen}(x_0+h) - \text{sen}(x_0)}{h} = (\text{sen}(x_0))\cdot 0 + (\cos(x_0))\cdot 1 = \cos(x_0).$$

De forma similar se demuestra que si $f(x_0) = \cos x_0$, entonces $f'(x_0) = -\text{sen } x_0$.

EJERCICIOS

I.- Utilizando la definición de la derivada obtener

1.- $f(x) = 2x^2$
2.- $f(x) = \sqrt{2x}$
3.- $f(x) = 3x^{1/2}$
4.- $f(x) = 3x^2 - 1$
5.- $f(x) = x^4 - x^3$
6.- $f(x) = x^2 - 3x + 2$

7.- $f(x) = x - \left(\frac{2}{x}\right)$

8.- $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2}$

9.- $f(x) = x^2 - \left(\frac{1}{x}\right)$

10.- $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$

11.- $f(x) = 3x^2 - \left(\frac{3}{x^2}\right)$

12.- $f(z) = \sqrt{z+5}$

13.- $f(z) = \frac{1}{\sqrt{3z+1}}$

14.- $f(v) = \frac{(v+1)}{(v-1)}$

15.- $f(w) = \frac{w}{1-w}$

II.- Obtener la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto indicado si

1.- $f(x) = \sqrt{1-x}$ en $x = -2$.

2.- $f(x) = x - \left(\frac{2}{x}\right)$ en $x = 2$.

3.- $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ en $x = 0$.

4.- $f(x) = x^{-3}$ en $x = 0$.

5.1.2. Propiedades de la Derivada

En esta sección se proporcionan las propiedades elementales de la derivada .

Teorema 1
RELACIÓN ENTRE LA DERIVADA Y LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN
Si $f(x)$ es derivable en el punto x_0 entonces , $f(x)$ es continua x_0 .

Demostración
Puesto que $f(x)$ es derivable en el punto x_0 entonces

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot h = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot \lim_{h\to 0} h$$
$$=f'(x_0)\cdot 0$$

o sea , $\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)=f(x_0)]$, que es equivalente a , $\lim_{h\to 0} f(x)=f(x_0)$
es decir , $f(x)$ es continúa en x_0 .

El **teorema 1** afirma que una función derivable es continua , pero debemos tener en cuenta que el inverso de este teorema es falso (una función continua es derivable), un ejemplo de esto es la función $f(x)=|x|$ que fué analizada en la sección anterior .
El empleo de la fórmula de la derivada en la evaluación de estas , es engorroso por lo que ahora estableceremos una serie de reglas que facilitarán el cálculo de las derivadas .

Teorema 2
ÁLGEBRA DE FUNCIONES DERIVABLES .
Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en el punto x_0, entonces :
a) $(f\pm g)(x)$ es derivable en x_0 y $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$.
b) $(f\cdot g)(x)$ es derivable en x_0 y $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.
c) Si $g(x_0)\neq 0$, entonces $\frac{1}{g}(x)$ es derivable en x_0 y $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.
d) Si $g(x_0)\neq 0$ entonces $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es derivable en x_0 y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{g(x_0)\cdot f'(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Se demuestran b) y c) .

Demostración
b) Sustituyendo $(f\cdot g)(x)$ en el **cociente de Newton** obtenemos :

$$(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}$$, sumando 0 el cociente no se altera ,

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h)-f(x_0)\,g(x_0)+0}{h}$$, el cero se puede escribir adecuadamente

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h)-f(x_0)\,g(x_0)+f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0+h)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x_0+h)\frac{[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h}+\frac{[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h}g(x_0)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x_0+h)\ \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ \lim_{h\to 0} g(x_0)$$

$$= f(x_0)\cdot g'(x_0)+f'(x_0)\cdot g(x_0).$$

□

c) Sustituyendo $\frac{1}{g}(x)$ en el **cociente de Newton** obtenemos :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g}(x_0+h)-\frac{1}{g}(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0)-g(x_0+h)}{h[g(x_0)\cdot g(x_0+h)]}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x_0)\cdot g(x_0+h)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h} = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

□

Teorema 3

REGLA DE LA CADENA

Supongamos que $z = f(y)$ e $y = g(x)$, entonces $z = f(g(x)) = (f\circ g)(x)$, la regla de la cadena afirma que bajo las condiciones adecuadas de continuidad ,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = f'(y)g'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

siempre y cuando $g(x)$ sea derivable en x_0 y $f(x)$ sea derivable en $g(x_0)$.

Demostración

(sólo se efectúa la parte más sencilla)

Si $g(x)$ converge propiamente a $g(x_0)$ cuando $x\to x_0$ (es decir $g(x)\to g(x_0)$), por definición se tiene que

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}$$

Siempre que el límite exista bajo ciertas condiciones:

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\ \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

pero

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) \quad y$$

$$\lim_{y \to g(x_0)} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} = f'(g(x_0))$$

entonces $\quad (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$.

Ejemplos

1.- Utilizando los teoremas 2 y 3 obtenga la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^4 - 3x + 5$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + 2x^3 - 2x$

c) $f(x) = 9 - 5x + 8x^3$

Solución

a) $f'(x) = 4x^3 - 3$.

b) $f'(x) = \frac{5}{2}x^4 + 6x^2 - 2$.

c) $f'(x) = -5 + 24x^2$.

2.- Derive las funciones :

a) $F(x) = (5x - 3x^3)(5 - 6x)$

b) $F(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

c) $F(x) = x^4 \operatorname{sen} x \cos x$.

Solución

a) Sean

$f(x) = 5x - 3x^3 \qquad f'(x) = 5 - 9x^2$

$g(x) = 5 - 6x \qquad g'(x) = -6$

Por la regla del producto, $F'(x) = (5x - 3x^3)(-6) + (5 - 6x)(5 - 9x^2)$.

b) $F(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

Sean

$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \operatorname{sen} x$

$f'(x) = 2x \qquad g'(x) = \cos x$

Por la regla del producto

$$F'(x) = x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$

c) $F(x) = x^4 \operatorname{sen} x \cos x$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= x^4 \ (\operatorname{sen} x \cos x)' + (\operatorname{sen} x \cos x)(x^4)' \\ &= x^4 \ [\operatorname{sen} x (\cos x)' + \cos x (\operatorname{sen} x)'] + \operatorname{sen} x \cos x (x^4)' \\ &= x^4 [-\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x] + 4x^3 \ \operatorname{sen} x \cos x . \end{aligned}$$

3.- Derive las funciones .

a) $F(x) = \dfrac{2}{x^2 - 6x + 2}$

b) $F(x) = \csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

c) $F(x) = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

d) $F(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2 - 6x}$.

Solución

a) $F(x) = \dfrac{2}{x^2 - 6x + 2}$; sea $g(x) = x^2 - 6x + 2$

$$g'(x) = 2x - 6$$

entonces

$$F'(x) = \frac{-(2x-6)}{(x^2-6x+2)^2} .$$

b) $F(x) = \csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Sean

$$g(x) = \operatorname{sen} x, \qquad g'(x) = \cos x$$

entonces

$$F'(x) = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\csc x \cot x .$$

c) $F(x) = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

sean

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad , \quad g(x) = \cos x ,$$

entonces por la regla del cociente

$$F'(x) = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x .$$

d) $F(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2 - 6x}$.

$$F'(x) = \frac{(2-6x)(x^2-4x+3)' - (x^2-4x+3)(2-6x)'}{(2-6x)^2} = \frac{(2-6x)(2x-4)-(x^2-4x+3)(-6)}{(2-6x)^2}.$$

4.- Obtenga la derivada de las funciones.

a) $F(x) = [g(x)]^n$

b) $F(x) = (5x - 9x^3)^8$

c) $F(x) = \sqrt[4]{(x^2+1)^3}$

d) $F(x) = \tan(x^2 + \operatorname{sen} x)$.

e) $F(x) = \operatorname{sen}^2(7x - \tan(\cos x))$.

f) $F(x) = f[g(h(x))]$.

g) $F(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

Solución

a) Por la regla de la cadena : $F'(x) = n[g(x)]^{n-1} g'(x)$.

b) $F(x) = (5x - 9x^3)^8$

Por la regla de la cadena : $F'(x) = 8(5x - 9x^3)^7 (5x - 9x^3)'$

$= 8(5x - 9x^3)^7 (5 - 27x^2)$.

c) $F(x) = \sqrt[4]{(x^2+1)^3}$

Esta función se puede escribir como $F(x) = (x^2+1)^{\frac{3}{4}}$,

Por la regla de la cadena tenemos :

$$F'(x) = \frac{3}{4}(x^2+1)^{-\frac{1}{4}} \cdot 2x = \frac{6x}{4\sqrt[4]{x^2+1}}.$$

d) $F(x) = \tan(x^2 + \operatorname{sen} x)$.

Sean :

$f(x) = \tan x$; $g(x) = x^2 + \operatorname{sen} x$

entonces

$f'(x) = \sec^2 x$ $\quad$ $g'(x) = 2x + \cos x$

Por la regla de la cadena obtenemos

$$F'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$$

$$= \sec^2(x^2 + \operatorname{sen} x)(2x + \cos x).$$

e) $F(x) = \operatorname{sen}^2(7x - \tan(\cos x))$.

Se utiliza dos veces la regla de la cadena y se obtiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2\operatorname{sen}(7x - \tan(\cos x)) \cdot (7x - \tan(\cos x))' \\ &= 2\operatorname{sen}(7x - \tan(\cos x)) \cdot (7 - (\tan(\cos x))') \\ &= 2\operatorname{sen}(7x - \tan(\cos x)) \cdot (7 + \sec^2(\cos x) \cdot \operatorname{sen} x). \end{aligned}$$

f) $F(x) = f[g(h(x))]$.

Se utiliza dos veces la regla de la cadena y se obtiene

$$F'(x) = f'[g(h(x))]\cdot[g(h(x))]' = f'[g(h(x))]\cdot[g'(h(x))h'(x)].$$

g) $F(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

Conviene reescribirla como :

Si $F(x) = \left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

y luego se utiliza la regla de la cadena

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$F'(x) = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

EJERCICIOS

I.- Utilizando las reglas de derivación calcular la derivada de las funciones

1.- $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$

2.- $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2.5x^2 + 2$

3.- $f(x) = ax^2 + bx + c$

4.- $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{7}$

5.- $f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x} + \frac{x^2}{m^2} + \frac{m^2}{x^2}$

6.- $f(x) = x^3 - 3x - \frac{2}{x^4}$

7.- $f(x) = 2x^4 - 6x - \frac{3}{7x^2}$

8.- $f(x) = x^{-2} - 4x^{-5} + 7x^{-6} + 2^{-1}$

9.- $f(x) = 2x^{-2} + 3x^{-3} - 4x^{-4}$

10.- $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

11.- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{\sqrt[4]{x}}$

12.- $f(x) = 3x^{-2} - \frac{5}{\sqrt{x}}$

13.- $f(t) = 0.8\, t^{-2}$

14.- $f(w) = 0.1w^{\frac{2}{3}} - \frac{4.3}{w^{-4}} + \frac{2.5}{\sqrt[4]{w}}$

15.- $f(x) = \frac{n}{x^3}$

16.- $f(x) = (x^2 - 3)(3x - 7)$

17.- $f(x) = x^{-2}(x^2+3)(x-2)$

18.- $f(v) = (v+3)^2(v-1)^3$

19.- $f(v) = (v^3 - 6v^2 + 8v - 11)(v^2 - 5v + 7)$

20.- $f(v) = (v^4 - 7v^3 + 8v^2 + 8v - 6)(v^3 - v^2 - v + 4)$

21.- $f(x) = x(x-1)(x-2)$

22.- $f(x) = (x^2-3)(x^2+6)(x-5)$

23.- $f(x) = (x^2+x+1)^3$

24.- $f(x) = \dfrac{5x-3}{5x-7}$

25.- $f(x) = \dfrac{1-6x}{2-7x}$

26.- $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5x-2}$

27.- $f(x) = \dfrac{8}{(x-6)^2}$

28.- $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x-1}$

29.- $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2}{x^2+x+1}$

30.- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{3(x^2+3)} + (x^2+4)(1-x)$

31.- $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

32.- $f(x) = \dfrac{x^6}{x^3-11}$

33.- $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+2x-1}$

34.- $f(x) = \dfrac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$

35.- $f(t) = \dfrac{1}{t^2-3t-5}$

36.- $f(x) = \dfrac{3x^3}{b^2-x^2}$

37.- $f(x) = \dfrac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$

38.- $f(x) = \dfrac{ax+bx^2+cx^3}{am+bm^2}$

39.- $f(x) = \dfrac{a^2b^2c^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}$

40.- $f(x) = (\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$

41.- $f(x) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{3}\right)\left(4x^3\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$

42.- $f(x) = (\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x}) + (1 + \sqrt[3]{x} + 3x)$

43.- $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

44.- $f(X) = \dfrac{\sqrt{6-X}}{1-\sqrt{X}}$

45.- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{6\sqrt{x}-4\sqrt{x^3}}$

46.- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}$

47.- $f(x) = \dfrac{a}{ax+b\sqrt{x}+c/\sqrt{x}}$

48.- $f(x) = \dfrac{1+x}{a-\sqrt{x}}$

II.- Hallar f ' (x) en los puntos indicados.

1.- $f(x) = (x^2 - x + 3)(x^2 - x - 1)$ en $x = 0$, $x = 1$

2.- $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$ en $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$

3.- $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{2}{x^2+3}$ en $x = 0$, $x = -1$

4.- $f(x) = \dfrac{3}{1-ax} - \dfrac{5}{1-a^2x}$ en $x = a$, $x = 2a$, $x = a^2$

5.- $f(x) = \dfrac{a-x}{a+x}$ en $x = 2$, $x = 3$

6.- $f(x) = x\left(\sqrt{x}+1\right)$ en $x = 0$, $x = 2$

III.- Utilizando la regla de la cadena derivar

1.- $f(x) = (x^2 + 1)^4$

2.- $f(x) = (1 - x)^{17}$

3.- $f(x) = (1 - 5x)^{20}$

4.- $f(x) = (3x^3 - x^2 - 6)^5$

5.- $f(x) = (x^3 - 6x)^{-2}$

6.- $f(x) = \left(7x^2 - \dfrac{4}{x} + 6\right)^5$

7.- $f(x) = \left(x^4 - \dfrac{1}{x^4} - 3\right)^4$

8.- $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$

9.- $f(x) = \left(\dfrac{1+5x^2}{1+5x}\right)^4$

10.- $f(x) = \dfrac{(x+3)^2}{x+8}$

11.- $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

12.- $f(x) = (3 - 4x^{1/3})^4$

13.- $f(x) = \left(\dfrac{5}{1-x}\right)^5$

14.- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$

15.- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3-x^6}}$

16.- $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{1}{1+x^7}}$

17.- $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$

18.- $f(x) = \dfrac{(3+2x)^2}{(3-2x)^3}$

19.- $f(x) = \dfrac{(x^{-1}-x^{-2})^3}{(x-3x^{-3})^2}$

20.- $f(x) = \dfrac{(2x-5)^{-1}}{(x^2+3)^2}$

21.- $f(x) = \sqrt[3]{(x^3+3x+2)^2}$

22.- $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt{x+1}$

23.- $f(x) = x^2\sqrt[3]{x^2+1}$

24.- $f(x) = (x-3)^{2/3}(x+3)^{2/3}$

25.- $f(x) = (ax+by+c)^3$

26.- $f(x) = \sqrt[5]{x^{-3}+x^{-2}+x^{-1}}$

27.- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^{-2}+3}{x^{-1}-2}}$

IV.- Determinar $f'(x)$ en los valores indicados .

1.- $f(x) = (x^2+x+1)^{3/2}$ en $x = 1$, $x = 0$

2.- $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ en $x = 2$, $x = 0$

3.- $f(x) = \dfrac{\sqrt{5+2x}}{x}$ en $x = 2$, $x = 3$

4.- $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{x+1}$ en $x = -2$, $x = 0$

V.- Determinar una fórmula para derivar

1.- $f(x) = u(x)\,v(x)\,w(x)$

2.- $f(x) = \dfrac{u(x)v(x)}{w(x)}$

3.- $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

4.- $f(x) = \dfrac{1}{u(x)v(x)w(x)}$

5.- $f(x) = \dfrac{x^p}{u(x)}$

6.- $f(x) = f\,[g(h(x))]$

7.- $f(x) = f\,[g(h(l(x)))]$

VI.- Determinar una fórmula para la derivada de la función dada y aplicarla a las funciones indicadas .

1.- $f(x) = [f(x)]^p\,[g(x)]^q$; $f(x) = (3x-2)^4\,(x^3-1)^{1/3}$; $f(x) = (x^4 - 3x^2 - 2)(x^4 - 7)$

2.- $f(x) = \dfrac{[f(x)]^p}{[g(x)]^q}$; $f(x) = (x+3)^5 / (3x-2)^8$; $f(x) = (3x^2 - 5 + 1)^{-6} / (3x-7)^{-4}$

VII.-Resuelva los siguientes problemas

1.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 3 \\ ax+b & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Determinar a y b de modo que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$.

2.- Sea la función $f(x) = \begin{cases} a^2\sqrt{x} & \text{si } x \le 1 \\ 2x+b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Determinar a y b de modo que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$.

VII.- Obtenga la derivada de las funciones trigonométricas

1.- $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

2.- $f(x) = \dfrac{x}{1+\cos x}$

3.- $f(x) = (x \operatorname{sen} x) - (x \cos x)$

4.- $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

5.- $f(x) = \dfrac{x}{x + \cos x}$

6.- $f(x) = \dfrac{x \tan x}{1 + \tan x}$

7.- $f(x) = \dfrac{1}{5}\tan^4 x$

8.- $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos^4 \dfrac{1}{3}x$

9.- $f(x) = \dfrac{1}{4}\tan^4 x - \tan x + x$

10.- $f(x) = x \csc^2 x - \tan x$

11.- $f(x) = \operatorname{sen} 3x$

12.- $f(x) = 3 \operatorname{sen} x$

13.- $f(x) = a\cos\left(\dfrac{x}{6}\right)$

14.- $f(x) = \tan\left(\dfrac{x-3}{7}\right)$

15.- $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{7}{x}\right)$

16.- $f(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$

17.- $f(x) = \cos^5 (3x + 2)$

18.- $f(x) = (1 - 3 \operatorname{sen}^3 x)^4$

19.- $f(x) = \sqrt{\tan^3 x}$

20.- $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$

21.- $f(x) = \tan(\operatorname{sen}(\cos x))$

22.- $f(x) = \sec\sqrt{x}$

23.- $f(x) = \sec\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

24.- $f(x) = (1 + \tan 2x)^{3/2}$

25.- $f(x) = \operatorname{sen} px$

26.- $f(x) = \operatorname{sen} x^4$

27.- $f(x) = (\operatorname{sen} x)^4$

28.- $f(x) = \operatorname{sen}^n x$

29.- $f(x) = \tan(x^4 + 3)$

30.- $f(x) = \csc x \cdot \sec x$

5.1.3. Derivación Implícita

Frecuentemente es necesario derivar relaciones funciones en la que es prácticamente imposible despejar la variable dependiente o función, como consecuencia de esto las reglas utilizadas en la sección anterior son inoperantes, sin embargo muchas veces es posible obtener la derivada de estas funciones utilizando el método denominado **derivación implícita** que describimos a continuación .

Definición 4
FUNCIÓN IMPLÍCITA
La función $f(x)$ está definida en forma implícita por una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$, si y sólo si para todo $x \in D_f$, $F(x, f(x)) = 0$.

Ejemplo
1.- Sea $y = \sqrt{10 - x^2}$, entonces $x^2 + y^2 = 10$, se dice que la función $y = \sqrt{10 - x^2}$, está implícitamente definida por la ecuación $x^2 + y^2 - 10 = 0$, en este caso $F(x, y) = x^2 + y^2 - 10$.

En está sección estamos interesados en problemas con la siguiente estructura : supóngase que $y = f(x)$ está definida implícitamente por la ecuación , $F(x, y) = 0$ y que esta función es derivable , calcular :

$$\frac{dy}{dx} \qquad \frac{dx}{dy}$$

en términos de x , y .
En realidad , la derivación implícita está regida por el teorema de la **función implícita**, sin embargo nosotros sólo consideraremos la parte operativa , por ser este nuestro objetivo .

Ejemplos
1.- Determinar y' si $x^2y - x^2y^2 + x^2 + y^2 = 0$.
Solución
Obsérvese que es complicado despejar y , que $y = y(x)$, entonces

$$(x^2y)' - (x^2y^2)' + (x^2)' + (y^2)' = 0$$
$$x^2y' + 2xy - (2x^2yy' + 2xy^2) + 2x + 2yy' = 0$$

por tanto , $x^2y' + 2xy - 2x^2yy' - 2xy^2 + 2x + 2yy' = 0$
Ahora debemos despejar y',

$$y'(x^2 - 2x^2y + 2y) = 2xy^2 - 2xy - 2x$$
$$y' = \frac{2xy^2 - 2xy - 2x}{x^2 - 2x^2y + 2y}.$$

2.- Determinar y' y x', si $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$.
Solución
Suponiendo que $y = y(x)$ y derivando implícitamente obtenemos :

$$2x + xy' + y + 2yy' = 0$$

$$y'(x+2y) = -2x - y$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y}{x+2y}$$

pero

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{x+2y}{-2x-y}.$$

3.- Hallar y' en $P_0(1,2)$ si $x^3y + xy^3 = 10$.

Solución

Conviene suponer que $y = y(x)$ y derivar implícitamente (el lector debe verificar que el punto dado en realidad se encuentra sobre la curva) :

$x^3y' + 3x^2y + 3xy^2y' + y^3 = 0$,

ahora sustituimos $x = 1$, $y = 2$ y obtenemos :

$$(1)^3y' + 3(1)^2(2) + 3(1)(2)^2y' + (2)^3 = 0$$
$$13y' = -14$$
$$y' = \frac{-14}{13}$$

4.- Aún cuando la función este definida explícitamente , en ocasiones es conveniente calcular sus derivadas por derivación implícita .

Calcular y' si $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x-2}}$ en $x = 6$.

Solución

Eliminando el radical $\sqrt[3]{\ }$, tenemos

$$y^3 = x + \sqrt{x-2}$$

Suponiendo que $y = y(x)$ entonces

$$3y^2y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

si $x = 6$ entonces $y = 2$, por lo tanto :

$$y'(6) = \frac{5}{48}.$$

5.- Hallar y' si $x\,\text{sen}\,y - \cos y + \cos 2y = 0$.

