Cálculo

Serge Lang

Versión en español de

Manuel López Mateos
Universidad Nacional Autónoma de México

Con la colaboración de

Iván Castro Chadid
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia

Addison-Wesley Iberoamericana

Argentina • Brasil • Chile • Colombia • Ecuador • España
Estados Unidos • México • Perú • Puerto Rico • Venezuela

Versión en español de la obra titulada *A First Course in Calculus, Fifth Edition*, de Serge Lang, publicada originalmente en inglés por Springer-Verlag New York Inc., ©1986 por Springer-Verlag New York Inc. Las ediciones anteriores en inglés fueron publicadas en 1978, 1973, 1968 y 1964 por Addison-Wesley Publishing Company Inc.

Esta edición en español es la única autorizada.

Obra compuesta y formada mediante el sistema TEX por el Taller Lima, México.

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

ISBN 0-201-62906-2 **Addison-Wesley Iberoamericana**
ISBN 968-6394-13-3 **Sistemas Técnicos de Edición**

ABCDEFGHIJ-M-99876543210

Se terminó de imprimir el 10 de enero de 1990 en los talleres de Programas Educativos, S.A. de C.V. Calzada Chabacano 65-A, 06850 México, D.F. La tirada fue de 3000 ejemplares.

Prefacio

El objetivo de un primer curso de cálculo es enseñar a los estudiantes los conceptos fundamentales de derivada e integral, y las técnicas básicas y aplicaciones relacionadas con ellas. Los alumnos muy inteligentes, con aptitudes obvias para las matemáticas, requerirán en seguida un curso sobre funciones de una variable real, más o menos como lo entiende un matemático profesional. Este libro no se dedica a ellos de manera especial (aunque espero que con él tendrán una buena introducción a temprana edad).

No he escrito este curso en el estilo que hubiera usado para una monografía avanzada, o para temas sofisticados. Uno escribe una monografía avanzada para sí mismo, porque quiere dar forma permanente a la visión particular de alguna parte bella de las matemáticas que de otra manera no sería accesible, algo parecido a cuando un compositor escribe su sinfonía en notación musical.

Este libro está escrito para los estudiantes a fin de darles acceso inmediato y agradable al tema. Espero haber logrado un equilibrio adecuado entre el tiempo excesivo dedicado a los detalles particulares y la insuficiencia de ejercicios técnicos necesarios para adquirir la familiaridad deseada con el tema. En todo caso, para un primer curso no son adecuados ciertos hábitos rutinarios de los matemáticos sofisticados.

Rigor. Esto no significa que deba abandonarse el llamado rigor. El desarrollo lógico de las matemáticas en este curso, a partir de los axiomas más básicos, se da a través de las etapas siguientes:

Teoría de conjuntos	Números (i.e. números reales)
Enteros (números completos)	Límites
Números racionales (fracciones)	Derivadas y subsecuentes.

Nadie en su sano juicio sugiere que se deba comenzar un curso con teoría de conjuntos. El mejor lugar para entrar al tema es entre límites y derivadas. En otras palabras, cualquier estudiante está preparado para aceptar como intuitivamente obvios los conceptos de números y límites y sus propiedades básicas. La experiencia muestra que los estudiantes *no* tienen la base psicológica adecuada para aceptar un estudio teórico de los límites y se resisten de manera formidable.

De hecho, sucede que se puede tener lo mejor de ambas ideas. Los razonamientos que muestran de qué manera se pueden reducir las propiedades de los límites a las de los números forman un conjunto completo en sí mismo. En términos lógicos su lugar es *antes* del tema de nuestro curso, pero lo incluimos como apéndice. Si algún estudiante lo considera necesario, basta que lo lea como si fuese el capítulo 0. En ese caso, todo lo que sigue es tan riguroso como cualquier matemático pudiera desear (al menos en lo que respecta a los objetos que tienen una definición analítica). No es necesario cambiar ni una palabra en ninguna demostración. Espero que esto termine de una vez con las posibles controversias acerca del llamado rigor.

La mayoría de los estudiantes no lo consideran necesario. Mi opinión es que la épsilon-delta debería quedar completamente fuera de un curso ordinario de cálculo.

Lenguaje y lógica. No se suele reconocer que algunas de las principales dificultades al enseñar matemáticas son análogas a las de la enseñanza de una lengua extranjera. (Las escuelas secundarias son las responsables de esto. Un entrenamiento adecuado en las escuelas secundarias eliminaría por completo esta dificultad.) Por ello, he hecho un gran esfuerzo por guiar verbalmente al estudiante, por decirlo así, en el uso de un lenguaje matemático apropiado. Me parece fundamental que se exija a los estudiantes que escriban sus trabajos de matemáticas en frases completas y coherentes. Una gran parte de sus dificultades con las matemáticas surge del uso caótico de los símbolos matemáticos y de fórmulas aisladas de frases con sentido y de cuantificadores apropiados. Se debe exigir que los trabajos sean limpios y legibles, y que no se vean como si acabara de brincar del tintero una mosca borracha. Al insistir en niveles razonables de expresión se producirá una impresionante mejoría en el rendimiento matemático. Deberá enseñarse el uso sistemático de palabras como "sea," "existe," "para todo," "si...entonces," "por lo tanto," como en las frases:

Sea $f(x)$ la función tal que ....
Existe un número tal que ....
Para todos los números x con $0 < x < 1$, tenemos ....
Si f es una función diferenciable y K una constante tal que $f'(x) = Kf(x)$, entonces $f(x) = Ce^{Kx}$ para alguna constante C.

Conexión. Me parece que no tiene sentido considerar la "teoría" como rival de las aplicaciones o de los "cálculos." Este libro trata ambos aspectos como complementarios entre sí. Un teorema nos proporciona casi siempre una herramienta para efectuar cálculos más eficientes (p.ej. la fórmula de Taylor para calcular valores de funciones). Está claro que en distintas clases se podrán resaltar diferentes aspectos, y quizá se omitan algunas demostraciones, pero según mi experiencia, si no se actúa con excesiva pedantería, los alumnos están dispuestos

e incluso deseosos de entender las razones que justifican un resultado, i.e. su demostración.

Es perjudicial para los estudiantes aprender cálculo (o para el caso, cualquier otra rama de las matemáticas) con miras a simplemente "conectar" fórmulas prefabricadas. La enseñanza adecuada consiste en hacer que el alumno tenga la aptitud de manejar un gran número de técnicas en forma rutinaria (en particular, saber cómo conectarlas), pero también consiste en adiestrar a los alumnos para que conozcan algunos principios generales que les permitan ocuparse de situaciones nuevas para las cuales no se conocen fórmulas que conectar.

Es imposible en un semestre, o en un año, tener tiempo para tratar con todas las aplicaciones deseables (economía, estadística, biología, química, física, etc.); por otro lado, al cubrir el balance adecuado entre las aplicaciones elegidas y los principios generales seleccionados se brindará a los estudiantes la capacidad de manejar por sí mismos otras aplicaciones o situaciones.

Problemas y ejercicios resueltos. Para conveniencia tanto de alumnos como de maestros, en la presente edición se ha añadido gran cantidad de problemas resueltos, y muchos de ellos se han colocado en la sección de respuestas, para su referencia. Lo hice así por dos razones cuando menos. Primera, en el texto podrían oscurecer las ideas principales del curso. Segundo, es buena idea hacer que los estudiantes piensen acerca de un problema antes de verlo resuelto. Serán entonces más receptivos, y retendrán mejor los métodos por haber enfrentado ellos mismos las dificultades (cualesquiera que sean, dependiendo de cada estudiante). Tanto la inclusión de ejemplos resueltos como su ubicación en la sección de ejercicios fueron peticiones de los estudiantes. Desafortunadamente, con esto entran en conflicto los requerimientos para una buena enseñanza, examinación y presión académica. Los estudiantes muestran una tendencia *de facto* a objetar que les pidan pensar (aunque fallen), pues tienen miedo a ser castigados con malas calificaciones en las tareas que realizan en casa. Los profesores pueden imponer grandes exigencias a los estudiantes, o bien, pueden adoptar el camino del menor esfuerzo y no pedirles sino que pongan nuevos números en un tipo de ejercicio que ya se ha resuelto (en la clase o en el libro). Me parece que las condiciones de los exámenes (tiempo limitado, presiones de otros cursos y otros exámenes) hacen difícil (si no es que irracional) *examinar* a los estudiantes con algo más que los problemas básicos de rutina, pero no concluyo que el curso debiera consistir exclusivamente en este tipo de material. Algunos estudiantes adoptan la actitud de menospreciar el material del curso que no viene en los exámenes. Yo me opongo rotundamente a esta actitud, pero no tengo una solución global para estas presiones conflictivas.

Organización general. No he hecho grandes innovaciones en la exposición del cálculo. Es natural que así sea, pues el tema se descubrió hace más de 300 años.

He reducido la cantidad de geometría analítica a lo que es necesario y suficiente para un primer curso general de esta rama de las matemáticas. Para algunas aplicaciones se requiere más, pero estas aplicaciones son bastante especializadas. Por ejemplo, si se requieren las propiedades particulares acerca del foco de una parábola en un curso de óptica, entonces ése es el lugar para presentarlas, no en un curso general dirigido a matemáticos, físicos, químicos, biólogos e ingenieros, sólo por mencionar algunos. Considero como un desafortunado accidente histórico el tremendo énfasis en la geometría analítica de las cónicas que ha sido la moda durante muchos años. Lo importante es que la idea básica de representar un gráfica mediante una figura en el plano sea comprendida en su totalidad, junto con ejemplos básicos. Deben pasarse por alto las más abstrusas propiedades de las elipses, parábolas e hipérbolas.

Se cubren primero la diferenciación y las funciones elementales; la integración se estudia en segundo lugar. Cada tema forma un todo coherente. Por ejemplo, en la parte de diferenciación se presentan tres veces los problemas de razones de cambio para ilustrar el mismo principio general pero en contextos de diversas funciones elementales (primero polinomios, después funciones trigonométricas y después funciones inversas). Esta repetición a intervalos breves es pedagógicamente adecuada y contribuye a la coherencia del tema. También es natural deslizarse de la integración a la fórmula de Taylor, probada con el término de residuo mediante integración por partes. Sería un tanto inconveniente romper con esta secuencia.

La experiencia ha mostrado que los capítulos III a VIII constituyen un programa adecuado para **un semestre (diferenciación y funciones elementales)**, mientras que los capítulos IX a XIII forman un programa adecuado para un **segundo semestre (integración y fórmula de Taylor)**. Los primeros dos capítulos se pueden usar como un rápido repaso para grupos que no estén particularmente bien preparados.

Me parece que todos estos factores compensan con creces la posible desventaja de que en otros cursos (física, y quizá química) se necesite integración desde el principio. Esto puede ser cierto, pero también se necesitan los otros temas, y desafortunadamente el curso ha de proyectarse de manera totalmente ordenada en el eje del tiempo.

Además, estudiar el log y la exponencial antes de la integración tiene la ventaja de que nos encontramos con un caso particular y concreto de la situación donde hallamos una antiderivada por medio del área: $\log x$ es el área bajo $1/x$ entre 1 y x. Vemos también en este caso concreto cómo $dA(x)/dx = f(x)$, donde $A(x)$ es el área. Después esto se hace en toda su generalidad al estudiar la integral. Más aún, al haberse utilizado en este caso concreto las desigualdades que incluyen sumas inferiores y sumas superiores, se comprenden más fácilmente en el caso general. Las clases que comienzan su curso sobre integración sin pasar por diferenciación bien podrían comenzar con la última sección del capítulo sobre logaritmos, i.e. la última sección del capítulo VIII.

La fórmula de Taylor se prueba con la forma integral del residuo, el cual

se estima de manera adecuada. La demostración con integración por partes es más natural que la otra (diferenciar una expresión complicada sacada de quién sabe dónde), y es la que se generaliza al caso de dimensión superior. Coloqué la integración después de la diferenciación, pues, de no ser así, no se dispondría de técnicas para evaluar integrales.

En lo personal pienso que los cálculos que surgen de manera natural de la fórmula de Taylor (cálculos de valores de funciones elementales, cálculo de e, π, $\log 2$, cálculos de integrales definidas hasta unos cuantos decimales, a los que se les da poca importancia en los cursos de cálculo) son importantes. Esto ya era evidente hace muchos años, y es más patente ahora a la luz de la proliferación de las calculadoras de bolsillo. El diseño de dichas calculadoras se basa precisamente en medios efectivos de cálculo que emplean los polinomios de Taylor. Cuando se aprende cómo estimar de manera efectiva el término de residuo en la fórmula de Taylor se adquiere una excelente idea de las funciones elementales, que no se podría obtener de otra manera.

También se debe destacar el cálculo de integrales como

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \quad \text{o} \quad \int_0^{0.1} e^{-x^2}\,dx$$

que se puede realizar con facilidad numéricamente, sin el uso de una forma sencilla para la integral indefinida. De nuevo, este cálculo da una buena idea, que no se puede obtener de otra manera, de un aspecto de la integral. Muchos libros dan poca importancia a estas aplicaciones en aras de un amplio tratamiento de las aplicaciones de la integración a varias situaciones de ingeniería, como presión de fluidos sobre una presa, principalmente por accidente histórico. No tengo nada en contra de la presión del fluido, pero se debe tener presente que dedicar mucho tiempo a algún tema evita que se asigne a otros el tiempo adecuado. Por ejemplo, Ron Infante me dice que el cálculo numérico de integrales como

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx,$$

que se efectúa en el capítulo XIII, se presenta con frecuencia en el estudio de redes de comunicación, en relación con ondas cuadradas. Cada profesor debe usar su criterio para elegir el tema que debería enfatizar, a costa de otros.

Los capítulos sobre funciones de varias variables se incluyen para clases que puedan avanzar a mayor velocidad, y, por lo tanto, que tengan tiempo para estudiar material adicional en el primer año. **En circunstancias ordinarias no se cubrirán estos capítulos durante un curso de primer año. Por ejemplo, no se cubren durante el curso de primer año en Yale.**

Inducción. Pienso que durante el primer curso de cálculo se está en un buen momento para aprender inducción. Sin embargo, al tratar de enseñar inducción sin haber encontrado primero ejemplos naturales, se afrontan grandes dificultades psicológicas. Por lo tanto, durante la parte de diferenciación no he mencionado formalmente la inducción. Cuando surge una situación donde se puede usar inducción he realizado procedimientos por pasos para ilustrar el procedimiento inductivo. Después de suficientes repeticiones, el estudiante está listo para ver un patrón que pueda resumirse mediante la "inducción" formal, que será ahora un nombre dado a un concepto que ya se ha comprendido.

Material de repaso. La presente edición también subraya la importancia de presentar más material de repaso. El entrenamiento deficiente en la enseñanza media elemental es responsable de la mayoría de las dificultades experimentadas en el nivel medio superior. Estas dificultades no se deben al problema de comprender el cálculo sino a la incapacidad de manejar el álgebra elemental. Gran parte de los estudiantes no pueden dar de manera automática el desarrollo de expresiones como

$$(a+b)^2, \quad (a-b)^2, \qquad \text{o} \qquad (a+b)(a-b).$$

Las respuestas se deben memorizar como las tablas de multiplicar. Memorizar de rutina estas fórmulas básicas no es incompatible con aprender los principios generales: es complementario.

Para evitar malas interpretaciones, deseo afirmar explícitamente que la pobre preparación de tantos estudiantes de enseñanza media elemental no se puede atribuir a las "nuevas matemáticas" *versus* las "matemáticas antiguas". Cuando comencé a enseñar cálculo como estudiante graduado en 1950, hallé que la mayoría de los alumnos de primer año de los *colleges* estaban mal preparados. Hoy día se halla sólo cierto número (es difícil medir cuántos). Por otro lado, un grupo de tamaño definido, de los mejores, ha tenido la oportunidad de aprender algo de cálculo, incluso hasta por un año, lo cual hubiera sido inconcebible en tiempos anteriores. Por mala que sea la situación, hay, sin embargo, una mejoría.

Deseo agradecer a mis colegas de Yale y a otros más antiguos el haber sugerido mejoras al libro: Edward Bierstone (University of Toronto), Folke Eriksson (University of Gothenburg), R. W. Gatterdam (University of Wisconsin, Parkside), y George Metakides (University of Rochester). Agradezco a Ron Infante su ayuda con la revisión de galeras.

Mi reconocimiento también para Anthony Petrello por verificar los ejemplos resueltos y las respuestas en las ediciones anteriores.

S. Lang

Contenido

Parte uno

Repaso del material básico

Si ya se dominan las propiedades elementales de los números, y si ya se sabe acerca de coordenadas y se conocen las gráficas de las ecuaciones comunes (ecuaciones lineales, parábolas y elipses), entonces debería comenzarse directamente con el capítulo III que trata sobre derivadas.

CAPÍTULO I

Números y funciones

No es posible probar todo cuando se comienza el estudio de cualquier tipo de matemáticas. Cada vez que introducimos un nuevo concepto debemos definirlo en términos de un concepto cuyo significado ya conocemos, y es imposible continuar por siempre estas definiciones de manera regresiva. Así que debemos escoger un punto de partida, lo que suponemos conocido, y lo que deseamos explicar y probar en términos de lo supuesto.

Al principio de este capítulo describiremos la mayoría de las cosas que supondremos conocidas para este curso; en realidad, es muy poco. A grandes rasgos, suponemos que se sabe acerca de números, suma, resta, multiplicación y división (entre números distintos de 0). Recordaremos las propiedades de las desigualdades (cuando un número es mayor que otro). En algunas ocasiones daremos por conocidas ciertas propiedades de números con las que quizá no se hayan encontrado antes y que siempre deberán precisarse. Para los interesados, en el apéndice se proporcionan las demostraciones de estas propiedades.

I, §1. ENTEROS, NÚMEROS RACIONALES Y NÚMEROS REALES

Los números más comunes son los números $1, 2, 3, \ldots$ que se llaman **enteros positivos**.

Los números $-1, -2, -3, \ldots$ se llaman **enteros negativos**. Cuando queremos hablar de los enteros positivos junto con los enteros negativos y el 0, los llamamos sencillamente **enteros**. Así los enteros son $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$.

La suma y el producto de dos enteros también son enteros.

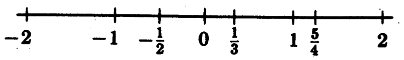
Además de los enteros tenemos **fracciones**, como $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, -\frac{1}{8}, -\frac{101}{27}, \frac{8}{16}, \ldots$, que pueden ser positivas o negativas, y que se pueden escribir como cocientes m/n, donde m, n son enteros y n no es igual a 0. Dichas fracciones se llaman **números racionales**. Todo entero m es un número racional, pues se puede escribir como $m/1$, pero, por supuesto, no es cierto que todo número racional sea un entero. Observamos que la suma y el producto de dos números racionales también son números racionales. Si a/b y m/n son dos números racionales (con a, b, m, n enteros y b, n distintos de 0), entonces su suma y su producto están dados por las fórmulas siguientes, que conocen desde la escuela elemental:

$$\frac{a}{b}\frac{m}{n} = \frac{am}{bn},$$

$$\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{an + bm}{bn}.$$

En esta segunda fórmula simplemente pusimos las dos fracciones sobre el denominador común bn.

Podemos representar los enteros y los números racionales de manera geométrica sobre una recta. Primero seleccionamos una unidad de longitud. Los enteros son los múltiplos de esta unidad, y los números racionales son partes fracionarias de esta unidad. En la recta a continuación hemos trazado algunos números racionales.



Observen que los enteros y números racionales negativos están a la izquierda del cero.

Finalmente, tenemos los números que se pueden representar mediante decimales infinitos, como $\sqrt{2} = 1.414\ldots$ o $\pi = 3.14159\ldots$, y que se llamarán **números reales** o simplemente **números**.

Los enteros y los números racionales son casos particulares de estos decimales infinitos. Por ejemplo,

$$3 = 3.000000\ldots,$$

y

$$\tfrac{3}{4} = 0.7500000\ldots,$$

$$\tfrac{1}{3} = 0.3333333\ldots.$$

Vemos que puede haber muchas maneras de denotar el mismo número, por ejemplo, como la fracción $\frac{1}{3}$ o como el decimal infinito $0.33333\ldots$. Hemos escrito los decimales con puntos suspensivos al final. Si detenemos el desarrollo decimal en cualquier lugar dado, obtenemos una aproximación al número. Cuanto más lejos detengamos el decimal, mejor aproximación obtendremos.

Es fácil hallar el desarrollo decimal para una fracción mediante el proceso de división que conocen desde la escuela elemental.

Más adelante aprenderemos a hallar desarrollos decimales para otros números de los cuales quizá ya hayan oído hablar, como π. Probablemente les han dicho que $\pi = 3.14\ldots$ pero no les dijeron por qué. En el capítulo XIII aprenderán a calcular un número arbitrario de lugares decimales para π.

Los números se representan geométricamente como la colección de todos los puntos sobre la recta, no sólo aquellos que son una parte racional de la unidad de longitud o un múltiplo de ella.

Notamos que la suma y el producto de dos números son números. Si a es un número distinto de cero, entonces hay un número único b tal que $ab = ba = 1$, y escribimos

$$b = \frac{1}{a} \quad \text{o} \quad b = a^{-1}.$$

Decimos que b es el **inverso** de a, o "a inverso." Hacemos énfasis en que la expresión

$$\mathbf{1/0} \quad \text{o} \quad \mathbf{0^{-1}} \quad \textbf{no está definida.}$$

En otras palabras, no podemos dividir entre cero, y no atribuimos significado alguno a los símbolos $1/0$ ó 0^{-1}.

Sin embargo, si a es un número, entonces el producto $0 \cdot a$ está definido y es igual a 0. El producto de cualquier número por 0 es 0. Más aún, si b es cualquier número distinto de 0, entonces $0/b$ está definido y es igual a 0; también se puede escribir $0 \cdot (1/b)$.

Si a es un número racional $\neq 0$, entonces $1/a$ también es un número racional. En efecto, si podemos escribir $a = m/n$, con enteros m y n ambos diferentes de 0, entonces

$$\frac{1}{a} = \frac{n}{m}$$

también es un número racional.

I, §2. DESIGUALDADES

Además de la suma, multiplicación, resta y división (entre números distintos de 0), estudiaremos ahora otra importante característica de los números reales.

Tenemos los **números positivos**, representados geométricamente sobre la recta por aquellos números distintos de cero que están a la derecha de 0. Si a es un número positivo, escribimos $a > 0$. Sin duda ya habrán trabajado con números positivos y con desigualdades. Las dos propiedades siguientes son las más básicas acerca de la positividad.

POS 1. *Si a y b son positivos, entonces también lo son el producto ab y la suma $a + b$.*

POS 2. *Si a es un número, entonces a es positivo, o $a = 0$, o $-a$ es positivo, y estas posibilidades son exclusivas entre sí.*

Si un número no es positivo y no es 0, entonces decimos que este número es **negativo**. Por **POS 2**, si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.

Aunque ya sepan que el número 1 es positivo, de hecho se puede **probar** a partir de nuestras dos propiedades. Quizá les interese ver la demostración, que va como sigue y es muy sencilla. Por **POS 2** sabemos que 1 ó -1 es positivo; si 1 no es positivo, entonces -1 es positivo. Por **POS 1** se deduce entonces que $(-1)(-1)$ es positivo, pero este producto es igual a 1. En consecuencia, es el 1 el que debe ser positivo, no el -1. Usando la propiedad **POS 1**, podríamos concluir ahora que $1+1=2$ es positivo, que $2+1=3$ es positivo, y así sucesivamente.

Si $a>0$, diremos que a es **mayor que** 0. Si queremos decir que a es positivo o igual a 0, escribimos

$$a \geq 0$$

y esto se lee "a es mayor o igual que 0."

Dados dos números a y b, diremos que a es **mayor que** b y lo escribimos $a>b$ si $a-b>0$. Escribimos $a<0$ (a es **menor que** 0) si $-a>0$ y $a<b$ si $b>a$. Así, $3>2$ porque $3-2>0$.

Escribiremos $a \geq b$ cuando queramos decir que a es **mayor o igual que** b. Así, $3 \geq 2$ y $3 \geq 3$ son desigualdades verdaderas.

Hay otras reglas válidas acerca de las desigualdades.

En lo que sigue, sean a, b y c números.

Regla 1. *Si* $a>b$ *y* $b>c$, *entonces* $a>c$.

Regla 2. *Si* $a>b$ *y* $c>0$, *entonces* $ac>bc$.

Regla 3. *Si* $a>b$ *y* $c<0$, *entonces* $ac<bc$.

La regla 2 expresa el hecho de que se **preserva** una desigualdad multiplicada por un número positivo. La regla 3 dice que si multiplicamos ambos lados de una desigualdad por un número negativo, entonces la desigualdad **se invierte**. Por ejemplo, tenemos la desigualdad

$$1<3$$

Como $2>0$, tenemos también que $2\cdot 1<2\cdot 3$. Pero -2 es negativo y, si multiplicamos ambos lados por -2, obtenemos

$$-2>-6.$$

En la representación geométrica de los números reales sobre la recta, -2 está a la derecha de -6. Esto nos da la representación geométrica del hecho de que -2 es mayor que -6.

Si desean, pueden dar por supuestas estas tres reglas, como lo hicieron con **POS 1** y **POS 2**; todo esto se usa en la práctica. Sucede que las tres reglas se pueden probar en términos de **POS 1** y **POS 2**. Ahora bien, no podemos dar por supuestas todas las desigualdades que se encuentren en la práctica, por lo cual, sólo para mostrar algunas técnicas a las cuales conviene recurrir para otras

aplicaciones, mostraremos cómo se pueden deducir estas tres reglas a partir de **POS 1** y **POS 2**. Si desean pueden omitir estas (breves) demostraciones.

Para probar la regla 1 se supone que $a>b$ y $b>c$. Por definición, esto significa que $(a-b)>0$ y $(b-c)>0$. Usando la propiedad **POS 1**, concluimos que

$$a-b+b-c>0,$$

y cancelando b nos da $(a-c)>0$. Por definición, esto significa que $a>c$, como debía demostrarse.

Para probar la regla 2 se supone que $a>b$ y $c>0$. Por definición,

$$a-b>0.$$

Y usando la propiedad de **POS 1** respecto al producto de números positivos, concluimos que

$$(a-b)c>0.$$

El lado izquierdo de esta desigualdad no es otro que $ac-bc$, que es por lo tanto >0. De nuevo por definición, esto nos da

$$ac>bc.$$

Dejamos la demostración de la regla 3 como ejercicio.

Damos un ejemplo para mostrar cómo usar las tres reglas.

Ejemplo. Sean a, b, c y d números con c, $d>0$. Suponer que

$$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}.$$

Deseamos probar la regla de la "multiplicación cruzada"

$$ad<bc.$$

Usando la regla 2, al multiplicar por c cada lado de la desigualdad original, obtenemos

$$a<bc/d.$$

Usando de nuevo la regla 2 y multiplicando cada lado por d obtenemos

$$ad<bc,$$

según se deseaba.

Sea a un número >0. Entonces existe un número cuyo cuadrado es a. Si $b^2=a$ observamos que

$$(-b)^2=b^2$$

también es a, de modo que b o $-b$ es positivo. Acordamos denotar por $\sqrt{a}$ la raíz cuadrada **positiva** y llamarla simplemente **raíz cuadrada de** a. Así, $\sqrt{4}$ es igual a 2 y no a -2, aunque $(-2)^2=4$. Ésta es la convención más práctica que podemos hacer acerca del uso del signo $\sqrt{\ }$. Por supuesto, la raíz cuadrada de 0 es el 0 mismo. Un número negativo *no* tiene raíz cuadrada en los números reales.

Así, hay dos soluciones a una ecuación

$$x^2 = a$$

con $a > 0$. Estas dos soluciones son $x = \sqrt{a}$ y $x = -\sqrt{a}$. Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 3$ tiene las dos soluciones

$$x = \sqrt{3} = 1.732\ldots \quad \text{y} \quad x = -\sqrt{3} = -1.732\ldots.$$

La ecuación $x^2 = 0$ tiene exactamente una solución, a saber, $x = 0$. La ecuación $x^2 = a$ con $a < 0$ no tiene solución en los números reales.

Definición. Sea a un número. Definimos el **valor absoluto** de a como

$$\boxed{|a| = \sqrt{a^2}.}$$

En particular,

$$\boxed{|a|^2 = a^2.}$$

Así, el valor absoluto de un número siempre es ≥ 0. El valor absoluto de un número positivo siempre es positivo.

Ejemplo. Tenemos

$$|3| = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3,$$

pero

$$|-3| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Además, para cualquier número a obtenemos

$$|-a| = \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Teorema 2.1. *Si a es cualquier número, entonces*

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0, \\ -a & si \quad a < 0. \end{cases}$$

Demostración. Si $a \geq 0$, entonces a es el único número ≥ 0 cuyo cuadrado es a^2, de modo que $|a| = \sqrt{a^2} = a$. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$ y

$$(-a)^2 = a^2,$$

por lo cual, en esta ocasión, $-a$ es el único número > 0 cuyo cuadrado es a^2, de donde $|a| = -a$. Esto prueba el teorema.

Teorema 2.2. *Si a y b son números, entonces*

$$|ab| = |a|\,|b|.$$

Demostración. Tenemos

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a|\,|b|.$$

Como ejemplo, vemos que

$$|-6| = |(-3)\cdot 2| = |-3|\,|2| = 3\cdot 2 = 6.$$

Hay una última desigualdad sumamente importante.

Teorema 2.3. *Si a y b son dos números, entonces*

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Demostración. Observamos primero que ab es positivo, negativo, o bien 0. En cualquier caso, tenemos

$$ab \leq |ab| = |a|\,|b|.$$

Entonces, al multiplicar ambos lados por 2, obtenemos la desigualdad

$$2ab \leq 2|a|\,|b|.$$

Usando esta desigualdad hallamos:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a|\,|b| + b^2 \\ &= (|a| + |b|)^2.\end{aligned}$$

Podemos extraer la raíz cuadrada de ambos lados y usar el teorema 2.1 para concluir que

$$|a+b| \leq |a| + |b|,$$

con lo que probamos el teorema.

Más adelante hallarán gran cantidad de ejercicios para que practiquen con desigualdades; desarrollaremos algunos ejemplos numéricos para mostrarles el camino.

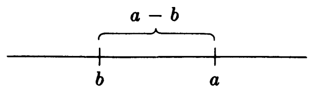
Ejemplo 1. Determinar los números que satisfacen la igualdad

$$|x+1| = 2.$$

Esta igualdad significa que $x+1 = 2$ o que $-(x+1) = 2$, porque el valor absoluto de $x+1$ es el mismo $(x+1)$ o bien $-(x+1)$. En el primer caso, al despejar x obtenemos $x = 1$, y en el segundo caso obtenemos $-x-1 = 2$ o $x = -3$. Así, la respuesta es $x = 1$ o $x = -3$.

> *Sean a y b números. Podemos interpretar*
>
> $$|a-b| = \sqrt{(a-b)^2}$$
>
> *como la distancia entre a y b.*

Por ejemplo, si $a > b$, entonces esto está geométricamente claro a partir de la figura.



Por otro lado, si $a < b$, tenemos

$$|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|,$$

y $b > a$, de modo que vemos de nuevo que $|a - b| = |b - a|$ es la distancia entre a y b.

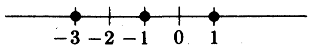
En el ejemplo anterior, el conjunto de números x tales que

$$|x + 1| = 2$$

es el conjunto de números cuya distancia a -1 es 2, pues podemos escribir

$$x + 1 = x - (-1).$$

Así, de nuevo vemos geométricamente que este conjunto de números está formado por 1 y -3, como se muestra en la figura.



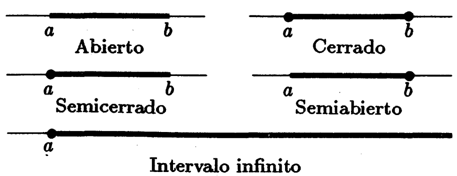
También daremos un ejemplo para mostrar cómo se determinan los números que satisfacen determinadas desigualdades. Para ello necesitamos cierta terminología. Sean a y b números, y supongamos que $a < b$.

La colección de números x tales que $a < x < b$ se llama **intervalo abierto** entre a y b, y a veces se denota por (a, b).

La colección de números x tales que $a \leq x \leq b$ se llama **intervalo cerrado** entre a y b, y a veces se denota por $[a, b]$. A un solo punto también se le llamará intervalo cerrado.

En los dos casos anteriores, los números a y b se llaman **puntos extremos** de los intervalos. En ocasiones queremos incluir uno solo de ellos dentro del intervalo, y entonces definimos la colección de números x tales que $a \leq x < b$ como **intervalo semicerrado**, y de manera similar para aquellos números x tales que $a < x \leq b$.

Por último, si a es un número, llamamos **intervalo infinito** a la colección de números $x > a$, o $x \geq a$, o $x < a$, o $x \leq a$. A continuación se muestran dibujos de intervalos.



Ejemplo 2. Determinar todos los intervalos de números que satisfacen

$$|x| \leq 4.$$

Distinguimos dos casos; el primero es $x \geq 0$. Entonces, $|x| = x$, y en este caso, nuestra desigualdad equivale a

$$0 \leq x \leq 4.$$

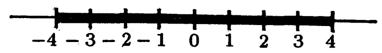
El segundo caso es $x < 0$, donde $|x| = -x$, y nuestra desigualdad equivale a $-x \leq 4$ o en otras palabras, $-4 \leq x$. Así, en el segundo caso, los números que satisfacen nuestra desigualdad son precisamente los que están en el intervalo

$$-4 \leq x < 0.$$

Si consideramos ahora ambos casos, vemos que el intervalo de números que satisfacen nuestra desigualdad $|x| \leq 4$ es el intervalo

$$-4 \leq x \leq 4.$$

También podemos expresar la respuesta en términos de distancia. Los números x tales que $|x| \leq 4$ son precisamente aquellos números cuya distancia al origen es ≤ 4 y en consecuencia conforman el intervalo cerrado entre -4 y 4, como se muestra en la figura.



De manera más general, sea a un número positivo. Un número x satisface la desigualdad $|x| < a$ si, y sólo si,

$$-a < x < a.$$

El argumento para probar esto es el mismo que en el caso particular $a = 4$ recién estudiado.

Ejemplo 3. Determinar todos los intervalos de números que satisfagan la desigualdad

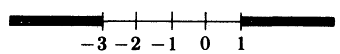
$$|x + 1| > 2.$$

Esta desigualdad es equivalente a las dos desigualdades

$$x + 1 > 2 \quad \text{o} \quad -(x + 1) > 2.$$

De la primera obtenemos la condición $x > 1$, y de la segunda, la condición $-x - 1 > 2$ o, en otras palabras, $x < -3$. Se tienen así dos intervalos (infinitos), a saber

$$x > 1 \quad \text{y} \quad x < -3.$$



Ejemplo 4. Ahora, en cambio, queremos determinar el intervalo de números

x tales que

$$|x+1|<2.$$

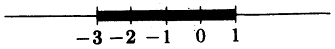
Éstos son los números x cuya distancia a -1 es <2, pues podemos escribir

$$x+1=x-(-1).$$

Por lo tanto, es el intervalo de números que satisfacen

$$-3<x<1$$

según se muestra en la figura.



I, §2. EJERCICIOS

Determinar todos los intervalos de números x que satisfacen las desigualdades siguientes.

1. $|x|<3$
2. $|2x+1|\leq 1$
3. $|x^2-2|\leq 1$
4. $|x-5|>2$
5. $(x+1)(x-2)<0$
6. $(x-1)(x+1)>0$
7. $(x-5)(x+5)<0$
8. $x(x+1)\leq 0$
9. $x^2(x-1)\geq 0$
10. $(x-5)^2(x+10)\leq 0$
11. $(x-5)^4(x+10)\leq 0$
12. $(2x+1)^6(x-1)\geq 0$
13. $(4x+7)^{20}(2x+8)<0$
14. $|x+4|<1$
15. $0<|x+2|<1$
16. $|x|<2$
17. $|x-3|<5$
18. $|x-3|<1$
19. $|x-3|<7$
20. $|x-3|>7$
21. $|x+3|>7$

Probar las desigualdades siguientes para todos los números x y y.

22. $|x+y|\geq|x|-|y|$ [*Idea:* Escribir $x=x+y-y$ y aplicar el teorema 2.3 junto con el hecho de que $|-y|=|y|$.]
23. $|x-y|\geq|x|-|y|$
24. $|x-y|\leq|x|+|y|$
25. Sean a y b números positivos tales que $a<b$. Mostrar que $a^2<b^2$.
26. Sean a, b, c y d números >0 tales que $a/b<c/d$. Mostrar que
$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d} \quad \text{y} \quad \frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}.$$
27. Sean a y b números >0. Mostrar que
$$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}.$$
28. Sea $0<a<b$ y $0<c<d$. Probar que
$$ac<bd.$$

I, §3. FUNCIONES

Una función, definida para todos los números, es una asociación que a cualquier número dado asocia otro número.

Se acostumbra denotar una función mediante una letra, así como una letra "x" denota un número. Así, si denotamos por f una función dada y x es un número, entonces denotamos por $f(x)$ el número asociado con x mediante la función. Claro que esto no significa "f por x": no hay multiplicación aquí. Los símbolos $f(x)$ se leen "f de x." A veces se denota la asociación del número $f(x)$ al número x mediante una flecha especial, a saber

$$x\mapsto f(x).$$

Por ejemplo, consideremos la función que a cada número x asocia el número x^2. Si f denota esta función, entonces tenemos $f(x)=x^2$. En particular, el cuadrado de 2 es 4 y por consiguiente, $f(2)=4$. El cuadrado de 7 es 49, por lo que $f(7)=49$. El cuadrado de $\sqrt{2}$ es 2 y por lo tanto $f(\sqrt{2})=2$. El cuadrado de $(x+1)$ es

$$x^2+2x+1$$

y así $f(x+1)=x^2+2x+1$. Si h es cualquier número,

$$f(x+h)=x^2+2xh+h^2.$$

Para tomar otro ejemplo, sea g la función que a cada número asocia el número $x+1$. Entonces podemos describir g mediante los símbolos

$$x\mapsto x+1$$

y escribir $g(x)=x+1$. Por lo tanto, $g(1)=2$. Además, $g(2)=3$, $g(3)=4$, $g(\sqrt{2})=\sqrt{2}+1$ y $g(x+1)=x+2$ para cualquier número x.

Podemos ver el **valor absoluto** como una función,

$$x\mapsto|x|$$

definida por la regla: Dado cualquier número a, le asociamos el mismo número a si $a\geq 0$, y le asociamos el número $-a$ si $a<0$. Denotemos por F la función valor absoluto. Entonces $F(x)=|x|$ para cualquier número x. Tenemos en particular que $F(2)=2$, y también que $F(-2)=2$. El valor absoluto no se define mediante una fórmula como x^2 o $x+1$. En seguida damos otro ejemplo de una función que no está definida mediante una fórmula.

Consideremos la función G descrita por la siguiente regla:

$$G(x)=0 \quad \text{si } x \text{ es un número racional.}$$
$$G(x)=1 \quad \text{si } x \text{ no es un número racional.}$$

Entonces en particular, $G(2)=G(\frac{2}{3})=G(-\frac{3}{4})=0$ pero

$$G(\sqrt{2})=1.$$

Deben comprender que es posible construir una función con sólo prescribir de manera arbitraria la regla que asocia un número a uno dado.

Si f es una función y x un número, entonces $f(x)$ se llama **valor** de la función en x. Así, si f es la función

$$x \mapsto x^2,$$

el valor de f en 2 es 4 y el valor de f en $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{4}$.

Para describir una función necesitamos simplemente dar su valor en cualquier número x. Ésta es la razón por la cual empleamos la notación $x \mapsto f(x)$. A veces, por brevedad, hablamos de la función $f(x)$, queriendo referirnos con ello a la función f cuyo valor en x es $f(x)$. Por ejemplo, diríamos "sea $f(x)$ la función $x^3 + 5$" en lugar de decir "sea f la función que a cada número x le asocia $x^3 + 5$." Usando la flecha especial $\mapsto$, también podríamos decir "sea f la función $x \mapsto x^3 + 5$."

También nos gustaría poder definir una función para algunos números y dejarla indefinida para otros. Por ejemplo, nos gustaría decir que $\sqrt{x}$ es una función (la función raíz cuadrada, cuyo valor en un número x es la raíz cuadrada de ese número), pero observamos que un número negativo no tiene raíz cuadrada. Por tal motivo, es deseable hacer un poco más general el concepto de función enunciando explícitamente para qué números está definida. Por ejemplo, la raíz cuadrada está definida sólo para números ≥ 0. Esta función se denota por $\sqrt{x}$. El valor $\sqrt{x}$ es el único número ≥ 0 cuyo cuadrado es x.

Así en general, sea S una colección de números. Por **función definida en** S, entendemos una asociación que a cada número x en S le asocia un número. Llamamos a S el **dominio de definición** de la función. Por ejemplo, el dominio de definición de la función raíz cuadrada es la colección de todos los números ≥ 0.

Demos otro ejemplo de una función que no está definida para todos los números. Sea S la colección de todos los números $\neq 0$. La función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

está definida para números $x \neq 0$ y, por lo tanto, está definida en el dominio S. Para esta función particular tenemos $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 2$, y

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En la práctica, las funciones se usan para denotar la dependencia de una cantidad con respecto a otra.

Ejemplo. El área dentro de un círculo de radio r está dada por la fórmula

$$A = \pi r^2.$$

Así pues, el área es una función del radio r, y podemos escribir también

$$A(r) = \pi r^2.$$

Si el radio es 2, entonces el área dentro de un círculo de radio 2 está dada por

$$A(2) = \pi 2^2 = 4\pi.$$

Ejemplo. Un automóvil se mueve a una rapidez constante de 50 km/hr. Si se mide el tiempo en horas, la distancia recorrida es una función del tiempo, es decir, si denotamos por s la distancia, entonces

$$s(t) = 50t.$$

La distancia es el producto de la rapidez por el tiempo transcurrido, de modo que, después de dos horas, la distancia es

$$s(2) = 50 \cdot 2 = 100\,\text{km}.$$

Una palabra final antes de pasar a los ejercicios: No existe ninguna razón mágica por la cual siempre debamos usar la letra x para describir una función $f(x)$. En lugar de hablar de la función $f(x) = 1/x$ podríamos de igual manera decir $f(y) = 1/y$ o $f(q) = 1/q$. Desafortunadamente, la manera más neutral de escribirlo sería $f(\text{espacio}) = 1/\text{espacio}$, y esto no es conveniente en absoluto.

I, §3. EJERCICIOS

1. Sea $f(x) = 1/x$. ¿Cuál es $f(-\frac{2}{3})$?
2. Sea de nuevo $f(x) = 1/x$. ¿Cuál es $f(2x+1)$ (para cualquier número x tal que $x \neq -\frac{1}{2}$)?
3. Sea $g(x) = |x| - x$. ¿Cuáles son $g(1)$, $g(-1)$, $g(-54)$?
4. Sea $f(y) = 2y - y^2$. ¿Cuáles son $f(z)$, $f(w)$?
5. ¿Para qué números se podría definir una función $f(x)$ mediante la fórmula
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}?$$
¿Cuál es el valor de esta función para $x = 5$?
6. ¿Para qué números se podría definir una función $f(x)$ mediante la fórmula $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (raíz cúbica de x)? ¿Cuál es $f(27)$?
7. Sea $f(x) = x/|x|$, definida para $x \neq 0$. ¿Cuáles son:
(a) $f(1)$ (b) $f(2)$ (c) $f(-3)$ (d) $f(-\frac{4}{3})$?
8. Sea $f(x) = x + |x|$. ¿Cuáles son:
(a) $f(\frac{1}{2})$ (b) $f(2)$ (c) $f(-4)$ (d) $f(-5)$?
9. Sea $f(x) = 2x + x^2 - 5$. ¿Cuáles son:
(a) $f(1)$ (b) $f(-1)$ (c) $f(x+1)$?
10. ¿Para qué números se podría definir una función $f(x)$ mediante la fórmula $f(x) = \sqrt[4]{x}$ (raíz cuarta de x)? ¿Cuál es $f(16)$?
11. Se dice que una función (definida para todos los números) es una función **par** si $f(x) = f(-x)$ para todo x. Se dice que es una función **impar** si $f(x) = -f(-x)$ para todo x. Determinar si las funciones siguientes son impares o pares.
(a) $f(x) = x$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = x^3$
(d) $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

12. Sea f cualquier función definida para todos los números. Mostrar que la función $g(x) = f(x) + f(-x)$ es par. ¿Qué sucede con la función
$$h(x) = f(x) - f(-x),$$
es par, impar o ni lo uno ni lo otro?

I, §4. POTENCIAS

En esta sección simplemente resumimos algo de aritmética elemental.

Sea n un entero ≥ 1 y sea a cualquier número. Entonces a^n es el producto de a consigo mismo n veces. Por ejemplo, sea $a = 3$. Si $n = 2$, entonces $a^2 = 9$. Si $n = 3$, entonces $a^3 = 27$. Así obtenemos una función llamada n-ésima **potencia**. Si f denota esta función, entonces $f(x) = x^n$.

Recordemos la regla
$$x^{m+n} = x^m x^n$$
para cualquier número x y enteros m, $n \geq 1$.

De nuevo, sea n un entero ≥ 1, y sea a un número positivo. Definimos $a^{1/n}$ como el único número positivo b tal que $b^n = a$. (Con base en las propiedades de los números se sobreentiende que existe ese número único b.) Obtenemos una función llamada la **raíz** n-ésima. Así, si f es la raíz cuarta, entonces $f(16) = 2$ y $f(81) = 3$.

La función raíz n-ésima también se puede definir en 0, haciendo que la raíz n-ésima de 0 sea el 0 mismo.

Si a y b son dos números ≥ 0 y n es un entero ≥ 1, entonces
$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}.$$

Hay otra regla útil y elemental. Sean m y n enteros ≥ 1 y sea a un número ≥ 0. Definimos $a^{m/n}$ como $(a^{1/n})^m$, que también es igual a $(a^m)^{1/n}$. Esto permite definir potencias fraccionarias, y da una función
$$f(x) = x^{m/n}$$
definida para $x \geq 0$.

Prosigamos ahora con potencias con números negativos o 0. Deseamos definir x^a cuando a es un número racional negativo o 0 y $x > 0$. Queremos que la regla fundamental
$$x^{a+b} = x^a x^b$$
sea cierta. Esto significa que debemos definir x^0 como 1. Por ejemplo, como
$$2^3 = 2^{3+0} = 2^3\,2^0,$$
vemos en este ejemplo que la única manera de que se cumpla esta ecuación es estableciendo $2^0 = 1$. De manera análoga, en general, si la relación
$$x^a = x^{a+0} = x^a x^0$$
es cierta, entonces x^0 debe ser igual a 1.

Supongamos finalmente que a es un número racional positivo, y sea x un número > 0. **Definimos**
$$\boxed{x^{-a} = \frac{1}{x^a}.}$$

Así pues,
$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad \text{y} \quad 4^{-2/3} = \frac{1}{4^{2/3}}.$$
Observamos que, en este caso particular,
$$(4^{-2/3})(4^{2/3}) = 4^0 = 1.$$
En general,
$$x^a x^{-a} = x^0 = 1.$$

Estamos tentados a definir x^a incluso si a no es un número racional. Esto es más delicado. Por ejemplo, carece totalmente de sentido decir que $2^{\sqrt{2}}$ es el producto de 2 por sí mismo un número raíz cuadrada de 2, veces. El problema de definir 2^a (o x^a) cuando a no es racional se posterga para un capítulo posterior. Hasta ese capítulo, donde trataremos de dicha potencia, supondremos que existe una función, que se escribe x^a, descrita como lo hemos hecho anteriormente para los números racionales y que satisface la relación fundamental
$$x^{a+b} = x^a x^b, \qquad x^0 = 1.$$

Ejemplo. Tenemos una función $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ definida para todo $x > 0$. Sin lugar a dudas es difícil describir sus valores para números particulares, como $2^{\sqrt{2}}$. Durante mucho tiempo no se supo si $2^{\sqrt{2}}$ era o no un número racional. La solución (*no lo es*) fue hallada apenas en 1927 por el matemático Gelfond, quien cobró fama por resolver un problema catalogado como verdaderamente difícil.

Advertencia. No se confunda una función como x^2 con una función como 2^x. Dado un número $c > 0$, podemos ver e^x como una función definida para todo x (la cual se analizará en detalle en el capítulo VIII). Esta función se llama **función exponencial**, de manera que 2^x y 10^x son funciones exponenciales. Seleccionaremos un número
$$e = 2.718\ldots$$
y la función exponencial e^x como la que presenta ciertas propiedades que la hacen mejor que cualquier otra función exponencial. El significado de nuestro uso de la palabra "mejor" se explicará en el capítulo VIII.

I, §4. EJERCICIOS

Hallar a^x y x^a para los siguientes valores de x y a.

1. $a = 2$ y $x = 3$
2. $a = 5$ y $x = -1$
3. $a = \frac{1}{2}$ y $x = 4$
4. $a = \frac{1}{3}$ y $x = 2$
5. $a = -\frac{1}{2}$ y $x = 4$
6. $a = 3$ y $x = 2$
7. $a = -3$ y $x = -1$
8. $a = -2$ y $x = -2$
9. $a = -1$ y $x = -4$
10. $a = -\frac{1}{2}$ y $x = 9$
11. Si n es un entero impar como $1, 3, 5, 7, \ldots$, ¿se puede definir una función de raíz n-ésima para todos los números?

CAPÍTULO II

Gráficas y curvas

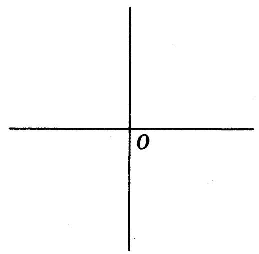
Las ideas contenidas en este capítulo nos permiten traducir enunciados o afirmaciones entre el lenguaje de los números y el lenguaje de la geometría, en ambos sentidos.

Esta posibilidad es fundamental para todo lo que sigue, pues así podemos usar nuestra intuición geométrica como ayuda para resolver problemas acerca de números y funciones y, recíprocamente, podemos usar teoremas acerca de números y funciones para obtener resultados acerca de geometría.

II, §1. COORDENADAS

Una vez seleccionada una unidad de longitud, podemos representar los números como puntos sobre una recta. Extenderemos ahora este procedimiento al plano y a pares de números.

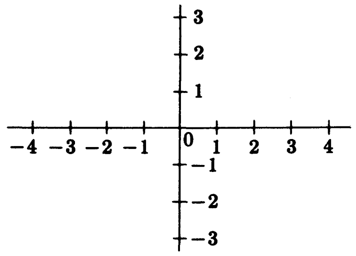
Consideremos una recta horizontal y una recta vertical intersecándose en un origen O.



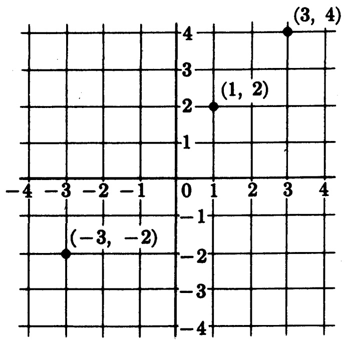
Estas rectas se llamarán **ejes coordenados** o simplemente **ejes**.

Se selecciona una unidad de longitud y se corta la recta horizontal en segmentos de longitudes $1, 2, 3, \ldots$ hacia la izquierda y hacia la derecha, y hacemos lo mismo con la recta vertical, pero hacia arriba y hacia abajo, como se indica en la figura siguiente.

Sobre la recta vertical se puede considerar que los puntos que están por abajo del cero corresponden a los enteros negativos, así como consideramos que los puntos de la izquierda sobre la recta horizontal corresponden a los enteros negativos. Vean la figura.



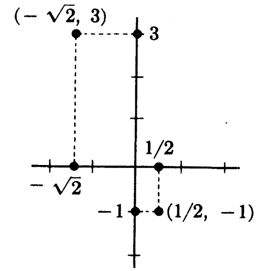
Ahora es posible cortar el plano en cuadrados cuyos lados tengan longitud 1.



Describamos cada punto donde se intersecan dos rectas mediante un par de enteros. Supongan que tenemos dados un par de enteros como $(1,2)$. Nos desplazamos hacia la derecha del origen 1 unidad y verticalmente hacia arriba 2 unidades para obtener el punto $(1,2)$ señalado en la figura. También hemos señalado el punto $(3,4)$. El diagrama es muy semejante a un mapa.

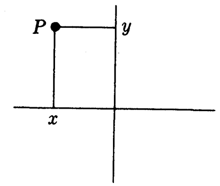
Más aún, también podemos usar números negativos. Por ejemplo, para describir el punto $(-3,-2)$ nos desplazamos hacia la izquierda del origen 3 unidades y verticalmente hacia abajo 2 unidades.

En realidad no existe razón alguna para que nos debamos limitar a puntos descritos por enteros. Por ejemplo, también podemos tener el punto $(\frac{1}{2},-1)$ y el punto $(-\sqrt{2},3)$ como en la figura de la página siguiente.



No trazamos todos los cuadrados sobre el plano, sino sólo las rectas útiles para hallar nuestros dos puntos.

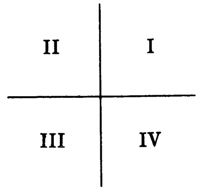
En general, si tomamos cualquier punto P en el plano y trazamos las rectas perpendiculares hacia el eje horizontal y hacia el eje vertical, obtenemos dos números x y y como en la figura que sigue.



La recta perpendicular desde P hacia el eje horizontal determina un número x que es negativo en la figura porque está a la izquierda del origen. El número y determinado por la perpendicular desde P hacia el eje vertical es positivo, pues está arriba del origen. Los dos números x y y se llaman **coordenadas** del punto P, y podemos escribir $P = (x,y)$.

Todo par de números (x,y) determina un punto del plano. Hallamos el punto desplazándonos una distancia x desde el origen O en la dirección horizontal y después una distancia y en la dirección vertical. Si x es positivo nos desplazamos hacia la derecha de O; si x es negativo, lo hacemos hacia la izquierda de O. Si y es positivo, vamos verticalmente hacia arriba y si y es negativo vamos verticalmente hacia abajo. Las coordenadas del origen son $(0,0)$. Usualmente el eje horizontal se llama **eje x** y el eje vertical, **eje y**. Si un punto P se describe por dos números, digamos $(5,-10)$, es costumbre llamar al primer número coordenada x o abscisa y al segundo número coordenada y u ordenada. Así, 5 es la abscisa y -10 es la ordenada de nuestro punto. Es obvio que podemos usar otras letras además de x y y, por ejemplo t y s, o u y v.

Nuestros dos ejes separan el plano en cuatro **cuadrantes**, los cuales están numerados como se indica en la figura:



Si (x, y) es un punto en el primer cuadrante, entonces tanto x como y son > 0. Si (x, y) es un punto en el cuarto cuadrante, entonces $x > 0$ pero $y < 0$.

II, §1. EJERCICIOS

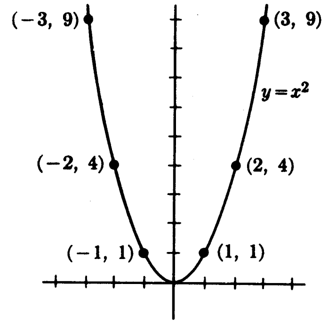
1. Localizar los puntos siguientes: $(-1, 1)$, $(0, 5)$, $(-5, -2)$, $(1, 0)$.
2. Localizar los puntos siguientes: $(\frac{1}{2}, 3)$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{4}{3}, -2)$, $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.
3. Sean (x, y) las coordenadas de un punto en el segundo cuadrante. ¿Es x positivo, o negativo? ¿Es y positivo, o negativo?
4. Sean (x, y) las coordenadas de un punto en el tercer cuadrante. ¿Es x positivo, o negativo? ¿Es y positivo, o negativo?
5. Localizar los puntos siguientes: $(1.2, -2.3)$, $(1.7, 3)$.
6. Localizar los puntos siguientes: $(-2.5, \frac{1}{3})$, $(-3.5, \frac{5}{4})$.
7. Localizar los puntos siguientes: $(1.5, -1)$, $(-1.5, -1)$.

II, §2. GRÁFICAS

Sea f una función. Definimos la **gráfica** de f como la colección de todos los pares de números $(x, f(x))$ cuya primera coordenada es cualquier número para el cual f está definido y cuya segunda coordenada es el valor de la función en la primera coordenada.

Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^2$ está formada por todos los pares (x, y) tales que $y = x^2$. En otras palabras, es la colección de todos los pares (x, x^2), como $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(-1, 1)$, $(-3, 9)$, etc.