Solución

Suponiendo que $y = y(x)$ y derivando implícitamente :

$$x \cdot \cos y\, y' + \text{sen}\, y + \text{sen}\, y y' - \text{sen}\, 2y \cdot 2y' = 0$$

despejando y' :

$$y' = \frac{-\text{sen}(y)}{x\cos(y) + \text{sen}(y) - 2\,\text{sen}(2y)}.$$

6.- Obtenga la derivada de las funciones

a) $y = \text{ang sen}\, x$

b) $y = \text{ang cos}\, x$

c) $y = \text{ang tan } x$
d) $y = \ln x$, considerando que $(e^x)' = e^x$

Solución
a) Si $y = \text{ang sen } x$, entonces $x = \text{sen} y$

Derivando Implícitamente :

$$1 = \cos y \cdot y'$$

entonces

$$y' = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

b) Como $y = \text{ang cos } x$, entonces $x = \cos y$
Derivando implícitamente

$$1 = -\text{sen } y \cdot y'$$

$$y' = \frac{-1}{\text{sen}(y)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

c) $y = \text{ang tan } x$, entonces $x = \tan y$ por lo tanto :

$$1 = \sec^2 y \cdot y'$$

$$y' = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

d) Si $y = \ln x$ entonces $x = e^y$

$$1 = e^y \cdot y',$$

$$y' = \frac{1}{e^y}$$

es decir

$$y' = \frac{1}{x}.$$

EJERCICIOS

I.- Derive las funciones indicadas

1.- $f(x) = x \text{ ang cos } x$
2.- $f(x) = (\text{ang tan } x)^3$
3.- $f(x) = \text{angtan}\sqrt{x}$
4.- $f(x) = \dfrac{1}{\text{ang cos } x}$
5.- $f(x) = \sqrt{x} \text{ angtan } x$
6.- $f(x) = (\text{ang cos } x - \text{ang sen } x)^n$

7.- $f(x) = \dfrac{\text{ang sen } x}{\sqrt{1-x^2}}$

8.- $f(x) = \text{ang sen } (\pi x - 3)$

9.- $f(x) = \text{angtan}^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$

10.- $f(x) = \text{angtan}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

11.- $f(x) = \text{angtan}\left(\dfrac{\text{sen a} \cdot \text{sen } x}{1+\cos a \cdot \text{sen } x}\right)$

12.- $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{1+\text{ang}\cos x}$

13.- $f(x) = \text{ang}\cos\left(x - \sqrt{1+x}\right)$

14.- $f(x) = \text{ang cos } (\cos 6x)$

15.- $f(x) = \text{ang sec}\left(1 + \dfrac{x^3}{1+x}\right)$

16.- $f(x) = \text{ang sen } (\cos 2x)$

17.- $f(x) = \text{ang tan } x^3$

18.- $f(x) = \sqrt{x}\ \text{angtan}\sqrt{x}$

19.- $f(x) = \left(\dfrac{x}{3}\right) + \text{ang}\cos\sqrt{4-x^2}$

20.- $f(x) = \text{sen}\left(\text{ang}\cos\dfrac{x}{2}\right)$

II.- Obtenga la derivada de las funciones .

1 .- $f(x) = x^2 \ln x$

4 .- $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$

5 .- $f(x) = \sqrt{\ln x}$

6 .- $f(x) = \ln(\text{sen } x)$

7 .- $f(x) = \ln(1 - \cos^2 x)$

8 .- $f(x) = x^2 \ln x$

9 .- $f(x) = \cos x \ln x$

10.- $f(x) = \dfrac{1}{3\ln x}$

11.- $f(x) = \ln^4 \cos x$

12.- $f(x) = \dfrac{1-3\ln x}{1+5\ln x}$

13.- $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$

14.- $f(x) = \sqrt{5-\ln x}$

15.- $f(x) = \ln\left(sen\sqrt{x}\right)$

16.- $f(x) = \ln(1 - \text{sen } x + x)$

17.- $f(x) = (x^3 - 7)^2 \ln(x + 2)$

18.- $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{1 + \ln 5x}$

19.- $f(x) = \left(\dfrac{3}{\ln x}\right)^3$

20.- $f(x) = \sqrt{x} \ln\sqrt{x}$

21.- $f(x) = \text{ang sen} \ln(3x - 2)$

22.- $f(x) = \text{ang cos}(\ln x - \ln 2x)$

23.- $f(x) = \ln x + \ln x^2 + \ln x^3 + \ln x^4$

24.- $f(x) = (\ln x)^n$

25.- $f(x) = \ln(nx)$

26.- $f(x) = e^x \cos x$

27.- $f(x) = e^{\cos x}$

28.- $f(x) = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$

29.- $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - x^2}$

30.- $f(x) = e^{-x}$

31.- $f(x) = e^{-ax}$

32.- $f(x) = e^{a^2 x}$

33.- $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

34.- $f(x) = \text{sen } e^{x^2 + 2x + 1}$

35.- $f(x) = \ln(\text{sen } e^x)$

36.- $f(x) = ae^{b^2 x^2 + c}$

37.- $f(x) = Ae^{-wx} \cos(wx + v)$

38.- $f(x) = x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}$

39.- $f(x) = e^x \cdot e^{2x} \cdot e^{3x}$

40.- $f(x) = \text{angsen } e^x$

41.- $f(x) = \text{ang cos}\sqrt{e^x}$

42.- $f(x) = e^x x^n$

43.- $f(x) = e^{1 + x + 2x^2 + 3x^3}$

44.- $f(x) = e^{\sqrt{\ln(ax^2 + bx + c)}}$

45.- $f(x) = e^{1 - 4 \text{ angsen } x}$

46.- $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

47.- $f(x) = x^{-3} e^{(1-x)}$

48.- $f(x) = e^x \ln x$

5.1.4. Derivadas de Orden Superior

Al derivar la función $f(x)$, se obtiene una nueva función $f'(x)$, cuyo dominio ya no es el mismo de la función original $f(x)$, a esta función $f'(x)$, es posible aplicarle nuevamente el operador derivada, esto da lugar a una nueva función $(f'(x))'$ cuyo dominio es el conjunto de valores x tales que $f'(x)$ es derivable en x, así la función $(f'(x))'$ se denota como $f^{II}(x)$ y se denomina la segunda derivada de la función $f(x)$, si $f^{II}(x)$ existe se dice que $f(x)$ es dos veces derivable en x. De forma similar se pueden definir las derivadas

$$f^{III}(x) = (f^{II}(x))'$$

$$f^{IIII}(x) = (f^{III}(x))', \text{ etc.}$$

Para simplificar la notación conviene escribir

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{k}(x))' = \frac{d^k f(x)}{dx^n}$$

Si $k \geq 2$, las distintas funciones se llaman derivadas de orden superior de $f(x)$.

Ejemplos

Obtener la derivada de orden superior indicada

1.- $\frac{d^2}{dx^2}(x^4 + 2x)$.

2.- $(\cos x)^{(3)}$.

3.- $(f \cdot g)^{(3)}$.

4.- Si $f(x) = x^n$, obtener $f^{(n)}(x)$.

5.- Determine $y^{(2)}(x)$, si $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, (a > 0)$.

Solución

1.- $\frac{d^2}{dx}(x^4 + 2x) = (x^4 + 2x)'' = (4x^3 + 2)' = 12x^2$.

2.- $(\cos x)^{(3)} = (-\operatorname{sen} x)^{(2)} = (-\cos x)' = \operatorname{sen} x$.

3.- $(f \cdot g)^{(3)} = (f \cdot g' + g \cdot f')^{(2)} = ((f'g' + fg'') + (f''g + f'g'))'$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''.$$

4.- Si $f(x) = x^n$, obtener $f^{(n)}(x)$.

$$f^{(1)}(x) = n\,x^{n-1}$$
$$f^{(2)}(x) = n(n-1)\,x^{n-2}$$
$$f^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}$$
$$\vdots$$
$$f^{n}(x) = n(n-1)(n-2).....3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

5.- Como $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ es fácil verificar que $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$, entonces $x(y')^3 = -y$,

al derivar nuevamente obtenemos $3x(y')^2 y'' + (y')^3 = -y'$

entonces al despejar y'' y sustituir la expresión de y' obtenemos :

$$y'' = -\frac{1+(y')^2}{3x(y')} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}.$$

EJERCICIOS

I.- Obtenga las derivadas indicadas.

1.- $f(x) = x^2 - 3x + 2$; $f^{II}(x)$

2.- $f(x) = 1 + x^2 - x^4$; $f^{II}(x)$

3.- $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$; $f^{IV}(x)$

4.- $f(x) = (x^2 + 1)^3$; $f^{II}(x)$

5.- $f(x) = \cos^2 x$; $f^{III}(x)$

6.- $f(x) = e^{2x-1}$; $f^{II}(x)$

7.- $f(x) = \text{ang tan } x$; $f^{IV}(x)$

8.- $f(x) = x e^{x^2}$; $f^{III}(x)$

9.- $f(x) = (1 - x^2)\,\text{ang sen } x$; $f^{IV}(x)$

9.- $f(x) = (1 - x^2)$ ang sen x ; $f^{III}(x)$

10.- $f(x) = e^{\sqrt{x}}$; $f^{III}(x)$

11.- $f(x) = \dfrac{2}{1+x^3}$; $f^{III}(x)$

12.- $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; $f^{III}(x)$

13.- $f(x) = x^x$; $f^{III}(x)$

14.- $f(x) = 3^{x+x^2}$; $f^{III}(x)$

II.- Determine expresiones comunes para la enésima derivada de las funciones

1.- $f(x) = e^{ax}$

2.- $f(x) = e^{-ax}$

3.- $f(x) = x^n$

4.- $f(x) = x^{ax}$

5.- $f(x) = \ln x$

6.- $f(x) = x \ln x$

7.- $f(x) = \ln(ax + b)$

8.- $f(x) = x^{-n}$

9.- $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

10.- $f(x) = \text{ang tan } x$

11.- $f(x) = \sqrt{x}$

5.1.5. La función ln (x) en la derivada de funciones positivas

Bajo la hipótesis de que la función a derivarse es siempre positiva , o considerando el subconjunto del dominio de la función en donde esto ocurre, la función ln (x) puede simplificar el cálculo de la derivada de estas funciones .

Teorema 4
DERIVADA DE FUNCIONES POSITIVAS
Sea $F(x) > 0$ sobre un intervalo $I \subset D_F$, entonces son válidas las siguientes propiedades

Regla 1
PRODUCTO .
Si $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ entonces, $\ln F(x) = \ln f(x) + \ln g(x)$
y

$$F'(x) = F(x)\left[\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right]$$

Regla 2
COCIENTE .
Si $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ entonces $\ln F(x) = \ln f(x) - \ln g(x)$ y

$$F'(x) = F(x).\left[\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}\right]$$

Ejemplos
Utilizando las propiedades del ln x , derive las siguientes funciones (considere sólo valores x tales que f (x) sea positiva).

1.- $F(x) = \cos x \cdot \operatorname{sen} x \cdot e^x$

2.- $F(x) = \sqrt{x}\operatorname{sen}(1 - x^2)$.

3.- $F(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x + \tan x}$

4.- $F(x) = x^{\cos x}$.

5.- $F(x) = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$.

6.- $F(x) = x^{\tan x \sec x}$.

Solución
1.- Si $F(x) = \cos x \cdot \operatorname{sen} x \cdot e^x$ al utilizar la función ln x de acuerdo a sus propiedades obtenemos
$\ln F(x) = \ln \cos x + \ln \operatorname{sen} x + \ln e^x$, derivando

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x) + \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x + 1, \quad \text{entonces}$$

$$F'(x) = (-\tan x + \operatorname{ctg} x + 1)(\cos x \cdot \operatorname{sen} x \cdot e^x).$$

2.- Calcule $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x}\operatorname{sen}(1-x^2)$.
Aplicamos las propiedades de la función $\ln x$ a $F(x)$ y obtenemos:

$\ln F(x) = \ln\sqrt{x} + \ln(\operatorname{sen}(1-x^2))$, derivando

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\operatorname{sen}(1-x^2)}\cdot\cos(1-x^2)(-2x)$$

$$F'(x) = \sqrt{x}\operatorname{sen}(1-x^2)\left[\frac{1}{2x} - 2x\cot(1-x^2)\right].$$

3.- Si $F(x) = \dfrac{1-\cos x}{x+\tan x}$ entonces

$$\ln F(x) = \ln(1-\cos x) - \ln(x+\tan x)$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{1-\cos x}(\operatorname{sen} x) - \frac{1+\sec^2 x}{x+\tan x}$$

$$F'(x) = \frac{1-\cos x}{x+\tan x}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} - \frac{1+\sec^2 x}{x+\tan x}\right].$$

4.- Si $F(x) = x^{\cos x}$, entonces

$$\ln F(x) = \cos x \cdot \ln x$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \cos x\frac{1}{x} - \operatorname{sen} x \ln x$$

$$F'(x) = x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \operatorname{sen} x \cdot \ln x\right).$$

5.- Como $F(x) = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$, entonces
$\ln F(x) = \operatorname{sen} x \cdot \ln\cos x$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \operatorname{sen} x\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} + \cos x \ln\cos x$$

$$F'(x) = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}\left[\cos x \ln\cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\right].$$

6.- Puesto que $F(x) = x^{\tan x^{\sec x}}$, entonces
$\ln F(x) = \sec x \ln(x^{\tan x})$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \sec x\frac{1}{x^{\tan x}}\left(x^{\tan x}\right)' + \sec x \tan x \ \ln x^{\tan x}$$

$$F'(x) = F(x)\left[\frac{\sec x}{x^{\tan x}}\left(x^{\tan x}\left(\tan x + x\sec^2 x\right) + \sec x \tan x \ln x^{\tan x}\right)\right]$$

$$F'(x) = \sec x \ln\ (x^{\tan x})\left[\sec x \tan x + x\sec^3 x + \frac{\sec^2 x \tan^2 x \ln x}{x^{\tan x}}\right].$$

EJERCICIOS

I.- Utilizando la función ln x derivar

1.- $f(x) = 4^x$

2.- $f(x) = 10^x$

3.- $f(x) = \dfrac{6}{4^x}$

4.- $f(x) = \dfrac{x}{4^x}$

5.- $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$

6.- $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

7.- $f(x) = (sen(x))^{sen(x)^{sen(x)}}$

8.- $f(x) = x(\cos x)^x$

9.- $f(x) = x^{x^2}$

10.- $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{x}}$

11.- $f(x) = x^{\ln x}$

12.- $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

13.- $f(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^x$

14.- $f(x) = (x^2 + 3)^{\cos x}$

15.- $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

16.- $f(x) = a^x$

17.- $f(x) = x^2 \cdot a^x$

18.- $f(x) = x^{\operatorname{angtan} x}$

19.- $f(x) = x^3 e^{x^2}$

20.- $f(x) = \dfrac{e^x - \ln x}{sen(x)}$.

21.- $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos(x)}$

22.- $f(x) = \dfrac{1}{2^x + 3^x}$

23.- $f(x) = \dfrac{5^x}{3^x}$

24.- $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x^2}$

25.- $f(x) = a^x \cdot x^n$

26.- $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+3px}{x^2-1}}$

27.- $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot (3 - x)$

28.- $f(x) = x \cdot \cos x \cdot e^x \cdot \operatorname{ang\,sen} x$

29.- $f(x) = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot u_3(x) \cdot u_4(x) \cdot u_5(x)$

30.- $f(x) = (x-1)^3 (x-2)^4 (x-3)^5 (x-4)^7$

31.- $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2(2x+8)^3}{(2x-10)^8(2x+3)^7(2x+5)^9}$

32.- $f(x) = \sqrt{\dfrac{u(x)}{v(x)}}$

33.- $f(x) = \sqrt[n]{\dfrac{1-u(x)}{1+v(x)}}$

II.- Verifique que las funciones dadas, satisfacen la relación que se indica.

1 .- $y = 2x^2$, $xy' = 2y$

2 .- $y = x\ln\left(\dfrac{a}{x}\right)$, $y' = \dfrac{y-x}{x}$.

3 .- $y = kx^2 - x$, $y' = \dfrac{2y7x}{x}$.

III.- Derive implícitamente para obtener las derivadas indicadas .

1 .- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y', y''.

2 .- $x^2 + y^2 = r^2$ y', y'', y'''.

3 .- $y = \tan(x + y)$ x', y'.

4 .- $y = 1 \cdot xe^y$ y', x'.

5 .- $y^3 + x^3 + 3xy = 0$ y'', x'.

6 .- $y = \cos(x - y)$ y', x', y''.

7.- $e^{x+y} + e^{x-y} = 5$ y', x', y''.

8.- $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ y', x', y''.

9.- $\text{sen}\,\dfrac{x}{y} + \cos\dfrac{y}{x} = 10$ y', x', y''.

10.- $e^{\text{sen}(x+y)} + e^{\cos(x-y)} = 1$ y', x', y''.

11.- $\text{ang}\cos(x \cdot y) + xy - y' = 0$ y', y''.

XVI.- Verifique que las funciones dadas , satisfacen las relaciones indicadas .

1.- $y = e^x \text{sen}\, x$ $y'' = -2y' + 2y = 0$

2.- $y = ae^{-5x} + be^{6x}$ $y'' = -y' - 3ay = 0$

3.- $y = c_1 \cos x + c_2 \text{sen}\, x$ $y'' + y = 0$

5.1.6 FUNCIONES DE CLASE C^K

De especial importancia son aquellas funciones derivables en cierto intervalo **I** cuya función derivada asociada es continua en ese intervalo **I**, su importancia radica en que es posible estudiarlas de forma cualitativa.

Ejemplo

Sea $f(x) = \text{sen } x$, como se estudió antes, esta función es continua sobre $\Re$ además $f'(x) = \cos x$

también es continua sobre $\Re$, cuando esto ocurra diremos que la función es de clase C^1, formalmente :

Definición 5

FUNCIONES DE CLASE C^1

Si la función $f : A \to \Re$ es derivable y $f' : A \to \Re$ es continua, entonces diremos que $f(x)$ es una función de clase C^1.

Obsérvese que $f''(x) = -\text{sen } x$, es continua sobre $\Re$, es decir $f'(x)$ es una función de clase C^1, es decir $f(x) = \text{sen } x$ es una función de clase C^2, este resultado se puede generalizar para concluir que $f(x) = \text{sen } x$ es una función de clase C^K.

Definición 6

FUNCIÓN DE CLASE C^K

Se dice que una función $f : A \to \Re$ es de clase C^K si existen sus primeras K derivadas y la K - ésima derivada $f^{(k)}$ es una función continua .

Ejemplos

Las funciones que a continuación se proporcionan son clase C^K para todo **K** fijo .

$f(x) = C$, C = constante

$f(x) = x^n$, $x > 0$

$f(x) = e^x$

$f(x) = \ln x$

$f(x) = \text{sen } x$

$f(x) = \cos x$

$f(x) = \text{ang sen } x$

$f(x) = \text{ang tan } x$

Para comprobar esta aseveración sólo se tienen que derivar varias veces estas funciones y verificar que el dominio de cada una de estas derivadas es el mismo que el de la función original .

Definición 7

FUNCIÓN SUAVE

Una función $f : A \to \Re$ que es de clase C^K para cualquier $K \in \aleph$ se denomina suave, analítica o clase C^∞.

Ejemplo 1

1.- Todas las funciones dadas en el ejemplo anterior son suaves .

Ejemplo 2

2.- La función $f(x) = x^{2.5}$ definida sobre el intervalo $[0, \infty)$ es de clase C^2 pero no de clase C^3.

Claramente : $D_f = [0, \infty)$,

$$f'(x) = 2.5x^{1.5}$$

$$f''(x) = (1.5)(2.5)x^{0.5}$$

están definidas en $D_f = [0, \infty)$, pero $f'''(x) = (0.5)(1.5)(2.5)x^{-0.5}$, no está definida en $x = 0$, esto significa que la función $f(x) = x^{2.5}$ es de clase C^2 en $[0, \infty)$ pero no es C^4 en $[0, \infty)$.

Otro concepto de gran utilidad en el análisis de una función, y que se encuentra relacionado con la derivada de una función corresponde a los llamados puntos de ramificación que intuitivamente son aquellos en los cuales la derivada no existe, formalmente :

Definición 8

PUNTO DE RAMIFICACIÓN

Sea $f : A \to \Re$ una función derivable excepto en un punto x_0 , el punto x_0 se dice de ramificación si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$

Geométricamente los puntos de ramificación son semejantes a las ramas de un árbol.

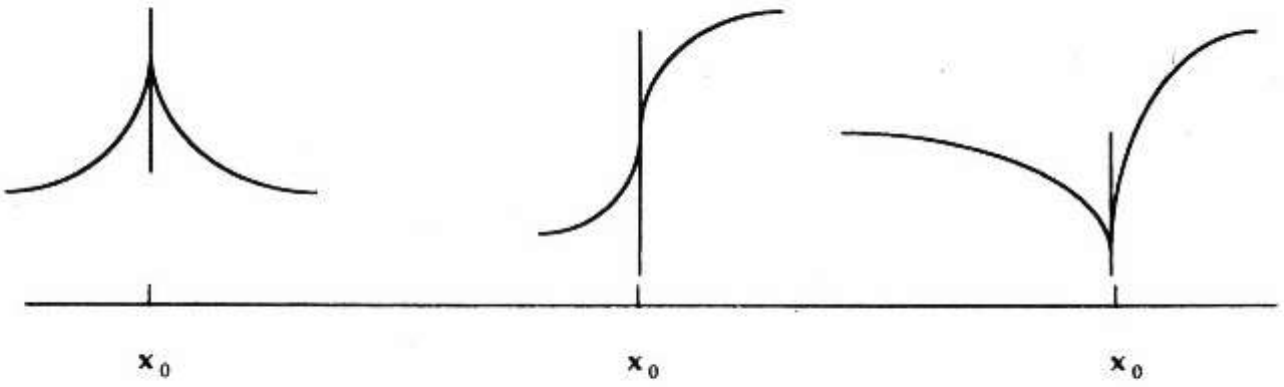


Figura (5.4) Algunos tipos de puntos de ramificación sobre x_0 .

Ejemplos

Determine los puntos de ramificación de las siguientes funciones .