Como cada par de números corresponde a un punto sobre el plano (una vez seleccionado un sistema de ejes y una unidad de longitud), podemos ver la gráfica de f como una colección de puntos en el plano. En la siguiente figura se ha trazado la gráfica de la función $f(x) = x^2$ junto con los puntos que dimos como ejemplo.



Para determinar la gráfica localizamos multitud de puntos construyendo una tabla con las abscisas y ordenadas.

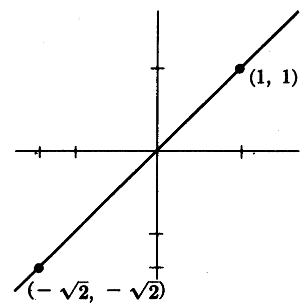
x	$f(x)$
1	1
2	4
3	9
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

x	$f(x)$
-1	1
-2	4
-3	9
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

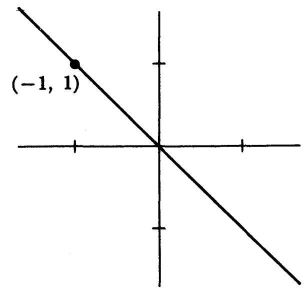
En esta etapa del juego no hay sino este método de ensayo y error para determinar la gráfica de una función. Más adelante desarrollaremos técnicas que permitirán elaborarlas con mayor destreza.

Daremos ahora varios ejemplos de gráficas de funciones que se presentan con frecuencia en nuestro estudio.

Ejemplo 1. Considerar la función $f(x) = x$. Los puntos sobre esta gráfica son del tipo (x, x). La primera coordenada debe ser igual a la segunda. Así, $f(1) = 1$, $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, etc. La gráfica se ve así:

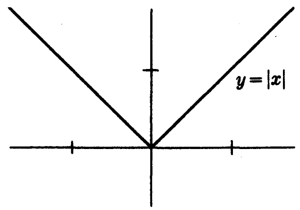


Ejemplo 2. Sea $f(x) = -x$. Su gráfica se ve así:



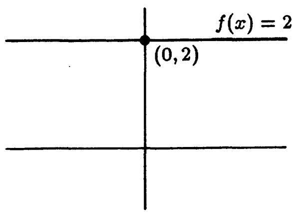
Se puede observar que las gráficas de las dos funciones anteriores son rectas. Más adelante estudiaremos el caso general de una recta.

Ejemplo 3. Sea $f(x) = |x|$. Cuando $x \geq 0$, sabemos que $f(x) = x$, y cuando $x \leq 0$, sabemos que $f(x) = -x$, de aquí que la gráfica de $|x|$ se obtenga combinando las dos anteriores y se vea así:



Todos los valores de $f(x)$ son ≥ 0, sin importar si x es positivo o negativo.

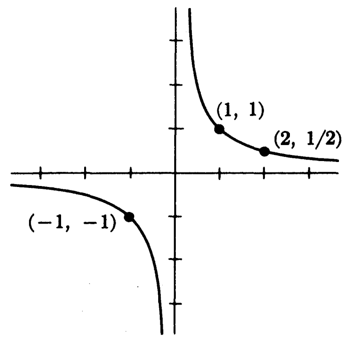
Ejemplo 4. Hay una clase de funciones incluso más sencillas que las recién vistas, a saber, las funciones constantes. Por ejemplo, podemos definir una función f tal que $f(x) = 2$ para todos los números x. En otras palabras, asociamos el número 2 a cualquier número x. Es una asociación muy sencilla, y la gráfica de esta función es una recta horizontal que interseca al eje vertical en el punto $(0, 2)$.



Si tomáramos la función $f(x) = -1$, la gráfica sería una recta horizontal que intersecara al eje vertical en el punto $(0, -1)$.

En general, sea c un número fijo. La gráfica de cualquier función $f(x) = c$ es la recta horizontal que interseca al eje vertical en el punto $(0, c)$. La función $f(x) = c$ se llama función **constante**.

Ejemplo 5. El último de nuestros ejemplos es la función $f(x) = 1/x$ (definida para $x \neq 0$). Tras localizar unos cuantos puntos de la gráfica, observarán que se ve como sigue.



Por ejemplo, se pueden localizar los puntos siguientes:

x	$1/x$
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{3}$	3

x	$1/x$
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	-2
$-\frac{1}{3}$	-3

Conforme x se hace positivo muy grande, $1/x$ se va haciendo muy pequeño. A medida que x se acerca a 0 desde la derecha, $1/x$ se va haciendo muy grande. Un fenómeno similar ocurre cuando x se acerca a 0 desde la izquierda; en ese caso x es negativo y $1/x$ es negativo. Por lo tanto, en ese caso $1/x$ es negativo muy grande.

Al tratar de determinar cómo se ve la gráfica de una función, conviene observar lo siguiente:

Los puntos en los que la gráfica interseca a los dos ejes coordenados.
Lo que sucede cuando x se vuelve muy grande positivo y muy grande negativo.

Pero, en términos generales, la técnica principal que usarán al resolver los ejercicios es localizar multitud de puntos hasta discernir cómo se ve la gráfica.

II, §2. EJERCICIOS

Trazar las gráficas de las funciones siguientes y localizar al menos tres puntos sobre cada gráfica. En todos estos casos damos el valor de la función en x.

1. $x+1$	2. $2x$	3. $3x$
4. $4x$	5. $2x+1$	6. $5x+\frac{1}{2}$
7. $\frac{x}{2}+3$	8. $-3x+2$	9. $2x^2-1$
10. $-3x^2+1$	11. x^3	12. x^4
13. $\sqrt{x}$	14. $x^{-1/2}$	15. $2x+1$
16. $x+3$	17. $\lvert x\rvert+x$	18. $\lvert x\rvert+2x$
19. $-\lvert x\rvert$	20. $-\lvert x\rvert+x$	21. $\frac{1}{x+2}$
22. $\frac{1}{x-2}$	23. $\frac{1}{x+3}$	24. $\frac{1}{x-3}$
25. $\frac{2}{x-2}$	26. $\frac{2}{x+2}$	27. $\frac{2}{x}$
28. $\frac{-2}{x+5}$	29. $\frac{3}{x+1}$	30. $\frac{x}{\lvert x\rvert}$

(En los ejercicios 13, 14 y del 21 al 30, las funciones no están definidas para todos los valores de x.)

31. Esbozar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:
$f(x)=0$ si $x\leq 0$. $f(x)=1$ si $x>0$.

32. Esbozar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:
$f(x)=x$ si $x<0$. $f(0)=2$. $f(x)=x$ si $x>0$.

33. Esbozar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:
$f(x)=x^2$ si $x<0$. $f(x)=x$ si $x\geq 0$.

34. Esbozar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:
$f(x)=\lvert x\rvert+x$ si $-1\leq x\leq 1$.
$f(x)=3$ si $x>1$. [$f(x)$ no está definida para otros valores de x.]

35. Esbozar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:
$f(x)=x^3$ si $x\leq 0$. $f(x)=1$ si $0<x<2$. $f(x)=x^2$ si $x\geq 2$.

36. Esbozar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:
$f(x)=x$ si $0<x\leq 1$. $f(x)=x-1$ si $1<x\leq 2$.
$f(x)=x-2$ si $2<x\leq 3$. $f(x)=x-3$ si $3<x\leq 4$.

[$f(x)$ quedó indefinida para otros valores de x, pero intenten definirla de manera que se preserve la simetría de la gráfica.]

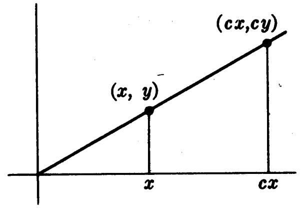
II, §3. LA RECTA

Uno de los tipos básicos de funciones es el tipo cuya gráfica representa una recta. Ya vimos que la gráfica de la función $f(x)=x$ es una recta. Si tomamos $f(x)=2x$, entonces la recta se inclina y se empina más, y aún más para $f(x)=3x$. La gráfica de la función $f(x)=10\,000x$ se vería casi vertical. En general, sea a un número positivo $\neq 0$. Entonces, la gráfica de la función

$$f(x)=ax$$

representa una recta. El punto $(2,2a)$ está sobre la recta, pues $f(2)=2a$. El punto $(\sqrt{2},\sqrt{2}a)$ también está sobre la recta, y si c es cualquier número, el punto (c,ca) está sobre la recta. Las coordenadas (x,y) de estos puntos se obtienen construyendo una transformación de semejanza, comenzando con las coordenadas $(1,a)$ y multiplicándolas por algún número c.

Podemos visualizar este procedimiento mediante triángulos semejantes. En la figura que se muestra a continuación tenemos una recta. Si seleccionamos un punto (x,y) sobre la recta y bajamos la perpendicular desde este punto al eje x, obtenemos un triángulo rectángulo.



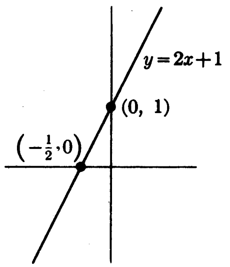
Si x es la longitud de la base del triángulo más pequeño de la figura y y es su altura, y si cx es la longitud de la base del triángulo más grande, entonces cy es la altura del triángulo más grande: el triángulo más pequeño es semejante al más grande.

Si a es un número <0, la gráfica de la función $f(x)=ax$ también será una recta, la cual se inclina hacia la izquierda; por ejemplo, las gráficas de

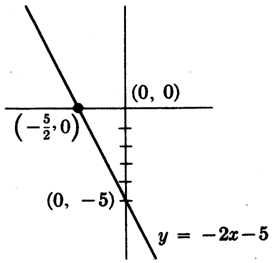
$$f(x)=-x \quad \text{o} \quad f(x)=-2x.$$

Damos ahora ejemplos de rectas más generales, que no pasan por el origen.

Ejemplo 1. Sea $g(x)=2x+1$. Cuando $x=0$, entonces $g(x)=1$. Cuando $g(x)=0$, entonces $x=-\frac{1}{2}$. La gráfica se ve como en la figura de la página siguiente.



Ejemplo 2. Sea $g(x) = -2x - 5$. Si $x = 0$, entonces $g(x) = -5$. Si $g(x) = 0$, entonces $x = -\frac{5}{2}$. La gráfica se ve como sigue



Con frecuencia nos referiremos a una función $f(x) = ax+b$ como a una recta (aunque, por supuesto, es la gráfica la que es una recta).

El número a que es el coeficiente de x se llama **pendiente** de la recta, y determina cuánto se inclina la recta. Como acabamos de ver en los ejemplos, cuando la pendiente es positiva, la recta está inclinada hacia la derecha, y cuando la pendiente es negativa, la recta está inclinada hacia la izquierda. A la relación $y = ax + b$ se le llama también **ecuación** de la recta, y da la relación entre la abscisa y la ordenada de un punto sobre la recta.

Sea $f(x) = ax+b$ una recta, y sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos de la recta. Es fácil hallar la pendiente de la recta en términos de las coordenadas de estos dos puntos. Por definición sabemos que

$$y_1 = ax_1 + b$$

y

$$y_2 = ax_2 + b.$$

Restando tenemos

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1).$$

En consecuencia, si los dos puntos son distintos, $x_2 \neq x_1$, entonces podemos

dividir entre $x_2 - x_1$ y obtener

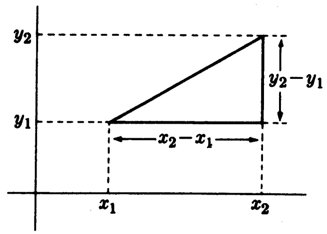
$$\boxed{\text{pendiente de la recta} = a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.}$$

Esta fórmula da la pendiente en términos de las coordenadas de dos puntos distintos sobre la recta.

Geométricamente, nuestro cociente

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es simplemente la razón del lado vertical y el lado horizontal del triángulo del diagrama siguiente:



En general, sea a un número y (x_1, y_1) algún punto.

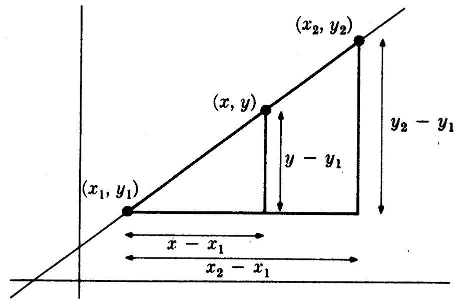
Deseamos hallar la ecuación de la recta que tenga pendiente igual a a y que pase por el punto (x_1, y_1).

La condición de que un punto (x, y) con $x \neq x_1$ esté sobre la recta es equivalente a la condición de que

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a.$$

Así, la ecuación de la recta deseada es

$$\boxed{y - y_1 = a(x - x_1).}$$



Ejemplo 3. Sean $(1,2)$ y $(2,-1)$ dos puntos ¿Cuál es la pendiente de la recta que los une? ¿Cuál es la ecuación de la recta?

Primero hallamos la pendiente. Tenemos:

$$\text{pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-2}{2-1} = -3.$$

La recta debe pasar por el punto dado $(1,2)$. Por lo tanto, su ecuación es

$$y - 2 = -3(x-1).$$

Ésta es una respuesta correcta. A veces puede ser útil poner la ecuación en la forma

$$y = -3x + 5,$$

pero es igualmente válido dejarla en la primera forma.

Observen que no importa a cuál punto llamemos (x_1, y_1) y a cuál llamemos (x_2, y_2). Obtendríamos la misma respuesta para la pendiente.

También podemos determinar la ecuación de una recta si conocemos la pendiente y un punto.

Ejemplo 4. Hallar la ecuación de la recta con pendiente -7 que pasa por el punto $(-1,2)$.

La ecuación es

$$y - 2 = -7(x+1).$$

Ejemplo 5. En general, sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos distintos con $x_1 \neq x_2$. Deseamos hallar la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos. Su pendiente debe, pues, ser igual a

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Por ello la ecuación de la recta se puede expresar mediante la fórmula

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

para todos los puntos (x, y) tales que $x \neq x_1$, o para todos los puntos mediante

$$\boxed{y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1).}$$

Por último, debemos mencionar las rectas verticales. Éstas no se pueden representar mediante ecuaciones del tipo $y = ax + b$. Supongamos que tenemos una recta vertical que interseca al eje x en el punto $(2,0)$. La coordenada y u ordenada de cualquier punto sobre la recta puede ser arbitraria. Así, la ecuación de la recta es simplemente $x = 2$. En general, la ecuación de la recta vertical que interseca al eje x en el punto $(c, 0)$ es $x = c$.

Podemos hallar el punto de intersección de dos rectas al resolver simultáneamente dos ecuaciones lineales.

Ejemplo 6. Hallar el punto de intersección de las dos rectas

$$y = 3x - 5 \quad \text{y} \quad y = -4x + 1.$$

Resolvemos

$$3x - 5 = -4x + 1$$

o de manera equivalente, $7x = 6$. Esto da $x = \frac{6}{7}$, de donde

$$y = 3 \cdot \frac{6}{7} - 5 = \frac{18}{7} - 5.$$

Por consiguiente, el punto común es

$$\left(\frac{6}{7}, \frac{18}{7} - 5\right).$$

II, §3. EJERCICIOS

Trazar las gráficas de las rectas siguientes:

1. $y = -2x + 5$
2. $y = 5x - 3$
3. $y = \frac{x}{2} + 7$
4. $y = -\frac{x}{3} + 1$

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos siguientes?

5. $(-1,1)$ y $(2,-7)$
6. $(3,\frac{1}{2})$ y $(4,-1)$
7. $(\sqrt{2},-1)$ y $(\sqrt{2},1)$
8. $(-3,-5)$ y $(\sqrt{3},4)$

¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por el punto dado?

9. pendiente 4 y punto $(1,1)$
10. pendiente -2 y punto $(\frac{1}{2},1)$
11. pendiente $-\frac{1}{2}$ y punto $(\sqrt{2},3)$
12. pendiente $\sqrt{3}$ y punto $(-1,5)$

Trazar las gráficas de las rectas siguientes:

13. $x = 5$
14. $x = -1$
15. $x = -3$
16. $y = -4$
17. $y = 2$
18. $y = 0$

¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos siguientes?

19. $(1,\frac{1}{2})$ y $(-1,1)$
20. $(\frac{1}{4},1)$ y $(\frac{1}{2},-1)$
21. $(2,3)$ y $(\sqrt{2},1)$
22. $(\sqrt{3},1)$ y $(3,2)$

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos siguientes?

23. $(\pi,1)$ y $(\sqrt{2},3)$
24. $(\sqrt{2},2)$ y $(1,\pi)$
25. $(-1,2)$ y $(\sqrt{2},-1)$
26. $(-1,\sqrt{2})$ y $(-2,-3)$
27. Trazar las gráficas de las siguientes rectas:

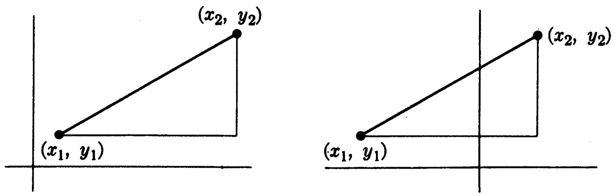
(a) $y = 2x$ (b) $y = 2x + 1$ (c) $y = 2x + 5$
(d) $y = 2x - 1$ (e) $y = 2x - 5$

28. Se dice que dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente. Sean $y = ax + b$ y $y = cx + d$ las ecuaciones de dos rectas con $b \neq d$. (a) Si son paralelas, demostrar que no tienen punto en común. (b) De no ser paralelas, demostrar que tienen exactamente un punto en común.

29. Hallar el punto en común de los siguientes pares de rectas:
(a) $y = 3x + 5$ y $y = 2x + 1$ (b) $y = 3x - 2$ y $y = -x + 4$
(c) $y = 2x$ y $y = -x + 2$ (d) $y = x + 1$ y $y = 2x + 7$

II, §4. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos en el plano, como en los diagramas siguientes, por ejemplo.



(a) (b)

De este modo podemos construir un triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras, la longitud del segmento de recta que une nuestros dos puntos se puede determinar a partir de las longitudes de los dos lados. El cuadrado del lado inferior es $(x_2 - x_1)^2$, que es igual a $(x_1 - x_2)^2$.

El cuadrado de la longitud del lado vertical es $(y_2 - y_1)^2$, que es igual a $(y_1 - y_2)^2$. Si L denota la longitud del segmento de recta, entonces, por Pitágoras,

$$L^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

y en consecuencia,

$$\boxed{L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.}$$

Ejemplo 1. Sean los dos puntos $(1, 2)$ y $(1, 3)$. Entonces la longitud del segmento de recta entre ellos es

$$\sqrt{(1-1)^2 + (3-2)^2} = 1.$$

A la longitud L también se le llama **distancia** entre los dos puntos.

Ejemplo 2. Hallar la distancia entre los puntos $(-1, 5)$ y $(4, -3)$.
La distancia es

$$\sqrt{(4-(-1))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{89}.$$

II, §4. EJERCICIOS

Hallar la distancia entre los puntos siguientes:

1. Los puntos $(-3, -5)$ y $(1, 4)$
2. Los puntos $(1, 1)$ y $(0, 2)$
3. Los puntos $(-1, 4)$ y $(3, -2)$
4. Los puntos $(1, -1)$ y $(-1, 2)$
5. Los puntos $(\frac{1}{2}, 2)$ y $(1, 1)$
6. Hallar las coordenadas de la cuarta esquina de un rectángulo cuyas otras tres esquinas son $(-1, 2)$, $(4, 2)$, $(-1, -3)$.
7. ¿Cuáles son las longitudes de los lados del rectángulo encontrado en el ejercicio 6?
8. Hallar las coordenadas de la cuarta esquina de un rectángulo cuyas otras tres esquinas son $(-2, -2)$, $(3, -2)$, $(3, 5)$.
9. ¿Cuáles son las longitudes de los lados del rectángulo del ejercicio 8?
10. Si x y y son números, definir la distancia entre estos dos números como $|x - y|$. Mostrar que esta distancia es la misma que la distancia entre los puntos $(x, 0)$ y $(y, 0)$ en el plano.

II, §5. CURVAS Y ECUACIONES

Sea $F(x, y)$ una expresión que incluya un par de números (x, y). Sea c un número. Consideremos la ecuación

$$F(x, y) = c.$$

Definición. La **gráfica** de la ecuación es la colección de puntos (a, b) en el plano que satisfacen la ecuación, esto es, tal que

$$F(a, b) = c.$$

Esta gráfica también se conoce como **curva**, y usualmente no haremos distinción entre la ecuación

$$F(x, y) = c$$

y la curva que representa la ecuación.

Por ejemplo,

$$x + y = 2$$

es la ecuación de una recta y su gráfica es la recta. Estudiaremos a continuación importantes ejemplos de ecuaciones que surgen con frecuencia.

Si f es una función, entonces podemos formar la expresión $y - f(x)$, y la gráfica de la **ecuación**

$$y - f(x) = 0$$

no es otra que la gráfica de la **función** f como ya lo estudiamos en la sección §2.

Deberán observar que hay ecuaciones del tipo

$$F(x,y)=c$$

que no se obtienen a partir de una función $y=f(x)$, i.e. de una ecuación

$$y-f(x)=0.$$

Por ejemplo, la ecuación $x^2+y^2=1$ es una de dichas ecuaciones.

Estudiaremos ahora ejemplos importantes de gráficas de ecuaciones

$$F(x,y)=0 \quad \text{o} \quad F(x,y)=c.$$

II, §6. EL CÍRCULO

La expresión $F(x,y)=x^2+y^2$ tiene una interpretación geométrica sencilla. Por el teorema de Pitágoras, es el cuadrado de la distancia del punto (x,y) al origen $(0,0)$. Así, los puntos (x,y) que satisfacen la ecuación

$$x^2+y^2=1^2=1$$

son simplemente aquellos puntos cuya distancia al origen es 1. Ellos forman el círculo de radio 1, con centro en el origen.

De manera análoga, los puntos (x,y) que satisfacen la ecuación

$$x^2+y^2=4$$

son aquellos puntos cuya distancia al origen es 2. Ellos forman el círculo de radio 2. En general, si c es cualquier número >0, entonces la gráfica de la ecuación

$$x^2+y^2=c^2$$

es el círculo de radio c, con centro en el origen.

Ya hemos señalado que la **ecuación**

$$x^2+y^2=1$$

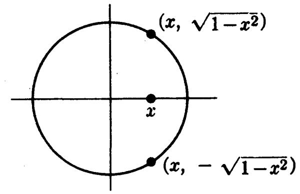
o $x^2+y^2-1=0$ no es del tipo $y-f(x)=0$. Sin embargo, podemos escribir nuestra ecuación en la forma

$$y^2=1-x^2.$$

Para cualquier valor de x entre -1 y $+1$ podemos despejar y y obtener

$$y=\sqrt{1-x^2} \quad \text{o} \quad y=-\sqrt{1-x^2}.$$

Si $x\neq 1$ y $x\neq -1$, entonces obtenemos dos valores de y para cada valor de x. Geométricamente estos dos valores corresponden a los puntos indicados en el diagrama de la página siguiente.



Existe una función, definida para $-1\le x\le 1$, tal que

$$f(x)=\sqrt{1-x^2},$$

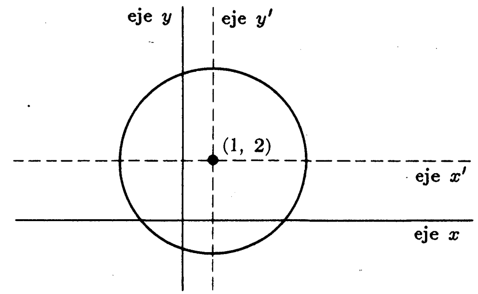
y la gráfica de esta función es la mitad superior de nuestro círculo. De manera análoga, existe otra función

$$g(x)=-\sqrt{1-x^2},$$

definida también para $-1\le x\le 1$, cuya gráfica es la mitad inferior del círculo. Ninguna de estas funciones está definida para otros valores de x.

Ahora pedimos la ecuación del círculo cuyo centro es $(1,2)$ y cuyo radio tiene longitud 3. Está formado por los puntos (x,y) cuya distancia a $(1,2)$ es 3. Éstos son los puntos que satisfacen la ecuación

$$(x-1)^2+(y-2)^2=9.$$



En la figura anterior se ha trazado la gráfica de esta ecuación. También podemos poner

$$x'=x-1 \quad \text{y} \quad y'=y-2.$$

En el nuevo sistema coordenado (x',y'), la ecuación del círculo es, pues,

$$x'^2+y'^2=9.$$

Hemos trazado los ejes (x',y') como líneas punteadas.

Como un ejemplo más, deseamos determinar los puntos que están a una distancia 2 del punto $(-1,-3)$. Son los puntos (x,y) que satisfacen la ecuación

$$\left(x-(-1)\right)^2+\left(y-(-3)\right)^2=4$$

o, en otras palabras,

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 = 4.$$

(¡Observen cuidadosamente la cancelación de los signos menos!) Así, la gráfica de esta ecuación es el círculo de radio 2 y centro $(-1, -3)$.

> *En general, sean a y b dos números y r un número > 0. Entonces el círculo de radio r y centro (a, b) es la gráfica de la ecuación*
>
> $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Podemos poner

$$x' = x - a \quad \text{y} \quad y' = y - b,$$

por lo que, en términos de las nuevas coordenadas x', y', la ecuación del círculo es

$$x'^2 + y'^2 = r^2.$$

Completar el cuadrado

Ejemplo. Supongamos que se da la ecuación

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y - 5 = 0,$$

donde x^2 y y^2 tienen el mismo coeficiente 1. Deseamos ver si ésta es la ecuación de un círculo, para lo cual usamos el método de **completar el cuadrado**, que repasamos ahora.

Queremos que la ecuación sea de la forma

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

porque así sabríamos inmediatamente que representa un círculo con centro en (a, b) y de radio r. Por ello, necesitamos que $x^2 + 2x$ sea el primero de los dos términos del desarrollo

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2.$$

De manera análoga, necesitamos que $y^2 - 3y$ sea el primero de los dos términos del desarrollo

$$(y-b)^2 = y^2 - 2by + b^2.$$

Esto significa que $a = -1$ y $b = 3/2$. Entonces,

$$x^2 + 2x + y^2 - 3y - 5 = (x+1)^2 - 1 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 5.$$

Así, $x^2 + y^2 + 2x - 3y - 5 = 0$ es equivalente a

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 5 + 1 + \frac{9}{4} = \frac{33}{4}.$$

En consecuencia, nuestra ecuación dada es la ecuación de un círculo de radio $\sqrt{33/4}$, con centro en $(-1, 3/2)$.

II, §6. EJERCICIOS

Esbozar la gráfica de las ecuaciones siguientes:

1. (a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ (b) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$
   (c) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$ (d) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$
2. (a) $x^2 + (y-1)^2 = 9$ (b) $x^2 + (y-1)^2 = 4$
   (c) $x^2 + (y-1)^2 = 25$ (d) $x^2 + (y-1)^2 = 1$
3. (a) $(x+1)^2 + y^2 = 1$ (b) $(x+1)^2 + y^2 = 4$
   (c) $(x+1)^2 + y^2 = 9$ (d) $(x+1)^2 + y^2 = 25$
4. $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 10 = 0$
5. $x^2 + y^2 + 2x - 3y - 15 = 0$
6. $x^2 + y^2 + x - 2y = 16$
7. $x^2 + y^2 - x + 2y = 25$

II, §7. DILATACIONES Y LA ELIPSE

Dilataciones

Antes de estudiar la elipse queremos hacer algunas observaciones acerca de "estiramientos" o, para usar una palabra más adecuada, dilataciones.

Sea (x, y) un punto en el plano. Entonces $(2x, 2y)$ es el punto obtenido al estirar sus dos coordenadas en un factor de 2, como se ilustra en la figura 1, donde también hemos trazado $(3x, 3y)$ y $(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$.

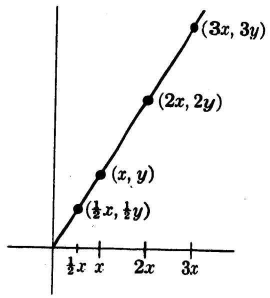


Figura 1

Definición. En general, si $c > 0$ es un número positivo, a (cx, cy) le llamamos **dilatación** de (x, y) en un factor c.

Ejemplo. Sea

$$u^2 + v^2 = 1$$

la ecuación del círculo de radio 1. Pongamos

$$x = cu \quad \text{y} \quad y = cv.$$

Entonces,

$$u = x/c \quad \text{y} \quad v = y/c.$$

Por lo tanto, x y y satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1,$$

o, de manera equivalente,

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

El conjunto de puntos (u, v) que satisfacen esta ecuación es el círculo de radio c. Así, podemos decir:

La dilatación del círculo de radio 1 *en un factor de* $c > 0$ *es el círculo de radio* c.