1.- $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

2.- $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Solución

1.- Si $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ entonces $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ y $x_0 = 1$ es el posible punto de ramificación, evaluando el límite

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \infty$, concluimos que en efecto, $x_0 = 1$ es un punto de ramificación .

2.- Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ entonces $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ y los posibles puntos de ramificación son $x_0 = 1$ y $x_0 = -1$, evaluando los límites

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \infty$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \infty$$

concluimos que $x_0 = 1$ y $x_0 = -1$ son puntos de ramificación .

Observación

Las funciones que poseen potencias fraccionarias, generalmente tienen puntos de ramificación donde se anula el argumento correspondiente .

Ejemplos

Determine los puntos de ramificación de las siguientes funciones .

1.- $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$

2.- $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8 - x}$

Solución

1.- Si $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$ entonces el argumento se anula en los puntos $x_0 = 3$ y $x_0 = 1$ y son las posibles ramificaciones.

2.- Si $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8 - x}$ entonces el argumento se anula en los puntos $x_0 = 0$ y $x_0 = 8$ que representan las ramificaciones de las función .

EJERCICIOS

I.- ¿ De que clase de derivabilidad son las siguientes funciones ? ¿ Cuales son suaves?

1.- $f(x) = \sqrt{1 - x}$

2.- $f(x) = x - \left(\dfrac{2}{x}\right)$

3.- $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

4.- $f(x) = x^{-3}$

II.- ¿ Cuales son las ramificaciones de las siguientes funciones ?

1.- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{3}{\sqrt[4]{x}}$

2.- $f(x) = 3x^{-2} - \dfrac{5}{\sqrt{x}}$

3.- $f(t) = 0.8\, t^{-2}$

4.- $f(w) = 0.1 w^{\frac{2}{3}} - \dfrac{4.3}{w^{4}} + \dfrac{2.5}{\sqrt[4]{w}}$

5.- $f(x) = \dfrac{n}{x^3}$

6.- $f(x) = (x^2 - 3)(3x - 7)$

CAPÍTULO 6

Aplicaciones de la derivada

6.1. RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA CURVA

Una aplicación elemental de la derivada consiste en la determinación de una recta tangente a una curva en un punto determinado.

Definición 1
RECTA TANGENTE A UNA CURVA
Cuando en la función $f(x)$ existe una recta tangente en un punto, la pendiente de la curva en ese punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto.
La pendiente de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ es simplemente $f'(x_0)$, en consecuencia, si $(x_0, f(x_0))$ es un punto de la gráfica de la función $f(x)$, la pendiente de la recta tangente en ese punto es $m_t = f'(x_0)$ y la recta tangente tiene como ecuación

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Definición 2
RECTA NORMAL A UNA CURVA
La recta normal a la curva con ecuación $y = f(x)$ en el punto $P_0(x_0, f(x_0))$ es la recta que pasa por el punto P_0 y es perpendicular a la recta tangente a $f(x)$ en ese punto.

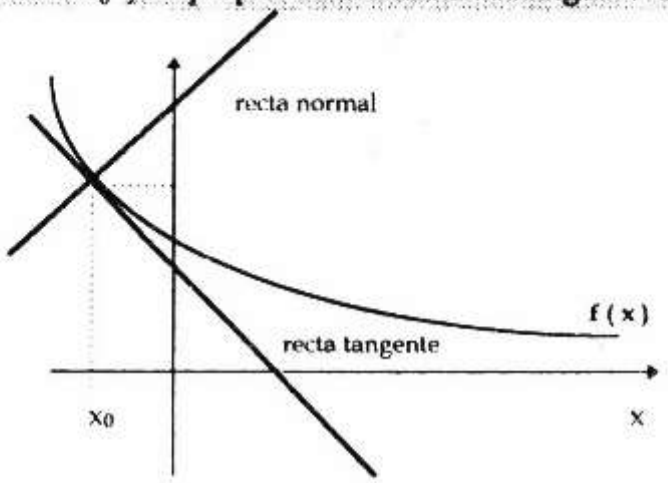


Figura (6.1) Recta tangente y Recta normal a la curva $f(x)$ en el punto $P_0(x_0, f(x_0))$.

Por ser perpendiculares la recta normal y la recta tangente, entonces la pendiente de la recta normal es el recíproco negativo del valor de la pendiente de la recta tangente, por lo tanto la ecuación de la recta normal es

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Ejemplos

1.- Determine la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la curva

$$y = x^2 + 5 \quad \text{en} \quad x_0 = 2.$$

Solución

Recta tangente :

Derivando obtenemos $m_t = f'(2) = 2(2) = 4$ y $f(2) = 2^2 + 5 = 9$ entonces la ecuación de la recta tangente es $y - 9 = 4(x - 2)$ o en la forma general $4x - y + 1 = 0$.

Recta normal :

Por la condición de perpendicularidad se tiene $m_n = -\frac{1}{4}$, entonces $y - 9 = \frac{-1}{4}(x - 2)$, por lo tanto $x + 4y - 38 = 0$.

2.- Determine la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = \sqrt{3 - x}$ en el punto $(2, 1)$.

Solución

Derivando obtenemos $y' = \frac{-1}{2\sqrt{3 - x}}$, como $x = 2$, entonces $y'(2) = -\frac{1}{2}$, de donde la pendiente de la recta tangente en ese punto es $m_t = -\frac{1}{2}$, puesto que $P_0(2, 1)$, entonces la ecuación de la recta tangente es $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$ y su forma general es

$$x + 2y - 4 = 0.$$

La pendiente de la recta normal es $m_n = -\frac{1}{m_t} = 2$, entonces la ecuación de la recta normal es $y - 1 = 2(x - 2)$ por lo tanto, su forma general es

$$2x - y - 3 = 0.$$

3.- Determine la ecuación de la recta tangente a la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ en el punto $(0, 2)$. ¿ Cuál es la ecuación de la recta normal a esta elipse?

Solución

Derivando implícitamente obtenemos $8x + 18yy' = 0$, entonces $y' = \frac{-8x}{18y}$ pero como $x = 0$ entonces $y'(0) = 0$ y la ecuación de la recta tangente es

$$y - 2 = 0.$$

Es fácil verificar que la ecuación de la recta normal es $x = 0$.

4.- Determine la ecuación de la recta normal a la curva $y^2 - 6x^2 + 4y + 3 = 0$ en el punto $(2, 3)$.

Solución

Derivando implícitamente se obtiene $2yy' - 12x + 4y' = 0$, como $x = 2$, $y = 3$, entonces

$$6y' - 24 + 4y' = 0 \text{ por lo tanto } y' = \frac{24}{10} = m_t.$$

Sustituyendo los datos anteriores en la forma **punto - pendiente** de la recta obtenemos $y - 3 = \frac{12}{5}(x - 2)$, luego la forma general de la recta tangente es

$$12x - 5y + 9 = 0.$$

La pendiente de la recta normal es $m_n = \frac{-5}{12}$ y la forma **punto - pendiente** de la recta normal tiene la forma

$$y - 3 = \frac{-5}{12}(x - 2),$$

por lo que la forma general es $5x - 12y - 46 = 0$.

EJERCICIOS

I.- Determine la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la función $f(x)$ en el punto indicado.

1.- $y^2 = 9x$ en $(1, 3)$.

2.- $x^2 + 2x + y = 0$ en $(-3, -15)$.

3.- $(y-2)^2 = -4(x-3)$ en $(-4, 4)$.

4.- $4x^2 + 9y^2 = 36$ en $(2, \frac{2\sqrt{5}}{3})$.

5.- $y^2 = 4ay$ en (x_0, y_0).

6.- $y = x^2 - 3x + 6/x^2$ si $x = 3$.

7.- $y = \sqrt{x} + 2$ en $(0, 2)$.

8.- $y = \frac{1}{1+x^2}$ paralela al eje x.

9.- $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$ en $(-2, 1)$.

10.- $x^2y^2 = 9$ en $(-1, 3)$.

11.- $xy + 2x - 5y - 2 = 0$ en $(-3, 2)$.

12.- $y = 2x - \frac{4}{\sqrt{x}}$ en $(4, 6)$.

13.- $y^2 - xy + 3x = 2$ en $(0, \sqrt{2})$.

14.- $5x^3 - 2x^2y^2 + 4y^3 - 7 = 0$ en $x = 0$.

II. -Resolver los siguientes problemas

1.- Verifique que la tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

2.- Verifique que la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en (x_0, y_0) es $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

3.- Verifique que la normal al círculo $x^2 + y^2 = a^2$, en (x_0, y_0) pasa por el origen.

4.- Determine los puntos en que $x^2 + xy + y^2 = 9$ corta al eje x, muéstrese que las tangentes a la curva dada en estos puntos son paralelas.

5.- Determinar la ecuación de una recta que sea tangente a la curva $y = \frac{-1}{\sqrt{x}}$ y sea paralela a $x + 2y - 6 = 0$.

6 . 2 . EXISTENCIA DE VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS

La determinación de los valores máximos o mínimos (valores extremos) que alcanza una función es de suma importancia en el estudio del comportamiento de los fenómenos de la vida real. Las técnicas de estudio las proporciona el Cálculo Diferencial .
En esta sección, trataremos el problema de determinar los valores máximos y mínimos que alcanza una función en un intervalo dado, este problema se encuentra estrechamente relacionado con la derivada.

Definición 3
PUNTOS CRÍTICOS Y VALORES EXTREMOS
Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo **cerrado** A , $A \subset D_f$, $x_0 \in A$ se denomina un **punto máximo absoluto** de $f(x)$ sobre A si $f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in A$, el número $f(x_0)$ se denomina **valor máximo absoluto** de $f(x)$ sobre A .

Se dice que $f(x)$ tiene un **punto máximo relativo o local** en x_0 si y sólo si existe un intervalo **V** alrededor de x_0 tal que $f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in V$, $f(x_0)$ se denomina **valor máximo relativo** de $f(x)$ sobre A .

Las definiciones de **punto mínimo absoluto** y **valor mínimo absoluto** se obtienen invirtiendo las desigualdades en la primera parte de la definición anterior .

Definición 4
VALORES EXTREMOS
Los valores máximos o mínimos de una función $f(x)$ se conocen como **valores extremos** de la función $f(x)$.

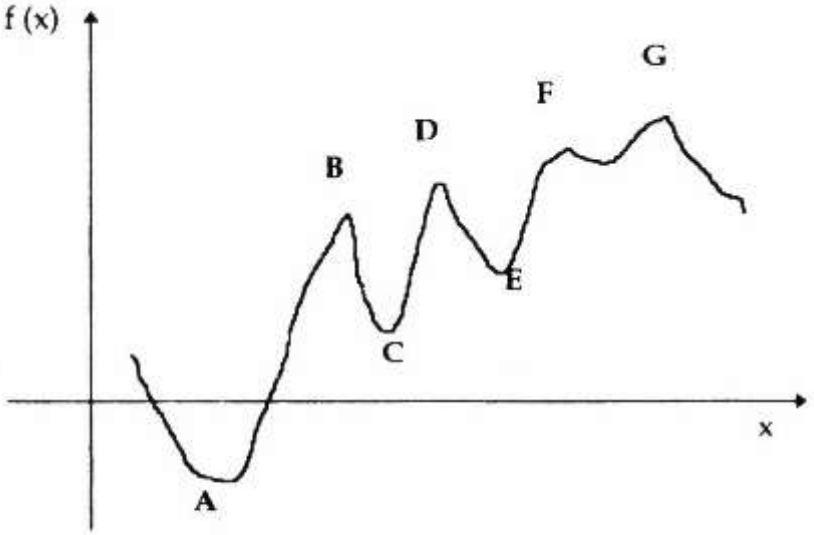


Figura (6.2) Obsérvese que esta función alcanza su valor máximo en G, es decir tiene un máximo absoluto en G, igualmente tiene un mínimo absoluto en A.
La función también tiene picos en B y D, estos se denominan máximos relativos, también tiene mínimos relativos en C y E .

Ejemplos

1.- La función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ tiene un máximo absoluto en $x_0 = 0$ y tiene mínimos absolutos en $x_0 = -5$, 5 sobre el intervalo $[-5, 5]$.

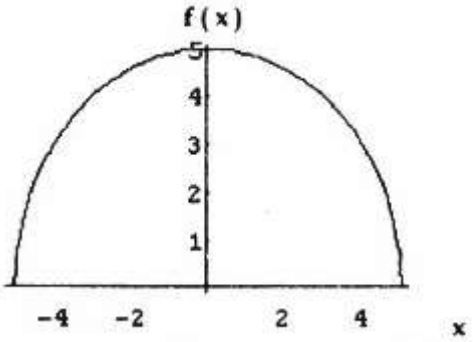


Figura (6.3) Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

2.- Determine los valores extremos absolutos de la función $f(x) = x$ en el intervalo $[-4, 7]$.

Solución

La función identidad es creciente por lo que los puntos extremos sobre ese intervalo son :
punto mínimo absoluto $x_0 = -4$, valor mínimo absoluto $f(-4) = -4$,
punto máximo absoluto $x_0 = 7$, valor máximo absoluto $f(7) = 7$.

Observación Si se considera el intervalo $(-4, 7)$, entonces la función identidad carece de valores extremos .

Teorema 1

CONDICIÓN DE EXISTENCIA DE PUNTOS CRÍTICOS

Supóngase que $f(x)$ tiene un punto extremo relativo en x_0 . Si $f(x)$ es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

Demostración

Supongamos que $f(x)$ tiene un punto máximo en x_0 , $x_0 \in (a, b)$, entonces

$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0 .$$

- si $h < 0$, se cumple $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$ y por lo tanto

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

- si $h > 0$, entonces $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$ y

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

Como $f(x)$ es derivable, los límites anteriores tienen que ser iguales y como

$f'(x_0) \geq 0$ y $f'(x_0) \leq 0$, entonces $f'(x_0) = 0$ con lo que se concluye la demostración, en el caso en que $f(x)$ tenga un valor mínimo sobre x_0, la demostración es similar .

□

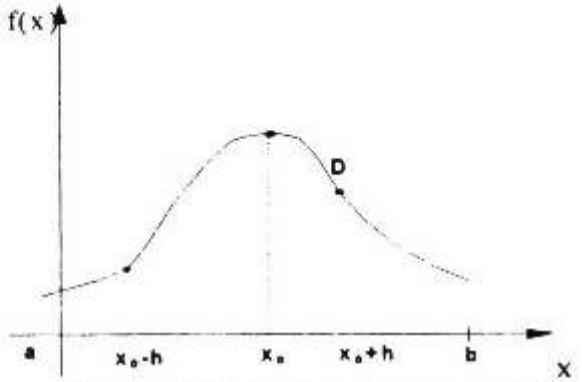


Figura (6.4) Idea de la demostración del teorema 1.

Definición 5
PUNTO CRÍTICO
Un punto crítico (o singular) de una función $f(x)$ es aquel punto x_0 tal que $f'(x_0) = 0$, además $f(x_0)$ se denomina valor extremo (o valor singular de $f(x)$).

NOTA
Los puntos donde la derivada de una función se anulan se denominan puntos críticos

Ejemplos
Determine los puntos y los valores extremos de las siguientes funciones .
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
2.- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.
3.- $f(x) = x\sqrt{3x - x^2}$
4.- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
5.- $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$
6.- $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$

Soluciones
1.- Si $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, entonces al derivar e igualar a cero se obtenemos

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

simplificando y factorizando

$x(x-2) = 0$, entonces los puntos críticos son $x_0 = 0$ y $x_0 = 2$.

Los valores extremos asociados son :

$$x_0 = 0, \quad f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 2 = 2.$$
$$x_0 = 2, \quad f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 2 = -2.$$

2.- Si $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$, entonces $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0,$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$
$$x_0 = 1, \qquad f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 3(1) + 2 = 3.$$

3.- Puesto que $f(x) = x\sqrt{3x - x^2}$, entonces

$$f'(x) = \frac{9x^2 - 4x^3}{\sqrt{3x^3 - x^4}} = 0 \Leftrightarrow x^2(9 - 4x) = 0, \text{ por tanto se obtiene}$$

$$x_0 = 0, \ f(0) = 0$$
y
$$x_0 = \frac{9}{4}, \ f\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{27}{16}\right)\sqrt{3}.$$

4.- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

aquí $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(1 + \sqrt{x}\right)^2}$, pero $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(1 + \sqrt{x}\right)^2} \neq 0$ para toda x, entonces esta función no tiene puntos críticos.

5.- $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$.

Derivando e igualando a cero obtenemos

$f'(x) = \dfrac{2x}{\left(1 + x^2\right)^2} = 0$, es decir $f'(x) = 0$ si y sólo si $x_0 = 0$, entonces el valor extremo asociado es $f(0) = 0$.

6.-Si $f(x) = x - 2\,\text{sen}\,x$, al derivar obtenemos $f'(x) = 1 - 2\cos x$ pero $1 - 2\cos x = 0$ si sólo si $\cos x = \dfrac{1}{2}$ por lo tanto los puntos críticos son $x = \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$ con $n \in \mathbf{Z}$.

En consecuencia los valores extremos son

$f\left(\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi - \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi\right)$.

6 . 3 . EL TEOREMA DE ROLLE Y EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Los teoremas fundamentales que se utilizan en la caracterización de los valores extremos de la teoría de los máximos y mínimos son :
el teorema de **Rolle** y el teorema del **Valor Medio** , supongamos que A , B son dos puntos sobre la curva C, S es la secante que los une (figura **6.5ª**) , el teorema del valor medio (**TVM**) afirma que bajo ciertas condiciones existe un punto **R** sobre la curva **C** entre los puntos **A** y **B** en que la recta tangente T es paralela a la recta secante **S** .

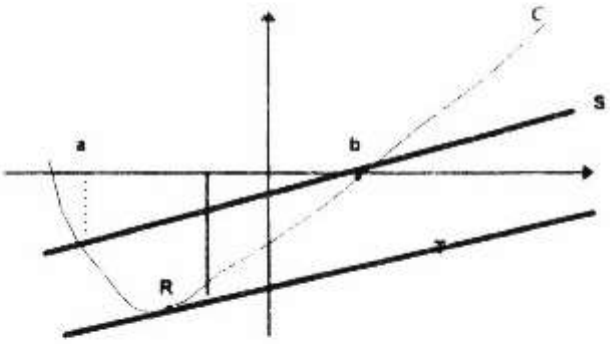
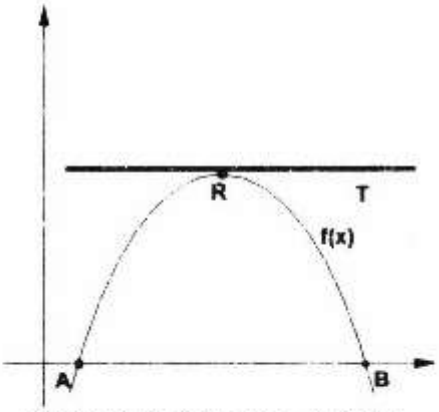


Figura (6.5a) Teorema del valor medio, ABS es una recta secante



Figura(6.5b) Teorema de Rolle .

El caso particular que consiste en que la curva es la función f (x) y la recta Secante **S** es el eje x (**Figura 6.5b**) intercambiando **A** por **B** si fuera necesario y suponiendo que **a < b**, es evidentemente que f (a) = f (b) = 0 y también que la recta tangente a la curva en el punto (x , f (x)) será paralela a la recta secante **S** si y sólo si f '(x) = 0. El teorema de Rolle establece las condiciones que garantizan la existencia de la recta tangente .

Teorema 2
TEOREMA DE ROLLE
Si f (x) es una función continua sobre [a , b] , derivable en (a , b) y f (a) = f (b) , entonces existe un número x_0 en (a , b) tal que $f'(x_0) = 0$.

Demostración

Como f (x) es continua, entonces f (x) tiene un valor máximo y un valor mínimo en el intervalo [a , b], entonces existe un número x_0 en (a , b) tal que $f'(x_0) = 0$ (**Figura 6.6a**).

Supongamos que el valor mínimo de la función f (x) se presenta en $x_0 \in (a, b)$ y por lo tanto $f'(x_0) = 0$. para x_0 en (a , b) (**figura6.6b**).
Si los valores máximos y mínimos se encuentran en los extremos , f (a) = f (b) , entonces f (x) es una función constante (**figura6. 6c**), por lo tanto se elige cualquier valor

$$x_0 \in (a, b).$$

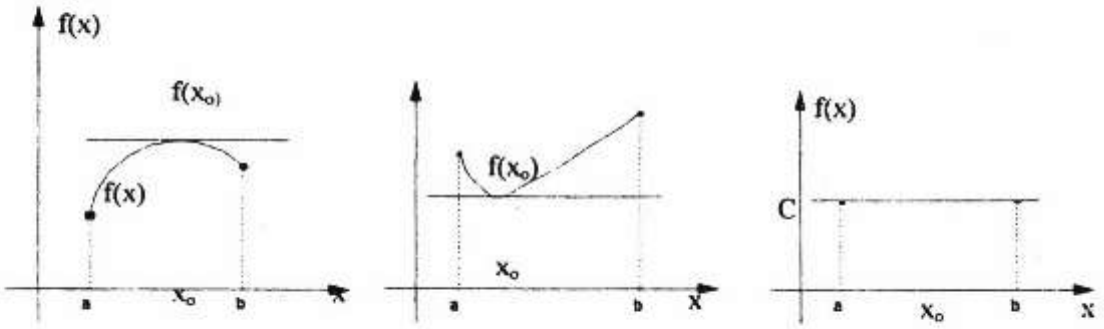


Figura (6.6a) Figura (6.6b) Figura (6.6c)

Figura (6.6) Demostración del teorema de Rolle.

Teorema 3

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si f (x) es una función derivable en el intervalo (a , b) y continua sobre [a , b], entonces existe un número $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demostración

La idea de la demostración consiste en construir una función que cumpla las condiciones del teorema de Rolle , esta función es precisamente la desviación de la gráfica de f (x) respecto a la recta secante mostrada en la figura 6.4a, entonces :

$g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, (el lector debe mostrar que esta función satisface las condiciones del teorema de Rolle).

La función g (x) es derivable en el intervalo (a , b) y $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, por el teorema de Rolle, existe un número x_0 tal que $x_0 \in (a, b)$ y

$$0 = g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

es decir

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ejemplos

1.- Determinar los ceros de la función $f(x) = 2x^2 + 8x - 10$ y demostrar que $f'(x) = 0$ en algún punto intermedio a ellos.

Solución

$f(x) = 2x^2 + 8x - 10 = 2(x+5)(x-1)$ y si $a = -5$, $b = 1$, entonces $f(-5) = f(1) = 0$, entonces por el teorema de Rolle existe $x_0 \in (-5, 1)$ tal que $f'(x_0) = 4x_0 + 8 = 0$, entonces $4x_0 + 8 = 0$, por lo que $x_0 = -2$.

2.- Verifique que $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ satisface las condiciones del **TVM** en el intervalo $[-1, 1]$ y que su gráfica tiene una tangente horizontal en $x_0 = 0$.

Solución

$f(x)$ es continua en $[-1, 1]$.

$f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, está definida en $(-1, 1)$ y $f'(x_0) = \dfrac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} = 0$ si $x_0 = 0$, por lo tanto $f(x)$ tiene una recta tangente en $x_0 = 0$.

3.- Si $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ y $a = 1$, $b = 2$, determine los valores de $x_0 \in (1, 2)$ que satisfacen el **TVM**.

Solución

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$, también $f(1) = \dfrac{3}{2}$, $f(2) = \dfrac{4}{3}$ y $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = -\dfrac{1}{6}$, por el teorema del valor medio encontramos $x_0 \in (1, 2)$ tal que $f'(x_0) = 0$ o sea

$$f'(x_0) = \frac{-1}{(x_0+1)^2} = -\frac{1}{6} \quad \text{así} \quad x_0^2 + 2x_0 - 5 = 0,$$

resolviendo para x_0 encontramos $x_{0_1} = -1 + \sqrt{6} \in (1, 2)$ y $x_{0_2} = -1 - \sqrt{6} \in (1, 2)$, por tanto $x_{0_1} = -1 + \sqrt{6}$ es el número buscado.

4.- Determine los valores x_0 en el intervalo $\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ de $f(x) = 1 - 9x^2$ que satisfacen el teorema de Rolle.

Solución

Observamos que $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$, pero $f'(x_0) = 18x_0$, $18x_0 = 0$, si y sólo si $x_0 = 0$.

EJERCICIOS

1.- Compruebe que la función $f(x) = \ln \operatorname{sen} x$ satisface las condiciones del teorema de Rolle en $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$.

2.- Compruebe que $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}$ satisface el teorema de Rolle en $[1, 2]$.

3.-¿ Satisface $f(x) = \frac{2 - x^2}{x^4}$ el teorema de Rolle en $[-1, 1]$?.

4.- Determine el valor x_0 que predice el teorema de Rolle para la función

$$f(x) = x^3 - 12x \quad \text{en } [0, \sqrt{12}].$$

5.- Determine el valor de x_0 que predice el teorema del valor medio para la función

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{en } [1, 3].$$

6.- Determine el valor de x_0 que predice el teorema del valor medio para la función

$$y = \ln x \text{ en } [1, 2e].$$

7.- Determine el valor de x_0 que predice el teorema del valor medio para la función

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ en } [x_1, x_2].$$

6.4. FUNCIONES MONÓTONAS Y LA PRIMERA DERIVADA

Ahora procedemos a investigar la importancia de la primera derivada en el análisis de los puntos críticos de una función, veremos bajo que condiciones una función es constante, cuando es creciente y cuando es decreciente, hechos que después explotaremos con el objeto de establecer el criterio de la primera derivada .

Teorema 4
Sea $f(x)$ una función tal que $f'(x) = 0$ en un intervalo (a, b), entonces la función $f(x)$ es constante sobre (a, b).

Demostración
Basta aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x)$.

Corolario 4.1
Si $f'(x)$ es igual a $g'(x)$ sobre algún intervalo I, entonces $f(x)$ y $g(x)$ difieren en una constante (es decir $f(x) = g(x) + c$).

Demostración
Se define $h(x) = f(x) - g(x)$, entonces para todo $x \in I$, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, por lo que según el **Teorema 4**, debe existir un número real c tal que $h(x) = c$ para todo $x \in I$, por lo tanto $f(x) = g(x) + c$.
Cabe aclarar que las aplicaciones de estas dos propiedades es fundamental en la teoría de la integración y en la solución de ecuaciones diferenciales .

Teorema 5
CRITERIO DE MONOTONÍA
a) Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo (a, b), entonces $f(x)$ es creciente en (a, b).
b) Si $f'(x) < 0$ (a, b), entonces $f(x)$ es decreciente en (a, b).

Demostración
Se demuestra la parte b), la demostración de a) es similar .
Por el **TVM** existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$, por hipótesis $f(b) < f(a)$, si $a < b$, esto es precisamente la definición de función decreciente .

Ejemplos
1.- Determine los intervalos donde $f(x) = x^3 - 12x + 2$ es creciente y los intervalos donde es decreciente.

Solución
$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$, los intervalos donde $f(x)$ es creciente se determinan resolviendo la desigualdad

$$(x-2)(x+2) > 0.$$

Los puntos de división son

$$x = 2, \quad x = -2, \text{ entonces}$$

Intervalos	P- prueba	pertenece a la solución	tipo
$(-\infty, -2)$	-3	si	creciente
$(-2, 2)$	0	no	decreciente
$(2, \infty)$	3	si	creciente

Los intervalos donde $f(x) = x^3 - 12x + 2$ es creciente son aquellos en los cuales los puntos de prueba satisfacen la relación $(x-2)(x+2) > 0$.
También $f(2) = -14$ y $f(-2) = 18$.

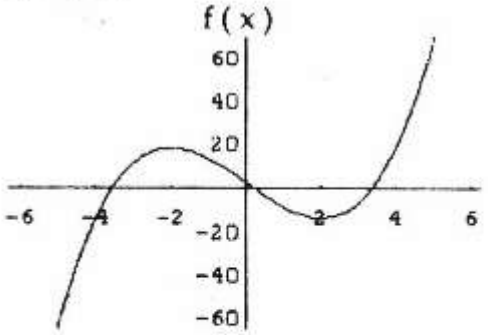


Figura (6.7) Gráfica de $f(x) = x^3 - 12x + 2$.

2.- Determine los intervalos donde la función $f(x) = e^{-x^2}$ es creciente y bosqueje su gráfica.

Solución Derivando se obtiene $f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$. esta nueva función es creciente en el,intervalo solución de la desigualdad $-2xe^{-x^2} > 0$, es decir

$$-2xe^{-x^2} > 0 \iff -2x > 0 \iff x < 0.$$

así $f(x) = e^{-x^2}$ es creciente si $x < 0$ y es decreciente si $x > 0$ y en $x = 0$, la derivada es cero, la siguiente gráfica resume esta información

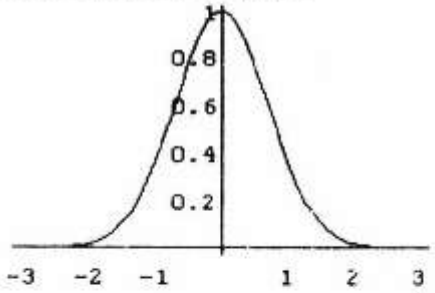


Figura (6.8) Gráfica de $f(x) = e^{-x^2}$.

3.- Determine dónde $f(x) = x + \frac{4}{x}$ es creciente, dónde es decreciente y bosqueje su gráfica .

Solución

Al derivar obtenemos $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$, $1 - \frac{4}{x^2} = 0$, sí y sólo si $x^2 - 4 = 0$, por tanto $x = 2$ y $x = -2$ son los puntos de división (son también los puntos críticos), $f(x) = x + \frac{4}{x}$ es creciente si $x^2 - 4 > 0$ o equivalentemente $(x-2)(x+2) > 0$. Resolviendo esta inecuación obtenemos :

Intervalos	P. prueba	Tipo
$(-\infty, -2)$	-3	creciente
$(-2, 2)$	0	decreciente
$(2, \infty)$	3	creciente

también $f(2) = 0$, $f(-2) = 0$.

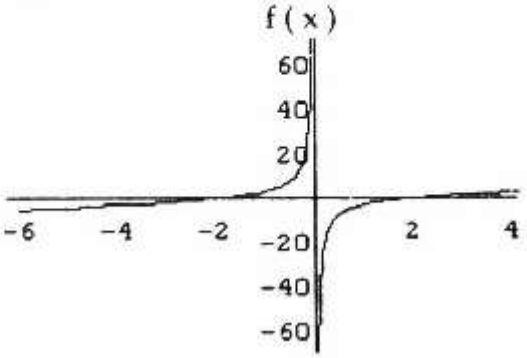


Figura (6.9) Gráfica de $f(x) = x + 4/x$.

El siguiente paso consiste en establecer un criterio para poder determinar cuándo una función posee un valor máximo o un valor mínimo relativo en algún punto crítico x_0 (recordemos que en estos puntos, si la derivada existe, entonces debe anularse), este problema de cierta manera lo resuelve el siguiente teorema .

Teorema 6

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

a) Supongamos que la función $f(x)$ es continua en x_0 .

b) $f'(x) > 0$ en algún intervalo a la izquierda de x_0 ,

c) $f'(x) < 0$ en algún intervalo a la derecha de x_0 ,

entonces $f(x)$ tiene un valor máximo relativo en x_0 .

Si se invierten las desigualdades en b) y c) entonces $f(x)$ tiene un valor mínimo relativo en x_0 .

Demostración

La demostración consiste en escribir formalmente las condiciones b) y c) para después aplicar el **TVM** dos veces esto se hace a continuación .

Las condiciones b) y c) significan :

Existe $\varepsilon > 0$ tal que $f'(x) < 0$ si $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ y $f'(x) > 0$ si $x_0 - \varepsilon < x < x_0$.
Si suponemos que $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ y aplicamos el teorema del valor medio, entonces existe un número X tal que $f(x) - f(x_0) = f'(X)(x - x_0) < 0$, entonces $f(x) < f(x_0)$.
Si suponemos que $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ de nuevo por el teorema del valor medio, existe un número X tal que $f(x) - f(x_0) = f'(X)(x - x_0) < 0$, entonces $f(x) < f(x_0)$.
Hemos demostrado que $f(x) < f(x_0)$ para toda x alrededor de x_0.

Los siguientes ejemplos muestran el empleo del criterio de la primera derivada.

1.- Analizar los valores extremos relativos de la función $f(x) = (x-2)^2$.
Solución
Claramente $f'(x) = 2x - 4$.
El único puntos crítico es : $2x - 4 = 0$, es decir $x = 2$.
Pero $f'(x) > 0$ si $x - 2 > 0$, es decir si $x > 2$ esto implica que y $f(x)$ es creciente en el intervalo $(2, \infty)$.
La función es decreciente cuando $f'(x) < 0$, es decir si $x - 2 < 0$ o $x < 2$, en forma de intervalo : $(-\infty, 2)$.
Por lo tanto en $x = 2$ existe un valor mínimo este es $f(2) = 0$.

2.-Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ determine los valores críticos.
Solución
La derivada da $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$, pero $f'(x) \neq 0$ para toda x, en consecuencia no existen valores críticos.

3.- Determine los valores críticos de $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - x^2 + \dfrac{3x}{2} + 6$
Solución
Si derivamos obtenemos la función $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 - 4x + 3) = \dfrac{1}{2}(x-1)(x-3)$

Existen dos puntos críticos, estos son : $x = 1$ y $x = 3$, entonces la función original es creciente cuando $\dfrac{1}{2}(x-1)(x-3) > 0$, si resolvemos esta desigualdad obtenemos:

Intervalo	p. prueba	tipo
$(-\infty, 1)$	0	creciente
$(1, 3)$	2	decreciente
$(3, \infty)$	4	creciente

En el punto crítico $x = 1$, $f'(x)$ cambia de más a menos, por tanto existe un valor máximo en este punto crítico y corresponde a $f(1) = \frac{20}{3}$.

Alrededor del punto crítico $x = 3$, $f'(x)$ cambia de signo menos a signo más, por tanto existe un valor mínimo, el cual es en $f(3) = 6$.

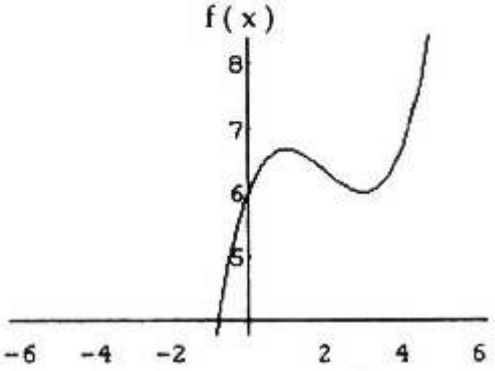


Figura (6.10) Gráfica de $f(x) = \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{3x}{2} + 6$.

4.-Determinar los valores máximos y mínimos, absolutos y relativos de la función $f(x) = (x-2)^2$ sobre el intervalo $[1, 4]$.

Solución

En el **problema 1** se encontró que en $x = 2$ existe un valor mínimo, este es $f(2) = 0$, para determinar los valores extremos relativos es necesario evaluar los extremos del intervalo proporcionado y comparar sus imágenes con los valores extremos. Pero $f(1) = 1$ y $f(4) = 4$, al ser $f(2) = 0$ menor que estas imágenes, entonces es un valor mínimo absoluto sobre $[1, 4]$ y $f(4) = 4$ es el máximo absoluto sobre $[1, 4]$.

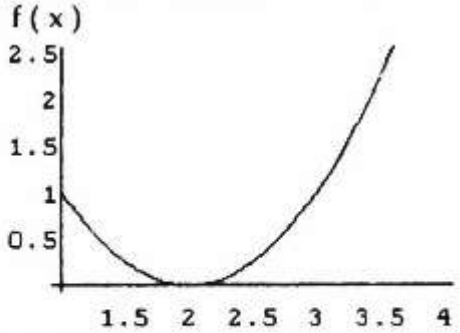


Figura (6.11) Gráfica de la función $f(x) = (x-2)^2$ sobre $[1, 4]$.

5.- Determinar los valores máximos y mínimos absolutos y relativos de $f(x) = \frac{1}{x+2}$ sobre el intervalo $[-3, 5]$.

Solución

En el **problema 2** se encontró que esta función carece de valores extremos relativos, entonces basta evaluar la función en los extremos del intervalo $[-3, 5]$ para determinar los extremos absolutos de esta función. Pero $f(-3) = -1$ y $f(5) = \frac{1}{7}$ por lo que el primero de ellos corresponde a un valor mínimo absoluto y el segundo a un valor máximo absoluto.

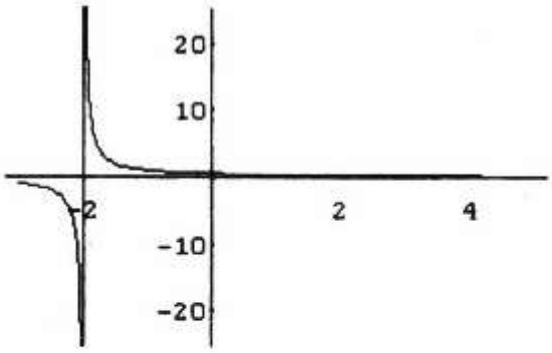


Figura (6.12) Gráfica de la función $f(x) = (x-2)^2$ en $[-3, 5]$.

6.- Determine los valores críticos absolutos de $f(x) = \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{3x}{2} + 6$ sobre $[0, 4]$.

Solución

En el **problema 3** se encontró que

en $x = 1$, existe el valor máximo relativo $f(1) = \frac{20}{3}$.

en $x = 3$, existe un valor mínimo relativo $f(3) = 6$.

Evaluando la función en los extremos del intervalo se obtiene $f(0) = 6$ y $f(4) = \frac{20}{3}$, por lo tanto :

$x = 1, 4$ son puntos máximos absolutos y $f(1) = f(4) = \frac{20}{3}$ es un valor máximo absoluto, $x = 0$ es un punto mínimo absoluto y $f(0) = 6$ es un valor mínimo absoluto, sobre $[0, 4]$.

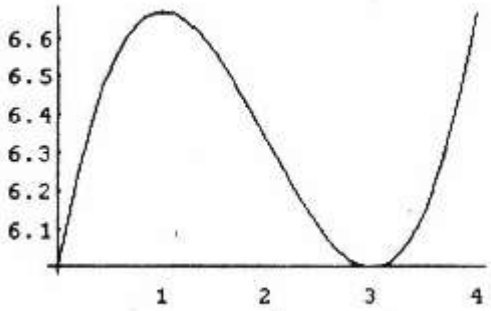


Figura (6.13) Gráfica de $f(x) = \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{3x}{2} + 6$ sobre $[0, 4]$.

EJERCICIOS

I.- Para cada una de las siguientes funciones .

a) Determine los puntos críticos y valores críticos .

b) Determine los intervalos donde es creciente .

c) Determine los intervalos donde es decreciente .

d) Utilice el criterio de la primera derivada para analizar los puntos críticos encontrados en a) .

1.- $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

2.- $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$.

3.- $f(x) = x^3 + x$.

4.- $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x}$.

5.- $f(x) = (x-2)^5 (2x+1)^4$.

6.- $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$.

7.- $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.

8.- $f(x) = x^4 + \frac{4x^3}{3} - 12x^2$.

9.- $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$.

10.- $f(x) = x + 3/x$.

11.- $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$.

12.- $f(x) = \frac{2x-1}{2x+3}$.

13.- $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

14.- $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}$.

15.- $f(x) = (x)^{\frac{2}{3}} (x+1)^{\frac{1}{3}}$.

16.- $f(x) = \frac{x}{x+3}$.

17.- $f(x) = x - \ln x$

18.- $f(x) = x^3 - \cos x$.

II.- Determine los valores extremos absolutos en el intervalo indicado.

1.- $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ en $[-2, 4]$.

2.- $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$ en $[-1, 6]$.

3.- $f(x) = x^3 + x$ en $[-2, 2]$.

4.- $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x}$ en $[0, 10]$ .5.- $f(x) = (x)^{\frac{2}{3}} (x+1)^{\frac{1}{3}}$ en $[-4, 4]$.

6.- $f(x) = \frac{x}{x+3}$ en $[-1, 8]$.

7.- $f(x) = x - \ln x$ en $[1, 6]$.

8.- $f(x) = xe^x$ en $[1, 3]$.

9.- $f(x) = x \operatorname{sen} x$ en $[-\pi, 2\pi]$.

6.5. CONCAVIDADES Y LA SEGUNDA DERIVADA

Una característica cualitativa de la gráfica de una función es la forma en que se curva (particularmente el sentido), este hecho se encuentra estrechamente relacionado con el signo de la segunda derivada, en muchos casos la determinación de la forma de los valores críticos se facilita utilizando las propiedades de la segunda derivada, esto se establece en el siguiente teorema .

Teorema 7
CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA
Supóngase que $f'(x_0) = 0$.
a) Si $f''(x_0) > 0$, entonces $f(x)$ tiene un valor mínimo relativo en x_0 .
b) Si $f''(x_0) < 0$, entonces $f(x)$ tiene un valor máximo relativo en x_0 .

Demostración

a) $f''(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(x_0 + h)}{h}$, si $f''(x_0) > 0$, entonces $f'(x_0 + h) > 0$ cuando $h > 0$ y $f'(x_0 + h) < 0$ cuando $h < 0$.

En consecuencia $f(x)$ crece a la derecha de x_0 y decrece a la izquierda de x_0, esto significa que $f(x)$ tiene un valor mínimo relativo en x_0 .

La parte b) se demuestra en forma similar .

Ejemplos

1.- Localizar todos los extremos relativos de la función $f(x) = 8x^3 - 9x^2 + 1$ y analizarlos utilizando el criterio de la segunda derivada .

Solución

Derivando se obtiene $f'(x) = 24x^2 - 18x$,·los puntos críticos corresponden a las soluciones de la ecuación $x(4x - 3) = 0$, es decir $x = 0$ y $x = \dfrac{3}{4}$.

Análisis

La segunda derivada da $f''(x) = 48x - 18$, pero
$f''(0) = -18 < 0$, entonces en $x_0 = 0$, se encuentra un valor máximo relativo, este es $f(0) = 1$.

$f''\left(\dfrac{3}{4}\right) = 48\left(\dfrac{3}{4}\right) - 18 = 18 > 0$ y en $x_0 = \dfrac{3}{4}$ se encuentra un valor mínimo, este es

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 8\left(\frac{3}{4}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = -\frac{21}{16} .$$

2.- Localice los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - \left(\dfrac{21}{4}\right)x^2 + 9x - 4$.

Solución

$f'(x) = 3x^2 - \left(\frac{21}{4}\right)x + 9$, como $f'(x) = 0$, entonces $3x^2 - \left(\frac{21}{4}\right)x + 9 = 0$ y los puntos críticos son : $x = \frac{3}{2}$ y $x = 2$.

Análisis

$f''(x) = 6x - \frac{21}{2}$,

$f''(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2} < 0$, entonces en $x_0 = \frac{3}{2}$, existe un punto máximo relativo.

$f''(2) = \frac{3}{2} > 0$, entonces en $x_0 = 2$, existe un punto mínimo relativo.

3.- Determinar y analizar los valores críticos de la función $f(x) = x^{\frac{5}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}}$.

Solución

$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{10}{3}x^{\frac{-1}{3}} = \frac{5}{3}x^{\frac{1}{3}}(x+2)$.

$f''(x) = \frac{10}{9}x^{\frac{1}{3}} - \frac{10}{9}x^{\frac{4}{3}} = \frac{10}{9}x^{\frac{-4}{3}}(x-1)$.

Si $f'(x) = 0$, entonces $x = -2$ (obsérvese que $f'(0)$ y $f''(0)$ no existen).

$f''(-2) < 0$, entonces en $x = -2$, existe un valor máximo.

4.- Determine los valores críticos de $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x^2}$.

Solución

$f'(x) = 4x + \frac{2}{x^3}$ · si $4x + 2/x^3 = 0$, entonces $2x^4 + 1 = 0$.

Por lo que esta función no tiene puntos críticos.

5.- Determine los valores críticos de $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$

Solución

Al derivar se obtiene $f'(x) = \frac{16 - 4x^2}{(x^2+4)^2}$, los puntos críticos son $x = 2$ y $x = -2$.

Análisis

La segunda derivada da $f''(x) = \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$,

$f''(2) = -\frac{1}{4} < 0$, entonces $f(2) = 1$ es un valor máximo.

$f''(-2) = \frac{1}{4} > 0$ y $f(-2) = -1$ es un valor mínimo.