Esto se ilustra en la figura 2 con $c = 3$.

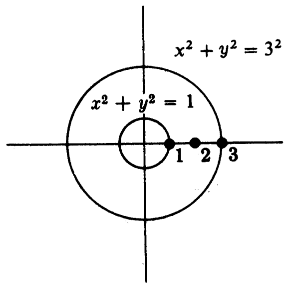


Figura 2

La elipse

No hay razón alguna por la cual debamos dilatar la primera y la segunda coordenadas en el mismo factor; podemos usar factores diferentes. Por ejemplo, si ponemos

$$x = 2u \quad \text{y} \quad y = 3v$$

estamos dilatando la primera coordenada en un factor de 2, y estamos dilatando la segunda coordenada en un factor de 3. En ese caso, supongamos que (u, v) es un punto sobre el círculo de radio 1; en otras palabras, digamos que se tiene

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Entonces, (x, y) satisface la ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Interpretamos esto como la ecuación de un "círculo estirado," como se muestra en la figura 3.

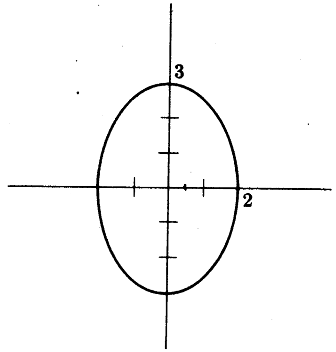


Figura 3

De manera más general, sean a y b números > 0. Pongamos

$$x = au \quad \text{y} \quad y = bv.$$

Si (u, v) satisface

$$(*) \qquad u^2 + v^2 = 1,$$

entonces (x, y) satisface

$$(**) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Recíprocamente, podemos poner $u = x/a$ y $v = y/b$ para ver si los puntos que satisfacen la ecuación $(*)$ corresponden a los puntos de $(**)$ bajo esta transformación, y viceversa.

Definición. Una **elipse** es el conjunto de puntos que satisfacen una ecuación $(**)$ en algún sistema coordenado del plano. Acabamos de ver que una elipse es un círculo dilatado, mediante una dilatación en factores a, $b > 0$ en las primera y segunda coordenadas, respectivamente.

Ejemplo. Esbozar la gráfica de la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Esta elipse es un círculo dilatado en factores de 2 y 5, respectivamente. Noten que,

$$\text{cuando } x = 0, \text{ tenemos } \frac{y^2}{25} = 1, \text{ de modo que } y^2 = 25 \text{ y } y = \pm 5.$$

Además,

cuando $y = 0$, tenemos $\dfrac{x^2}{4} = 1$, de modo que $x^2 = 4$ y $x = \pm 2$.

Por lo tanto, la gráfica de la elipse se ve como en la figura 4.

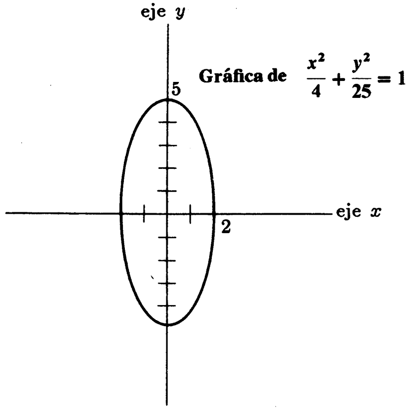


Figura 4

Ejemplo. Trazar la gráfica de la elipse

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

En este caso, pongamos

$$x' = x - 1 \quad \text{y} \quad y' = y + 2.$$

Sabemos que en las coordenadas (u, v)

$$u^2 + v^2 = 1$$

es la ecuación de un círculo con centro $(1, -2)$ y radio 1. A continuación ponemos

$$u = \frac{x'}{5} \quad \text{y} \quad v = \frac{y'}{2}.$$

La ecuación original es de la forma

$$\frac{x'^2}{5^2} + \frac{y'^2}{2^2} = 1,$$

que puede escribirse en términos de u y v como

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Así, nuestra elipse se obtiene del círculo $u^2 + v^2 = 1$ mediante la dilatación

$$u = x'/5 \quad \text{y} \quad v = y'/2,$$

o, de manera equivalente,

$$x' = 5u \quad \text{y} \quad y' = 2v.$$

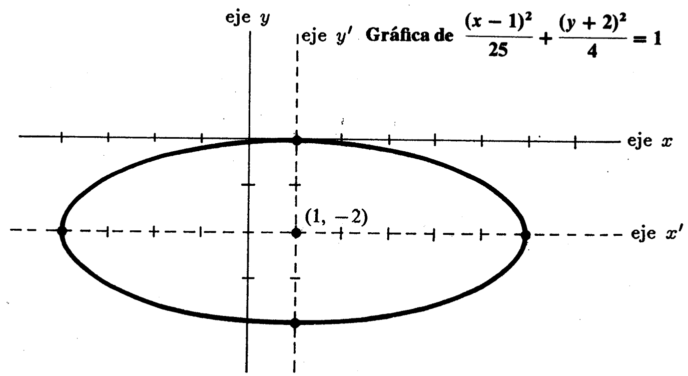
La manera más fácil de esbozar su gráfica es dibujar el nuevo sistema de coordenadas con coordenadas x', y'. Para hallar los cruces de la elipse con estos nuevos ejes, vemos que cuando $y' = 0$, entonces

$$\frac{x'^2}{5^2} = 1, \qquad \text{de modo que} \qquad x' = \pm 5.$$

Del mismo modo, cuando $x' = 0$, entonces

$$\frac{y'^2}{2^2} = 1, \qquad \text{de modo que} \qquad y' = \pm 2.$$

La gráfica se ve como sigue:



II, §7. EJERCICIOS

Trazar las gráficas de las curvas siguientes.

1. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
2. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
3. $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
4. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$
5. $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$
6. $4x^2 + 25y^2 = 100$
7. $\dfrac{(x+1)^2}{3} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$
8. $25x^2 + 16y^2 = 400$
9. $(x-1)^2 + \dfrac{(y+3)^2}{4} = 1$

II, §8. LA PARÁBOLA

Una **parábola** es una curva que es la gráfica de una función

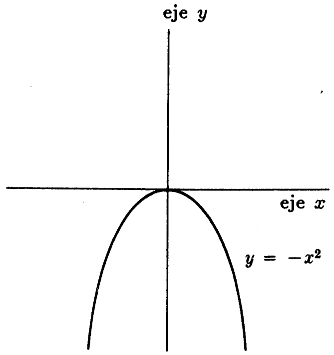
$$y = ax^2$$

en algún sistema coordenado, con $a \neq 0$.

Ejemplo. Ya sabemos cómo se ve la gráfica de la función $y = x^2$. Consideremos ahora

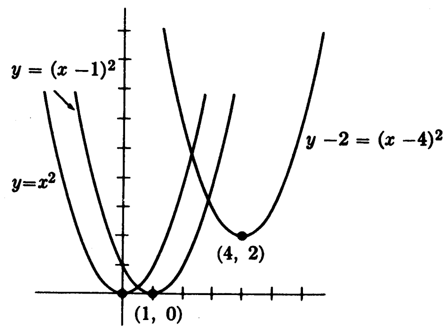
$$y = -x^2.$$

Por simetría se puede ver fácilmente que la gráfica es semejante a la de esta figura.



Si graficamos la ecuación $y = (x-1)^2$, notaremos que se ve exactamente igual, pero como si el origen estuviera colocado en el punto $(1,0)$.

De manera análoga, la curva $y - 2 = (x-4)^2$ se ve de nuevo como $y = x^2$ excepto que toda la curva se ha movido como si el origen fuera el punto $(4,2)$. En el siguiente diagrama se han trazado las gráficas de estas ecuaciones.



Podemos formalizar estas observaciones como sigue. Supongan que en nuestro

sistema de coordenadas dado escogemos un punto (a,b) como el nuevo origen. Ponemos las nuevas coordenadas $x' = x - a$ y $y' = y - b$. Así, cuando $x = a$, tenemos $x' = 0$, y cuando $y = b$, tenemos $y' = 0$. Si tenemos una curva

$$y' = x'^2$$

en el nuevo sistema coordenado cuyo origen está en el punto (a,b), entonces se produce la ecuación

$$(y-b) = (x-a)^2$$

en términos del sistema de coordenadas antiguo. Este tipo de curva se conoce como **parábola**.

Podemos aplicar la misma técnica de completar el cuadrado que usamos para el círculo.

Ejemplo. ¿Cuál es la gráfica de la ecuación

$$2y - x^2 - 4x + 6 = 0?$$

Completando el cuadrado, podemos escribir

$$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4.$$

Así, nuestra ecuación se puede reescribir como

$$2y = (x+2)^2 - 10$$

o

$$2(y+5) = (x+2)^2.$$

Ahora escogemos un nuevo sistema de coordenadas

$$x' = x + 2 \qquad \text{y} \qquad y' = y + 5$$

de modo que nuestra ecuación se vuelve

$$2y' = x'^2 \qquad \text{o} \qquad y' = \tfrac{1}{2}x'^2.$$

Ésta es una función cuya gráfica ya conocen; su elaboración queda como ejercicio.

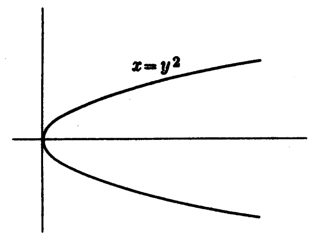
Observemos que, si tenemos una ecuación

$$x - y^2 = 0$$

o

$$x = y^2,$$

obtendremos una parábola inclinada horizontalmente.



Podemos aplicar ahora la técnica de cambiar el sistema coordenado para ver cómo es la gráfica de una ecuación más general.

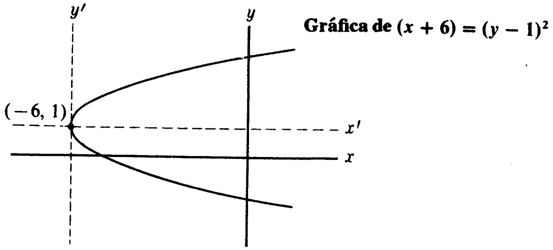
Ejemplo. Trazar la gráfica de

$$x - y^2 + 2y + 5 = 0.$$

Podemos escribir esta ecuación en la forma

$$(x + 6) = (y - 1)^2$$

y, por lo tanto, su gráfica se ve así:



Supongan que nos dan la ecuación de una parábola

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

con $a \neq 0$. Deseamos determinar dónde interseca esta parábola al eje x. Éstos son los valores para los cuales $f(x) = 0$ y se llaman **raíces** de f. En la secundaria se muestra que las raíces de f están dadas por la **fórmula cuadrática**:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.}$$

Deben leer esta fórmula en voz alta tantas veces como sea necesario para que la memoricen, igual que las tablas de multiplicar. *Deberá usarse automáticamente*, sin mayor razonamiento, para hallar las raíces de una ecuación cuadrática.

Ejemplo. Queremos hallar las raíces de la ecuación

$$-2x^2 + 5x - 1 = 0.$$

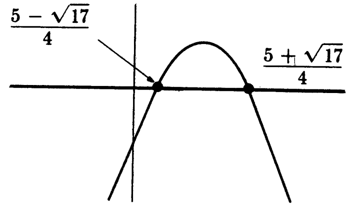
Las raíces son

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 8}}{2(-2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{-4} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Así, las dos raíces son

$$\frac{5 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{y} \quad \frac{5 - \sqrt{17}}{4}.$$

Éstos son los dos puntos donde la parábola $y = -2x^2 + 5x - 1$ cruza al eje x, y su gráfica se muestra en la figura.



Demostración de la fórmula cuadrática. Daremos ahora la demostración de la fórmula cuadrática para convencerlos de que es cierta. Con este fin, queremos resolver

$$(*) \qquad \boxed{ax^2 + bx + c = 0.}$$

Como suponemos que $a \neq 0$, esto equivale a resolver la ecuación

$$(**) \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

obtenida al dividir entre a. Recordemos la fórmula

$$(x + t)^2 = x^2 + 2tx + t^2.$$

Queremos hallar t de modo que $x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x$ tenga la forma $x^2 + 2tx$. Esto significa que tenemos

$$\frac{b}{a} = 2t, \qquad \text{esto es} \qquad t = \frac{b}{2a}.$$

Sumamos ahora $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos lados de la ecuación $(**)$, y obtenemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Esto se puede reescribir en la forma

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

o, de manera equivalente,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Al sacar raíz cuadrada tenemos

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de donde

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

lo cual prueba la fórmula cuadrática.

Observación. Puede suceder que $b^2 - 4ac < 0$, en cuyo caso la ecuación cuadrática no tiene solución en los números reales.

Ejemplo. Hallar las raíces de la ecuación

$$3x^2 - 2x + 1 = 0.$$

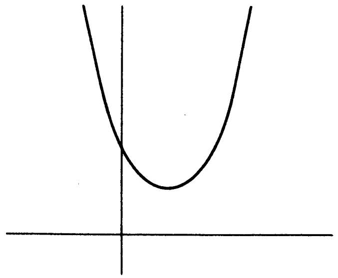
Las raíces son

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 12}}{6}.$$

Como $4 - 12 = -8 < 0$, la ecuación no tiene raíces en los números reales. La ecuación

$$y = 3x^2 - 2x + 1$$

es la ecuación de una parábola cuya gráfica se ve como en la figura. La gráfica no cruza el eje x.



El estudio de la fórmula cuadrática en esta sección ilustra algunos principios pedagógicos generales acerca de la relación entre la memorización rutinaria y el papel de las demostraciones al aprender matemáticas.

1. Deben memorizar de oído la fórmula cuadrática:

x es igual a menos b más menos la raíz cuadrada de b cuadrado menos $4ac$ sobre $2a$

como si memorizaran un poema, repitiéndolo en voz alta. Dicha memorización es necesaria para ciertas cuestiones de matemáticas básicas, a fin de inducir la obtención de la respuesta correcta como un reflejo condicionado, sin perder tiempo.

2. Independientemente de usar la fórmula como reflejo condicionado, deberán ver la demostración completando el cuadrado. Aprender a manejar la lógica y el idioma español para establecer teoremas también es parte de las matemáticas. Además, la técnica de completar los cuadrados surge a menudo en el contexto de graficar círculos, elipses, parábolas y además, en la fórmula cuadrática. Saber la fórmula como reflejo condicionado y conocer la demostración son dos funciones complementarias diferentes en el entrenamiento matemático, ninguna de las cuales excluye a la otra.

II, §8. EJERCICIOS

Trazar la gráfica de las ecuaciones siguientes:

1. $y = -x + 2$
2. $y = 2x^2 + x - 3$
3. $x - 4y^2 = 0$
4. $x - y^2 + y + 1 = 0$

Completar el cuadrado en las siguientes ecuaciones y cambiar el sistema de coordenadas para ponerlas en la forma

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \qquad \text{o} \qquad y' = cx'^2 \qquad \text{o} \qquad x' = cy'^2$$

para cierta constante c.

5. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$
6. $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$
7. $x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0$
8. $y - 2x^2 - x + 3 = 0$
9. $y - x^2 - 4x - 5 = 0$
10. $y - x^2 + 2x + 3 = 0$
11. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = -3$
12. $x^2 + y^2 - 4x - 2y = -3$
13. $x - 2y^2 - y + 3 = 0$
14. $x - y^2 - 4y = 5$

II, §9. LA HIPÉRBOLA

Ya sabemos cómo se ve la gráfica de la ecuación

$$xy = 1 \qquad \text{o} \qquad y = 1/x.$$

Es evidente que es igual a la gráfica de la función

$$f(x) = 1/x$$

(definida para $x \neq 0$). Si escogemos un sistema de coordenadas cuyo origen esté en el punto (a, b), la ecuación

$$y - b = \frac{1}{x - a}$$

se conoce como **hipérbola**. En términos del nuevo sistema de coordenadas

$$x' = x - a$$

y $y' = y - b$, nuestra hipérbola tiene el antiguo tipo de ecuación

$$x'y' = 1.$$

Si nos dan una ecuación como

$$xy - 2x + 3y = 1$$

queremos poner esta ecuación en la forma

$$(x - a)(y - b) = c,$$

o expandiendo,

$$xy - ay - bx + ab = c.$$

Esto nos dice cómo deben ser a y b. Así

$$xy - 2x + 3y = (x+3)(y-2) + 6.$$

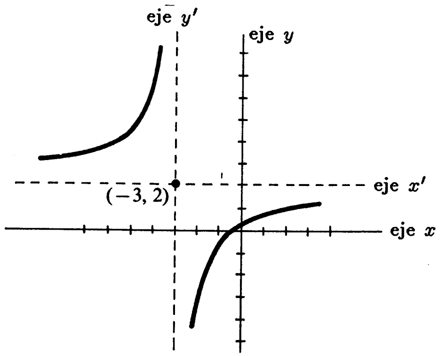
Por lo tanto $xy - 2x + 3y = 1$ es equivalente a

$$(x+3)(y-2) + 6 = 1$$

o, en otras palabras,

$$(x+3)(y-2) = -5.$$

La gráfica de esta ecuación se ha trazado en el siguiente diagrama.

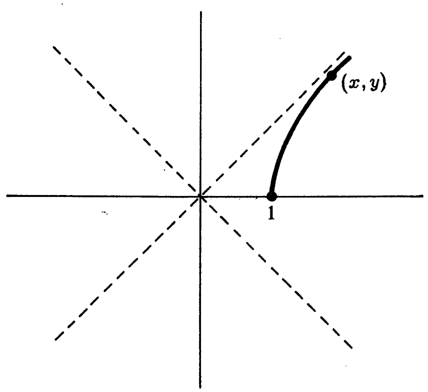


Hay otra forma para la hipérbola. Tratemos de graficar la ecuación

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Si despejamos y obtenemos

$$y^2 = x^2 - 1$$



de modo que

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 1}.$$

La gráfica es simétrica porque, si (x, y) es un punto sobre la gráfica, resulta que $(-x, y)$, $(x, -y)$ y $(-x, -y)$ son también puntos sobre la gráfica. En efecto, veamos la gráfica en el primer cuadrante cuando $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

Como $x^2 - 1 = y^2$, se sigue que $x^2 - 1 \geq 0$, de modo que $x^2 \geq 1$. Por ello la gráfica existe sólo para $x \geq 1$. Afirmamos que en el primer cuadrante se ve como en la figura de la página anterior. Para corroborarlo podemos, claro está, construir primero una tabla con unos cuantos valores para ver de manera experimental la apariencia de la gráfica. Háganlo. Aquí la describiremos teóricamente

A medida que crece x, la expresión $x^2 - 1$ crece, de modo que $\sqrt{x^2 - 1}$ crece también y lo mismo sucede con y.

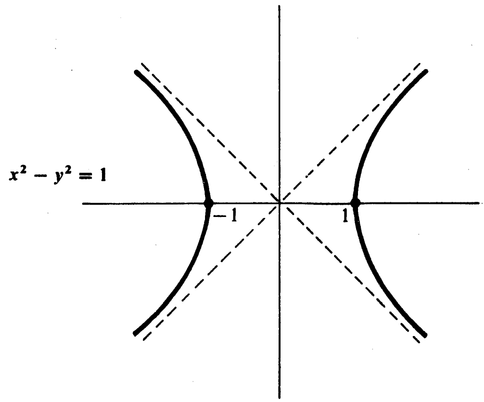
Además, como $y^2 = x^2 - 1$, se sigue que $y^2 < x^2$, de modo que $y < x$ para x, y en el primer cuadrante. Hemos trazado la recta $y = x$. El conjunto de puntos con $y < x$ se encuentra debajo de esta recta en el primer cuadrante.

Dividamos la ecuación $y^2 = x^2 - 1$ entre x^2. Obtenemos

$$\frac{y^2}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Cuando x se vuelve grande, sucede que

$$1 - \frac{1}{x^2} \quad \text{tiende a} \quad 1.$$



La razón y/x es la pendiente de la recta que va del origen al punto (x, y). Por lo tanto, esta pendiente tiende a 1 cuando x se vuelve grande. Además, de la expresión

$$y = \sqrt{x^2 - 1},$$

vemos que cuando x es grande, $x^2 - 1$ es casi igual a x^2 y, por ende, su raíz cuadrada será casi igual a x. Con esto la gráfica de la hipérbola se acerca más y más a la gráfica de la recta $y = x$. Esto justifica que hayamos dibujado la gráfica de esa manera.

Finalmente, por simetría, toda la gráfica de la hipérbola se ve como la figura anterior. Ésta se obtiene al reflejar la gráfica del primer cuadrante sobre el eje x y sobre el eje y, y también reflejando la gráfica respecto al origen.

II, §9. EJERCICIOS

Trazar las gráficas de las curvas siguientes:

1. $(x-1)(y-2) = 2$
2. $x(y+1) = 3$
3. $xy - 4 = 0$
4. $y = \dfrac{2}{1-x}$
5. $y = \dfrac{1}{x+1}$
6. $(x+2)(y-1) = 1$
7. $(x-1)(y-1) = 1$
8. $(x-1)(y-1) = 1$
9. $y = \dfrac{1}{x-2} + 4$
10. $y = \dfrac{1}{x+1} - 2$
11. $y = \dfrac{4x-7}{x-2}$
12. $y = \dfrac{-2x-1}{x+1}$
13. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$
14. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$
15. Graficar la ecuación $y^2 - x^2 = 1$.
16. Graficar la ecuación $(y-1)^2 - (x-2)^2 = 1$.
17. Graficar la ecuación $(y+1)^2 - (x-2)^2 = 1$.

Parte dos

Diferenciación y funciones elementales

En esta parte aprenderemos a diferenciar. Geométricamente hablando esto equivale a hallar la pendiente de una curva, o su razón de cambio. Analizaremos sistemáticamente las técnicas para hacerlo y la manera en que se aplican a las funciones elementales: polinomios, funciones trigonométricas, funciones logarítmicas y exponenciales y funciones inversas.

Una de las razones por las que diferimos la integración para después de esta sección es que las técnicas de integración dependen, hasta cierto punto, de nuestro conocimiento de las derivadas de ciertas funciones, pues una de las propiedades de la integración radica en ser la operación inversa a la diferenciación.

En los capítulos III, §9, IV, §4 y VII, §4, hallarán que los problemas de razones aplicados son semejantes entre sí pero con diferentes tipos de funciones. Éste es un ejemplo de cómo se hilvana de manera coherente la misma idea a lo largo de la parte de diferenciación.

CAPÍTULO III

La derivada

Los dos conceptos fundamentales en este curso son los de derivada e integral. En este capítulo nos ocuparemos del primero.

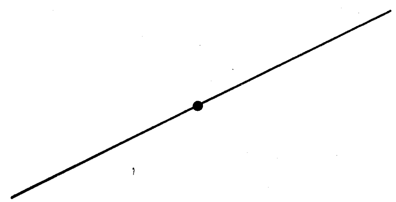
La derivada nos dará la pendiente de una curva en un punto. También tiene aplicaciones en física, donde puede interpretarse como razón de cambio.

Desarrollaremos algunas técnicas básicas que permitirán calcular la derivada en todas las situaciones comunes que probablemente encuentren en la práctica.

III, §1. LA PENDIENTE DE UNA CURVA

Consideremos una curva y tomemos un punto P sobre la curva. Queremos definir los conceptos de pendiente de la curva en un punto y de recta tangente a la curva en ese punto. Suele decirse que la tangente a la curva en el punto es la recta que toca la curva en un solo punto. Esto no tiene sentido, y las figuras subsecuentes los convencerán.

Consideren una recta



¿No quieren que la recta sea tangente a sí misma? ¿Sí? Pues esto contradice flagrantemente que la tangente es la recta que toca a la curva en un solo punto, pues la recta se toca a sí misma en todos sus puntos.

En las figuras 1, 2 y 3 vemos la recta tangente a la curva en el punto P. En la figura 1 la recta corta a la curva en otro punto Q. En la figura 2, la recta es tangente a la curva también en el punto Q. En la figura 3, la recta horizontal es tangente a la curva y "corta" la curva. La recta vertical y la inclinada intersecan la curva en un solo punto, pero no son tangentes.

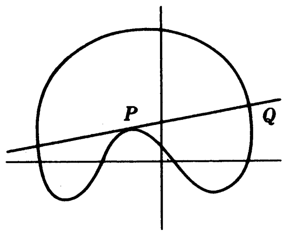


Figura 1

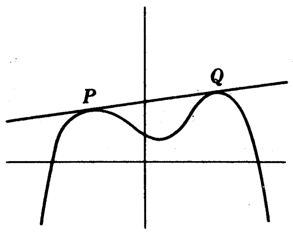


Figura 2

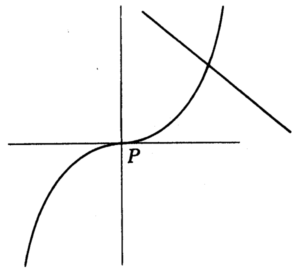


Figura 3

Observen, además, que no pueden esquivar las dificultades al querer distinguir una recta que "corte a la curva" de una que "toque a la curva," o diciendo que la recta debe estar a un lado de la curva (vean la figura 1).

Por lo tanto tenemos que dejar de lado la idea de tocar la curva en un solo punto y buscar otra idea.

Enfrentamos dos problemas. Uno es dar la idea geométrica correcta que nos permita definir la tangente a la curva, y el otro es comprobar que esta idea nos permite calcular de manera efectiva esta recta tangente cuando la curva está dada por una simple ecuación con coeficientes numéricos. Es una cuestión admirable que la solución al primer problema proporcione, de hecho, una solución al segundo.

En el capítulo II vimos que si conocemos la pendiente de una recta y un punto sobre la recta, podemos determinar la ecuación de la recta. Por ello definiremos la pendiente de una curva en un punto y después obtendremos su

tangente mediante el método del capítulo II.

Nuestros ejemplos muestran que para definir la pendiente de la curva en P no debemos considerar lo que suceda en un punto Q alejado de P. Lo importante es lo que sucede cerca de P.

Así pues, tomemos cualquier punto Q sobre la curva dada $y = f(x)$, y supongamos que $Q \neq P$. Entonces los dos puntos P, Q determinan una recta con cierta pendiente que depende de P y de Q y que escribiremos como $S(P, Q)$. Supongan que el punto Q se acerca al punto P sobre la curva (pero se mantiene distinto de P). Entonces, conforme Q se acerca a P, la pendiente $S(P, Q)$ de la recta que pasa por P y Q deberá acercarse a la pendiente (desconocida) de la recta tangente (desconocida) a la curva en P. En el diagrama siguiente hemos dibujado la recta tangente a la curva en P y dos rectas entre P y otro punto

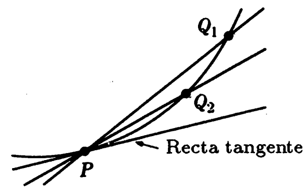


Figura 4

sobre la curva cercano a P (figura 4). El punto Q_2 está más cerca de P sobre la curva, por lo cual la pendiente de la recta entre P y Q_2 está más cerca de la pendiente de la recta tangente que la pendiente de la recta entre P y Q_1.

Si existe el límite de la pendiente $S(P, Q)$ cuando Q tiende a P, entonces deberá considerarse como la pendiente de la propia curva en P. Ésta es la idea básica de nuestra definición de pendiente de la curva en P. La tomamos como definición, quizá la definición más importante en este libro. Repitiendo:

Definición. Dada una curva $y = f(x)$, sea P un punto sobre la curva. La **pendiente** de la curva en P es el límite de las pendientes de las rectas que pasan por P y otro punto Q sobre la curva, cuando Q tiende a P.

La idea de definir la pendiente de esta manera fue descubierta en el siglo XVII por Newton y Leibnitz. Veremos que esta definición nos permite determinar la pendiente de manera efectiva en la práctica.

Primero observamos que, cuando $y = ax + b$ es una recta, la pendiente de la recta entre cualesquiera dos puntos distintos sobre la curva es siempre la misma, y es la pendiente de la recta conforme la definimos en el capítulo anterior.

Ejemplo. Veamos ahora el siguiente ejemplo sencillo,

$$y = f(x) = x^2.$$

Deseamos determinar la pendiente de esta curva en el punto $(1, 1)$.