Una vez conocidos los máximos y mínimos relativos de una función, es posible que alguno de ellos sea absoluto, para ver si éste es el caso se utiliza la siguiente regla

a) Se determinan los máximos y mínimos relativos de f (x) .

b) Se determina el valor de la función en cada uno de los extremos del intervalo dado.

c) El mayor de los valores en a) y b) es el valor máximo absoluto, el valor más pequeño es el valor mínimo absoluto .

Ejemplo

En la función $f(x) = 8x^3 - 9x^2 - 1$, se encontró :

En. $x = 0$, $f(0) = 1$ existe un máximo relativo .

En $x = \frac{3}{4}$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{21}{6}$ existe un mínimo relativo.

Al evaluar $f(x) = 8x^3 - 9x^2 - 1$ en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ obtenemos

$$f(-1) = -18 \quad y \quad f(1) = -2 .$$

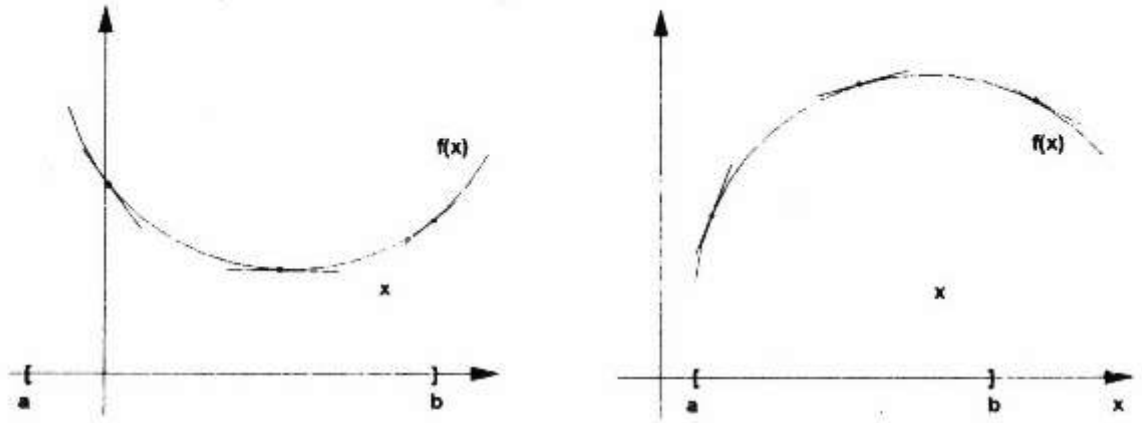
Por lo que el máximo absoluto en este intervalo se encuentra sobre $x = 0$ y el mínimo en $x = -1$.

Como se mencionó anteriormente, la segunda derivada proporciona información en la determinación de la forma de la gráfica de una función, esto se aclara a continuación.

Definición 6

CONCAVIDADES

Una curva f (x) se denomina cóncava hacia arriba, si en cada punto de un intervalo la gráfica de la función está siempre por encima de la tangente a la curva en ese punto. En el caso en que la curva f (x) esté siempre por debajo de la recta tangente se dice que la curva es cóncava hacia abajo .



a) curva f (x) cóncava hacia arriba en [a ,b]

b) curva f (x) cóncava hacia abajo en [a ,b]

Figura (6.14) Concavidades de la gráfica de una función

El teorema básico que relaciona la concavidad de una función con la segunda derivada se establece a continuación

Teorema 8
CRITERIO DE LA CONCAVIDAD
Supóngase que $f(x)$ tiene segunda derivada en $[a, b]$,
a) Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$ entonces $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $[a, b]$.
b) Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$ entonces $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $[a, b]$.

Demostración
Sea $x_0 \in [a, b]$, la ecuación de la recta tangente al punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Se debe demostrar que $f(x_1) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, (esto significa que $f(x)$ está por encima de la recta tangente).

Si $x = x_0$, la igualdad se cumple.
Si $x = x_1 \in [a, b]$, por el **TVM** en el intervalo $[x_0, x_1]$

existe $\bar{x} \in [a, b]$, tal que $f'(\bar{x}) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

1) Si $x_1 > x_0$, $f(x_1) = f(x_0) + f'(\bar{x})(x_1 - x_0)$, como $f''(x) > 0$ entonces $f'(x)$ es creciente en $[a, b]$ y $f'(\bar{x}) > f'(x_0)$, entonces $f'(\bar{x})(x_1 - x_0) > f'(x)(x_1 - x_0)$ y por (1) se obtiene $f(x_1) > f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$.

2) Si $x_1 < x_0$, entonces $x_0 > \bar{x}$ y $f'(x_0) > f'(\bar{x})$, entonces

$$f'(\bar{x})(x_1 - x_0) > f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

en consecuencia $f(x_1) > f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$.

Definición 7
PUNTO DE INFLEXIÓN
Un punto de inflexión de una función $f(x)$ es aquel punto x_0 tal que $f''(x_0) = 0$ y la gráfica es cóncava hacia arriba a un lado de x_0 y cóncava hacia abajo del otro lado de x_0.

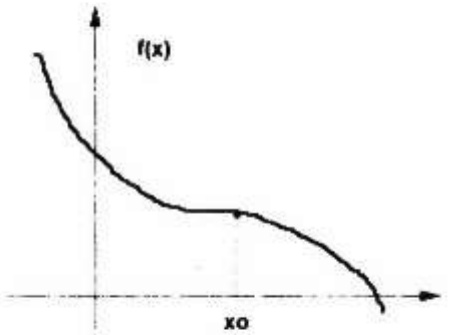


Figura (6.15) El punto de inflexión x_0.

Observaciones

a) En un punto de inflexión, la primera derivada puede no ser cero .

b) La definición es mucho más que $f''(x_0) = 0$.

c) En un punto de inflexión parecería que el signo de la pendiente va a cambiar, sin embargo esto no sucede .

Teorema 9

CRITERIO DEL PUNTO DE INFLEXIÓN

Supóngase que $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = x_0$.

Ejemplos

1.- Determinar las concavidades y los puntos de inflexión de la función

$f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$.

Solución

Derivando se obtiene :

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{-2}{3}}(x+1),$$

$$f''(x) = \frac{4}{9}x^{\frac{-5}{3}}(x-2) \quad y$$

$$f'''(x) = \frac{8}{27}x^{\frac{-8}{3}}(5-x).$$

Resolvemos la ecuación (condición de punto crítico) $(4/9)\,x^{\frac{-5}{3}}(x-2) = 0$ obtenemos $x^{\frac{-5}{3}}(x-2) = 0$, si y sólo si $x_0 = 2$.

De la condición de **concavidad hacia arriba** obtenemos la inecuación $x^{\frac{-5}{3}}(x-2) > 0$, por lo tanto :

Intervalos	P. prueba	$f''(x)$	concavidad
$(-\infty, 2)$	-3	positiva	arriba
$(2, \infty)$	3	negativa	abajo

Como $f'''(2) = \frac{8}{27}2^{\frac{-8}{3}}(5-2) \neq 0$, entonces en $x_0 = 2$ existe un punto de inflexión, el valor extremo asociado es $f(2) = 6\sqrt[3]{2}$.

2.- Determine las concavidades y puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ si $\sigma > 0$.

Solución

Derivando sucesivamente $f'(x) = -\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) f(x)$,

$$f''(x) = -\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) f'(x) - f(x)\frac{1}{\sigma} = f(x)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 - \frac{1}{\sigma} f(x) = f(x)\left\{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 - \frac{1}{\sigma}\right\},$$

obsérvese que $f(x) > 0$, entonces los posibles puntos de inflexión son las soluciones de la ecuación $\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 - \frac{1}{\sigma} = 0$, o sea $x = \mu + \sqrt{\sigma}$ y $x = \mu - \sqrt{\sigma}$.

Concavidades hacia arriba

$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 - \frac{1}{\sigma} > 0$, es decir $x = \mu + \sqrt{\sigma}$ y $x = \mu - \sqrt{\sigma}$ son los puntos de división, la solución de esta desigualdad se resume en la siguiente tabla :

Intervalos	Puntos de prueba	concavidad
$(-\infty, \mu - \sqrt{\sigma})$	$\mu - 2\sqrt{\sigma}$	hacia arriba
$(\mu - \sqrt{\sigma}, \mu + \sqrt{\sigma})$	μ	hacia abajo
$(\mu + \sqrt{\sigma}, \infty)$	$\mu + 2\sqrt{\sigma}$	hacia arriba

Como $f''(x) = 0$ en $x = \mu \pm \sqrt{\sigma}$, entonces hay cambio en el sentido de las concavidades y los puntos $x = \mu + \sqrt{\sigma}$ y $x = \mu - \sqrt{\sigma}$ son puntos de inflexión (verifíquese que $f'''(\mu \pm \sqrt{\sigma}) \neq 0$).

Los conceptos descritos en las secciones anteriores encuentran una de sus principales aplicaciones en la construcción de gráficas de funciones .

Ejemplos

1.- Grafique la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Solución

Puesto que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ y $f''(x) = \frac{-3x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$, entonces :

$f(x)$ **es creciente** si $\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} > 0$ o sea en los intervalos $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$f(x)$ **es cóncava hacia arriba** si $\frac{-3x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} > 0$, es decir en el intervalo $(-\infty, 0)$.

Los **ceros** de $f(x)$ se obtienen de la ecuación $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0$, así $x = 0$,

Las **intersecciones** con el eje y se determinan haciendo $x = 0$, entonces $y = 0$.

La siguiente tabla resume lo anterior :

Intervalo	f (x)	f '(x)	f "(x)	Gráfica
$(-\infty, 0)$		+	+	creciente cóncava hacia arriba
$x = 0$	0	1	0	Pto. de inflexión
$(0, \infty)$		+	-	creciente cóncava hacia abajo

En x = 0 existe un punto de inflexión .

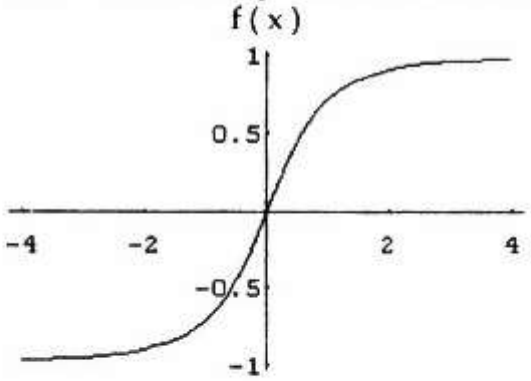


Figura (616) Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

2.- Grafique $f(x) = x(x-4)^3$.

Solución

Las derivadas requeridas son

$f'(x) = 4(x-1)(x-4)^2$,

$f''(x) = 12(x-4)(x-2)$ y

$f'''(x) = 24(x-3)$.

Puntos críticos $x = 1$ y $x = 4$, valores críticos asociados $f(1) = -27$ y $f(4) = 0$ respectivamente .

Análisis

$f''(1) = +36$, punto mínimo

$f''(4) = 0$ y $f'''(4) = 24$, punto de inflexión .

Intersecciones con el eje x : $(0, 0)$, $(4, 0)$.

Es creciente cuando $4(x-1)(x-4)^2 > 0$, es decir sobre el intervalo $(1, \infty)$.

Es cóncava hacia arriba si $(x-4)(x-2) > 0$, es decir sobre $\Re$.

La siguiente tabla resume la información obtenida :

Intervalo	f (x)	f '(x)	f "(x)	Gráfica
$(-\infty, 0)$		-	+	decreciente, cóncava hacia arriba
x = 1	-27	0	+	Mínimo relativo
(1, 2)		+	+	creciente, cóncava hacia arriba
x = 2	- 16	+	0	punto de inflexión
(2, 4)		+	-	creciente, cóncava hacia abajo
x = 4	0	0	0	punto de inflexión
$(4, \infty)$		+	+	creciente, cóncava hacia arriba

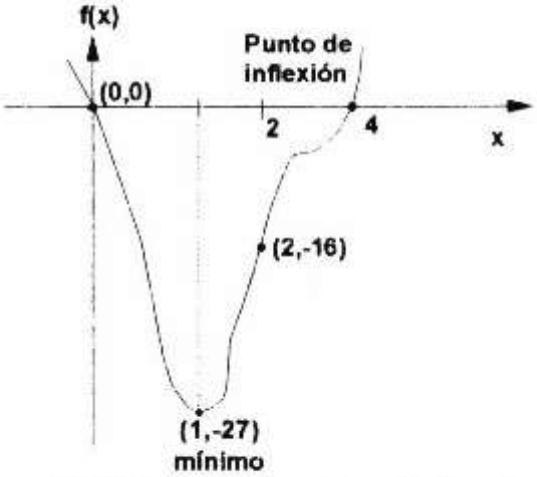


Figura (6.17) Gráfica de la función $f(x) = x(x-4)^3$.

EJERCICIOS

I.- Para cada una de las siguientes funciones determine

a) Los puntos críticos .

b) Los valores extremos .

c) Las concavidades .

d) Utilizando el criterio de la segunda derivada, analice los puntos críticos .

e) Los puntos de inflexión .

f) La gráfica .

1.- $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$.

2.- $f(x) = \dfrac{x-2}{x(x+3)}$.

3.- $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$.

4.- $f(x) = \dfrac{2}{(x-2)^2}$.

5.- $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

6.- $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4}$.

7.- $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

8.- $f(x) = x^3 + 10x^2 + 25x - 50$.

9.- $f(x) = 16x^2 - 4x^4$.

10.- $f(x) = x^6 - 3x^4$.

11.- $f(x) = (x^2 - 2)^2$.

12.- $f(x) = \sqrt[5]{x-1}$.

13.- $f(x) = x^2 - 8/x^2$.

14.- $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)$.

15.- $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

16.- $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$

17.- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,(3x + 10)$.

II.-Determine los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en el intervalo indicado.

1.- $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ sobre $[-2, 2]$.

2.- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ sobre $[-1, 1]$.

3.- $f(x) = \dfrac{x^2+x+7}{\sqrt{2x+1}}$ sobre $[½, \infty]$.

4.- $f(x) = x^2 + x^{\frac{1}{2}}$, $[2, 3]$.

5.- $f(x) = x^2 + 4x + 2$, a) sobre $\Re$, b) sobre $[-4, 0)$.

6.- $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$, a) sobre $\Re$, b) sobre $[-1, 1]$.

7.- $f(x) = x + 2/x$, a) sobre $(0, 2)$, b) sobre $[1, 3]$.

8.- $f(x) = x - 2\cos x$, a) sobre $[-\pi, \pi]$, b) sobre $[-\pi/2, \pi/2]$.

9.- $f(x) = |x^3 - 12x|$, a) sobre $[-4, 4]$, b) sobre $(-3, 3)$.

10.- $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, a) sobre $[-1, 1]$, b) sobre $(0, 1)$.

11.- $f(x) = |x|$, a) sobre $[-3, 2]$, b) sobre $[2, 3]$.

12.- $f(x) = x + \ln x$ sobre $[1, e)$.

13.- $f(x) = e^x - x$, sobre $[-1, 1]$.

14.- $f(x) = e^{-x^4}$ sobre $\Re$.

15.- $f(x) = 5e^{-5x}$ sobre $\Re$.

III.-Calcular a, b y c para que $f(x) = ax^2 + bx + c$, pase por los puntos $(0, 1)$, $(3, 0)$ y tenga un máximo en $x = 1$.

IV.- Bosqueje las gráficas de las funciones

1.- $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

2.- $f(x) = 4x^2 - x^4$.

3.- $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1 - x)$.

4.- $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

5.- $f(x) = 8x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}}$.

6.- $f(x) = 3x + 2$.

7.- $f(x) = 3 - 2x - x^2$.

8.- $f(x) = 1/x^2$.

9.- $f(x) = \dfrac{2+x}{2-x}$.

10.- $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

11.- $f(x) = e^{-2x}$.

12.- $f(x) = x\,e^{-x}$.

13.- $f(x) = x^2 e^{-x}$.

14.- $f(x) = \ln(1 + x)$.

15.- $f(x) = x \ln x$.

16.- $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$.

17.- $f(x) = e^{-x} \cos x$.

6 . 6 . PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

El hecho de que en un punto crítico la derivada de una función se anule, es clave en la solución de una gran gama de problemas de optimización, la solución de los siguientes problemas conducen a plantear diferentes tipos de funciones cuyo análisis requiere del uso de los conceptos introducidos en las secciones anteriores.

Ejemplos

1.- PROBLEMA ALGEBRAICO

Determine dos números naturales cuya suma sea 100 y su producto sea máximo.

Solución

Denotemos por x, y los números buscados, sea P el producto de estos números.

Se desea maximizar la función

$$P(x, y) = xy$$

bajo la condición de ligadura $x + y = 100$, entonces $y = 100 - x$, por lo tanto $P(x, y)$ se puede escribir en términos de la variable x.

Así

$P(x) = x(100 - x) = 100x - x^2$ es la función que debemos maximizar.

Claramente $P'(x) = 100 - 2x$, de la condición de puntos críticos $100 - 2x = 0$, se obtiene que $x = 50$ y $P(50) = 2500$

También debemos analizar los puntos extremos $x = 0$ y $x = 100$,

así $P(0) = 0$ y

$P(100) = 0$.

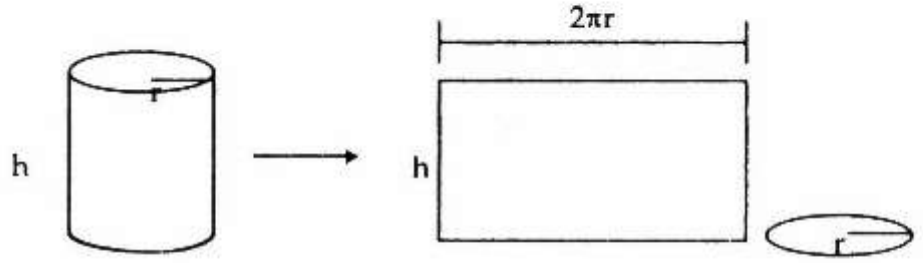
Por lo tanto el valor máximo de $P(x)$ es 2500 cuando $x = 50$, entonces los números buscados son $x = 50$, $y = 50$.

2.- PROBLEMA GEOMÉTRICO

Un fabricante produce vasos cilíndricos con una capacidad de a 16 cm^3. Si en su construcción utiliza una cantidad mínima de material, ¿de que dimensiones los fabrica?

Solución

Si deshacemos uno de estos vasos, observamos



El área del material utilizado es $A_c(r, h) = 2\pi rh + \pi r^2$, el volumen que contiene uno de estos vasos es $V = \pi r^2 h = 16\ cm^3$ (condición de ligadura).

Si de la ecuación del volumen despejamos h y sustituimos su valor en la ecuación del área, obtenemos la función que sólo depende de r :

$A_c(r) = \pi r^2 + 32/r$,

entonces $A'_c(r) = 2\pi r - 32/r^2 = 0$, por lo que el único punto crítico es

$r = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}}$, si lo sustituimos en la ecuación $\pi r^2 h = 16$, obtenemos $h = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}}$.

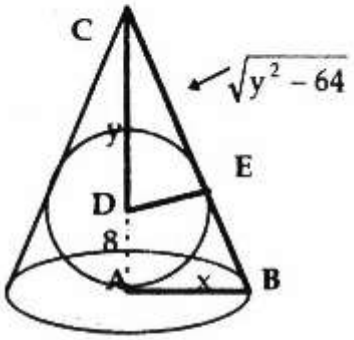
El lector debe verificar que en este valor de r, la función $A_c(r)$ alcanza un valor mínimo .

3.- PROBLEMA GEOMÉTRICO

Determinar las dimensiones del cono circular recto de volumen mínimo que circunscribe a una esfera de radio de 8 cm .

Solución

Consideremos la siguiente figura :



Si x es el radio de la base del cono y $y + 8$ es su altura, entonces los triángulos rectángulos **ABC** y **DEC** mostrados en figura son semejantes y relación de proporcionalidad entre sus lados es $\frac{AB}{CD} = \frac{DE}{CD}$, con $AB = x$, $CA = y + 8$, $DE = 8$ y

$CE = \sqrt{y^2 - 64}$ al sustituir obtenemos $\frac{x}{8} = \frac{y+8}{\sqrt{y^2-64}}$, entonces $x^2 = \frac{64(y+8)}{y-8}$

(condición de ligadura) .

Pero $V_c = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{64\pi(y+8)^2}{3(y-8)}$, derivando obtenemos

$$V'(y) = \frac{64\pi(y+8)(y-2)}{3(y-8)^2} = 0$$

Los puntos críticos son : $y = -8$ y $y = 24$ este último es el único valor de interés.

Como $h = y + 8$, entonces $h = 32$ cm .

Puesto que $x = \frac{y+8}{\sqrt{y^2-64}}$, entonces $x = \sqrt{128}$ cm .

4.- LOS TANQUES DE GAS

Gasmex desea adquirir tanques de volumen V para sus pipas, estos tanques deben ser cilindros circulares rectos con una semiesfera en cada uno de sus extremos. Si el precio por metro cuadrado del material de los extremos es el doble que el de los lados . Encontrar las dimensiones más económicas.

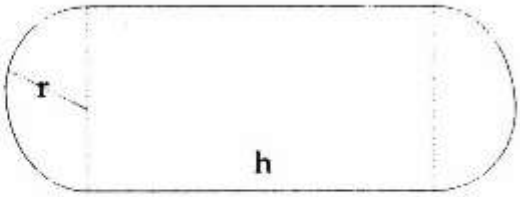
Solución

Definamos las siguientes variables

V volumen del tanque

A área del tanque
a precio por unidad de área de los lados
c costo del tanque

De acuerdo a la siguiente figura tenemos $V = V_{cilindro} + V_{esfera}$



$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$, entonces $h = \frac{3V - 4\pi r^3}{3\pi r^2}$ (condición de ligadura) .

La **función** costo es :

c = costo de los extremos + costo de los lados.

$c = 2a\,(4\pi r^2) + a\,(2\pi rh)$ y depende de las variables r, h pero si sustituimos la condición de ligadura en ella y simplificamos obtenemos

$$c(r) = (16/3)\,a\pi r^2 + 2a\frac{V}{r}$$

si derivamos e igualamos a cero obtenemos

$$c'(r) = \frac{32}{3}a\pi r - 2a\frac{V}{r^2} = 0, \text{ entonces}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3v}{16\pi}}.$$

Si se sustituye este valor en la ecuación $h = \frac{3V - 4\pi r^3}{3\pi r^2}$ se encuentra el valor de la altura .