Tomemos un punto cercano a $(1, 1)$, por ejemplo un punto cuya abscisa sea 1.1. Entonces $f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21$. Así el punto $(1.1, 1.21)$ está sobre la curva. La pendiente de la recta entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Por consiguiente, la pendiente de la recta entre $(1,1)$ y $(1.1, 1.21)$ es

$$\frac{1.21 - 1}{1.1 - 1} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1.$$

En general, la abscisa de un punto cercano a $(1,1)$ se puede escribir como $1+h$ donde h es algún número pequeño, positivo o negativo, pero $h \neq 0$. Tenemos

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2.$$

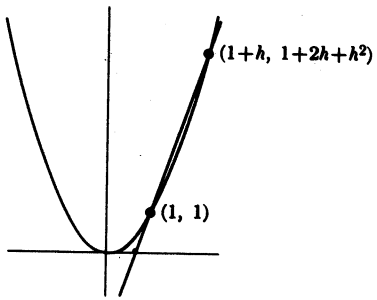


Figura 5

Así el punto $(1+h, 1+2h+h^2)$ está sobre la curva. Cuando h es positivo, la recta entre nuestros dos puntos se vería como en la figura 5. Cuando h es negativo, entonces $1+h$ es menor que 1 y la recta se vería así:

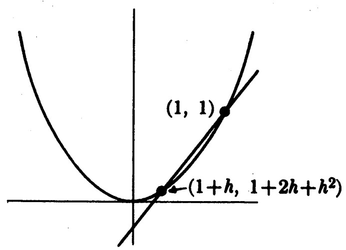


Figura 6

Por ejemplo, h podría ser -0.1 y $1+h = 0.9$.

Por tal motivo, la pendiente de la recta entre nuestros dos puntos es el cociente

$$\frac{(1+2h+h^2) - 1}{(1+h) - 1},$$

que es igual a

$$\frac{2h + h^2}{h} = 2 + h.$$

A medida que el punto cuya abscisa es $1+h$ tiende a nuestro punto $(1,1)$, el número h tiende a 0. Conforme h tiende a 0, la pendiente de la recta entre nuestros dos puntos tiende a 2, de modo que es, por definición, la pendiente de la curva en el punto $(1,1)$.

¡Podrán apreciar lo sencillo que resultan los cálculos y lo fácil que fue obtener esta pendiente!

Tomemos otro ejemplo. Deseamos hallar la pendiente de la misma curva $f(x) = x^2$ en el punto $(-2, 4)$. De nuevo tomamos un punto cercano cuya abscisa sea $-2+h$ para h pequeño $\neq 0$. La ordenada de este punto cercano es

$$f(-2+h) = (-2+h)^2 = 4 - 4h + h^2.$$

La pendiente de la recta entre los dos puntos es, pues,

$$\frac{4 - 4h + h^2 - 4}{-2 + h - (-2)} = \frac{-4h + h^2}{h} = -4 + h.$$

Conforme h tiende a 0, el punto cercano tiende al punto $(-2, 4)$ y vemos que la pendiente tiende a -4.

III, §1. EJERCICIOS

Hallar las pendientes de las curvas siguientes en los puntos indicados:

1. $y = 2x^2$ en el punto $(1, 2)$
2. $y = x^2 + 1$ en el punto $(-1, 2)$
3. $y = 2x - 7$ en el punto $(2, -3)$
4. $y = x^3$ en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$
5. $y = 1/x$ en el punto $(2, \frac{1}{2})$
6. $y = x^2 + 2x$ en el punto $(-1, -1)$
7. $y = x^2$ en el punto $(2, 4)$
8. $y = x^2$ en el punto $(3, 9)$
9. $y = x^3$ en el punto $(1, 1)$
10. $y = x^3$ en el punto $(2, 8)$
11. $y = 2x + 3$ en el punto cuya abscisa es 2.
12. $y = 3x - 5$ en el punto cuya abscisa es 1.
13. $y = ax + b$ en un punto arbitrario.

(En los ejercicios 11, 12 y 13, usar el método de la h y verificar si este método da la misma respuesta para la pendiente que la expuesta en el capítulo II, §3.)

III, §2. LA DERIVADA

Continuamos con la función $y = x^2$. En lugar de escoger un valor numérico definido para la abscisa de un punto, podríamos trabajar en un punto arbitrario sobre la curva. Sus coordenadas son, pues, (x, x^2). Escribimos la abscisa de un punto cercano, como $x+h$ para algún h pequeño, positivo o negativo, pero $h \neq 0$. La ordenada de este punto cercano es

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2.$$

Por lo tanto la pendiente de la recta entre ellos es

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^2 - x^2}{(x+h)-x} &= \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{x+h-x} \\ &= \frac{2xh+h^2}{h} \\ &= 2x+h.\end{aligned}$$

Conforme h tiende a 0, $2x+h$ tiende a $2x$. En consecuencia, la pendiente de la curva $y = x^2$ en un punto arbitrario (x,y) es $2x$. En particular, cuando $x=1$ la pendiente es 2 y cuando $x=-2$ la pendiente es -4, como lo hallamos antes mediante el cálculo explícito usando las abscisas particulares 1 y -2.

Sin embargo, esta vez hemos hallado una fórmula general que nos da la pendiente de cualquier punto de la curva. Así, cuando $x=3$ la pendiente es 6 y cuando $x=-10$ la pendiente es -20.

El ejemplo que hemos resuelto nos brinda el procedimiento para tratar funciones más generales.

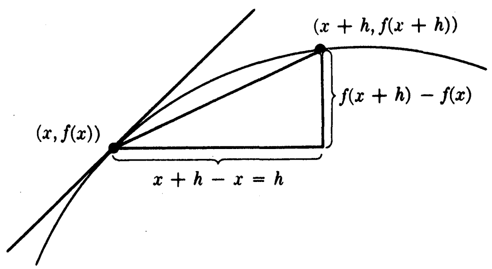
Dada una función $f(x)$, su **cociente de Newton** es

$$\boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.}$$

Este cociente es la pendiente de la recta entre los puntos

$$(x, f(x)) \quad \text{y} \quad (x+h, f(x+h)),$$

como se ilustra en la figura.



Definición. Si el cociente de Newton tiende a un límite cuando h tiende a 0, entonces definimos la **derivada de** f **en** x como este límite, esto es

$$\boxed{\textbf{derivada de } f \textbf{ en } x = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.}$$

La derivada de f en x se denotará de manera abreviada mediante una de las notaciones $f'(x)$, df/dx, o bien $df(x)/dx$. Entonces, por definición,

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.}$$

Es por eso que las dos expresiones $f'(x)$ y df/dx significan lo mismo. Sin embargo queremos subrayar que en la expresión df/dx no multiplicamos f o x por d, ni dividimos df entre dx. La expresión se lee *como un todo*. Hallaremos más adelante que, en ciertas circunstancias, la expresión se comporta *como si* dividiéramos, razón por la cual adoptamos esta manera clásica de escribir la derivada.

La derivada puede verse entonces como una función f', definida en todos los números x tales que el cociente de Newton tienda a un límite cuando h tiende a 0. Observamos que al tomar el límite, tanto el numerador $f(x+h)-f(x)$ como el denominador h tienden a 0. No obstante, su cociente

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tiende a la pendiente de la curva en el punto $(x, f(x))$.

Definición. La función f es **diferenciable** si tiene derivada en todos los puntos donde está definida.

Ejemplo 1. La función $f(x) = x^2$ es diferenciable y su derivada es $2x$. Así, en este caso tenemos

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 2x.$$

Hemos usado de manera sistemática la letra x, pero se puede usar cualquier otra letra: **La veracidad de los enunciados matemáticos es invariante bajo permutaciones del alfabeto.** Así por ejemplo, si $f(u) = u^2$, entonces

$$f'(u) = \frac{df}{du} = 2u.$$

Lo que es importante aquí es que debe aparecer *la misma letra* u en cada uno de estos lugares, y que la letra u sea diferente de la letra f.

Resolvamos algunos ejemplos antes de pasar a los ejercicios de esta sección.

Ejemplo 2. Sea $f(x) = 2x+1$. Hallar la derivada $f'(x)$.

Formamos el cociente de Newton. Tenemos $f(x+h) = 2(x+h)+1$. Así

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2x+2h+1-(2x+1)}{h} = \frac{2h}{h} = 2.$$

Cuando h tiende a 0 (lo cual también se puede escribir como $h \to 0$), este cociente de Newton es igual a 2, y por lo tanto, el límite es 2. Así

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = 2$$

para todos los valores de x. La derivada es constante.

Ejemplo 3. Hallar la pendiente de la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ en el punto cuya abscisa es 3, y hallar la ecuación de la recta tangente en ese punto.

Asimismo, podemos hallar la pendiente en un punto arbitrario sobre la gráfica; ésta es la derivada $f'(x)$. Tenemos

$$f(x+h) = 2(x+h)^2 = 2(x^2+2xh+h^2).$$

El cociente de Newton es

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{2(x^2+2xh+h^2)-2x^2}{h}\\ &= \frac{4xh+2h^2}{h}\\ &= 4x+2h.\end{aligned}$$

Y por definición

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}(4x+2h) = 4x.$$

Así $f'(x) = 4x$. En el punto $x = 3$ tenemos

$$f'(3) = 12,$$

que es la pendiente deseada.

Al igual que para la ecuación de la recta tangente, cuando $x = 3$ tenemos $f(3) = 18$. Por lo tanto debemos hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 18)$, con pendiente 12. Esto es fácil, y la ecuación es, a saber,

$$y - 18 = 12(x-3).$$

Observación sobre la notación. En el ejemplo anterior tenemos

$$\frac{df}{dx} = 4x = f'(x).$$

Queremos la derivada cuando $x = 3$. Aquí vemos la ventaja de la notación $f'(x)$ en lugar de la notación df/dx. Podemos sustituir x por 3 en $f'(x)$ para escribir

$$f'(3) = 12.$$

No podemos sustituir x por 3 en la notación df/dx, pues escribir

$$\frac{df}{d3}$$

provocaría confusión. Si queremos usar la notación df/dx en dicho contexto, podemos valernos de un recurso como escribir

$$\frac{df}{dx} \quad \text{en } x = 3 \text{ es igual a } 12$$

o, en ocasiones,

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=3} = 12.$$

Pero obviamente es mejor usar la notación $f'(x)$ en un contexto semejante.

Ejemplo 4. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2$ en el punto cuya abscisa es -2.

En el ejemplo anterior calculamos la fórmula general para la pendiente de la recta tangente. Es

$$f'(x) = 4x.$$

Por lo tanto, la pendiente en el punto $x = -2$ es

$$f'(-2) = -8.$$

Por otro lado, $f(-2) = 8$, de manera que la ecuación de la recta tangente es

$$y - 8 = -8(x+2).$$

Ejemplo 5. Hallar la derivada de $f(x) = x^3$. Usamos el cociente de Newton, y escribimos primero su numerador:

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x) &= (x+h)^3 - x^3\\ &= x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3\\ &= 3x^2h+3xh^2+h^3.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2+3xh+h^2.$$

Cuando h tiende a 0, el lado derecho tiende a $3x^2$, de modo que

$$\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2.$$

Al definir el cociente de Newton podemos considerar h positivo o negativo. A veces es conveniente, al tomar el límite, ver sólo los valores de h que son positivos. Entonces estaremos viendo solamente los puntos sobre la curva que tienden al punto dado, desde la derecha. De esta manera obtenemos lo que se llama **derivada por la derecha**. Si al tomar el límite del cociente de Newton tomáramos solamente valores negativos para h, obtendríamos la **derivada por la izquierda**.

Ejemplo 6. Sea $f(x) = |x|$. Hallar su derivada por la derecha y su derivada por la izquierda cuando $x = 0$.

La derivada por la derecha es el límite

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}.$$

Cuando $h > 0$, tenemos

$$f(0+h) = f(h) = h,$$

y $f(0) = 0$. Así

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Por lo tanto, el límite cuando $h \to 0$ y $h > 0$ es 1.

La derivada por la izquierda es el límite

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}.$$

Cuando $h < 0$ tenemos

$$f(0+h) = f(h) = -h.$$

Por lo tanto,

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1.$$

Por consiguiente, el límite cuando $h \to 0$ y $h < 0$ es -1.

Vemos que la derivada por la derecha en 0 es 1 y la derivada por la izquierda es -1. No son iguales. Esto se ilustra mediante la gráfica de nuestra función

$$f(x) = |x|,$$

que se ve como la representada en la figura 7.

Existen tanto la derivada por la derecha como la derivada por la izquierda, pero no son iguales.

Podemos reformular nuestra definición de la derivada y decir que la derivada de una función $f(x)$ se define cuando existen la derivada por la derecha y la derivada por la izquierda y son iguales, en cuyo caso a este valor común se le llama simplemente **derivada.**

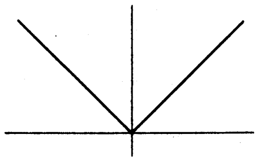


Figura 7

Así, la derivada de $f(x) = |x|$ no está definida en $x = 0$.

Ejemplo 7. Sea $f(x)$ igual a x si $0 < x \leq 1$ y a $x - 1$ si $1 < x \leq 2$. No definimos f para otros valores de x. Entonces la gráfica de f se ve como ésta:

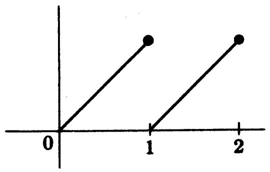


Figura 8

La derivada por la izquierda de f en 1 existe y es igual a 1, pero la derivada por la derecha de f en 1 no existe. Dejamos a los lectores la verificación de la primera afirmación. Para verificar la segunda, debemos ver si existe el límite

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}.$$

Como $1 + h > 1$, tenemos

$$f(1+h) = 1 + h - 1 = h.$$

Además, $f(1) = 1$, por lo que el cociente de Newton es

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h-1}{h} = 1 - \frac{1}{h}.$$

Cuando h tiende a 0, el cociente $1/h$ no tiene límite, pues se vuelve arbitrariamente grande. Así, el cociente de Newton no tiene límite para $h > 0$ y la función no tiene derivada por la derecha cuando $x = 1$.

III, §2. EJERCICIOS

Hallar (a) las derivadas de las funciones siguientes, (b) la pendiente de la gráfica en el punto cuya abscisa es 2, y (c) la ecuación de la recta tangente en ese punto.

1. $x^2 + 1$
2. x^3
3. $2x^3$
4. $3x^2$
5. $x^2 - 5$
6. $2x^2 + x$
7. $2x^2 - 3x$
8. $\frac{1}{2}x^3 + 2x$
9. $\dfrac{1}{x+1}$
10. $\dfrac{2}{x+1}$

III, §3. LÍMITES

Al definir la pendiente de una curva en un punto, o la derivada, usamos el concepto de límite, que consideramos intuitivamente claro. En realidad lo es. Pueden ver en el Apéndice, al final de la parte cuatro, cómo podemos definir los límites usando solamente propiedades de números, pero no nos preocuparemos por ello aquí. Sin embargo haremos una lista de las propiedades de límites que serán usadas en lo que resta del libro, sólo para estar seguros de lo que suponemos acerca de ellos, y también daremos una técnica que permita calcular límites.

Consideremos funciones $F(h)$ definidas para todos los valores suficientemente pequeños de h, con excepción de $h = 0$. Escribimos

$$\boxed{\lim_{h\to 0} F(h) = L}$$

para expresar que **$F(h)$ tiende a L cuando h tiende a 0.**

Primero notamos que si F es una función constante, $F(x) = c$ para todo x, entonces
$$\lim_{h\to 0} F(h) = c$$
es la constante misma.

Si $F(h) = h$, entonces
$$\lim_{h\to 0} F(h) = 0.$$

Las siguientes propiedades relacionan los límites con la suma, resta, multiplicación, división y desigualdades.

Supongan que tenemos dos funciones, $F(x)$ y $G(x)$, que están definidas para los mismos números. Entonces podemos formar la suma de las dos funciones $F + G$, cuyo valor en un punto x es $F(x) + G(x)$. Así, cuando $F(x) = x^4$ y $G(x) = 5x^{3/2}$, tenemos
$$F(x) + G(x) = x^4 + 5x^{3/2}.$$
El valor $F(x) + G(x)$ también se escribe $(F + G)(x)$. La primera propiedad de límites se refiere a la suma de dos funciones.

Propiedad 1. *Suponer que tenemos dos funciones F y G definidas para pequeños valores de h, y suponer que existen los límites*
$$\lim_{h\to 0} F(h) \quad y \quad \lim_{h\to 0} G(h).$$
Entonces existe
$$\lim_{h\to 0}[F(h) + G(h)]$$
y
$$\lim_{h\to 0}(F + G)(h) = \lim_{h\to 0} F(h) + \lim_{h\to 0} G(h).$$

En otras palabras, el límite de una suma es igual a la suma de los límites.

Se cumple una afirmación análoga para la resta $F - G$, a saber
$$\lim_{h\to 0}\big(F(h) - G(h)\big) = \lim_{h\to 0} F(h) - \lim_{h\to 0} G(h).$$

Después de la suma estudiemos el producto. Supongamos que tenemos dos funciones F y G definidas para los mismos números. Entonces podemos formar su producto FG cuyo valor en un número x es
$$(FG)(x) = F(x)G(x).$$
Por ejemplo, si $F(x) = 2x^2 - 2^x$ y $G(x) = x^2 + 5x$, entonces el producto es
$$(FG)(x) = (2x^2 - 2^x)(x^2 + 5x).$$

Propiedad 2. *Sean F y G dos funciones definidas para valores pequeños de h, y supongamos que existen*
$$\lim_{h\to 0} F(h) \quad y \quad \lim_{h\to 0} G(h).$$

Entonces el límite del producto existe y tenemos
$$\lim_{h\to 0}(FG)(h) = \lim_{h\to 0}[F(h)G(h)]$$
$$= \lim_{h\to 0} F(h) \cdot \lim_{h\to 0} G(h).$$

En palabras, podemos decir que el producto de los límites es igual al límite del producto.

Como caso particular, supongamos que $F(x)$ es la función constante $F(x) = c$. Entonces podemos formar la función cG, producto de la constante por G, y tenemos
$$\lim_{h\to 0} cG(h) = c \cdot \lim_{h\to 0} G(h).$$

Ejemplo. Sea $F(h) = 3h + 5$. Entonces $\lim_{h\to 0} F(h) = 5$.

Ejemplo. Sea $F(h) = 4h^3 - 5h + 1$. Entonces $\lim_{h\to 0} F(h) = 1$. Podemos ver esto al considerar los límites
$$\lim_{h\to 0} 4h^3 = 0, \qquad \lim_{h\to 0} 5h = 0, \qquad \lim_{h\to 0} 1 = 1,$$
y tomando la suma apropiada.

Ejemplo. Tenemos que $\lim_{h\to 0} 3xh = 0$, y
$$\lim_{h\to 0}(3xh - 7y) = -7y.$$

En tercer lugar, consideremos los cocientes. Sean F y G como antes, pero supongan que $G(x) \neq 0$ para cualquier x. Entonces podemos formar la función cociente F/G cuyo valor en x es
$$\frac{F}{G}(x) = \frac{F(x)}{G(x)}.$$

Ejemplo. Sean $F(x) = 2x^3 - 4x$ y $G(x) = x^4 + x^{1/3}$. Entonces
$$\frac{F}{G}(x) = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{2x^3 - 4x}{x^4 + x^{1/3}}.$$

Propiedad 3. *Suponer que existen los límites*
$$\lim_{h\to 0} F(h) \quad y \quad \lim_{h\to 0} G(h)$$
y que
$$\lim_{h\to 0} G(h) \neq 0.$$
Entonces el límite del cociente existe y tenemos
$$\lim_{h\to 0} \frac{F(h)}{G(h)} = \frac{\lim F(h)}{\lim G(h)}.$$

En palabras, el cociente de los límites es igual al límite del cociente.

Como acabamos de hacerlo, a veces omitiremos escribir $h \to 0$ para simplificar.

La siguiente propiedad se enuncia aquí para completar el tema. No se usará hasta que hallemos la derivada del seno y del coseno y, en consecuencia, puede verse hasta entonces.

Propiedad 4. *Sean F y G dos funciones definidas para valores pequeños de h; supongamos que $G(h) \leq F(h)$, y además que existen*

$$\lim_{h\to 0} F(h) \quad y \quad \lim_{h\to 0} G(h).$$

Entonces,

$$\lim_{h\to 0} G(h) \leq \lim_{h\to 0} F(h).$$

Propiedad 5. *Sean las mismas hipótesis que en la propiedad 4 y además, supongamos que*

$$\lim_{h\to 0} G(h) = \lim_{h\to 0} F(h).$$

Sea E otra función definida para los mismos números que F y G, tal que

$$G(h) \leq E(h) \leq F(h)$$

para todos los valores pequeños de h. Entonces,

$$\lim_{h\to 0} E(h)$$

existe y es igual a los límites de F y G.

La propiedad 5 se conoce como **proceso de compresión**. A todo lo largo del libro encontrarán muchas aplicaciones de esto.

Ejemplo. Hallar el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{2xh+3}{x^2-4h}$$

cuando $x \neq 0$.

El numerador de nuestro cociente tiende a 3 cuando $h \to 0$ y el denominador tiende a x^2. Así el cociente tiende a $3/x^2$. Podemos justificar estos pasos de manera más formal al aplicar nuestras tres propiedades. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}(2xh+3) &= \lim_{h\to 0}(2xh) + \lim_{h\to 0} 3\\ &= \lim(2x)\lim(h) + \lim 3\\ &= 2x\cdot 0 + 3\\ &= 3.\end{aligned}$$

Para el denominador tenemos

$$\begin{aligned}\lim(x^2-4h) &= \lim x^2 + \lim(-4h)\\ &= x^2 + \lim(-4)\lim(h)\\ &= x^2 + (-4)\cdot 0\\ &= x^2.\end{aligned}$$

Usando la regla para el cociente, vemos que el límite deseado es igual a $3/x^2$.

Ejemplo. En los ejemplos anteriores resultó que pudimos sustituir el valor 0 por h y hallar el límite apropiado. Esto no se puede hacer en general. Por ejemplo, suponer que queremos hallar el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2-h}{h^3+2h}.$$

Si sustituimos $h = 0$ obtenemos la expresión sin sentido $0/0$ y, por lo tanto, no obtenemos información acerca del límite. Sin embargo, para $h \neq 0$ podemos cancelar h del cociente y ver que

$$\frac{h^2-h}{h^3+2h} = \frac{h(h-1)}{h(h^2+2)} = \frac{h-1}{h^2+2}.$$

Podemos determinar el límite a partir de la expresión de la derecha. En efecto, $h-1$ tiende a -1 conforme h tiende a 0. Además h^2+2 tiende a 2 conforme h tiende a 0. De ahí que, por la regla para cocientes de límites, concluimos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2-h}{h^3+2h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-1}{h^2+2} = \frac{-1}{2}.$$

Observar que, en este ejemplo, tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando h tiende a 0. Sin embargo, el límite existe y vemos que es $-\frac{1}{2}$.

Ejemplo. Hallar el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^2h^3-h^2}{3xh-h}.$$

En este caso podemos factorizar h del numerador y del denominador de modo que el cociente sea igual a

$$\frac{x^2h^2-h}{3x-1}.$$

Ahora se ve que el numerador tiende a 0 y que el denominador tiende a $3x-1$ cuando h tiende a 0. Por lo tanto, el cociente tiende a 0. Éste es el límite deseado.

Las propiedades de los límites recién enunciadas permitirán calcular límites para determinar derivadas. Ilustramos esto con un ejemplo.

Ejemplo. Sea $f(x) = 1/x$ (definida para $x \neq 0$). Hallar la derivada df/dx. El cociente de Newton es

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}\\ &= \frac{x-(x+h)}{(x+h)xh}\\ &= \frac{-h}{(x+h)xh} = \frac{-1}{(x+h)x}.\end{aligned}$$

Entonces tomamos el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x}$$

$$= \frac{-1}{\lim (x+h)x}$$

(por la regla para el límite de un cociente)

$$= \frac{-1}{x^2}.$$

Así hemos probado que:

$$\boxed{\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2}.}$$

III, §3. EJERCICIOS

Hallar las derivadas de las siguientes funciones, justificando los pasos al tomar los límites mediante las tres primeras propiedades:

1. $f(x) = 2x^2 + 3x$
2. $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$
4. $f(x) = x(x+1)$
5. $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$
6. $f(x) = 3x^3$
7. $f(x) = x^4$
8. $f(x) = x^5$

(Es particularmente importante que resuelvan los ejercicios 7 y 8 para ver el patrón de desarrollo que se va a seguir en la sección siguiente.)

9. $f(x) = 2x^3$
10. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x$
11. $2/x$
12. $3/x$
13. $\dfrac{1}{2x-3}$
14. $\dfrac{1}{3x+1}$
15. $\dfrac{1}{x+5}$
16. $\dfrac{1}{x-2}$
17. $1/x^2$
18. $1/(x+1)^2$

III, §4. POTENCIAS

Hemos visto que la derivada de la función x^2 es $2x$.

Consideremos la función $f(x) = x^3$ y hallemos su derivada. Tenemos

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

Por lo tanto, el cociente de Newton es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \frac{3x^2h + h^2(3x+h)}{h} \quad \text{(después de las cancelaciones)}$$

$$= 3x^2 + 3xh + h^2 \quad \text{(después de cancelar } h\text{)}.$$

Usando las propiedades de límites de las sumas y productos vemos que $3x^2$ permanece igual a sí mismo cuando h tiende a 0, y que tanto $3xh$ como h^3 tienden a 0. Por ello,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2.$$

Esto sugiere que en general, cuando $f(x) = x^n$ para algún entero positivo n, la derivada $f'(x)$ debe ser nx^{n-1}. En efecto, así sucede, y se probará en el siguiente teorema. La demostración seguirá el mismo patrón del caso anterior en que $f(x) = x^3$. Convendría que, antes de ver el caso general, resolvieran en detalle el caso $f(x) = x^4$ y qu' ' también el caso $f(x) = x^5$ (que fueron ejercicios de la sección anterior) par. confirmar que en estos casos particulares se sigue el mismo patrón. Noten que, cuando tratamos $f(x) = x^3$ obtuvimos una expresión para el cociente de Newton que tenía numerador

$$3x^2h + h^2(3x+h),$$

que incluía el término $3x^2h$, y otro término que incluía h^2 como factor. Cuando dividimos entre h, $3x^2$ da el valor de la derivada, y el término restante $h(3x+h)$ conserva a h como factor, por lo que tiende a 0 cuando h tiende a 0. Hallarán de manera explícita un fenómeno similar para x^4 y x^5.

Teorema 4.1. *Sea n un entero ≥ 1 y sea $f(x) = x^n$. Entonces*

$$\frac{df}{dx} = nx^{n-1}.$$

Demostración. Tenemos

$$f(x+h) = (x+h)^n = (x+h)(x+h)\cdots(x+h),$$

donde el producto se toma n veces. Al seleccionar x de cada factor resulta un término x^n. Si tomamos x de todos los factores excepto uno y h de los factores restantes, obtenemos hx^{n-1} considerado n veces. Esto nos da un término $nx^{n-1}h$. Todos los otros términos tendrán que seleccionar h al menos de dos factores, y los términos correspondientes serán divisibles entre h^2. Así obtenemos

$$f(x+h) = (x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + h^2g(x,h),$$

donde $g(x,h)$ es simplemente alguna expresión que incluye potencias de x y h con coeficientes numéricos que, como veremos más adelante en la demostración, no se necesita determinar. Sin embargo, usando las reglas para los límites de sumas y productos podemos concluir que

$$\lim_{h\to 0} g(x,h)$$

será algún número cuya determinación no es necesaria.

En esta forma el cociente de Newton es

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{x^n + nx^{n-1}h + h^2g(x,h) - x^n}{h}\\ &= \frac{nx^{n-1}h + h^2g(x,h)}{h} && \text{(porque se cancela } x^n\text{)}\\ &= nx^{n-1} + hg(x,h) && \text{(dividiendo entre } h \text{ el numerador y el denominador)}\end{aligned}$$

Cuando h tiende a 0, el término nx^{n-1} no cambia. El límite de h cuando h tiende a 0, es 0, de modo que por la regla del producto, el término $hg(x,h)$ tiende a 0 cuando h tiende a 0. Así, finalmente

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1},$$

lo cual prueba nuestro teorema.

Para otra demostración, vean el final de la siguiente sección.

Teorema 4.2. *Sea a cualquier número y sea $f(x) = x^a$ (definida para $x > 0$). Entonces $f(x)$ tiene una derivada, que es*

$$f'(x) = ax^{a-1}.$$

No es difícil probar el teorema 4.2 cuando a es un entero negativo. Sin embargo, es mejor esperar hasta que tengamos una regla que nos dé la derivada de un cociente antes de hacerlo. También podríamos demostrarlo cuando a es un número racional. No obstante, probaremos el resultado general en un capítulo posterior, de modo que preferimos esperar hasta entonces, cuando dispongamos de más técnicas.

Ejemplos. Si $f(x) = x^{10}$, entonces $f'(x) = 10x^9$.
Si $f(x) = x^{3/2}$ (para $x > 0$), entonces $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$.
Si $f(x) = x^{-5/4}$, entonces $f'(x) = -\frac{5}{4}x^{-9/4}$.
Si $f(x) = x^{\sqrt{2}}$, entonces $f'(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$.

Noten especialmente el caso particular en que $f(x) = x$. Entonces $f'(x) = 1$.

Ejemplo. Ahora ya podemos hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a ciertas curvas que antes no podíamos. Considerar la curva

$$y = x^5$$

Deseamos hallar la ecuación de su recta tangente en el punto $(2, 32)$. Por el teorema 4.1, si $f(x) = x^5$, entonces $f'(x) = 5x^4$. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $x = 2$ es

$$f'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80.$$

Por otro lado, $f(2) = 2^5 = 32$. De aquí que la ecuación de la recta tangente sea

$$y - 32 = 80(x - 2).$$

III, §4. EJERCICIOS

1. Escribir la expresión de $(x+h)^4$ en términos de potencias de x y h.
2. Hallar directamente la derivada de la función x^4 usando el cociente de Newton.
3. ¿Cuáles son las derivadas de las siguientes funciones?
   (a) $x^{2/3}$ (b) $x^{-3/2}$ (c) $x^{7/6}$
4. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^9$ en el punto $(1,1)$?
5. ¿Cuál es la pendiente de la curva $y = x^{2/3}$ en el punto $(8,4)$? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?
6. Dar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^{-3/4}$ en el punto cuya abscisa es 16.
7. Dar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto cuya abscisa es 3.
8. Dar las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados:
   (a) $f(x) = x^{1/4}$ en $x = 5$ (b) $f(x) = x^{-1/4}$ en $x = 7$
   (c) $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ en $x = 10$ (d) $f(x) = x^{\pi}$ en $x = 7$

III, §5. SUMAS, PRODUCTOS Y COCIENTES

En esta sección deduciremos varias reglas que permiten hallar las derivadas de sumas, productos y cocientes de funciones cuando se conoce la derivada de cada factor.

Comenzamos con la definición de funciones continuas y la razón de que una función diferenciable sea continua.

Definición. Se dice que una función es **continua en un punto** x si, y sólo si,

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

Se dice que una función es **continua** si es continua en todo punto de su dominio de definición.

Sea f una función con derivada $f'(x)$ en x. Entonces f es continua en x.

Demostración. El cociente

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tiende al límite $f'(x)$ cuando h tiende a 0. Tenemos

$$h\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x+h)-f(x).$$

Por lo tanto, al usar la regla para el límite de un producto y notar que h tiende a 0, hallamos que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)-f(x) = 0f'(x) = 0.$$

Ésta es otra manera de enunciar que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

En otras palabras, f es continua.

Está claro que nunca podemos sustituir $h=0$ en nuestro cociente porque entonces se vuelve $0/0$, lo cual no tiene sentido. Geométricamente, hacer $h=0$ equivale a tomar los dos puntos sobre la curva iguales entre sí. Entonces es imposible tener una recta única que pase por un punto. Nuestro procedimiento de tomar el límite del cociente de Newton tiene sentido sólo si $h \neq 0$.

Observen que, en el cociente de Newton, tanto el numerador como el denominador tienden a 0. Pese a ello, el cociente no necesariamente tiende a 0.

Ejemplo. Sea $f(x)=|x|$. Entonces la función valor absoluto f es continua en 0, aunque no sea diferenciable en 0. Es cierto aún que

$$f(0+h) = f(h) = |h|$$

tiende a 0 cuando h tiende a 0, aunque la función no sea diferenciable en 0. Como vimos en la sección §2, la función $f(x)=|x|$ es diferenciable por la derecha en 0 y es diferenciable por la izquierda en 0, pero no es diferenciable en 0.

Ejemplo. Sea $f(x)=0$ si $x<0$ y $f(x)=1$ si $x \geq 0$. En la figura 9 se muestra la gráfica de f.

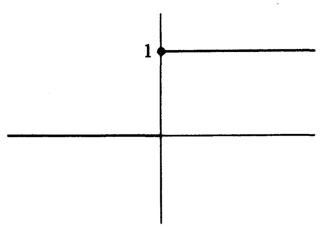
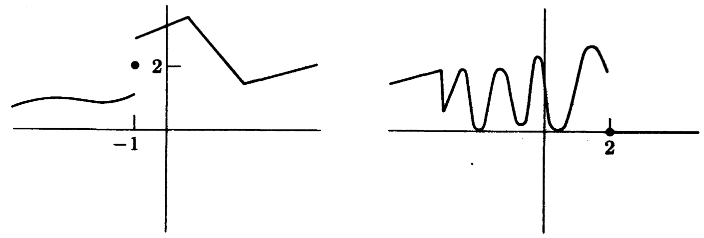


Figura 9

La función f no es continua en 0. En términos generales, la función no es continua en 0 porque su gráfica tiene un "salto" en 0. En la figura 10 se muestran otros ejemplos de gráficas con discontinuidades.



(a) (b)

Figura 10

En la figura 10(a), la función es continua excepto en $x=-1$. En la figura 10(b), la función es continua excepto en $x=2$.

La observación que expresamos al principio de esta sección indica que si una función es diferenciable, entonces es continua. Como por ahora nos ocupamos principalmente de funciones diferenciables, no estudiaremos las funciones continuas con mayor profundidad, y esperaremos hasta después, cuando el concepto sea relevante para nuestro curso.

Sea c un número y $f(x)$ una función que tiene derivada $f'(x)$ para todos los valores de x donde está definida. Podemos multiplicar f por la constante c para obtener otra función cf cuyo valor en x es $cf(x)$.

Una constante por una función. *La derivada de cf está dada entonces por la fórmula*

$$(cf)'(x) = c\cdot f'(x).$$

En otras palabras, la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función.

En la otra notación, esto se lee

$$\boxed{\frac{d(cf)}{dx} = c\frac{df}{dx}.}$$

Para probar esta regla usamos la definición de derivada. El cociente de Newton para la función cf es

$$\frac{(cf)(x+h)-(cf)(x)}{h} = \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Tomemos el límite cuando h tiende a 0. Entonces c permanece fijo y

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tiende a $f'(x)$. De acuerdo con la regla para el producto de los límites, vemos que nuestro cociente de Newton tiende a $cf'(x)$, como se quería probar.

Ejemplo. Sea $f(x) = 3x^2$. Entonces $f'(x) = 6x$. Si $f(x) = 17x^{1/2}$, entonces $f'(x) = \frac{17}{2}x^{-1/2}$. Si $f(x) = 10x^a$, entonces $f'(x) = 10ax^{a-1}$.

A continuación veremos la suma de dos funciones.

Suma. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones con derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$, respectivamente. Entonces la suma $f(x)+g(x)$ tiene una derivada, y*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

La derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas.

En la otra notación se escribe:

$$\boxed{\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}.}$$

Para probar esto tenemos que, por definición,

$$(f+g)(x+h) = f(x+h) + g(x+h)$$

y

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Por lo tanto, el cociente de Newton para $f+g$ es

$$\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}.$$

Agrupando términos y separando la fracción, vemos que esta expresión es igual a

$$\frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Tomando el límite cuando h tiende a 0 y usando la regla para el límite de una suma, vemos que esta última suma tiende a $f'(x) + g'(x)$ cuando h tiende a 0. Esto prueba lo que queríamos.

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}(x^3 + x^2) = 3x^2 + 2x,$$

$$\frac{d}{dx}(4x^{1/2} + 5x^{-10}) = 2x^{-1/2} - 50x^{-11}.$$

Llevados por el entusiasmo de poder determinar tan fácilmente la derivada de funciones construidas a partir de otras por medio de constantes y sumas, podríamos estar ahora tentados a enunciar la regla de que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Desafortunadamente esto es falso. Para ver que la regla es falsa, examinemos un ejemplo.

Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Entonces $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x$. Por lo tanto $f'(x)g'(x) = 2x$. Sin embargo, la derivada del producto $(fg)(x) = x^3$ es $3x^2$, que ciertamente no es igual a $2x$. Así, el producto de las derivadas no es igual a la derivada del producto.

La regla correcta se descubrió mediante ensayo y error, y se puede enunciar como sigue:

Producto. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones con derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$. Entonces la función producto $f(x)g(x)$ tiene una derivada, que está dada por la fórmula*

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

En palabras, la derivada del producto es igual a la primera por la derivada de la segunda, más la derivada de la primera por la segunda.

En la otra notación, esto se ve como sigue:

$$\boxed{\frac{d(fg)}{dx} = f(x)\frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx}g(x).}$$

La demostración no es mucho más difícil que las demostraciones que hemos encontrado hasta ahora. Por definición, tenemos

$$(fg)(x+h) = f(x+h)g(x+h)$$

y

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

En consecuencia, el cociente de Newton para la función producto fg es

$$\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

A estas alturas quedan pocas esperanzas de transformar este cociente de modo que veamos fácilmente a qué límite tiende cuando h tiende a 0. Pero usamos un truco y reescribimos nuestro cociente insertando

$$-f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x)$$

en el numerador. Ciertamente esto no cambia el valor de nuestro cociente, que ahora se ve así:

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}.$$

Podemos separar esta fracción en una suma de dos fracciones:

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} + \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}.$$

Podemos factorizar $f(x+h)$ en el primer término y $g(x)$ en el segundo, para obtener

$$f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{f(x+h)f(x)}{h}g(x).$$

Ahora la situación está bajo control. Conforme h tiende a 0, $f(x+h)$ tiende a $f(x)$, y los dos cocientes en la expresión recién escrita tienden a $g'(x)$ y $f'(x)$ respectivamente. Así, el cociente de Newton de fg tiende a

$$f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

lo cual prueba nuestra afirmación

Ejemplo. Aplicando la regla del producto hallamos:

$$\frac{d}{dx}(x+1)(3x^2) = (x+1)6x + 1\cdot 3x^2.$$

De manera análoga,

$$\frac{d}{dx}[(2x^5+5x^4)(2x^{1/2}+x^{-1})]$$
$$= (2x^5+5x^4)\left(x^{-1/2}-\frac{1}{x^2}\right) + (10x^4+20x^3)(2x^{1/2}+x^{-1})$$

lo cual pueden y deben dejar así, sin tratar de simplificar la expresión.

Un caso particular de la regla del producto que se usa muy a menudo, es el de la potencia de una función.

Ejemplo.

$$\boxed{\frac{d(f(x)^2)}{dx} = 2f(x)f'(x).}$$

En efecto, al diferenciar el producto $y = f(x)f(x)$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = f(x)f'(x) + f'(x)f(x) = 2f(x)f'(x).$$

La última regla de esta sección trata de la derivada de un cociente. Comenzamos con un caso especial.

Sea $g(x)$ una función que tiene derivada $g'(x)$, y tal que $g(x) \neq 0$. Entonces la derivada del cociente $1/g(x)$ existe y es igual a

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \frac{-1}{g(x)^2}g'(x).}$$

Para probar esto vemos el cociente de Newton

$$\frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h}$$

lo cual es igual a

$$\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} = -\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Al hacer que h tienda a 0 vemos inmediatamente que nuestra expresión tiende a

$$\frac{-1}{g(x)^2}g'(x)$$

según se deseaba.

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(x^5-3x)} = \frac{-1}{(x^5-3x)^2}(5x^4-3).$$

Se puede ahora enunciar y probar fácilmente el caso general de la regla para cocientes.

Cociente. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones que tienen derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ respectivamente y tales que $g(x) \neq 0$. Entonces la derivada del cociente $f(x)/g(x)$ existe y es igual a*

$$\frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

En palabras esto es:

El de abajo por la derivada del de arriba, menos el de arriba por la derivada del de abajo, sobre el de abajo al cuadrado

(lo cual deberán memorizar como un poema).

En la otra notación esto se ve como:

$$\boxed{\frac{d(f/g)}{dx} = \frac{g(x)\,df/dx - f(x)\,dg/dx}{g(x)^2}.}$$

Para probar esta regla, escribimos nuestro cociente en la forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$$

y usamos la regla para la derivada de un producto, junto con el caso especial que acabamos de probar. Obtenemos su derivada:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{-1}{g(x)^2}g'(x)$$
$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

colocando esta expresión sobre el denominador común $g(x)^2$. Ésta es la derivada deseada.

Resolvamos algunos ejercicios.

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{3x^4-2x}\right) = \frac{(3x^4-2x)2x - (x^2+1)(12x^3-2)}{(3x^4-2x)^2}.$$

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x+4}\right) = \frac{(x+4)\cdot 2 - 2x\cdot 1}{(x+4)^2}.$$

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = x/(x^2 + 4)$$

en el punto $x = -3$.

Hagamos $f(x) = x/(x^2 + 4)$. Entonces

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 4) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2}.$$

De aquí,

$$f'(-3) = \frac{13 - 18}{13^2} = \frac{-5}{169}.$$

Ésta es la pendiente en un punto dado. Más aún,

$$f(-3) = \frac{-3}{13}.$$

Por ello las coordenadas del punto dado son $(-3, -3/13)$. La ecuación de la recta tangente es entonces

$$y + \frac{3}{13} = \frac{-5}{169}(x + 3).$$

Ejemplo. Mostrar que las dos curvas

$$y = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad y = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{4}{3}$$

tienen una recta tangente común en el punto $(1, 2)$. Hacemos

$$f(x) = x^2 + 1 \quad y \quad g(x) = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{4}{3}.$$

Entonces

$$f'(x) = 2x \quad y \quad g'(x) = 2x^2.$$

Como $f'(1) = g'(1) = 2$, la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de f y a la gráfica de g es la misma en el punto $(1, 2)$. De ahí que las rectas tangentes sean la misma, pues pasan por el mismo punto, a saber

$$y - 2 = 2(x - 1).$$

Apéndice. Otra demostración de que $dx^n/dx = nx^{n-1}$

Hay otra demostración de que

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

para cualquier entero positivo n, como se verá enseguida. Primero notamos que cuando $n = 1$, hemos probado directamente que

$$\frac{dx}{dx} = 1,$$

usando el método de la h.

Ahora vamos a usar la regla para la derivada de un producto. Para obtener la derivada de x^2, tenemos:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d(x \cdot x)}{dx} = x\frac{dx}{dx} + \frac{dx}{dx}x = 2x.$$

A continuación obtenemos la derivada de x^3:

$$\begin{aligned} \frac{d(x^3)}{dx} = \frac{d(x^2 \cdot x)}{dx} &= x^2\frac{dx}{dx} + \frac{d(x^2)}{dx}x \\ &= x^2 + 2x^2 \qquad \text{(por el paso anterior)} \\ &= 3x^2. \end{aligned}$$

Después obtenemos la derivada de x^4:

$$\begin{aligned} \frac{d(x^4)}{dx} = \frac{d(x^3 \cdot x)}{dx} &= x^3\frac{dx}{dx} + \frac{d(x^3)}{dx}x \\ &= x^3 + 3x^3 \qquad \text{(por el paso anterior)} \\ &= 4x^3. \end{aligned}$$

Podemos proceder de este modo para cualquier entero n. Supongamos que hemos probado la fórmula hasta cierto entero n. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d(x^{n+1})}{dx} = \frac{d(x^n \cdot x)}{dx} &= x^n\frac{dx}{dx} + \frac{d(x^n)}{dx}x \\ &= x^n + nx^n \qquad \text{(por el paso anterior)} \\ &= (n+1)x^n. \end{aligned}$$

Esto muestra cómo se procede de un paso al siguiente.

Este procedimiento se llama **inducción**. A lo largo del curso hallarán varios ejemplos de dicho procedimiento. En cada caso se resuelven los pasos para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, y así sucesivamente, avanzando tanto como sea necesario para reconocer el patrón y familiarizarse con él. Después se debe tratar de formular y realizar el paso final, con n en lugar de un número específico. Después de encontrar suficientes ejemplos de este tipo, entenderán lo que significa la inducción y, en particular, comprenderán la siguiente definición formal.

Supongan que queremos probar una afirmación $A(n)$ para todo entero positivo n. Entonces una **demostración por inducción** consiste en probar:

(1) La afirmación es verdadera cuando $n = 1$.
(2) Si la afirmación es verdadera para un entero dado n, entonces es verdadera para $n + 1$.

El primer paso permite iniciar el procedimiento y el segundo paso permite ir de un entero al siguiente, tal como lo hicimos en el ejemplo anterior.

III, §5. EJERCICIOS

Hallar las derivadas de las funciones siguientes::

1. (a) $2x^{1/3}$ (b) $3x^{3/4}$ (c) $\frac{1}{2}x^2$ (d) $\frac{3}{4}x^2$
2. (a) $5x^{11}$ (b) $4x^{-2}$ (c) $\frac{1}{3}x^4 - 5x^3 + x^2 - 2$
3. (a) $\frac{1}{2}x^{-3/4}$ (b) $3x - 2x^3$ (c) $4x^5 - 7x^3 + 2x - 1$
4. (a) $7x^3 + 4x^2$ (b) $4x^{2/3} + 5x^4 - x^3 + 3x$
5. (a) $25x^{-1} + 12x^{1/2}$ (b) $2x^3 + 5x^7$ (c) $4x^4 - 7x^3 + x - 12$
6. (a) $\frac{3}{5}x^2 - 2x^8$ (b) $3x^4 - 2x^2 + x - 10$ (c) $\pi x^7 - 8x^5 + x + 1$
7. $(x^3 + x)(x - 1)$
8. $(2x^2 - 1)(x^4 + 1)$
9. $(x + 1)(x^2 + 5x^{3/2})$
10. $(2x - 5)(3x^4 + 5x + 2)$
11. $(x^{-2/3} + x^2)\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)$
12. $(2x + 3)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$
13. $\dfrac{2x + 1}{x + 5}$
14. $\dfrac{2x}{x^2 + 3x + 1}$

Para romper la monotonía de la letra x, usemos otra.

15. $f(t) = \dfrac{t^2 + 2t - 1}{(t + 1)(t - 1)}$
16. $\dfrac{t^{-5/4}}{t^2 + t - 1}$
17. ¿Cuál es la pendiente de la curva
$$y = \frac{t}{t + 5}$$
en el punto $t = 2$? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en este punto?

18 ¿Cuál es la pendiente de la curva
$$y = \frac{t^2}{t^2 + 1}$$
en $t = 1$? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente?

III, §5. EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

Hallar las derivadas de las funciones siguientes ¡No simplifiquen sus respuestas!

1. $3x^3 - 4x + 5$
2. $x^2 + 2x + 27$
3. $x^2 + x - 1$
4. $x^{1/2} - 8x^4 + x^{-1}$
5. $x^{5/2} + x^{-5/2}$
6. $x^7 + 15x^{-1/5}$
7. $(x^2 - 1)(x + 5)$
8. $\left(x^5 + \frac{1}{x}\right)(x^5 + 1)$
9. $(x^{3/2} + x^2)(x^4 - 99)$
10. $(x^2 + x + 1)(x^5 - x - 25)$
11. $(2x^2 + 1)\left(\frac{1}{x^2} + 4x + 8\right)$
12. $(x^4 - x^2)(x^2 - 1)$
13. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$
14. $5(x - 1)(x - 2)(x^2 + 1)$
15. $x^3(x^2 + 1)(x + 1)$
16. $(x^4 + 1)(x + 5)(2x + 7)$
17. $\dfrac{1}{2x + 3}$
18. $\dfrac{1}{7x + 27}$
19. $\dfrac{-5}{x^3 + 2x^2}$

20. $\dfrac{3}{2x^4 + x^{3/2}}$
21. $\dfrac{-2x}{x + 1}$
22. $\dfrac{x + 1}{x - 5}$
23. $\dfrac{3x^{1/2}}{(x + 1)(x - 1)}$
24. $\dfrac{2x^{1/2} + x^{3/4}}{(x + 1)x^3}$
25. $\dfrac{x^5 + 1}{(x^2 + 1)(x + 7)}$
26. $\dfrac{(x + 1)(x + 5)}{x - 4}$
27. $\dfrac{x^3}{1 - x^2}$
28. $\dfrac{x^5}{x^{3/2} + x}$
29. $\dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}$
30. $\dfrac{x^2 + 2x + 7}{8x}$
31. $\dfrac{2x + 1}{x^2 + x - 4}$
32. $\dfrac{x^5}{x^2 + 3}$
33. $\dfrac{4x - x^3}{x^2 + 2}$
34. $\dfrac{x^3}{x^2 - 5x + 7}$
35. $\dfrac{1 - 5x}{x}$
36. $\dfrac{1 + 6x + x^{3/4}}{7x - 2}$
37. $\dfrac{x^2}{(x + 1)(x - 2)}$
38. $\dfrac{x^{1/2} - x^{-1/2}}{x^{3/4}}$
39. $\dfrac{3x^4 + x^{5/4}}{4x^3 - x^5 + 1}$
40. $\dfrac{x - 1}{(x - 2)(x - 3)}$

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a las curvas siguientes en el punto dado.

41. $y = x^{1/4} + 2x^{3/4}$ en $x = 16$
42. $y = 2x^3 + 3$ en $x = \frac{1}{2}$
43. $y = (x - 1)(x - 3)(x - 4)$ en $x = 0$
44. $y = 2x^2 + 5x - 1$ en $x = 2$
45. $y = (x^2 + 1)(2x + 3)$ en $x = 1$
46. $y = \dfrac{x - 1}{x + 5}$ en $x = 2$
47. $y = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$ en $x = 2$
48. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$ en $x = 2$
49. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ en $x = 2$
50. $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$
51. Mostrar que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación
$$y = x^3 - 6x^2 + 8x.$$
Hallar el punto de tangencia.
52. Mostrar que la recta $y = 9x - 15$ es tangente a la curva
$$y = x^3 - 3x + 1.$$
Hallar el punto de tangencia.
53. Mostrar que las gráficas de las ecuaciones
$$y = 3x^2 \quad \text{y} \quad y = 2x^3 + 1$$
tienen la recta tangente común en el punto $(1, 3)$. Trazar las gráficas.
54. Mostrar que hay exactamente dos rectas tangentes a la gráfica de $y = (x + 1)^2$ que pasa por el origen, y hallar sus ecuaciones.

55. Hallar todos los puntos (x_0, y_0) sobre la curva

$$y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$$

tales que la recta tangente a la curva en (x_0, y_0) sea paralela a la recta

$$16x - y + 5 = 0.$$

Hallar la recta tangente a la curva en cada uno de estos puntos.

III, §6. LA REGLA DE LA CADENA

Ya sabemos cómo construir nuevas funciones a partir de las antiguas mediante sumas, productos y cocientes. Hay otra manera importante de construir nuevas funciones. Primero daremos ejemplos de esta nueva manera.

Consideren la función $(x+2)^{10}$. Podemos decir que esta función está hecha a partir de la función décima potencia y de la función $x+2$. A saber, dado un número x, primero le sumamos 2 y después tomamos la décima potencia. Sea

$$g(x) = x + 2$$

y sea f la función de décima potencia. Entonces podemos tomar el valor de f en $x+2$, a saber

$$f(x+2) = (x+2)^{10}$$

y también podemos escribirlo como

$$f(x+2) = f(g(x)).$$

Otro ejemplo: Consideren la función $(3x^4 - 1)^{1/2}$. Si hacemos

$$g(x) = 3x^4 - 1$$

y hacemos que f sea la función raíz cuadrada, entonces

$$f(g(x)) = \sqrt{3x^4 - 1} = (3x^4 - 1)^{1/2}.$$

A fin de no confundirnos con la letra x, que no podemos seguir usando en todos los contextos, usamos otra letra para denotar los valores de g. Así podemos escribir $f(u) = u^{1/2}$.

De manera análoga, sean $f(u)$ la función $u+5$ y $g(x) = 2x$. Entonces

$$f(g(x)) = f(2x) = 2x + 5.$$

Un ejemplo más del mismo tipo: Sea

$$f(u) = \frac{1}{u+2}$$

y

$$g(x) = x^{10}.$$

Entonces,

$$f(g(x)) = \frac{1}{x^{10}+2}.$$

Para que tengan suficiente práctica con muchos tipos de funciones, mencionaremos varias cuyas definiciones se darán posteriormente. Éstas serán sen y cos (que se leen seno y coseno), log (que se lee logaritmo o simplemente log) y la función exponencial exp. Seleccionaremos un número especial e (cuyo valor es aproximadamente 2.718...), tal que la función exp está dada por

$$\exp(x) = e^x.$$

Ahora veremos cómo se puede hacer nuevas funciones con éstas:

Sean $f(u) = \operatorname{sen} u$ y $g(x) = x^2$. Entonces

$$f(g(x)) = \operatorname{sen}(x^2).$$

Sean $f(u) = e^u$ y $g(x) = \cos x$. Entonces

$$f(g(x)) = e^{\cos x}.$$

Sean $f(v) = \log v$ y $g(t) = t^3 - 1$. Entonces

$$f(g(t)) = \log(t^3 - 1).$$

Sean $f(w) = w^{10}$ y $g(z) = \log z + \operatorname{sen} z$. Entonces

$$f(g(z)) = (\log z + \operatorname{sen} z)^{10}.$$

Cada vez que tengamos dos funciones f y g tales que f esté definida para todos los números que sean valores de g, podremos construir una nueva función denotada por $f \circ g$ cuyo valor en un número x es

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

La regla que define a esta nueva función es: Se toma el número x, se halla el número $g(x)$, y depués se toma el valor de f en $g(x)$. Éste es el valor de $f \circ g$ en x. La función $f \circ g$ se llama **función compuesta** de f y g. Decimos que g es la función **interior** y que f es la función **exterior**. Por ejemplo, en la función log sen x, tenemos

$$f \circ g = \log \circ \operatorname{sen}.$$

La función exterior es log, y la función interior es el seno.

Es importante tener en mente que sólo podemos componer dos funciones cuando la función exterior está definida en todos los valores de la función interior. Por ejemplo, sean $f(u) = u^{1/2}$ y $g(x) = -x^2$. Entonces no podemos formar la función compuesta $f \circ g$ porque f está definida solamente para números positivos (o 0) y los valores de g son todos negativos, o 0. Así, $(-x^2)^{1/2}$ no tiene sentido.

Sin embargo, por el momento se les pide aprender el mecanismo de las funciones compuestas exactamente como aprendieron la tabla de multiplicar, a fin de adquirir reflejos condicionados eficientes para cuando se encuentren con funciones compuestas. Por lo tanto, para el entrenamiento dado por los ejercicios que se encuentran al final de la sección, deberán olvidar por el momento el significado de los símbolos y operar con ellos formalmente, sólo para aprender de manera adecuada las reglas formales.

Aunque no hemos definido la función exponencial e^x ni hemos visto formalmente sen x u otra de las funciones recién mencionadas, no necesitamos conocer sus definiciones para poder manipularlas. Si nos limitáramos a las funciones con las que hemos tratado explícitamente hasta ahora, tendríamos una visión restringida de cómo trabaja la composición de funciones y cómo trabaja la regla de la cadena a continuación.

Pasemos al problema de sacar la derivada de una función compuesta.

Comencemos con un ejemplo. Supongan que queremos hallar la derivada de la función $(x+1)^{10}$. El cociente de Newton sería una expresión muy larga, y resultaría del todo infructuoso tratar de desenredarlo mediante fuerza bruta, único método que tenemos hasta ahora. Por lo tanto, es una agradable sorpresa saber que hay una manera fácil de hallar la derivada. Damos la respuesta al momento: la derivada de esta función es $10(x+1)^9$. Se parece mucho a la derivada de las potencias.

Antes de enunciar y probar el teorema general daremos otros ejemplos.