5.–Un ranchero tiene 200 mts. de alambre con púas con lo que quiere construir dos corrales adyacentes, rectangulares y de las mismas dimensiones, tal como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuáles deben ser los valores del ancho y de largo para que el área de los corrales sea máxima?

Solución

Si x, y son el ancho y el largo de uno de los corrales respectivamente, entonces el perímetro de todos los corrales es :

$3y + 2x = 200$, es decir $y = \frac{200 - 2x}{3}$ (condición de ligadura) .

El área total de los corrales es $A = 2x \cdot y = \frac{400x - 4x^2}{3}$ con $0 < x < \frac{200}{3}$.

tenemos que maximizar la función $A(x) = \frac{400x - 4x^2}{3}$ sobre $[0, \frac{200}{3}]$.

entonces $A'(x) = \dfrac{400-8x^2}{3} = 0$ por lo que $x = 25$.

Los puntos críticos son: $x = 0, 25$ y $\dfrac{200}{3}$, el lector no debe tener problemas para verificar que en $x = 25$ el área es máxima, si $x = 25$, entonces $y = \dfrac{200-2(25)}{3} = 50$.

EJERCICIOS

1.- Determine dos números tales que su suma sea uno y la suma de sus cuadrados sea máxima.

2.- Si la diferencia entre dos números es 20, ¿cuáles deben ser éstos para que su producto sea mínimo?.

3.- El producto de dos números es 16, ¿cuáles deben ser éstos números para que el cuadrado de uno de ellos más el cubo del otro sea mínimo?.

4.- ¿ Qué número positivo x minimiza la suma $x + \dfrac{1}{x}$?

5.- ¿ Cuáles deben ser las dimensiones del cono circular recto de mayor volumen que se puede transcribir en una esfera de radio 10 ?.

6.- ¿ Qué dimensiones debe tener el cono circular recto que se puede circunscribir en una esfera de radio de 10 cm.?

7.- Hallar las dimensiones de la tienda cónica más económica.

8.- ¿Qué dimensiones debe tener el cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera?

9.- ¿Cuáles son los puntos de la gráfica $x = y^2$ que están más cercanos al punto (1, 0).

10.- Un rectángulo está limitado por el eje x, y por el semicírculo $y = \sqrt{100-x^2}$ ¿qué longitud y anchura debe tener el rectángulo para que su área sea máxima?.

11.- Un rectángulo está limitado por los ejes coordenados y por la recta $x + 2y - 6 = 0$; ¿qué dimensiones debe tener para que su área sea máxima?

12.- Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima que pueden inscribirse en una circunferencia.

13.- Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima (el perímetro del rectángulo es constante).

14.- Un campesino quiere construir un corral rectangular y dividirlo en cuatro partes iguales por medio de tres mallas paralelas a uno de los lados, ¿ cuáles deben ser las dimensiones del corral de área máxima que puede encerrar ?.

15.- Una escalera de longitud de 20 m. se apoya en una pared de altura de 15 m, ¿ cuál es la máxima distancia entre la base de la escalera y la base de la pared ?.

16.- Un ducto para aceite hecho de acero debe tener una sección transversal trapezoidal, ¿cuál debe ser la forma del trapecio para que el flujo sea máximo?.

17.- Se quiere construir una caja rectangular de base cuadrada con capacidad de 500 cm^3 . Si el material de las caras laterales cuesta el doble que el de la tapa y la base:
a) Si la base tiene lado x y la altura es y, ¿ cuánto cuesta la caja ?
b) ¿ Cuáles son las dimensiones de la caja más económica ?

18.- Una ventana tiene forma de rectángulo, coronado por una circunferencia su perímetro es de 24 cm. ¿ Qué dimensiones debe tener para que entre la mayor cantidad posible de luz?.

19.- Si una pieza de alambre de longitud de 200 cm. se divide para formar un cuadrado y una circunferencia, ¿cuánto deben medir los segmentos generados para que la suma de las áreas de las figuras sea mínima?.

20.- Un barco A está a 30 Km. del punto O, a la media noche se dirige al oeste, a 15 Kms./h. El barco B está a 20 Km. al norte de O a media noche y se dirige al sur a 15 Kms./h. ¿cuándo están más cerca los barcos, a qué distancia?.

21.- Se va a construir una caja sin tapa a partir de una hoja de cartón de longitud L y ancho A, cortando cuadrados del lado x de cada esquina y doblando los lados hacia arriba, ¿cuál debe ser el valor x para que la caja tenga volumen máximo?

22.- Se va a construir una caja con base cuadrada de lado x y altura h que tiene volumen V, ¿cuáles deben ser sus dimensiones para que el área de la superficie sea mínima si esta debe ser
a) Cerrada.
b) Sin tapa pero con fondo?.

23.- Un pasillo de 3 m. de ancho intersecta a un comedor de 5 m. de ancho en ángulo recto, ¿ cuál debe ser la longitud L máxima del tramo recto de madera que se puede pasar horizontalmente del pasillo al comedor ?.

24.- Una página contiene 60 cm^2 de texto, los márgenes superior e inferior son de 3 cm, y los laterales de 2 cm, ¿ cuáles deben ser las dimensiones de la hoja que ahorra más papel?.

25.- Un hombre está en un bote a 2 Km. del punto más próximo a la costa. Tiene que ir a un punto Q y 3 Km. costa abajo y 1 Km. para adentro. Si puede navegar a 2 Km /h y caminar a 4 Km./h, ¿hacia que punto de la costa debe remar para alcanzar Q en el menor tiempo posible?.

26.- Se quiere construir un vaso de papel con forma de cono circular recto quitando un sector circular a una hoja de papel con forma de círculo de radio R y uniendo las dos orillas rectas del papel restante, ¿cuál es el vaso de mayor volumen que se puede construir?.
28.- Una sección petrolera tiene 8 pozos que producen un total de 1600 barriles de petróleo diario, por cada nuevo pozo perforado, la producción media disminuye 10 barriles diarios, ¿cuál debe ser el número de pozos adicionales que se deben perforar para que la producción de petróleo sea máxima en un día cualquiera?

6.7. LA REGLA DE L'HÔPITAL

En la determinación de los límites de diversas funciones se utiliza la derivada, inclusive la derivada es una poderosa herramienta en la evaluación de límites que sería imposible determinar por medio de las técnicas descritas en los capítulos anteriores. En esta sección se establece la regla de **L' H ô pital** y muestra su utilidad en el cálculo de límites.
Si se quiere evaluar un límite de la forma

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde $f(x_0) = g(x_0) = 0$, las funciones $f(x)$, $g(x)$ tienen derivadas continuas alrededor del punto x_0 y $g'(x_0) \neq 0$.

Si $f(x)$, $g(x) \to 0$ cuando $x \to x_0$ el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ puede aproximarse a un número, puede aproximarse a ∞ o puede **no existir el límite**, en caso de que al sustituir x por x_0 en el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ obtengamos una de las formas **indeterminadas**.

Definición

FORMA INDETERMINADA

Las expresiones

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^\infty, 0^\infty \text{ y } 1^\infty$$

se denominan formas indeterminadas.

A continuación se establece la regla de **L'H ô pital**.

Según el **TVM**, para toda x al rededor de x_0 existen números z, z' entre x_0 y x tales que satisfacen

$$F(x) = f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(z) \quad \text{y}$$
$$G(x) = g(x) - g(x_0) = (x - x_0) g'(z')$$

entonces $\dfrac{F(x)}{G(x)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi')}$, al tomar límites (las funciones son continuas) obtenemos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{o}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El resultado se generaliza en el siguiente teorema

Teorema

REGLA DE L'HÔPITAL

Supongamos que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ y que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe,

entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Ejemplos

Utilizando la regla de L'Hôpital, evalúe los siguientes límites

1.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\operatorname{sen} x}$ **2.-** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x\cos x}$

3.- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\sec x}{x^3}$ **4.-** Si $a>0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^a}$

5.- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2-3\cos x}$ **6.-** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}$

7.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}$ **8.-** $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln x$

9.- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

10.- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = u(x)^{v(x)}$, con $u(x)>0$, $u(x)\to 0$, $v(x)\to 0$, cuando $x\to x_0$ y con las hipótesis adecuadas de continuidad .

11.- $\lim\limits_{x\to\infty} (1+a/x)^x$ **12.-** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x}$

Soluciones

1.- Las indeterminaciones de la forma $\dfrac{0}{0}$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0 .$$

2.- La indeterminación es de la forma $\dfrac{0}{0}$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{-\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \frac{2}{1} = 2 .$$

3.- La indeterminación es de la forma $\dfrac{0}{0}$, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sec x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sec x\tan x}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\left(\sec^3 x + \tan^2 x\sec x\right)}{6x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1+\operatorname{sen}^2 x}{-\cos^3 x}}{6x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{-6x\cos^3 x} = \infty .$$

Note que se aplicó dos veces la regla de **L'Hôpital**

4.- Como a > 0, la indeterminación es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ por lo que se puede aplicar la regla de **L'Hôpital**.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{ax^a} = 0.$$

5.- Se presenta una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2-3\cos x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2x+3\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2+3\cos x}, \text{ no existe}.$$

Obsérvese que se aplicó dos veces la regla de **L'Hôpital**

6.- La indeterminación es de la forma $\infty - \infty$ pero

$\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x} = \lim_{x\to1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}$ y se transformado en una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, entonces

$\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x} = \lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{x-1+x\ln x}$ aplicando nuevamente la regla de **L'Hôpital**

$$\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x} = \lim_{x\to1}\frac{1+\ln x}{1+1+\ln x} = \frac{1}{2}.$$

7.- La indeterminación es de la forma $\infty - \infty$ pero

$\lim_{x\to0}\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}$ se ha transformado en una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, entonces

$\lim_{x\to0}\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x+x\cos x}$, aún tiene la forma $\frac{0}{0}$, utilizando nuevamente la regla de **L'Hôpital** obtenemos

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x-x\operatorname{sen} x} = 0.$$

8.- Tenemos una indeterminación de la forma $0\cdot\infty$ pero

$\lim_{x\to0^+}(2x\ln x) = 2\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ y ahora es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, entonces

$$\lim_{x\to 0^+} (2x \ln x) = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 .$$

9.- $\lim_{x\to 0^+} x^x$ en este caso conviene escribir $f(x) = x^x$, pero como $x^x = e^{x \ln x}$,

entonces $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x \ln x}$

esto es válido porque la función e^x es continua y monótona, pero $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$ (esto se prueba utilizando la regla de **L'Hôpital**), finalmente $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.

10.- Como $f(x) = u(x)^{v(x)}$, entonces $\ln f(x) = v(x) \ln u(x)$ que es una indeterminación de la forma $0 \cdot \infty$, en caso de que sea aplicable la regla de **L'Hôpital**,
$\lim_{x\to x_0} v(x) \ln u(x) = L$, entonces

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)} = e^0 = 1 .$$

11.- $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^x$, ahora la indeterminación es de la forma 1^∞, si $f(x) = (1 + \frac{a}{x})^x$

al aplicar la función ln x, obtenemos $\ln (1 + \frac{a}{x})^x = x \ln (1 + \frac{a}{x}) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$, según la

regla de **L'Hôpital**, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}}, = \lim_{x\to\infty} \dfrac{a}{1+\frac{a}{x}} = \lim_{x\to\infty} a = a$.

Utilizando la función exponencial obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a .$$

12.- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\cos x}$, en este caso la indeterminación es de la forma ∞^0, si aplicamos la función ln x,. se obtiene

$\ln (\tan x)^{\cos x} = \cos x \ln (\tan x)$, si $x \to \frac{\pi}{2}$, la indeterminación es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, entonces

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \tan x}{\sec x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{\sec x \cdot \tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 0,$$ por lo tanto, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x^{\cos x} = e^0 = 1$.

EJERCICIOS

I.- Evaluar los siguientes límites

1.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}+1}{e^{x}-1}$

2. -. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x}$

3.- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{(x+6)^{\frac{1}{3}}-2}$

4.- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

5.- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-2x^2-2x-3}{x^2-9}$

6.- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^p-3^p}{x^q-3^q}$

7.- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

8.- $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3-x^2+3x+1}{3x^3+2x^2-x-1}$

9.- $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4-2x^2-1}{2x^3-3x^2+3}$

10.- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}$

11.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

12.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

13.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-1}{\operatorname{sen} x}$

14.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-\cos ax}{e^{ax}-\cos xax}$

15.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x-\tan x}$

16.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-2x-1}{1-\cos x}$

17.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{e^{x}}$

18.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{1-\cos x}$

19.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x^{h}}, h\rangle 0$

20.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{3x}$

21.- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{2x}}{\frac{1}{x}}$

22.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{x}-b^{x}}{c^{x}-d^{x}}$

23.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\operatorname{sen}^6 2x}$

24.- $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^{n}}{e^{x}}$

25.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

26.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{sen} 2x}{\ln \operatorname{sen} x}$

27.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\ln \operatorname{sen} x}$

28.- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x}{\ln \cos x}$

29.- $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\operatorname{angtang} x}{x}$

30.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{x}-2^{x}}{\sqrt{x}}$

31.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\operatorname{sen} 2x)(\operatorname{sen} 3x)}{x \operatorname{sen} nx}$

32.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}(x^2)}{x^4}$

33.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan 2x}{\operatorname{arcsen} x}$

34.- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$

35.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{x}-b^{x}}{x}, a\rangle b\rangle 0$

36.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

37.- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot 2x-\dfrac{1}{x^2}\right)$

38.- $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

39.- $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$

40.- $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

41.- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan x$

42.- $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]$

43- $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x\ln x}$

44.- $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$

45.- $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

46.- $\lim\limits_{x\to 0} x^{5x}$

47.- $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^2}$

48.- $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x}$

49.- $\lim\limits_{x\to 3^+} x(\ln x)^4$

50.- $\lim\limits_{x\to \infty} x\,\mathrm{sen}\,\dfrac{a}{x}$

51.- $\lim\limits_{x\to 0} x^{\mathrm{sen}\,x}$

52.- $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2 e^{x^{\frac{1}{2}}}\right]$

53.- $\lim\limits_{x\to 0}\left(2+\dfrac{k}{x}\right)^x$

54.- $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$

55.- $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

56.- $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$

57.- $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

58.- $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+x^3\right)^{x^{-2}}$

59.- $\lim\limits_{x\to \infty}\left(2-x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

60.- $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^{-p}\right)^{x^q}$ $p,q>0$

61.- $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\tan x)^{2x-\pi}$

62.- $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{ax}e^{be^x}$

II.- Calcular los valores indicados para que el límite dado sea finito.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,cv-\mathrm{sen}\,x-x}{x^3},\ c=?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos cx-d}{2x}=-1;\ \ c,d=?$$

APÉNDICE 1

Lógica Elemental

A.1. RAZONAMIENTOS Y PROPOSICIONES

De forma bastante general es posible considerar a la **Lógica Matemática** como una parte del conocimiento que tiene como objeto (entre otros) investigar, desarrollar y establecer los métodos adecuados para poder reconocer el **razonamiento** (o argumento) correcto del incorrecto .
Entenderemos por **razonamiento** al procedimiento a partir del cual se establece una **conclusión** fundamentada en un número determinado de frases aceptadas previamente como verdaderas (estas frases se denominan premisas o hipótesis) .
Podemos clasificar a los **razonamientos** en dos categorías :

A.1.1. Razonamientos inductivos

Este tipo de razonamientos se caracterizan por generalizar un hecho particular, es decir a partir de la repetición de un fenómeno se puede concluir que esa observación es válida para toda una gran población de objetos o personas que de alguna forma se encuentran relacionados con ese fenómeno.

Ejemplos

1.- Si una persona llega tarde a una cita durante tres días consecutivos, se puede concluir que siempre llegará tarde.
2.- Si en todas las elecciones pasadas ha ganado cierto partido político es posible concluir que ganará ese mismo partido en las próximas elecciones.
3.- Si solamente oímos ladridos al pasar por cierta casa, podemos concluir que solamente la habitan perros.

NOTA

Como puede observarse en los ejemplos anteriores, no necesariamente la conclusión tiene que ser correcta, sin embargo por la forma en que se obtuvo, el razonamiento es inductivo .

A.1.2. Razonamientos deductivos

Se caracterizan por particularizar un conjunto de diferentes observaciones. En lo que resta del esta sección sólo serán considerados razonamientos deductivos y los ejemplos correspondientes serán proporcionados en las páginas siguientes.

A . 2 . PROPOSICIONES

Las frases involucradas en todos los razonamientos se denominan proposiciones lógicas y se definen de manera formal en las siguientes líneas.

Definición 1

PROPOSICIÓN LÓGICA

Una proposición lógica será cualquier expresión que podamos calificar como falsa (**F**) o como verdadera (**V**).

NOTA

Existen proposiciones que no se pueden calificar como falsas o como verdaderas, de estas, sólo son de importancia en Matemáticas aquellas cuyos sujeto no están definidos y serán tratadas en el capítulo de conjuntos .

Ejemplos

$0 + 2 + 2 = 4$.
Los perros mexicanos tienen cinco patas .
Estamos en la Ciudad de México .
Los tigres son felinos .

A . 2 . 1 . Términos de enlace

Dos o más **proposiciones lógicas** pueden combinarse para dar origen a una nueva **proposición lógica**, esta nueva proposición se conoce como proposición compuesta, las palabras o términos que se utilizan para unir a estas proposiciones se denominan **términos de enlace** o **conectivos lógicos**. A continuación se proporciona una lista de los conectivos lógicos fundamentales

nombre	símbolo	lectura
negación	$\sim, \neg$	no
disyunción	$\vee$	ó
conjunción	$\wedge$	y
condicional	$\Rightarrow$	si.....entonces.....
bicondicional	$\Leftrightarrow$	.....si y sólo si.....

NOTAS

1.- Aún cuando la negación no enlaza a dos proposiciones, se considera conectivo lógico .

2.- Los conectivos lógicos fundamentales son los tres primeros de la tabla, los demás se pueden formar a partir de estos como se verá más adelante.

A . 2 . 2 . Jerarquía de los conectivos lógicos

La interpretación y construcción correcta de una proposición compuesta se facilita si se tienen en cuenta las siguientes reglas de operación :

1º **Jerarquía de los conectivos lógicos** (que también denominaremos operaciones lógicas) involucrados de acuerdo a las reglas :

Conectivo lógico	Jerarquía
Bicondicional	Alta
Condicional	Media
Conjunción / Disyunción	Baja
Negación	Mínima

Tabla (A.1) Jerarquía de las operaciones lógicas.

2 ° Cuanto mayor es el número de símbolos de agrupamiento (estos son los paréntesis, los corchetes y las llaves) que contienen a un **conectivo lógico**, menor será su jerarquía y en consecuencia se le asignará un número menor .
3 ° La proposición adquirirá el nombre del **conectivo lógico** de mayor jerarquía.

Los siguientes ejemplos ayudarán a comprender las reglas anteriores :

Ejemplos
Establezca la jerarquía de los conectivos en las siguientes proposiciones

1.- $\neg [(A \Leftrightarrow B) \vee \sim D]$
2.- $\neg \{ (A \Rightarrow \sim B) \vee (P \vee Q) \}$
3.- $A \Rightarrow B \Leftrightarrow D \vee (A \wedge B)$
4.- $[(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R] \wedge S$
5.- $[\sim P \Rightarrow \sim Q] \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
6.- $[(A \vee B) \Rightarrow (B \vee C)] \vee \sim A$

Solución

1.- $\overset{4}{\neg} [(A \overset{1}{\Leftrightarrow} B) \overset{3}{\vee} \overset{2}{\neg} D]$ negación

2.- $\overset{5}{\neg} \{ (A \overset{3}{\Rightarrow} \overset{1}{\neg} B) \overset{4}{\vee} (P \overset{2}{\vee} Q) \}$ negación

3.- $A \overset{3}{\Rightarrow} B \overset{4}{\Leftrightarrow} D \overset{2}{\vee} (A \overset{1}{\wedge} B)$ bicondicional

4.- $[(P \overset{1}{\Rightarrow} Q) \overset{2}{\Rightarrow} R] \overset{3}{\wedge} S$ conjunción

5.- $[\overset{1}{\neg} P \overset{2}{\Rightarrow} \overset{1}{\neg} Q] \overset{3}{\Rightarrow} (Q \overset{2}{\Rightarrow} P)$ condicional

6.- $[(A \overset{2}{\Leftrightarrow} C \overset{1}{\vee} B) \overset{3}{\Rightarrow} (B \overset{1}{\vee} C)] \overset{5}{\vee} \overset{4}{\neg} A$ disyunción

A . 2 . 3 . Tablas de verdad

Cada uno de los conectivos lógicos tiene asociada una regla de operación respecto a la certeza de las dos proposiciones que enlaza .

Definiciones 2
La negación de la afirmación P es la aseveración no P, que se entiende como verdadera si P es falsa y como falsa cuando P es verdadera .

La **conjunción** de dos proposiciones P y Q es al proposición ambas P y Q, que se toma como verdadera cuando las dos proposiciones P y Q son verdaderas y como falsa si al menos una de ellas es falsa .

La **disyunción** de las proposiciones P y Q es la proposición o P o Q y se considera verdadera cuando al menos una de las proposiciones es verdadera, y como falsa cuando ambas proposiciones son falsas .

Si P y Q son proposiciones, la afirmación Si P entonces Q, se denomina **condicional**, P recibe el nombre de antecedente o (hipótesis) y Q se nombra consecuente o (tesis), sus valores de verdad aparecen en la **tabla A.2** .

Si P y Q son proposiciones, la afirmación P si y sólo si Q, se denomina **bicondicional** sus valores de verdad aparecen en la **tabla A.2** .

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Tabla (A.2) valores de verdad de los conectivos lógicos .

Es posible clasificar a las proposiciones lógicas (también conocidas como formas proposicionales) de acuerdo a su veracidad .

Definiciones 3
Una **tautología** es una forma proposicional que siempre es verdadera, la representaremos por **T** .

Una **contradicción** es una forma proposicional que siempre es falsa, se representa por ς .

Una **contingencia** es una forma proposicional que **no** es tautología y **no** es contradicción.

Los siguientes ejemplos muestran como operan las reglas anteriores :
Ejemplos

Construya la tabla de verdad de cada una de las siguientes proposiciones y decida si son tautologías, contradicciones o contingencias.