Ejemplo.
$$\frac{d}{dx}(x^2+2x)^{3/2} = \frac{3}{2}(x^2+2x)^{1/2}(2x+2).$$
Observen cuidadosamente el término adicional $2x+2$, que es la derivada de la expresión x^2+2x. Podemos describir la respuesta en los términos siguientes. Hacemos $u = x^2+x$ de modo que $du/dx = 2x+2$. Sea $f(u) = u^{3/2}$. Tenemos entonces
$$\frac{d(f(u(x)))}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}.$$

Ejemplo.
$$\frac{d}{dx}(x^2+x)^{10} = 10(x^2+x)^9(2x+1).$$
Observen de nuevo la presencia del término $2x+1$, que es la derivada de x^2+x. Una vez más, si hacemos $u = x^2+x$ y $f(u) = u^{10}$, entonces
$$\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}, \quad \text{donde} \quad \frac{df}{du} = 10u^9 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = 2x+1.$$

¿Pueden adivinar la regla general a partir de las afirmaciones precedentes? La regla general también fue descubierta mediante ensayo y error, pero nosotros aprovechamos tres siglos de experiencia y podemos enunciarla y probarla de manera muy simple, como sigue.

Regla de la cadena. *Sean f y g dos funciones que tienen derivadas, y tales que f está definida en todos los números que son valores de g. Entonces la función compuesta $f \circ g$ tiene una derivada, dada por la fórmula*
$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$
Esto se puede expresar en palabras diciendo que tomamos la *derivada de la función exterior por la derivada de la función interior (o la derivada de lo que está adentro).*

La afirmación anterior se conoce como **regla de la cadena.**

Si ponemos $u = g(x)$, entonces podemos expresar la regla de la cadena en la forma
$$\boxed{\frac{df(u(x))}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx},}$$
o también
$$\frac{d(f\circ g)}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}.$$
Así, la derivada se comporta *como si* se cancelara du. En tanto hayamos probado este resultado, no hay nada de malo en trabajar como una máquina para calcular derivadas de funciones compuestas; daremos algunos ejemplos antes de los ejercicios.

Ejemplo. Sea $F(x) = (x^2+1)^{10}$. Entonces
$$F(x) = f(g(x)),$$
donde
$$u = g(x) = x^2+1 \quad \text{y} \quad f(u) = u^{10}.$$
Entonces
$$f'(u) = 10u^9 = \frac{df}{du} \quad \text{y} \quad g'(x) = 2x = \frac{dg}{dx}.$$
Así,
$$\frac{d(f\circ g)}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = 10u^9 \cdot 2x = 10(x^2+1)^9 2x.$$

Ejemplo. Sean $f(u) = 2u^{1/2}$ y $g(x) = 5x+1$. Entonces
$$f'(u) = u^{-1/2} = \frac{df}{du} \quad \text{y} \quad g'(x) = 5 = \frac{dg}{dx}.$$
Así,
$$\frac{d}{dx}2(5x+1)^{1/2} = 2\cdot\tfrac{1}{2}(5x+1)^{-1/2}\cdot 5 = (5x+1)^{-1/2}\cdot 5.$$
(Presten atención a la constante 5, que es la derivada de $5x+1$. Es muy posible que la olviden.)

Para darles un entrenamiento más extensivo del que se puede alcanzar con las funciones consideradas, como las potencias, resumimos las derivadas de las funciones elementales que se considerarán posteriormente.
$$\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x, \qquad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\operatorname{sen} x.$$
$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x \qquad \text{(sí: } e^x\text{, ¡igual que la función!).}$$
$$\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)^7 = 7(\operatorname{sen} x)^6 \cos x.$$

En este ejemplo, $f(u) = u^7$ y $df/du = 7u^6$. Además

$$u = \operatorname{sen} x, \qquad \text{y} \qquad \frac{du}{dx} = \cos x.$$

Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 3x)^7 = 7(\operatorname{sen} 3x)^6 \cos 3x \cdot 3.$$

El último factor de 3 que se presenta en el lado derecho es la derivada $d(3x)/dx$.

Ejemplo. Sea n cualquier entero. Para cualquier función diferenciable $f(x)$,

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(x)^n = nf(x)^{n-1}\frac{df}{dx}.}$$

Ejemplo.

$$\frac{de^{\operatorname{sen} x}}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = e^{\operatorname{sen} x}(\cos x).$$

En este ejemplo, $f(u) = e^u$, $df/du = e^u$, y $u = \operatorname{sen} x$.

Ejemplo.

$$\frac{d\cos(2x^2)}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = -\operatorname{sen}(2x^2)\cdot 4x.$$

En este ejemplo, $f(u) = \cos u$ y $df/du = -\operatorname{sen} u$. Además $u = 2x^2$, de modo que $du/dx = 4x$.

Ejemplo.

$$\frac{d\cos 4x}{dx} = -\operatorname{sen}(4x)\cdot 4.$$

En este ejemplo, $f(u) = \cos u$ y $u = 4x$ por lo que $du/dx = 4$.

Insistimos en lo que ya afirmamos. *Si nos limitáramos a polinomios o a cocientes de polinomios, no tendríamos ejemplos suficientes para practicar el mecanismo de la regla de la cadena. No hay nada de malo en usar las propiedades de las funciones que no se han definido formalmente en el curso.* De hecho podríamos crear funciones totalmente imaginarias para alcanzar el mismo propósito.

Ejemplo. Supongan que hay una función llamada $\operatorname{tonto}(x)$, cuya derivada está dada por

$$\frac{d\operatorname{tonto}(x)}{dx} = \frac{1}{x + \operatorname{sen} x}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\operatorname{tonto}(x^3+4x) &= \frac{d\operatorname{tonto}(u)}{du}\frac{du}{dx}\\ &= \frac{1}{(x^3+4x)+\operatorname{sen}(x^3+4x)}(3x^2+4).\end{aligned}$$

Ejemplo. Supongan que hay una función $\operatorname{vaca}(x)$ tal que $\operatorname{vaca}'(x) = \operatorname{tonto}(x)$. Entonces

$$\frac{d\operatorname{vaca}(x^2)}{dx} = \operatorname{tonto}(x^2)\cdot 2x.$$

Demostración de la regla de la cadena. Debemos considerar el cociente de Newton de la función compuesta $f \circ g$, el cual es, por definición,

$$\frac{f[g(x+h)] - f[g(x)]}{h}.$$

Hagamos $u = g(x)$ y sea

$$k = g(x+h) - g(x).$$

Entonces k depende de h y tiende a 0 cuando h tiende a 0. Nuestro cociente de Newton es igual a

$$\frac{f(u+k) - f(u)}{h}.$$

Para el presente argumento *supongamos que k es distinto de* 0 para todos los valores pequeños de h. Entonces podemos multiplicar y dividir este cociente por k y obtener

$$\frac{f(u+k)-f(u)}{k}\frac{k}{h} = \frac{f(u+k)-f(u)}{k}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Si hacemos que h tienda a 0 y usamos la regla para el límite de un producto, vemos que nuestro cociente de Newton tiende a

$$f'(u)g'(x),$$

y esto probaría nuestra regla de la cadena, bajo la hipótesis de que k no es 0.

No sucede con mucha frecuencia que $k = 0$ para valores arbitrariamente pequeños de h, pero cuando suceda, deberá afinarse el argumento anterior. Para los interesados, mostraremos ahora cómo se puede modificar ligeramente el argumento de modo que sea válido en todos los casos. **El lector no interesado puede hacer caso omiso de ello.**

Distinguimos dos tipos de números h. Los del primer tipo, aquellos para los cuales $g(x+h) - g(x) \neq 0$, y los del segundo tipo, aquellos para los cuales

$$g(x+h) - g(x) = 0.$$

Sea H_1 el conjunto de h del primer tipo, y H_2 el conjunto de h del segundo tipo. Supongamos que tenemos

$$g(x+h) - g(x) = 0$$

para valores arbitrariamente pequeños de h. Entonces el cociente de Newton

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

es 0 para dichos valores, esto es, para h en H_2 y, en consecuencia,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = 0.$$

Más aún

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in H_2}} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = 0,$$

porque h es del segundo tipo, de modo que $g(x+h)-g(x)=0$, $g(x+h)=g(x)$ y, por lo tanto, $f(g(x+h)) - f(g(x)) = 0$. Aquí se toma el límite cuando h tiende a 0, pero h del segundo tipo.

Por otro lado, si tomamos el límite con h del primer tipo, entonces se aplica el argumento original, i.e. podemos dividir y multiplicar por

$$k = g(x+h) - g(x),$$

y hallamos

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in H_1}} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = f'(g(x))g'(x)$$

como antes. Pero $g'(x) = 0$. Por ello el límite es $0 = f'(g(x))g'(x)$ cuando h tiende a 0, ya sea h del primer tipo o del segundo. Esto concluye la demostración.

III, §6. EJERCICIOS

Hallar las derivadas de las funciones siguientes.

1. $(x+1)^8$
2. $(2x-5)^{1/2}$
3. $(\operatorname{sen} x)^3$
4. $(\log x)^5$
5. $\operatorname{sen} 2x$
6. $\log(x^2+1)$
7. $e^{\cos x}$
8. $\log(e^x + \operatorname{sen} x)$
9. $\operatorname{sen}\left(\log x + \dfrac{1}{x}\right)$
10. $\dfrac{x+1}{\operatorname{sen} 2x}$
11. $(2x^2+3)^3$
12. $\cos(\operatorname{sen} 5x)$
13. $\log(\cos 2x)$
14. $\operatorname{sen}[(2x+5)^2]$
15. $\operatorname{sen}[\cos(x+1)]$
16. $\operatorname{sen}(e^x)$
17. $\dfrac{1}{(3x-1)^4}$
18. $\dfrac{1}{(4x)^3}$
19. $\dfrac{1}{(\operatorname{sen} 2x)^2}$
20. $\dfrac{1}{(\cos 2x)^2}$
21. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} 3x}$
22. $(\operatorname{sen} x)(\cos x)$

23. $(x^2+1)e^x$
24. $(x^3+2x)(\operatorname{sen} 3x)$
25. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$
26. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{e^x}$
27. $\dfrac{\log x}{x^2+3}$
28. $\dfrac{x+1}{\cos 2x}$
29. $(2x-3)(e^x+x)$
30. $(x^3-1)(e^{3x}+5x)$
31. $\dfrac{x^3+1}{x-1}$
32. $\dfrac{x^2-1}{2x+3}$
33. $(x^{4/3}-e^x)(2x+1)$
34. $(\operatorname{sen} 3x)(x^{1/4}-1)$
35. $\operatorname{sen}(x^2+5x)$
36. e^{3x^2+8}
37. $\dfrac{1}{\log(x^4+1)}$
38. $\dfrac{1}{\log(x^{1/2}+2x)}$
39. $\dfrac{2x}{e^x}$
40. Sea f una función tal que $f'(u) = \dfrac{1}{1+u^3}$. Sea $g(x) = f(x^2)$. Hallar $g'(x)$ y $g'(2)$. No intenten evaluar $f(u)$.
41. Descansar.

III, §6. EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

Hallar las derivadas de las funciones siguientes.

1. $(2x+1)^2$
2. $(2x+5)^3$
3. $(5x+3)^7$
4. $(7x-2)^{81}$
5. $(2x^2+x-5)^3$
6. $(2x^3-3x)^4$
7. $(3x+1)^{1/2}$
8. $(2x-5)^{5/4}$
9. $(x^2+x-1)^{-2}$
10. $(x^4+5x+6)^{-1}$
11. $(x+5)^{-5/3}$
12. $(x^3+2x+1)^3$
13. $(x-1)(x-5)^3$
14. $(2x^2+1)^2(x^2+3x)$
15. $(x^3+x^2-2x-1)^4$
16. $(x^2+1)^3(2x+5)^2$
17. $\dfrac{(x+1)^{3/4}}{(x-1)^{1/2}}$
18. $\dfrac{(2x+1)^{1/2}}{(x+5)^5}$
19. $\dfrac{(2x^2+x-1)^{5/2}}{(3x+2)^9}$
20. $\dfrac{(x^2+1)(3x-7)^8}{(x^2+5x-4)^3}$
21. $\sqrt{2x+1}$
22. $\sqrt{x+3}$
23. $\sqrt{x^2+x+5}$
24. $\sqrt{2x^3-x+1}$

En los ejercicios siguientes se supone que existen las funciones $\operatorname{sen} u$, $\cos u$, $\log u$ y e^u cuyas derivadas están dadas por las fórmulas siguientes:

$$\frac{d \operatorname{sen} u}{du} = \cos u, \qquad \frac{d \cos u}{du} = -\operatorname{sen} u,$$

$$\frac{d(e^u)}{du} = e^u, \qquad \frac{d \log u}{du} = \frac{1}{u}.$$

Hallar la derivada de cada función (con respecto a x):

25. $\operatorname{sen}(x^3+1)$
26. $\cos(x^3+1)$
27. e^{x^3+1}
28. $\log(x^3+1)$
29. $\operatorname{sen}(\cos x)$
30. $\cos(\operatorname{sen} x)$
31. $e^{\operatorname{sen}(x^3+1)}$
32. $\log[\operatorname{sen}(x^3+1)]$
33. $\operatorname{sen}[(x+1)(x^2+2)]$
34. $\log(2x^2+3x+5)$
35. $e^{(x+1)(x-3)}$
36. e^{2x+1}
37. $\operatorname{sen}(2x+5)$
38. $\cos(7x+1)$
39. $\log(2x+1)$
40. $\log \dfrac{2x+1}{x+3}$
41. $\operatorname{sen} \dfrac{x-5}{2x+4}$
42. $\cos \dfrac{2x-1}{x+3}$
43. e^{2x^2+3x+1}
44. $\log(4x^3-2x)$
45. $\operatorname{sen}[\log(2x+1)]$
46. $\cos(e^{2x})$
47. $\cos(3x^2-2x+1)$
48. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^2-1}{2x^3+1}\right)$
49. $(2x+1)^{80}$
50. $(\operatorname{sen} x)^{50}$
51. $(\log x)^{49}$
52. $(\operatorname{sen} 2x)^4$
53. $(e^{2x+1}-x)^5$
54. $(\log x)^{20}$
55. $(3\log(x^2+1)-x^3)^{1/2}$
56. $\left(\log(2x+3)\right)^{4/3}$
57. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 3x}$
58. $\dfrac{\operatorname{sen}(2x+5)}{\cos(x^2-1}$
59. $\dfrac{\log 2x^2}{\operatorname{sen} x^3}$
60. $\dfrac{e^{x^3}}{x^2-1}$
61. $\dfrac{x^4+4}{\cos 2x}$
62. $\dfrac{\operatorname{sen}(x^3-2)}{\operatorname{sen} 2x}$
63. $\dfrac{(2x^2+1)^4}{(\cos x^3)}$
64. $\dfrac{e^{-x}}{\cos 2x}$
65. e^{-3x}
66. e^{-x^2}
67. e^{-4x^2+x}
68. $\sqrt{e^x+1}$
69. $\dfrac{\log(x^2+2)}{e^{-x}}$
70. $\dfrac{\log(2x+1)}{\operatorname{sen}(4x+5)}$

III, §7. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Dada una función diferenciable f definida en un intervalo, su derivada f' es también una función en ese intervalo. Si sucede que también es diferenciable (lo cual es frecuente), entonces su derivada se llama **segunda derivada** de f y se denota por $f''(x)$.

Ejemplo. Sea $f(x) = (x^3+1)^2$. Entonces

$$f'(x) = 3(x^3+1)3x^2 = 9x^5 + 9x^2 \quad \text{y} \quad f''(x) = 40x^4 + 18x.$$

No hay razón alguna para detenerse en la segunda derivada, y sin duda podemos seguir con la tercera, la cuarta, etc., siempre que existan. Como resulta engorrosa una notación que acumula primas después de la f para denotar derivadas sucesivas, escribimos

$$f^{(n)}$$

para la n-ésima derivada de f. Así, f'' se escribe también $f^{(2)}$. Si queremos referirnos a la variable x, escribimos

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}.}$$

Ejemplo. Sea $f(x) = x^3$. Entonces

$$\frac{df}{dx} = 3x^2, \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x) = f^{(2)}(x) = 6x,$$
$$\frac{d^3 f}{dx^3} = f^{(3)}(x) = 6, \qquad \frac{d^4 f}{dx^4} = f^{(4)}(x) = 0.$$

Ejemplo. Sea $f(x) = 5x^3$. Entonces

$$f'(x) = 15x^2 = \frac{df}{dx},$$
$$f^{(2)}(x) = 30x = \frac{d^2 f}{dx^2},$$
$$f^{(3)}(x) = 30 = \frac{d^3 f}{dx^3},$$
$$f^{(4)}(x) = 0 = \frac{d^4 f}{dx^4}.$$

Ejemplo. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces

$$f'(x) = \cos x,$$
$$f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x.$$

III, §7. EJERCICIOS

Hallar las segundas derivadas de las funciones siguientes:

1. $3x^3 + 5x + 1$
2. $(x^2+1)^5$
3. Hallar la 80-ésima derivada de $x^7 + 5x - 1$.
4. Hallar la séptima derivada de $x^7 + 5x - 1$.
5. Hallar la tercera derivada de $x^2 + 1$.
6. Hallar la tercera derivada de $x^3 + 2x - 5$.

7. Hallar la tercera derivada de la función $g(x) = \operatorname{sen} x$.
8. Hallar la cuarta derivada de la función $g(x) = \cos x$.
9. Hallar la décima derivada de $\operatorname{sen} x$.
10. Hallar la décima derivada de $\cos x$.
11. Hallar la 100-ésima derivada de $\operatorname{sen} x$.
12. Hallar la 100-ésima derivada de $\cos x$.
13. (a) Hallar la quinta derivada de x^5.
    (b) Hallar la séptima derivada de x^7.
    (c) Hallar la decimotercera derivada de x^{13}.

En el proceso de hallar estas derivadas se debe observar un patrón. Sea n un entero positivo. Definir $n!$ como el producto de los primeros n enteros. Así

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1.$$

A este número se le llama n **factorial**. Por ejemplo:

$$2! = 2, \qquad 3! = 3\cdot 2 = 6, \qquad 4! = 4\cdot 3\cdot 2 = 24.$$

Calcular $5!$, $6!$, $7!$. Hallarán que $n!$ se usa particularmente en el capítulo sobre la fórmula de Taylor, más adelante en el curso.

14. En general, sea k un entero positivo. Sea

$$f(x) = x^k.$$

(a) ¿Cuál es $f^{(k)}(x)$?
(b) ¿Cuál es $f^{(k)}(0)$?
(c) Sea n un entero positivo $> k$. ¿Cuál es $f^{(n)}(0)$?
(d) Sea n un entero positivo $< k$. ¿Cuál es $f^{(n)}(0)$?

III, §8. DIFERENCIACIÓN IMPLÍCITA

Supongan que una curva está definida por una ecuación

$$F(x,y) = 0$$

como un círculo, $x^2 + y^2 = 7$, o una elipse, o bien, de manera más general, una ecuación como

$$3x^3y - y^4 + 5x^2 + 5 = 0.$$

Usualmente sucede que para la mayoría de los valores de x es posible despejar y como función de x, con lo cual se halla una función diferenciable

$$y = f(x)$$

que satisfaga la ecuación. Por ejemplo, en el caso del círculo,

$$x^2 + y^2 = 7,$$

tenemos

$$y^2 = 7 - x^2$$

y, por lo tanto, obtenemos dos posibilidades para y,

$$y = \sqrt{7 - x^2} \qquad \text{o} \qquad y = -\sqrt{7 - x^2}.$$

La gráfica de la primera función es el semicírculo superior y la gráfica de la segunda función es el semicírculo inferior.

En el ejemplo $3x^3y - y^4 + 5x^2 + 5 = 0$, es realmente un problema despejar y, y no lo haremos. Sin embargo, al suponer que $y = f(x)$ es una función diferenciable que satisface esta ecuación, podemos hallar más fácilmente una expresión para la derivada, y lo haremos en un ejemplo posterior.

Ejemplo. Hallar la derivada dy/dx si $x^2 + y^2 = 7$, en términos de x y y.

Diferenciamos ambos lados de la ecuación usando la regla de la cadena y el hecho de que $dx/dx = 1$. Obtenemos entonces:

$$2x\frac{dx}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0, \qquad \text{esto es} \qquad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}.$$

Ejemplo. Hallar la recta tangente al círculo $x^2 + y^2 = 7$ en el punto $x = 2$ y $y = \sqrt{3}$.

La pendiente de la recta en este punto está dada por

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,\sqrt{3})} = \frac{-2\cdot 2}{2\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}.$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$y - \sqrt{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x - 2).$$

Ejemplo. Hallar la derivada dy/dx en términos de x y y si

$$3x^3y - y^4 + 5x^2 = -5.$$

Suponemos de nuevo que y es una función de x. Diferenciamos ambos lados usando la regla para la derivada de un producto y la regla de la cadena. Obtenemos entonces:

$$3x^3\frac{dy}{dx} + 9x^2y - 4y^3\frac{dy}{dx} + 10x = 0,$$

o, factorizando,

$$\frac{dy}{dx}(3x^3 - 4y^3) = -10x - 9x^2y.$$

Esto da

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{10x + 9x^2y}{3x^3 - 4y^3}.$$

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta tangente en el ejemplo anterior en el punto $x = 1$, $y = 2$.

Primero hallamos la pendiente en el punto dado. Esto se obtiene al sustituir $x = 1$ y $y = 2$ en la expresión para dy/dx obtenida en el ejemplo anterior. Así:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} = -\frac{10+18}{3-32} = \frac{28}{29}.$$

Entonces la ecuación de la recta tangente en (1,2) es

$$y - 2 = \tfrac{28}{29}(x-1).$$

III, §8. EJERCICIOS

Hallar dy/dx en términos de x y y en los problemas siguientes.

1. $x^2 + xy = 2$
2. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 37$
3. $x^3 - xy + y^3 = 1$
4. $y^3 - 2x^3 + y = 1$
5. $2xy + y^2 = x + y$
6. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} = 1$
7. $y^2 + 2x^2y + x = 0$
8. $x^2y^2 = x^2 + y^2$

Hallar la recta tangente a las curvas siguientes en los puntos indicados.

9. $x^2y^2 = 9$ en $(-1,3)$
10. $x^2 + y^3 + 2x - 5y - 19 = 0$ en $(3,-1)$
11. $(y-x)^2 = 2x + 4$ en $(6,2)$
12. $2x^2 - y^3 + 4xy - 2x = 0$ en $(1,-2)$
13. $x^2 + y^2 = 25$ en $(3,-4)$
14. $x^2 - y^2 + 3xy + 12 = 0$ en $(-4,2)$
15. $x^2 + xy - y^2 = 1$ en $(2,3)$

III, §9. RAZÓN DE CAMBIO

La derivada tiene una interesante interpretación física, que está íntimamente relacionada con ella a lo largo de su desarrollo histórico, y vale la pena mencionarla.

Supongan que una partícula se mueve a lo largo de cierta recta una distancia que depende del tiempo t. Entonces la distancia s es una función de t, que escribimos $s = f(t)$.

Para dos valores del tiempo, t_1 y t_2, el cociente

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

se puede considerar como una rapidez promedio de la partícula, pues da la distancia total cubierta dividida entre el tiempo total transcurrido. En un tiempo dado t_0 es razonable considerar el límite

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

como la razón de cambio de s respecto a t. Esto no es más que la derivada $f'(t)$, que se llama **rapidez**.

Denotemos la **rapidez** por $v(t)$. Entonces

$$v(t) = \frac{ds}{dt}.$$

La razón de cambio de la rapidez se llama **aceleración**. Así

$$\frac{dv}{dt} = a(t) = \text{aceleración} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Ejemplo. Si la partícula es un objeto que se deja caer bajo la influencia de la gravedad, los datos experimentales muestran que

$$s = \tfrac{1}{2}Gt^2,$$

donde G es la constante gravitacional. En ese caso,

$$\frac{ds}{dt} = Gt$$

es su rapidez. La aceleración es entonces

$$\frac{d^2s}{dt^2} = G = \text{constante gravitacional}.$$

Ejemplo. Una partícula se mueve de manera que en el instante t la distancia recorrida está dada por la función

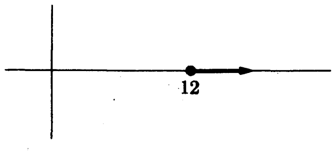
$$s(t) = t^2 + 1.$$

La derivada $s'(t)$ es igual a $2t$. Así la rapidez de la partícula es igual a 0 en el instante $t = 0$. Su rapidez es igual a 4 en el instante $t = 2$.

En general, dada una función $y = f(x)$, la derivada $f'(x)$ se interpreta como la **razón de cambio de y respecto a x**. Por ello f' también es una función. Si y crece cuando x crece, significa que la derivada es positiva, en otras palabras $f'(x) > 0$. Si y es decreciente, significa que la razón de cambio de y respecto a x es negativa, esto es $f'(x) < 0$.

Ejemplo. Suponer que una partícula se mueve con rapidez uniforme a lo largo de una recta, digamos a lo largo del eje x hacia la derecha, alejándose del origen. Consideren que la rapidez es de 5 cm/seg. Podemos escribir entonces

$$\frac{dx}{dt} = 5.$$



Vamos a suponer que en algún instante la partícula está a 12 cm a la derecha del origen. Después de cada segundo subsecuente de movimiento, la distancia se incrementa en otros 5 cm, de modo que después de 3 segundos, la distancia de la partícula al origen será

$$12 + 3 \cdot 5 = 12 + 15 = 27\,\text{cm}.$$

Es posible expresar la abscisa como función del tiempo. Con rapidez uniforme, la distancia recorrida es igual al producto de la rapidez por el tiempo. Así, si la partícula parte del origen en el instante $t = 0$, entonces

$$x(t) = 5t.$$

Si, por otro lado, la partícula parte de otro punto x_0, entonces

$$x(t) = 5t + x_0.$$

En efecto, si sustituimos t por 0 en esta ecuación, hallamos

$$x(0) = 5 \cdot 0 + x_0 = x_0.$$

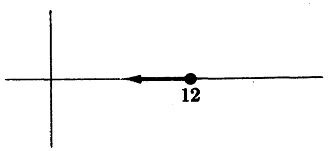
Por lo tanto, x_0 es el valor de x cuando $t = 0$.

Ejemplo. Consideremos que una partícula se mueve hacia la izquierda a razón de 5 cm/seg. Entonces escribimos

$$\frac{dx}{dt} = -5.$$

Supongamos de nuevo que en algún instante la partícula está a 12 cm a la derecha del origen. Entonces, después de 2 segundos, la distancia de la partícula al origen será

$$12 - 2 \cdot 5 = 12 - 10 = 2\,\text{cm}.$$



Finalmente, supongamos que la partícula no parte cuando $t = 0$, sino digamos después de 25 segundos, pero que se mueve con la misma rapidez constante.

Podemos medir el tiempo en términos de una nueva coordenada t'. En términos de t', la abscisa está dada por

$$x = -5t'.$$

Podemos dar t' como función de t, mediante

$$t' = t - 25.$$

Entonces,

$$x = -5(t - 25)$$

da x como función de t.

En muchas aplicaciones hemos de considerar razones de cambio relacionadas, lo cual hace que intervenga la regla de la cadena. Supongamos que y es función de x y que además x está dado como función del tiempo, digamos $x = g(t)$; entonces, mediante la regla de la cadena, podemos determinar tanto la razón de cambio de y con respecto a x, a saber dy/dx, como la razón de cambio de y respecto a t, a saber,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

por la regla de la cadena

Ejemplo. Un cuadrado se expande de manera que su lado cambia a razón de 2 cm/seg. Hallar la razón de cambio de su área cuando el lado mide 6 cm de largo.

El área de un cuadrado como función de su lado está dada por la función

$$A(x) = x^2.$$

Si el lado x está dado como función del tiempo t, digamos $x = x(t)$, entonces la razón de cambio del área respecto al tiempo es, por definición,

$$\frac{d\big(A(x(t))\big)}{dt}.$$

Ahora usamos la regla de la cadena, y si denotamos el área por A, hallamos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx}\frac{dx}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}.$$

Nos dicen que x crece a razón de 2 cm/seg. Esto significa que

$$\frac{dx}{dt} = 2.$$

Así, cuando $x(t) = 6$, hallamos que

$$\frac{dA}{dt} = 2 \cdot 6 \cdot 2 = 24\,\text{cm/seg}.$$

Ejemplo. Un punto se mueve a lo largo de la gráfica de $y = x^3$ de modo que su abscisa decrece a razón de 2 unidades por segundo. ¿Cuál es la razón de cambio de su ordenada cuando $x = 3$?