1.- $(A \vee \sim B) \Rightarrow B$
2.- $(A \wedge \sim B) \wedge A \Rightarrow B$
3.- $[(A \Rightarrow B) \wedge \sim B] \Rightarrow \sim A$
4.- $\sim\{[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow D)] \Rightarrow [A \Rightarrow D]\}$
5.- $P \vee \sim P$

Solución

1.- Primero se establece la jerarquía de los términos de enlace :

$(A \overset{2}{\vee} \overset{1}{\neg} B) \overset{3}{\Rightarrow} B$, luego combinamos sus valores de verdad de acuerdo a la **tabla A.1**, entonces

A	B	$(A \overset{2}{\vee} \overset{1}{\neg} B) \overset{3}{\Rightarrow} B$
V	V	V F V
V	F	V V F
F	V	F F V
F	F	V V F

↑-- **Solución :** Tabla de contingencia .

2.- $(A \wedge \sim B) \wedge A \Rightarrow B$.

Establecemos la jerarquía de los conectivos lógicos: $(A \overset{2}{\wedge} \overset{1}{\neg} B) \overset{3}{\wedge} A \overset{4}{\Rightarrow} B$, luego combinamos los valores de verdad de acuerdo a la **tabla A.1**.

A	B	$(A \overset{2}{\wedge} \overset{1}{\neg} B) \overset{3}{\wedge} A \overset{4}{\Rightarrow} B$
V	V	F F F V
V	F	V V V F
F	V	F F F V
F	F	F V F V

↑-- **Solución :** Tabla de contingencia .

3.- $[(A \Rightarrow B) \wedge \sim B] \Rightarrow \sim A$.

Siguiendo el proceso de los ejemplos anteriores obtenemos :

A	B	$[(A \overset{1}{\Rightarrow} B) \overset{2}{\wedge} \overset{3}{\neg} B] \overset{5}{\Rightarrow} \overset{4}{\neg} A$
V	V	V F F V F
V	F	F F V V F
F	V	V F F V V
F	F	V V V V V

↑-- **Solución** : Tautología .

4.- $\sim \{ [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow D)] \Rightarrow [A \Rightarrow D] \}$

En éste caso necesitamos ocho renglones por ser tres las proposiciones diferentes involucradas, $2^3 = 8$ renglones), es conveniente tener en cuenta que el número de renglones

está dado por la relación, # renglones = 2^n donde n es el número de proposiciones diferentes.

A	B	D	$\neg\{[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow D)] \Rightarrow [A \Rightarrow D]\}$					
			4	1	2	1	3	1
V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

↑-- **Solución :** Contradicción .

5.- $P \vee \sim P$

Ahora sólo necesitamos dos renglones ($2^1 = 2$ renglones) .

P	P	$\vee$	$\neg$ P
		2	1
V		V	F
F		V	V

↑

Solución : Tautología .

A . 2 . 4 . Implicaciones y equivalencias lógicas

De particular interés son las proposiciones lógicas que presentan las características que se presentan a continuación

Definición 4

IMPLICACIÓN Y EQUIVALENCIA LÓGICA

Una **proposición condicional** que es una tautología se denomina **implicación lógica.**

Una **proposición bicondicional** que es una tautología se denomina **equivalencia lógica,** y las proposiciones que la componen se conocen como proposiciones logcamente equivalentes .

Aclaremos lo anterior con los siguientes ejemplos :

Ejemplos

Determinar cuales de las siguientes formas proposicionales son implicaciones lógicas y cuales son equivalencias lógicas .

1.- $[(A \wedge B) \vee \sim B] \Rightarrow A$

2.- $\sim(A \vee B) \Leftrightarrow (\sim A \wedge \sim B)$

3.- $[(A \vee \sim B) \wedge (\sim A \vee B)] \Rightarrow B$

4.- $A \wedge B \Rightarrow B$

Soluciones

1.- Primero se tiene que establecer la jerarquía de los conectivos lógicos

$[(A \overset{1}{\wedge} B) \overset{3}{\vee} \overset{2}{\neg} B] \overset{4}{\Rightarrow} A$ y tenemos una **proposición condicional** .

A continuación construimos la tabla de verdad correspondiente

A	B	$[(A \overset{1}{\wedge} B)$	$\overset{3}{\vee}$	$\overset{2}{\neg} B]$	$\overset{4}{\Rightarrow} A$
V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F

↑ - **Solución** : Contingencia

Aunque la proposición es una condicional, no corresponde a una tautología por lo que no tenemos una implicación lógica.

2.- $\sim (A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

Al establecer la jerarquía de los conectivos lógicos se obtiene una proposición bicondicional.

A	B	$\overset{3}{\neg}$	$(A \overset{2}{\vee} B)$	$\overset{4}{\Leftrightarrow}$	$(\overset{1}{\neg} A$	$\overset{2}{\wedge}$	$\overset{1}{\neg} B)$
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V

↑- **Solución** : Tautología

En consecuencia, tenemos una equivalencia lógica, las proposiciones : $\neg (A \vee B)$ y $(\neg A \wedge \neg B)$ son lógicamente equivalentes, esto se representa por medio del símbolo $\equiv$ como

$$\neg (A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$$

3.- $[(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)] \Rightarrow B$

Al jerarquizar los conectivos lógicos obtenemos una proposición condicional.

$[(A \overset{2}{\vee} \overset{1}{\neg} B) \overset{3}{\wedge} (\overset{1}{\neg} A \overset{2}{\vee} B)] \overset{4}{\Rightarrow} B$, la tabla de verdad correspondiente es

A	B	$[(A$	$\overset{2}{\vee}$	$\overset{1}{\neg} B)$	$\overset{3}{\wedge}$	$(\overset{1}{\neg} A$	$\overset{2}{\vee} B)]$	$\overset{4}{\Rightarrow} B$
V	V	V	F	V	F	V		V
V	F	V	V	F	F	F		V
F	V	F	F	F	V	V		V
F	F	V	V	V	V	V		F

↑-**Solución**

tabla de contingencia .

Al no ser una tautología (aunque sea condicional), no puede ser una implicación lógica.

4.- Si construimos la tabla de verdad de $A \overset{1}{\wedge} B \overset{2}{\Rightarrow} B$ obtenemos :

A	B	$A \overset{1}{\wedge} B$	$\overset{2}{\Rightarrow} B$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

La proposición es una condicional y a la vez tautología, por lo tanto tenemos una implicación lógica .

A . 2 . 5 . Simplificación de proposiciones

Las operaciones lógicas satisfacen una serie de propiedades que se utilizan en la simplificación de proposiciones, así como en la elaboración de tablas de certeza, las más comunes se presentan a continuación

Proposición 1
Si A, B y D, son proposiciones lógicas, entonces las siguientes equivalencias lógicas son válidas:

nombre	expresiones		representación
1.- Idempotencia	$A \vee A \equiv A$	$A \wedge A \equiv A$	(I)
2.- Conmutatividad	$A \vee B \equiv B \vee A$	$A \wedge B \equiv B \wedge A$	(C)
3.- Asociatividad	$A \vee (B \vee D) \equiv (A \vee B) \vee D$	$A \wedge (B \wedge D) \equiv (A \wedge B) \wedge D$	(A)
4.- Distributibidad	$A \vee (B \wedge D) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee D)$	$A \wedge (B \vee D) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge D)$	(D)
5.- Ley de Morgan	$\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$	$\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	(M)
6.- Doble negación	$\neg\neg A \equiv A$		(DN)
7.- Definición 1	$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$		(D1)
8.- Definición 2	$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$		(D2)

Las tautologías y las contradicciones poseen las propiedades :

Proposición 2
Si T representa una tautología y ς una contradicción entonces se cumplen las siguientes equivalencias lógicas:

1.- $\sim T \equiv \varsigma$	5.- $A \wedge \varsigma \equiv \varsigma$
2.- $\sim \varsigma \equiv T$	6.- $A \vee T \equiv T$
3.- $A \vee \sim A \equiv T$	7.- $A \vee \varsigma \equiv A$
4.- $A \wedge \sim A \equiv \varsigma$	8.- $A \wedge T \equiv A$

A menudo estas propiedades se utilizan para simplificar proposiciones mas complejas, se sugiere al lector que demuestre estas dos proposiciones.

Ejemplos

Simplificar las siguientes proposiciones

1.- $\sim(P \wedge \sim P)$

2.- $\sim [P \wedge Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)]$

3.- $P \vee \sim (\sim P \Rightarrow Q)$

4.- $[(A \Rightarrow B) \vee \sim B] \Rightarrow \sim A$

Solución

1.-

$$\begin{aligned} \sim (P \wedge \sim P) &\equiv \sim P \vee \sim\sim P && \text{M.} \\ &\equiv \sim P \vee P && \text{DN.} \\ &\equiv P \vee \sim P && \text{C.} \\ &\equiv \mathbf{T} && \text{3.-} \end{aligned}$$

2.- $\sim [P \wedge Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)]$

$$\begin{aligned} \sim [P \wedge Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)] &\equiv \sim [\sim (P \wedge Q) \vee (\sim P \vee Q)] && \text{D1.} \\ &\equiv \sim\sim (P \wedge Q) \wedge \sim (\sim P \vee Q) && \text{M.} \\ &\equiv (P \wedge Q) \wedge \sim (\sim P \vee Q) && \text{DN} \\ &\equiv (P \wedge Q) \wedge (P \wedge \sim Q) && \text{DN,M.} \\ &\equiv (P \wedge P) \wedge (Q \wedge \sim Q) && \text{A,C.} \\ &\equiv P \wedge \varsigma && \text{14.-} \\ &\equiv \varsigma. && \text{7.-} \end{aligned}$$

3.- $P \vee \sim (\sim P \Rightarrow Q)$

$$\begin{aligned} P \vee \sim (\sim P \Rightarrow Q) &\equiv P \vee \sim (\sim\sim P \vee Q) && \text{D1.} \\ &\equiv P \vee \sim (P \vee Q) && \text{DN.} \\ &\equiv P \vee (\sim P \wedge \sim Q) && \text{M.} \\ &\equiv (P \vee \sim P) \wedge (P \vee \sim Q) && \text{D.} \\ &\equiv \mathbf{T} \wedge (P \vee \sim Q) && \text{3.-,} \\ &\equiv (\sim Q \vee P) && \text{8.-, C.} \\ &\equiv Q \Rightarrow P && \text{D1.} \end{aligned}$$

4.- $[(A \Rightarrow B) \vee \sim B] \Rightarrow \sim A$

$$\begin{aligned} [(A \Rightarrow B) \vee \sim B] \Rightarrow \sim A &\equiv [(\sim A \vee B) \vee \sim B] \Rightarrow \sim A && \text{D1.} \\ &\equiv [\sim A \vee (B \vee \sim B)] \Rightarrow \sim A && \text{A.} \\ &\equiv [\sim A \vee \mathbf{T}] \Rightarrow \sim A && \text{3.-} \\ &\equiv \mathbf{T} \Rightarrow \sim A && \text{6.-} \\ &\equiv \sim \mathbf{T} \vee \sim A && \text{D1.} \\ &\equiv \varsigma \vee \sim A && \text{1.-} \\ &\equiv \sim A && \text{7.-} \end{aligned}$$

EJERCICIOS

I.- En cada una de las siguientes proposiciones responda las siguientes preguntas :

a) Establecer la jerarquía de las operaciones lógicas .

b) Construir la tabla de verdad asociada .
c) Identificar las tautologías, las contradicciones y las contingencias .
d) ¿ Cuales son implicaciones lógicas ?
e) ¿ Cuales son equivalencias lógicas?
f) ¿ Cuales corresponden a equivalencias lógicas?
g) ¿ Entre que pares existen equivalencias lógicas?

1.- $(\sim P \wedge Q) \vee Q$
2.- $(P \Rightarrow Q) \vee (P \vee Q)$
3.- $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \vee B)$
4.- $\sim[(A \vee B) \wedge \sim(A \wedge B)] \Rightarrow \sim A$
5.- $[(A \vee B) \Leftrightarrow A \Rightarrow D] \Leftrightarrow A \vee \sim A$
6.- $\{[A \vee \sim B \Rightarrow ((D \vee A) \wedge B \Rightarrow A)]\} \Rightarrow \sim(A \vee D)$
7.- $\sim(A \vee \sim B) \vee [A \Rightarrow \{(A \Rightarrow B) \wedge \sim\sim A\} \Leftrightarrow A\}]$
8.- $(A \vee B) \wedge \sim(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$
9.- $(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(A \vee B) \Leftrightarrow A \Rightarrow D]$
10.- $[(A \vee B) \Leftrightarrow A \Rightarrow D] \Leftrightarrow A \Rightarrow D.$

II.- Utilizando tablas de verdad demuestre la proposición 1.
III.- Utilizando tablas de verdad verifique la proposición 2 .
IV.- Utilizando las propiedades del algebra de proposiciones, de las tautologías y de las proposiciones simplifique, suponga que **T es una tautología** y ς **una contradicción** .

1.- $(A \Rightarrow B) \wedge [(D) \wedge (P \vee Q) \wedge (P \vee Q)] \Rightarrow A$.
2.- $[(A \vee B) \Rightarrow D \wedge \varsigma] \Rightarrow A \wedge B$.
3.- $(R \Rightarrow Q \wedge (P \Rightarrow Q)) \wedge (P \vee A) \Rightarrow \mathbf{T}$.
4.- $((\sim\varsigma \Rightarrow E \vee F) \wedge (A \vee \varsigma)) \Rightarrow ((\sim\varsigma) \wedge (A \vee \varsigma))$.
5.- $\mathbf{T} \Rightarrow (\sim\sim(P \vee Q) \wedge (\sim\sim R \wedge \sim p))$.
6.- $\sim\sim B \Rightarrow (A \vee B) \wedge (B \wedge A \wedge B)$.
7.- $[[P \Rightarrow (Q \wedge \sim Q)] \Rightarrow R \wedge R] \Rightarrow \sim S$.
8.- $[(A \wedge D) \wedge A \Rightarrow (B \wedge E)]$.
9.- $(([P \Rightarrow Q \wedge \sim R] \wedge \sim R) \Rightarrow \sim S \wedge \sim S) \Rightarrow \sim\sim P \wedge \mathbf{T}$.
10.- $[\sim A \Rightarrow \sim B \wedge \varsigma] \Rightarrow B \wedge \sim A$.
11.- $[[\sim B \wedge (D \wedge (\sim\varsigma \vee D)) \wedge \Rightarrow (A \wedge D) \wedge \varsigma] \Rightarrow B$.
12.- $[(B \wedge C) \wedge \sim D \Rightarrow (A \wedge D)] \Rightarrow \sim\varsigma$.
13.- $(X \Rightarrow Y \wedge Z) \wedge Z \Rightarrow W \wedge (\sim W \wedge Y)$.
14.- $[(\sim R \Rightarrow N \wedge R) \wedge N \Rightarrow \mathbf{T} \wedge R] \Rightarrow (J \wedge R) \wedge \sim J$.
15.- $[(P \Rightarrow \mathbf{T} \wedge M) \wedge (P \wedge \mathbf{T})] \wedge (\mathbf{T} \wedge M) \Rightarrow N$.
16.- $[((B \Rightarrow A \vee \varsigma) \wedge (A \vee \varsigma \Rightarrow D)) \wedge \varsigma] \Rightarrow \sim(B \Rightarrow D) \wedge (B)$.

V.- Generalice las equivalencias lógicas más comunes.
VI.- Utilice las leyes de De Morgan para negar las siguientes frases .
1.- Estudio o copio .
2.- Hoy es martes y no hace frío .
VII.- La disyunción exclusiva A $\underline{v}$ B se lee A o B pero no ambos, construya su tabla de verdad y escríbala en términos de los conectivos lógicos definidos en esta sección .
VIII.- La conjunción negativa $A \downarrow B$ se lee : ni A ni B y construya su tabla de verdad, escríbala en términos de los conectivos lógicos definidos en esta sección .

A . 3 . ARGUMENTOS

El objetivo fundamental de un razonamiento deductivo (o **argumento**) consiste en poder decidir cuando las conclusiones dadas son correctas o en su caso obtener conclusiones correctas a partir de un conjunto de proposiciones iniciales denominadas premisas y que se suponen verdaderas, el argumento mediante el cual se obtienen las conclusiones válidas se llama prueba o demostración . El razonamiento suele tomar la forma de proposición condicional " Si..... entonces..... ", es necesario que la proposición condicional sea siempre verdadera (independientemente de la hipótesis y la conclusión) para que el argumento sea válido, es decir, un argumento es válido, si y sólo si la proposición condicional es una tautología (**implicación lógica**) .

A . 3 . 1 . Principio de sustitución

Si $r \Leftrightarrow p$, y se sustituye r por p en la proposición $f(p, q, ...)$ obtenemos : $f(r, q, ...)$ entonces $f(p, q, ...) \equiv f(r, q, ...)$.
Esto significa que es posible sustituir cualquier número de proposiciones (que también denominaremos variables) componentes y que dada cualquier tautología, al sustituir algunos de sus componentes por otras equivalentes a ellas respectivamente, nuevamente obtenemos una tautología.

Ejemplos

Determinar si los siguientes argumentos son o no son válidos .

1.- Si es de bronce entonces no es elemento puro .
es elemento puro .

---

no es de bronce .

2.- Si camina entonces no está descompuesto .
Si no está descompuesto entonces me lo llevo .
Me lo llevo y camina .

No está descompuesto

3.- Si ladra entonces no es tigre
Si no ruge entonces ladra .
ladra .

---

no ruge

Solución

Es conveniente representar las proposiciones involucradas de la siguiente forma

1.- Sean : A = es de bronce, B = no es plata
Entonces la forma reducida es :

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \sim B \\ \hline \sim A \end{array}$$

Por lo tanto tenemos la proposición $(A \Rightarrow B) \wedge \sim B \Rightarrow \sim A$, puesto que corresponde a una proposición condicional, resta verificar si es o no una tautología, para esto existen por lo menos dos métodos .

Método 1 (Utilizando una tabla de verdad), la tabla de verdad asociada es :

		1	3	2	4	2
A	B	$(A \Rightarrow B)$	$\wedge \sim B$		$\Rightarrow$	$\sim A$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

↑
solución

$(A \Rightarrow B) \wedge \sim B \Rightarrow \sim A \equiv \mathbf{T}$, en consecuencia el argumento es válido .

Método 2 (Utilizando las propiedades de las operaciones lógicas) .

$$\begin{aligned}
(A \Rightarrow B) \wedge \sim B \Rightarrow \sim A &\equiv ((\sim A \vee B) \wedge \sim B) \Rightarrow \sim A \\
&\equiv \sim [(\sim A \wedge \sim B) \vee (B \wedge \sim B)] \Rightarrow A \\
&\equiv \sim [(\sim (A \vee B) \vee \varsigma] \Rightarrow A \\
&\equiv \sim [\sim A \wedge \sim B] \Rightarrow A \\
&\equiv \sim [\sim A \wedge \sim B] \vee \sim A \\
&\equiv (A \vee B) \vee \sim A \\
&\equiv (A \vee \sim A) \vee B \\
&\equiv \mathbf{T} \vee B \\
&\equiv \mathbf{T} .
\end{aligned}$$

2.- Si camina entonces no está descompuesto .
Si no está descompuesto entonces me lo llevo .
Me lo llevo y camina .

No está descompuesto

Solución

Sean : P = camina, Q = no está descompuesto, R = me lo llevo,
entonces la forma reducida es

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ R \wedge P \\ \hline Q \end{array}$$

La tabla de verdad asociada es :

	1	2	1	4	3	5
P Q R	$[(P \Rightarrow Q)$	$\wedge (Q$	$\Rightarrow R)]$	$\wedge (R$	$\wedge P)$	$\Rightarrow Q$
V V V	V	V	V	V	V	V
V V F	V	F	F	F	F	V
V F V	F	F	V	F	V	V
V F F	F	F	V	F	F	V
F V V	V	V	V	F	F	V
F V F	V	F	F	F	F	V
F F V	V	V	V	F	F	V
F F F	V	V	V	F	F	V

↑
solución

es decir $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \wedge (R \wedge P) \Rightarrow Q \equiv$ **T**, por lo que el argumento es válido (el mismo resultado se obtiene si se utilizan las propiedades del álgebra de proposiciones) .

3.- Si ladra entonces no es tigre
Si no ruge entonces ladra .
ladra .
———————
no ruge

Sean : A = ladra, B = no es tigre y D = no ruge, la representación es :

$A \Rightarrow B$
$D \Rightarrow A$
A
———
D

la tabla de verdad correspondiente es

	1	2	1	3	4
A B D	$[(A \Rightarrow B)$	$\wedge (D$	$\Rightarrow A)]$	$\wedge A$	$\Rightarrow D$
V V V	V	V	V	V	V
V V F	V	V	V	V	F
V F V	F	F	V	F	V
V F F	F	F	V	F	V
F V V	V	F	F	F	V
F V F	V	V	V	F	V
F F V	V	F	F	F	V
F F F	V	V	V	F	V

Esta tabla no corresponde a una tautología, por lo tanto el argumento no es válido.

1.3.2. Reglas de Inferencia

Es conveniente notar que la forma o estructura lógica de una grán cantidad de argumentos es la misma, esto es importante ya que el contenido de las proposiciones puede no tomarse en cuenta . Si la estructura lógica correspondiente es una implicación lógica, entonces se dice que tenemos una regla de inferencia .
A continuación establecemos las reglas de inferencia más comunes .

1.- **Regla de separación** (ó modus ponendo ponens, que significa modo de afirmar afirmando) .

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$$

La representamos por **MPP.**

2.- **Regla de la cadena de inferencias** (o silogismo hipotético) .

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ \hline P \Rightarrow R \end{array}$$

en lo sucesivo se representará por **SH** .

3.- **Regla conjuntiva** .

$$\begin{array}{l} P \\ Q \\ \hline P \wedge Q \end{array}$$

se representa por **RC** .

4.- Regla de **simplificación disyuntiva** (ó modus tollendo ponens) .

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \sim P \\ \hline Q \end{array} \quad , \text{ simultáneamente } \quad \begin{array}{l} P \vee Q \\ \sim Q \\ \hline P \end{array}$$

se representa por **MTP** .

5.- Regla **contrapositiva** (modus tollendo tollens) .

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \sim Q \\ \hline \sim P \end{array}$$

esto significa modo de negar negando y se representa por **MTT** .

6.- Regla de **simplificación conjuntiva** .

$$\frac{P \wedge Q}{P} \qquad \text{equivalentemente} \qquad \frac{P \wedge Q}{Q}$$

la representaremos por **RSC** .

7.- **Regla de adición**.

$$\frac{P}{P \vee Q}$$

la representaremos por **RA** .

Ejemplos

1.- Demostrar D si

1.- $A \Rightarrow D$
2.- $B \Rightarrow A$
3.- B

Solución

Una manera de hacerlo es la siguiente

1.- $A \Rightarrow D$		1.- $A \Rightarrow D$		
2.- $B \Rightarrow A$	**MPP (2,3)**	4.- A	**MPP (1,4)**	5.- D
3.- B				

2.- Demostrar A si :

1.- $B \wedge C \wedge D \wedge E$
2.- $B \wedge E$
3.- $C \wedge D \Rightarrow \sim\sim A$
4.- $B \Rightarrow C \wedge D$

Solución

1.- $B \wedge C \wedge D \wedge E$	**DN(3)**	5.- $C \wedge D \Rightarrow A$	**SH(4,5)**	7.- $B \Rightarrow A$	**MPP**(7,6)	8.- A.
2.- $B \wedge E$	**SC(2)**	6.- B		6.- B		
3.- $C \wedge D \Rightarrow \sim\sim A$		1.- $B \wedge C \wedge D \wedge E$		1.- $B \wedge C \wedge D \wedge E$		
4.- $B \Rightarrow C \wedge D$		4.- $B \Rightarrow C \wedge D$				

Observe que no siempre es necesario utilizar todas las hipótesis .

3.- Demostrar $P \wedge \sim R$ si

1.- $Q \wedge \sim R$
2.- $S \Rightarrow R$
3.- $\sim S \Rightarrow P$
4.- $\sim R$

Solución

1.- $Q \wedge \sim R$	**SC(1)**	5.- $\sim R$	**MPP(3,6)**	7.- P	**RC(7,5)**	8.- $P \wedge \sim R$.
2.- $S \Rightarrow R$	**MTT(2,4)**	6.- $\sim S$		5.- $\sim R$		
3.- $\sim S \Rightarrow P$		3.- $\sim S \Rightarrow P$				
4.- $\sim R$		4.- $\sim R$				

4.- Demostrar A si

1.- $\sim B$
2.- $\sim C \Rightarrow B$
3.- $C \vee \sim D \Rightarrow A$
4.- $\sim\sim\sim D$

Solución

1.- $\sim B$	**MTT(2,1)**	5.- C					
2.- $\sim C \Rightarrow B$	**LDN(4)**	6.- $\sim D$	**RC(5,6)**	7.- $C \wedge \sim D$	**MPP**(3,7)	8.-A	
3.- $C \vee \sim D \Rightarrow A$		3.- $C \wedge \sim D \Rightarrow A$		3.- $C \wedge \sim D \Rightarrow A$			
4.- $\sim\sim\sim D$							

5.- Demostrar E si

1.- $A \wedge D$
2.- $C \Rightarrow \sim D$
3.- $C \vee B$
4.- $B \vee A \Rightarrow E$

Solución

1.- $A \wedge D$	**RSC(1)**	7.- A	**MTP(3,6)**	8.- B	**RC (7,8)**	9.- $A \wedge B$	**MPP(4,9)**	E
2.- $C \Rightarrow \sim D$	**MTT(2,5)**	6.- $\sim C$		4.-$B \wedge A \Rightarrow E$		4.- $B \wedge A \Rightarrow E$		
3.- $C \vee B$		3.- $C \vee B$		7.- A				
4.- $B \wedge A \Rightarrow E$		4.-$B \wedge A \Rightarrow E$						
5.- D								

6.- Demostrar $A \wedge D$
sí

1.- $(B \Rightarrow C) \wedge D$
2.- $C \Rightarrow A$
3.- $(B \Rightarrow C) \Rightarrow A$
4.- D

Solución

1.- $(B \Rightarrow C) \wedge D$ RSC(1) 5.- $B \Rightarrow C$ MPP(3,5) 6.-A RC (6,4) 7.- $A \wedge D$
2.- $C \Rightarrow A$ 3.- $(B \Rightarrow C) \Rightarrow A$ 4.- D
3.- $(B \Rightarrow C) \Rightarrow A$ 4.- D
4.- D

Note que es posible prescindir de algunas hipótesis, en este caso 2. y 4, observe también que la conclusión se obtiene directamente de **4.-** y **RC**.

7.- Demostrar $C \wedge D$ si

1.- $A \vee B \Rightarrow C$
2.- $A \vee B$
3.- $\sim D \Rightarrow \sim (A \vee B)$

Solución

1.- $A \vee B \Rightarrow C$ MPP(1,2) 4.- C
2.- $A \vee B$ MTT(3,2) 5.- D RC(4,5) 6.-$C \wedge D$.
3.- $\sim D \Rightarrow \sim (A \vee B)$

Note que una premisa se puede utilizar varias veces.

8.- Demostrar $T \wedge M$ si

1.- $\sim R \Rightarrow N$
2.- $N \Rightarrow T \wedge M$
3.- $R \Rightarrow \sim S$
4.- S

Solución

1.- $\sim R \Rightarrow N$ SH(1,2) 5.- $\sim R \Rightarrow T \wedge M$ MPP(5,6) 7.- $T \wedge M$.
2.- $N \Rightarrow T \wedge M$ MTT(3,4) 6.- $\sim R$
3.- $R \Rightarrow \sim S$
4.- S

EJERCICIOS

I.- Traduzca cada uno de los siguientes razonamientos a la forma simbólica y empleando reglas de inferencia, verifique la validez de cada uno de ellos, también puede emplear equivalencia lógicas.

1.- Pablo y Sergio son de la misma edad ó Pablo es mayor que Sergio, sí Pablo y Sergio son de la misma edad, entonces Laura y Pablo no son de la misma edad. Si Pablo es mayor que Sergio, entonces Pablo es mayor que Pilar. En consecuencia, ó Laura y Pablo no son de la misma edad o Pablo es mayor que Pilar.

2.- Si el mercado es libre, entonces un vendedor no puede alterar los precios. Si un sólo vendedor no puede alterar los precios, entonces hay muchos vendedores, no hay muchos vendedores, luego el mercado es libre.

3.- Juán opina que no es rojo. Si no fuera verde y Juán opinaría que es rojo, entonces no sería rojo . Pero es rojo . En consecuencia es verde .

4.- Si el negro gana, entonces el blanco o el bayo avanzan. Si el blanco avanza, entonces el negro no avanza. Si el tordillo avanza, entonces el bayo no avanza. En consecuencia si el negro gana, el tordillo no avanza .

II.- Generalice las siguientes reglas de inferencia .
1.- Conjuntiva .
2.- Adición .
3.- Silogismo hipotético .

III.- Verifique que cada una de las reglas de inferencia es una tautología .
a) Por medio de una tabla de verdad .
b) Utilizando equivalencias lógicas .

IV.- Demuestre lo que se pide en cada uno de los siguientes raciocinio, utilice las reglas de inferencia y en caso de que la conclusión no sea la correcta, corríjala .

1.- Demostrar $\sim B$.
1.- $A \Rightarrow B$
2.- D
3.- $P \vee Q$
4.- $(P \vee Q) \Rightarrow A$

2.- Demostrar D.
1.- $(A \vee B) \Rightarrow D$
2.- $C \Rightarrow A \vee B$
3.- C

3.- Demostrar C .
1.- $A \wedge E \Rightarrow B \wedge D \wedge F$
2.- $B \wedge D \wedge F \Rightarrow C$
3.- $A \wedge E$

4.- Demostrar D.
1.- $R \Rightarrow Q$
2.- $Q \Rightarrow A$
3.- $(P \vee A) \wedge D$

5.- Demostrar $\sim S$.
1.- P
2.- $P \Rightarrow \sim Q \wedge R$
3.- $\sim Q \Rightarrow \sim S$

6.- Demostrar $E \vee F$.
1.- $\sim C \Rightarrow E \vee F$
2.- $A \vee C \Rightarrow \sim C$
3.- $A \vee C$
4.- A

7.- Demuestra: $\neg P \vee \neg S$
1.- Q
2.- $\sim Q \Rightarrow R$
3.- $R \Rightarrow \sim S$

8.- Demuestra A
1.- $\sim\sim B \Rightarrow A\ B$
2.- $B \wedge A$
3.- B

10.- Demuestra $P \vee Q$
1.- $R \Rightarrow \sim\sim(P \vee Q)$
2.- $\sim\sim R$
3.- R

11.- Demuestra $\neg D$
1.- $\sim A \Rightarrow \sim B$
2.- $D \Rightarrow B$
3.- $\sim A$

12.- Demuestra $\neg P \vee T$
1.- $P \Rightarrow Q \wedge \sim R$
2.- $\sim R \Rightarrow \sim S$
3.- $\sim S \Rightarrow \sim\sim P \wedge T$

13.- Demuestra $B \wedge E$
1.- $A \wedge D$
2.- $A \Rightarrow B \wedge C$
3.- E

14.- Demuestra $\neg Q$
1.- $\sim(P \vee Q)$
2.- $Q \Rightarrow P$

15.- Demuestra A
1.- $B \wedge C$
2.- $\sim D \Rightarrow A$
3.- $D \Rightarrow \sim C$

16.- Demuestra A
1.- $\sim B \wedge D$
2.- $\sim C \wedge D \Rightarrow A \wedge D$
3.- $C \Rightarrow B$

17.- Demostrar A
1.- $\sim A \Rightarrow B$
2.- $\sim B \wedge D$
3.- $D \Rightarrow A \vee C$

18.- Demostrar M
1.- $\sim R \Rightarrow N \wedge R$
2.- $N \Rightarrow T \wedge M$
3.- $R \Rightarrow J \wedge R$
4.- $\sim J$

19.- Demuestra $\neg X$
1.- $X \Rightarrow Y \wedge Z$
2.- $Z \Rightarrow W$
3.- $\sim W \wedge Y$

20.- Demuestra $D \vee E$

1.- $A \Rightarrow (\sim D \Rightarrow E)$
2.- $B \Rightarrow E$
3.- $A \Rightarrow \sim E$

21.- Demostrar $C \wedge B$

1.- $B \Rightarrow A \vee C$
2.- $A \vee C \Rightarrow D$
3.- $C \Rightarrow \sim (B \Rightarrow D)$
4.- B

22.- Demostrar $N \vee M$

1.- $P \Rightarrow T \wedge M$
2.- $P \wedge T$
3.- $T \wedge M \Rightarrow N$

23.- Demostrar $Q \wedge \sim P$
1.- $N \Rightarrow O$
2.- $P \Rightarrow Q$
3.- $N \Rightarrow (\sim P \Rightarrow R)$
4.- $\sim Q$

24.- Demuestra $Q \vee S$
1.- $\sim P \vee Q$
2.- P
3.- $\sim R \vee S$
4.- R

V.- En cada una de las siguientes expresiones establecer la conclusión adecuada para que el argumento sea válido .

a) $A \wedge B$
B
_____

b) $A \Rightarrow B$
$B \Rightarrow D$
$E \Rightarrow A$
$D \Rightarrow F$
_____

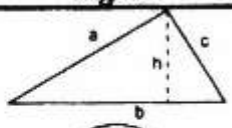
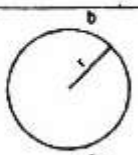
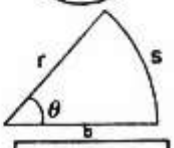
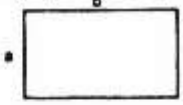
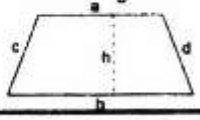
c) $P \Rightarrow \sim Q$
$\sim Q \Rightarrow R$
$R \Rightarrow S$
$S \Rightarrow \sim P$
_____

APÉNDICE 2

Matemáticas fundamentales

A.2.1 Geometría

FIGURAS PLANAS

Nombre	Perímetro	Area	Figura
Triángulo	$P = a + b + c$	$A = \frac{bh}{2}$	
Círculo	$P = 2\pi r$	$A = \pi r^2$	
Sector de circular	$P = 2r + r\theta$	$A = \frac{1}{2} r\theta$; $s = r\theta$	
Rectángulo	$P = 2\ (a + b)$	$A = ab$	
Paralelogramo	$P = 2\ (a + b)$	$A = bh$	
Trapecio	$P = a + b + c + d$	$A = \frac{1}{2}(a + b)\ h$	

CUERPOS SÓLIDOS

Nombre	Area	Volumen	Figura
Cono	$A_t = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2$	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$	
Cono circular, recto truncado	$A_t = \pi(a^2 + b^2) + \pi c(a + b)$	$V = \frac{1}{3} \pi h(a^2 + b^2 + ab)$	
Cilindro	$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$	$V = \pi r^2 h$	
Esfera	$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	
Casquete de esfera de radio R y altura h	$A_t = \pi r^2 + 2\pi r h$	$V = \pi r h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$	

A.2.2 Algebra

LEYES DE LOS EXPONENTES

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

1. $a^n a^m = a^{n+m}$

2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; En particular si $n = m \Rightarrow a^0 = 1$

3. $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$

4. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$; En particular si $n = 1 \Rightarrow \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$

FACTORIZACIÓN

1. $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
2. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
3. $x^2 + x(a+b) + ab = (x+a)(x+b)$
4. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$
5. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$
6. $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$
7. $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$
8. $x - y = (x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}})(x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}} y^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{n-3}{n}} y^{\frac{2}{n}} + x^{\frac{n-4}{n}} y^{\frac{3}{n}} + \dots\dots + x y^{\frac{n-2}{n}} + y^{\frac{n-1}{n}})$

DIVISIBILIDAD DE LAS FORMAS $\frac{a^n \pm b^n}{a \pm b}$

$\frac{a^n - b^n}{a - b}$; es divisible para toda n ;

$\frac{a^n + b^n}{a + b}$; es divisible si n es impar

$\frac{a^n - b^n}{a + b}$; es divisible si n es par ;

$\frac{a^n + b^n}{a - b}$; nunca es divisible

BINOMIO DE NEWTON (n entero positivo)

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots\dots + b^n$$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

El logaritmo de base (a), de un número N, es el exponente al que hay que elevar la base a, para obtener el número N.

$a^x = N$, x es el logaritmo de base (a) del número N y se escribe $x = \log_a N$

$e^y = M$, y es el logaritmo en la base natural (e) del numero M y se escribe $y = \ln M$

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$; $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
3. $\log_a x^n = n \log_a x$; $\ln x^n = n \ln x$
4. $\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{\log_a x}{n}$; $\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{\ln x}{n}$
5. $\log_a N = \frac{\ln N}{\ln a}$, Fórmula para cambiar logaritmos expresados en la base natural e, a otra base a cualquiera y viceversa.

6. $\log_a N = \frac{\ln b}{\ln a} \log_b N$, Fórmula para cambiar el logaritmo de base N, expresado en una base b, a otra base a.

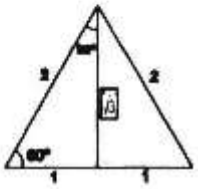
$$\text{Si } a^x = N \text{ , entonces, } x = \log_a N \quad y \quad a^{\log_a N} = N$$
$$\text{Si } e^y = M \text{, entonces, } y = \ln M \quad y \quad e^{\ln M} = M$$

A . 2 . 3 Trigonometría

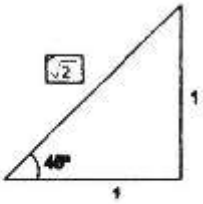
VALORES MAS COMUNES DE LAS FUNCIOPNES TRIGONOMÉTRICAS

Funciones trigonométricas para ángulos de mayor frecuencia

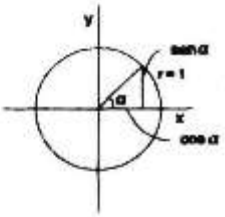
Las funciones de 30^0 y 60^0 se determinan usando el triángulo



Las funciones de 45^0 se determinan usando el triángulo



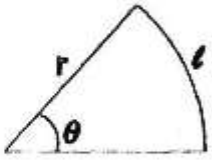
Para las funciones de 90^0 y sus múltiplos se usa el circulo unitario o trigonométrico



Para convertir de grados a radianes y viceversa se usa la relación de equivalencia $180 = \pi$

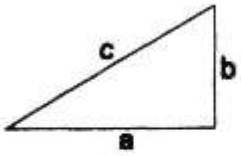
1. Para convertir x grados a radianes, multiplicar x por el factor $\frac{\pi}{180}$
2. Para convertir " y, radianes " a grados, multiplicar y por $\frac{180}{\pi}$

Longitud de arco de un segmento circular de radio r por. $l = r\theta$
(θ en radianes)

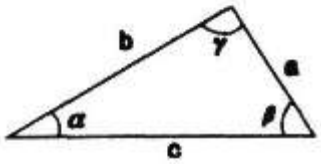


Grados	0	30	45	60	90	180	270	360
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
Coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
Tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
Cotangente	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	∞	0	∞
Secante	1	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	∞	1
Cosecante	∞	2	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}/3$	1	∞	-1	∞

LEYES TRIGONOMÉTRICAS



Teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2$



Ley de los senos $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$

Ley de los cosenos $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Relaciones trigonométricas

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha}$; $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$; $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$;

Relaciones pitagóricas

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$; $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

Relaciones de ángulo doble

$\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$; $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$;

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$;

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$ $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

Sumas trigonométricas

$\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\dfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta)$; $\cos \quad = 2\cos\dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\dfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$

$\tan\alpha \pm \tan\beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ $\cot\alpha \pm \cot\beta = \pm\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$

Productos trigonométricos

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

Relaciones de suma de ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \pm \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \pm \tan\alpha \tan\beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta \pm 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$$

A . 2 . 4 . Geometría analítica

LA RECTA

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ Distancia entre dos puntos

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Pendiente de un segmento de recta que pasa por dos puntos

$y = mx + b$ Ecuación normal de la recta

$y - y_1 = m(x - x_1)$ Ec. de la recta con pendiente m y que pasa por un punto (x_1,y_1)

$Ax + By + C = 0$ Ecuación general de la recta

La circunferencia

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ Ecuación cartesiana de la circunferencia de radio r, con centro en (h,k)

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ Ecuación general de la circunferencia

Secciones cónicas

La parábola

Excentricidad $e = 1$

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ Parabola vertical con vertice en (h,k) y ramas hacia arriba

$(x-h)^2 = -4p(y-k)$ Parabola vertical con vertice en (h,k) y ramas hacia abajo

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ Parabola horizontal con vertice en (h,k) y ramas hacia la derecha

$(y-k)^2 = -4p(x-h)$ Parabola horizontal con vertice en (h,k) y ramas hacia la izquierda

La elipse

Excentricidad $e = \frac{c}{a} < 1$

2a longitud del eje mayor

2b longitud del eje menor

2c distancia entre los focos

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ Elipse con centro en (h , k) y el eje focal paralelo al eje x

$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ Elipse con centro en (h , k) y el eje focal paralelo al eje y

La hipérbola

Excentricidad $e = \frac{c}{a} > 1$

2a longitud del eje transverso

2b longitud del eje conjugado

2c distancia entre los focos

$c^2 = a^2 + b^2$ Focos sobre el eje transverso

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ Hipérbola con centro en (h,k) y el eje focal paralelo al eje x

$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ Hipérbola con centro en (h , k) y el eje focal paralelo al eje y

A.2.5. Derivadas

Derivadas elementales

Si $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$

1. $\dfrac{d(C)}{dx} = 0$; C es una constante
2. $\dfrac{d(ku)}{dx} = k\dfrac{du}{dx}$; k es una constante
3. $\dfrac{d(u+v+w)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx} + \dfrac{dw}{dx}$
4. $\dfrac{d(uv)}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
5. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$
6. $\dfrac{d}{dx}\left(u^n\right) = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$
7. $\dfrac{d}{dx}\left(e^u\right) = e^u\dfrac{du}{dx}$
8. $\dfrac{df(u)}{dx} = \dfrac{df(u)}{dx}\dfrac{du}{dx}$; regla de la cadena
9. $\dfrac{d}{dx}\left(a^u\right) = a^u(\ln a)\dfrac{du}{dx}$
10. $\dfrac{d}{dx}(\ln u) = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$
11. $\dfrac{d}{dx}\left(u^v\right) = vu^{v-1}\dfrac{du}{dx} + u^v \ln u\dfrac{dv}{dx}$
12. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u\dfrac{du}{dx}$
13. $\dfrac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u\dfrac{du}{dx}$
14. $\dfrac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\dfrac{du}{dx}$
15. $\dfrac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\dfrac{du}{dx}$
16. $\dfrac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u\dfrac{du}{dx}$
17. $\dfrac{d}{dx}(\csc u) = -\cot u \csc u\dfrac{du}{dx}$
18. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$
19. $\dfrac{d}{dx}(\arccos u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$
20. $\dfrac{d}{dx}(\arctan u) = \dfrac{1}{u^2+1}\dfrac{du}{dx}$
21. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cot} u) = -\dfrac{1}{u^2+1}\dfrac{du}{dx}$
22. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sec} u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$
23. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arc\,csc} u) = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

Derivadas de las funciones hiperbólicas

$\operatorname{senh} u = \dfrac{1}{2}\left(e^u - e^{-u}\right)$ $\qquad \cosh u = \dfrac{1}{2}\left(e^u + e^{-u}\right)$ $\qquad \tanh u = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$

24. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \cosh u\dfrac{du}{dx}$
25. $\dfrac{d}{dx}(\cosh u) = \operatorname{senh} u\dfrac{du}{dx}$
26. $\dfrac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u\dfrac{du}{dx}$
27. $\dfrac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u\dfrac{du}{dx}$
28. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u\dfrac{du}{dx}$
29. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u\dfrac{du}{dx}$

Referencias

Apostol	Calculus *	Reverté
Doneddu	Curso de Matemáticas ** Análisis y Geometría Diferencial	Aguilar
Fulks	Cálculo Avanzado	Cecsa
Spivak	Calculus	Reverté

El libro *Introducción al cálculo diferencial,* de los autores Ricardo F. García Sosa, Pantaleón Gómez Carranza y Raul Larios García, se terminó de imprimir el 21 de Marzo de 1999, por Editora Hoy en Tampico, S. A. de C.V., Altamira # 611 Poniente, zona centro, Tampico, Tamaulipas. La edición fue de 3,000 ejemplares más sobrantes para reposición y estuvo al cuidado del Dr. Fernando Aldape Barrera.