Tenemos que, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}.$$

Nos dicen que x es *decreciente*. Esto significa que

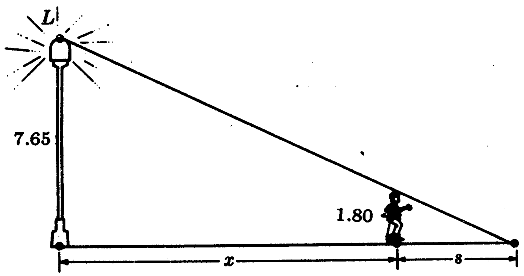
$$\frac{dx}{dt} = -2.$$

Por lo tanto, la razón de cambio de y cuando $x = 3$ es igual a

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=3} = 3(3^2)(-2) = -54 \text{ unidades por segundo.}$$

El hecho de que dy/dt sea negativo significa que y decrece cuando $x = 3$.

Ejemplo. Hay un farol en lo alto de un poste a 7.65 m del suelo. Un hombre de 1.80 m de alto camina alejándose del poste. ¿Cuál es la longitud de su sombra cuando está a 12.25 m de la base del poste? Si camina a razón de 1.53 m/seg, ¿con qué rapidez crece su sombra en este punto?



Necesitamos establecer una relación entre la longitud de la sombra y la distancia del hombre al poste. Sea s la longitud de la sombra y sea x la distancia entre el hombre y la base del poste. Entonces, por triángulos semejantes, vemos que

$$\frac{7.65}{x+s} = \frac{1.8}{s}.$$

Después de la multiplicación cruzada, vemos que $7.65s = 1.8x + 1.8s$, de donde

$$s = \frac{1.8}{5.85}x.$$

Por lo tanto, $ds/dx = 1.8/5.85$, y

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1.8}{5.85}\frac{dx}{dt}.$$

Como $dx/dt = 1.53$, obtenemos lo que queremos:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1.8}{5.85}1.53 = \frac{2.754}{5.85} \text{ m/seg.}$$

Además, cuando $x = 12.25$, hallamos que la longitud de su sombra está dada por

$$s = \frac{1.8 \cdot 12.25}{5.85} = \frac{22.05}{5.85} \text{ m/seg.}$$

Observación. Si el hombre camina hacia el poste, la distancia x será decreciente y en este caso:

$$\frac{dx}{dt} = -1.53.$$

En consecuencia, un argumento similar muestra que

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{2.754}{5.85} \text{ m/seg.}$$

Ejemplo. El área de un disco de radio r está dada por la fórmula

$$A = \pi r^2,$$

donde r es el radio. Sea s el diámetro. Entonces $s = 2r$, de modo que $r = s/2$ y podemos dar A como función de s mediante

$$A = \pi\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{\pi s^2}{4}.$$

Por lo tanto, la razón de cambio de A con respecto a s es

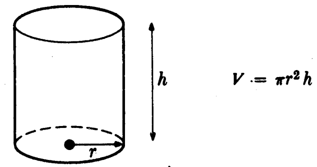
$$\frac{dA}{ds} = \frac{2\pi s}{4} = \frac{\pi s}{2}.$$

Ejemplo. Un cilindro se comprime lateralmente y se estira, de modo que el radio de la base decrece a razón de 2 cm/seg y la altura crece a razón de 5 cm/seg. Hallar la razón a la que está cambiando el volumen cuando el radio es de 6 cm y la altura es de 8 cm.

El volumen está dado por la fórmula

$$V = \pi r^2 h,$$

donde r es el radio de la base y h es la altura.



Nos dicen que $dr/dt = -2$ (el signo es negativo porque el radio está decreciendo), y $dh/dt = 5$, de modo que usando la fórmula para la derivada de un producto, hallamos

$$\frac{dV}{dt} = \pi\left[r^2\frac{dh}{dt} + h2r\frac{dr}{dt}\right] = \pi[5r^2 - 4hr].$$

Cuando $r = 6$ y $h = 8$ obtenemos

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\substack{r=6\\h=8}} = \pi(5\cdot 6^2 - 4\cdot 8\cdot 6) = -12\pi.$$

El signo negativo en la respuesta significa que el volumen está decreciendo cuando $r = 6$ y $h = 8$.

Ejemplo. Dos trenes parten de una estación con 3 horas de diferencia. El primero se dirige hacia el norte con una rapidez de 100 km/hr. El segundo se dirige hacia el este con una rapidez de 60 km/hr. El segundo parte 3 horas después del primero. ¿A qué razón está cambiando la distancia entre los trenes 2 horas después de que partió el segundo tren?

Sea y la distancia del primer tren a la estación y x la distancia del segundo tren a la estación. Entonces

$$\frac{dy}{dt} = 100 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} = 60.$$

Tenemos que $y = 100t$, y como el segundo tren parte tres horas después, tenemos

$$x = 60(t-3).$$

Sea $f(t)$ la distancia entre ellos. Entonces

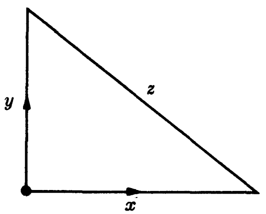
$$f(t) = \sqrt{60^2(t-3)^2 + 100^2t^2}.$$

Por lo tanto,

$$f'(t) = \tfrac{1}{2}[3600(t-3)^2 + 10000t^2]^{-1/2}[2\cdot 60^2(t-3) + 2\cdot 100^2 t].$$

El tiempo 2 horas después de que partió el segundo tren es $t = 2 + 3 = 5$. La razón deseada es entonces $f'(5)$, de modo que

$$f'(5) = \tfrac{1}{2}[14400 + 250000]^{-1/2}[14400 + 100000].$$



Ejemplo. Resolveremos el ejemplo anterior usando otro método. Sea z la distancia entre los trenes. Tenemos

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Más aún, x, y y z son funciones de t. Al diferenciar respecto a t obtenemos:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}.$$

Cancelamos 2 para obtener

$$z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}.$$

Escribamos $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ en lugar de x, y, z, como funciones de t. Entonces

$$x(5) = 120, \quad y(5) = 500, \quad \text{y, por Pitágoras,} \quad z(5) = \sqrt{120^2 + 500^2}.$$

Sustituyendo $t = 5$, hallamos

$$z(5)\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=5} = x(5)\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=5} + y(5)\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=5}.$$

Al dividir entre $z(5)$ se obtiene:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=5} = \frac{120\cdot 60 + 500\cdot 100}{\sqrt{120^2 + 500^2}}.$$

III, §9. EJERCICIOS

Se pueden usar las fórmulas siguientes para algunos de estos ejercicios.

El volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.
El área de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.
El volumen de un cono de altura h y radio de base r es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.
El área del círculo de radio r es πr^2.
La circunferencia del círculo de radio r es $2\pi r$.

1. Una partícula se mueve de modo que en el instante t la distancia está dada por $s(t) = t^3 - 2t$. ¿En qué instante la aceleración es igual a
   (a) 1 (b) 0 (c) -5?
2. Una partícula se mueve de modo que en el instante t la distancia está dada por la función $s(t) = 2t^4 + t^2$. ¿En qué instante la rapidez es igual a cero?
3. Un objeto viaja sobre una recta con una rapidez dada por la función $v(t) = 4t^5$. Hallar la aceleración en el instante $t = 2$.
4. Una partícula se mueve de modo que en el instante t la distancia recorrida está dada por $s(t) = t^3 - 2t + 1$. ¿En qué instante la aceleración es igual a 0?
5. Un cubo se expande de manera que su lado está cambiando a razón de 5 m/seg. Hallar la razón de cambio de su volumen cuando su arista mide 4 m de longitud.

6. Una esfera está creciendo de modo que su radio crece a razón de 1 cm/seg. ¿Con qué rapidez está cambiando su volumen cuando su radio es de 3 cm?

7. ¿Cuál es la razón de cambio del área de un círculo respecto a su radio, a su diámetro, a su circunferencia?

8. Un punto se mueve a lo largo de la gráfica de $y = 1/(x^2 + 4)$ de manera que $dx/dt = -3$ unidades por segundo. ¿Cuál es la razón de cambio de su ordenada cuando $x = 2$?

9. Hay un farol en lo alto de un poste a 6.10 m del suelo. Una mujer de 1.53 m de estatura camina alejándose del poste. Hallar la razón a la que cambia su sombra si ella camina a razón de
(a) 1.22 m/seg (b) 1 m/seg.

10. Si en el ejercicio 9 la mujer camina hacia la luz, hallar la razón a la cual su sombra decrece si camina a razón de
(a) 1.53 m/seg (b) 1.8 m/seg.

11. Una partícula se mueve de manera diferenciable sobre la parábola $y = x^2$. ¿En qué punto sobre la curva se mueven a la misma razón su abscisa y su ordenada? (Se puede suponer que dx/dt y $dy/dt \neq 0$ para todo t.)

12. Un lado de un triángulo rectángulo decrece 1 cm/min y el otro lado crece 2 cm/min. En algún instante el primer lado mide 8 cm y el segundo lado mide 6 cm. ¿Cuál es la razón de crecimiento del área 2 min después de ese instante?

13. La longitud del lado de un cuadrado está creciendo a razón de 3 cm por segundo. Hallar la razón de cambio a la cual está creciendo el área cuando el lado mide 15 cm.

14. Una escalera de 5.20 m de largo está apoyada sobre una pared vertical. Si el extremo inferior de la escalera se está alejando del pie de la pared a razón de 0.92 m/seg, ¿con qué rapidez está descendiendo la parte superior cuando el extremo inferior está a 2.45 m de la pared?

15. Una piscina tiene 7.65 m de ancho, 12.25 m de largo, 1 m de profundidad en un extremo y 2.75 m de profundidad en el otro, siendo el fondo un plano inclinado. Si se bombea agua dentro de la piscina a razón de $0.3\,m^3/min$, ¿con qué rapidez se está elevando el nivel del agua cuando tiene 1.22 m de profundidad en el extremo más hondo?

16. Un depósito tiene forma de cono con el vértice hacia abajo, de 3.3 m de alto. El radio en la parte superior es de 1.22 m. Se vierte agua en el depósito a razón de $0.15\,m^3/min$. ¿Con qué rapidez está subiendo el nivel del agua cuando la profundidad del agua es de 1.5 m?

17. Una partícula se mueve de modo que en el instante t la distancia recorrida está dada por $s(t) = 2t^2 - t$. ¿En qué instante la rapidez es igual a 0? ¿Cuál es la aceleración de la partícula?

18. Una partícula se mueve sobre la parábola con ecuación $y = x^2 - 6x$. Hallar el punto sobre la curva en el cual la razón de cambio de la ordenada es cuatro veces la razón de cambio de la abscisa. (Suponer que $dx/dt \neq 0$ para todo x.)

19. Fluye agua hacia dentro de un tanque con forma de hemisferio de radio 3.3 m con el lado plano hacia arriba, a razón de $0.1\,m^3/min$. Sean h la profundidad del agua, r el radio de la superficie del agua y V el volumen del agua en el tanque. Suponer que $dV/dt = \pi r^2 dh/dt$. Hallar con qué rapidez se está elevando el agua cuando $h = 1.65$ m.

20. Un tren parte de una estación en cierto instante y viaja hacia el norte a razón de 50 km/hr. Un segundo tren parte de la misma estación 2 hr después de la partida del primero y se dirige hacia el este a razón de 60 km/hr. Hallar la razón a la que se están separando los dos trenes 1.5 hr después de la partida del segundo.

21. Cae arena sobre una pila cuya forma siempre es de cono, a razón de $0.1\,m^3/min$. Suponer que el diámetro de la base de la pila es siempre tres veces la altura. ¿A qué razón está creciendo la altura cuando ésta es de 1.22 m?

22. El volumen de una esfera está decreciendo a razón de $12\pi\,cm^3/min$. Hallar la razón a la cual están cambiando el radio y el área de la superficie de la esfera cuando el radio es de 20 cm.

23. Cae agua dentro de un depósito cónico a razón constante de $2\,m^3/min$. El vértice está a 18 m hacia abajo y el radio en la parte superior es de 24 m. ¿Con qué rapidez está elevándose el agua cuando tiene 6 m de profundidad?

24. Cae arena sobre una pila, formando así un cono. Sea V el volumen de la arena, de modo que $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen de arena cuando $r = 3.3$ m, si el radio de la base se está expandiendo a razón de 0.6 m/seg y la altura está creciendo a razón de 0.3 m/seg? Se puede suponer que $r = h = 0$ cuando $t = 0$.

CAPÍTULO IV

Seno y coseno

A partir del seno y del coseno de un ángulo definiremos funciones de números y determinaremos sus derivadas.

Es conveniente recordar todas las cuestiones de trigonometría que usaremos, en particular la fórmula que nos da el seno y el coseno de la suma de dos ángulos. Así, en este libro el tratamiento de las funciones trigonométricas es explícito: no necesitan saber nada acerca del seno y el coseno antes de comenzar este capítulo. Sin embargo, la mayoría de las demostraciones de los enunciados que se encuentran en la sección §1 vienen de la geometría plana y se dejarán a los lectores.

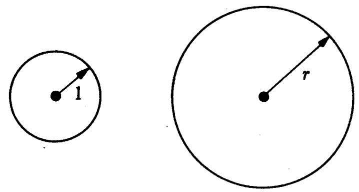
IV, §0. REPASO DE LA MEDICIÓN EN RADIANES

Para eliminar confusiones de terminología a menudo es conveniente usar dos palabras diferentes para un círculo, y para un círculo junto con su región interior. Así reservamos la palabra **círculo** para el primero y al círculo con su interior le llamamos **disco**, de ahí que hablemos de la longitud de un círculo, pero del área de un disco.

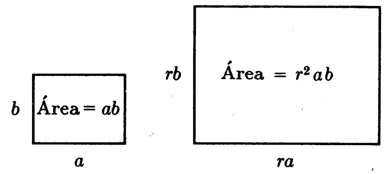
Supongamos que tenemos una unidad fija de longitud. Esto determina una medida para el área. Por ejemplo, si la longitud está medida en metros, entonces el área está medida en metros cuadrados.

Para nuestros propósitos inmediatos definimos π como el **área del disco de radio** $\mathbf{1}$. Es claro que constituye un problema hallar la expansión decimal para π, la cual, como quizá ya saben, es aproximadamente igual a $3.14159\ldots$. Más adelante en el curso aprenderán a calcular π con cualquier grado de precisión.

El disco d- radio r se obtiene mediante una dilatación (o ampliación) del disco de radio 1, según se muestra en la figura siguiente.



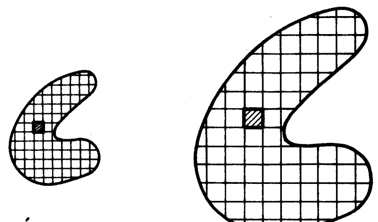
¿Cómo cambia el área bajo la dilatación? Veamos primero lo que sucede con los rectángulos. Sea R un rectángulo cuyos lados tienen longitud a y b. Sea r un número positivo. Sea rR el rectángulo cuyos lados tienen longitud ra, rb, según se muestra en la figura. Entonces el área de rR es $rarb = r^2ab$. Si A es el área de R, entonces el área de rR es r^2A.



Bajo el efecto de la dilatación en un factor r, el área de un rectángulo cambia en un factor r^2. Esto se aplica como un principio general a cualquier región:

> **Sea S cualquier región en el plano. Sea A el área de S. Con una dilatación en un factor r, la región dilatada tiene como área r^2A.**

Probaremos esto aproximando S mediante los cuadrados de una malla, como se muestra en la figura de la página siguiente. Si ampliamos S en un factor de r, obtenemos una región rS. Sea A el área de S. Entonces el área de rS será

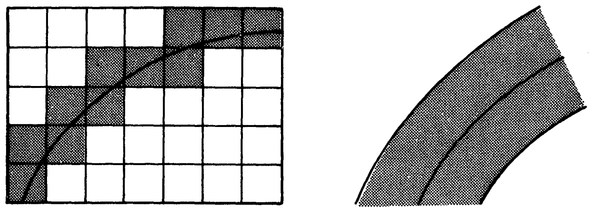


Área A

Área r^2A

de nuevo r^2A, porque cada cuadrado pequeño se amplía en un factor de r, de modo que el área de un cuadrado pequeño cambia en un factor de r^2. La suma de las áreas de los cuadrados da una aproximación al área de la figura. Queremos estimar cuán buena es la aproximación. La diferencia entre la suma de las áreas de todos los cuadrados pequeños contenidos en la figura y el área de la figura misma es a lo más el área de todos los cuadrados pequeños que tocan la frontera de la figura. Podemos estimar esto como sigue.

Supongan que hacemos una malla de modo que los cuadrados tengan lados de longitud c. Entonces la diagonal de uno de dichos cuadrados tiene longitud $c\sqrt{2}$. Si un cuadrado interseca la frontera, entonces cualquier punto sobre el cuadrado está a lo más a una distancia $c\sqrt{2}$ de la frontera. Observen la figura.



(a) (b)

Esto sucede porque la distancia entre cualesquiera dos puntos del cuadrado es a lo más $c\sqrt{2}$. Tracemos una banda de ancho $c\sqrt{2}$ a cada lado de la frontera, según se muestra en (b) de la figura anterior. Entonces todos los cuadrados que intersecan la frontera deberán estar dentro de la banda. Es plausible que el área de la banda sea, a lo más, igual a

$$2c\sqrt{2} \quad \text{veces la longitud de la frontera.}$$

Así, si tomamos c muy pequeño, i.e. si tomamos la malla muy fina, entonces el área de la banda es pequeña y el área de la figura está aproximada por el área cubierta por los cuadrados que están completamente dentro de la figura. Bajo dilatación se aplica un argumento similar a la banda dilatada para la figura dilatada, de modo que el área de la banda dilatada es a lo más

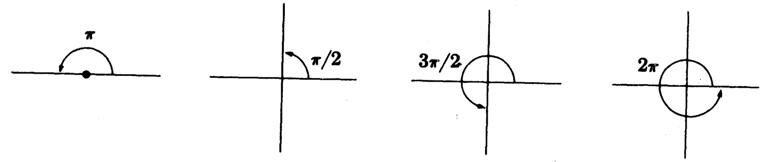
$$r^2 \cdot c\sqrt{2} \quad \text{veces la longitud de la frontera.}$$

Conforme c tiende a 0, las áreas de estas bandas tienden a 0. Esto justifica nuestra afirmación de que el área cambia en un factor de r^2 si se dilata en un factor r.

Como definimos a π como el área del disco de radio 1, obtenemos ahora que

$$\boxed{\textbf{El área de un disco de radio } r \textbf{ es } \pi r^2.}$$

Seleccionemos una unidad de medición de ángulos tal que el ángulo llano sea igual a π veces el ángulo unitario. (Vean la figura siguiente.) El ángulo recto mide $\pi/2$. El ángulo completo que da una vuelta mide entonces 2π. Esta unidad de medición para la cual el ángulo llano mide π se llama **radián**. Así, el ángulo recto tiene $\pi/2$ radianes.



Hay en uso otra unidad de medición para la cual el ángulo llano mide 180. Esta unidad de llama **grado**. El ángulo llano tiene 180 grados y el ángulo recto tiene 90 grados. Tenemos además

$$\begin{aligned} 360 \text{ grados} &= 2\pi \text{ radianes,}\\ 60 \text{ grados} &= \pi/3 \text{ radianes,}\\ 45 \text{ grados} &= \pi/4 \text{ radianes,}\\ 30 \text{ grados} &= \pi/6 \text{ radianes.} \end{aligned}$$

Usaremos principalmente las mediciones en radianes, lo cual facilitará más adelante algunas fórmulas. Es sencillo convertir de una medición a la otra.

Ejemplo. Una rueda gira a razón de $50°$ por minuto. Hallar su razón de giro en rad/min y rpm (revoluciones por minuto).

Tenemos

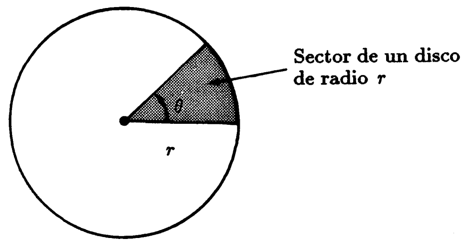
$$1° = \frac{2\pi}{360} \text{ radianes} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes.}$$

Por lo tanto $50°$ por minuto es igual a $50\pi/180 = 5\pi/18$ radianes por minuto.

Por otro lado, una revolución completa es de 2π radianes, de modo que un radián equivale a $1/2\pi$ revoluciones y, en consecuencia, la rueda gira a razón de

$$\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{5}{36} \text{ rpm.}$$

Un **sector** es la región del plano contenida en un ángulo. A menudo hablamos también del **sector de un disco**, refiriéndonos a la porción del sector contenida en el disco, según se ilustra en la figura de la página siguiente.



Un sector se mide por su ángulo. En la figura hemos denominado θ (teta) a este ángulo, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Se mide en radianes. El área del sector es una determinada fracción del área total del disco. Sabemos que el área total es πr^2. La fracción es $\theta/2\pi$. Por lo tanto, si llamamos S al sector de ángulo θ en un disco de radio r, entonces el área de S es

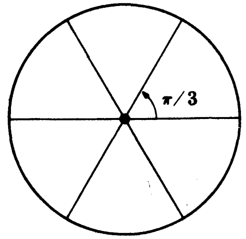
$$\frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{\theta r^2}{2}.$$

Señalamos esto para futura referencia:

El área de un sector cuyo ángulo es θ radianes, en un disco de radio r, es igual a $\dfrac{\theta r^2}{2}$.

Si el radio es 1, entonces el área del sector es $\theta/2$. Usaremos esto en la sección §4.

Ejemplo. El área de un sector de ángulo $\pi/3$ en un disco de radio 1 es $\pi/6$, ya que el área total del disco es π y el sector representa un sexto del área total. Esto se ilustra en la figura.



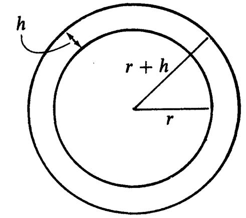
El disco de la figura está cortado en seis sectores y cada ángulo mide $\pi/3$ radianes, lo que hace un total de 2π radianes.

A continuación trataremos con la longitud de arco del círculo.

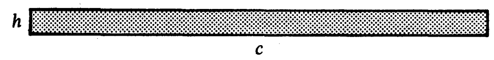
Sea c la circunferencia de un círculo de radio r. Entonces

$$\boxed{c = 2\pi r.}$$

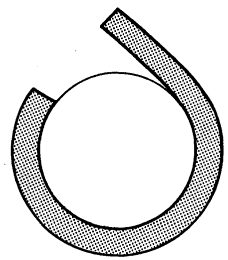
Demostración. La demostración será un bello ejemplo de la idea de diferenciación. Consideremos un círculo de radio r y un círculo de radio ligeramente mayor, el cual escribiremos como $r + h$. Suponemos que estos círculos tienen el mismo centro, de modo que se obtiene una banda circular entre ellos.



Sea c la longitud del círculo pequeño. Si tuviéramos una banda rectangular de longitud c y altura h, entonces su área sería ch.



Supongan que enrollamos esta banda alrededor del círculo.



Como el círculo se curva hacia afuera, la banda rectangular necesitaría estirarse para cubrir la banda situada entre el círculo de radio r y el círculo de radio $r + h$. Así, tenemos una desigualdad para áreas:

$$ch < \text{área de la banda circular.}$$

De manera análoga, si C es la circunferencia del círculo más grande, entonces

$$\text{área de la banda circular} < Ch.$$

Pero el área de la banda circular es la diferencia entre las áreas de los discos, la cual es

$$\text{área de la banda circular} = \pi(r+h)^2 - \pi r^2$$
$$= \pi(2rh + h^2).$$

Por lo tanto, obtenemos las desigualdades

$$ch < \pi(2rh + h^2) < Ch.$$

Dividimos estas desigualdades entre el número positivo h para obtener

$$c < \pi(2r + h) < C.$$

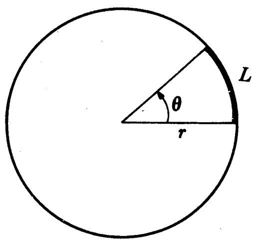
Ahora hagamos que h tienda a 0. Entonces la circunferencia C del círculo grande tenderá a la circunferencia c del círculo pequeño, y $\pi(2r+h)$ tiende a $2\pi r$. Se sigue que

$$c = 2\pi r,$$

probando así nuestra fórmula.

Observen que la longitud de la circunferencia es precisamente la derivada del área.

Un arco sobre un círculo se puede medir por su ángulo en radianes. ¿Cuál es la longitud L de este arco, como en la figura siguiente?



La respuesta es así.

Sea L la longitud de un arco de θ radianes sobre un círculo de radio r. Entonces

$$\boxed{L = r\theta.}$$

Demostración. La longitud total del círculo es de $2\pi r$, y L es la fracción $\theta/2\pi$ de $2\pi r$, lo cual da precisamente $r\theta$.

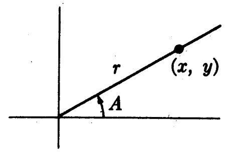
Ejemplo. La longitud de arco de $\pi/3$ radianes en un círculo de radio r es $r\pi/3$.

IV, §0. EJERCICIO

Suponer que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$. ¿Pueden imaginar un razonamiento para obtener el área de la esfera?

IV, §1. LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Supongamos que tenemos unos ejes coordenados y cierto ángulo A, según se muestra en la figura.



Seleccionamos un punto (x, y) (no el origen) sobre el rayo que determina nuestro ángulo A. Sea $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Entonces r es la distancia de $(0,0)$ al punto (x, y). Definimos

$$\boxed{\begin{aligned} \text{seno } A &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \text{coseno } A &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}}$$

Si seleccionamos otro punto (x_1, y_1) sobre el rayo que determina nuestro ángulo A y usamos sus coordenadas para obtener el seno y el coseno, obtendremos los mismos valores que con (x, y). En efecto, existe un número positivo c tal que

$$x_1 = cx \quad \text{y} \quad y_1 = cy,$$

y podemos sustituir estos valores en

$$\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

para obtener

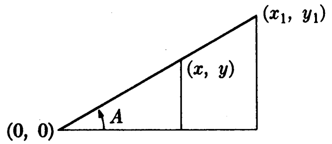
$$\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}} = \frac{cy}{\sqrt{c^2x^2 + c^2y^2}}.$$

Podemos factorizar c del denominador y después cancelar c tanto en el numerador como en el denominador para obtener

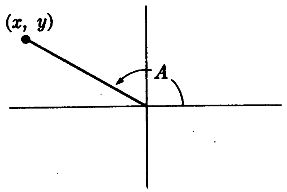
$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

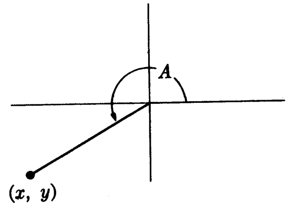
De esta manera vemos que el seno de A no depende de la selección del punto (x, y).

La interpretación geométrica del argumento anterior dice, simplemente, que los triángulos en el diagrama siguiente son similares.



El ángulo A puede dar toda la vuelta. Por ejemplo, podemos tener un ángulo determinado por un punto (x, y) en el segundo o tercer cuadrante.





Cuando el ángulo A está en el primer cuadrante, su seno y coseno son positivos, pues las coordenadas x y y son positivas. Cuando el ángulo A está en el segundo cuadrante, su seno es positivo porque y es positivo, pero su coseno es negativo porque x es negativo.

Cuando A está en el tercer cuadrante, el seno de A es negativo y el coseno de A también es negativo.

Como se mencionó en la sección introductoria, podemos usar la medición en radianes para los ángulos. Supongamos que A es un ángulo de θ radianes y sea (x, y) un punto sobre el círculo de radio 1 que además está sobre la recta que determina al ángulo A, como se muestra en la figura. Entonces en este caso,

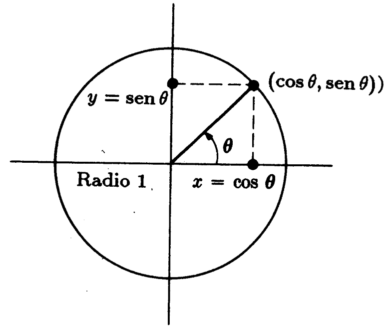
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

y, por lo tanto,

$$\boxed{(x, y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta).}$$

En general, para todo radio arbitrario r, tenemos las relaciones:

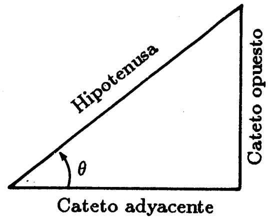
$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}}$$



También podemos definir el seno y coseno de los ángulos de un triángulo rectángulo como se muestra en la figura, por medio de las fórmulas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{Lado opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{Lado adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

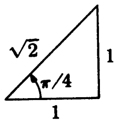


Hagamos una tabla de los senos y cosenos de algunos ángulos.

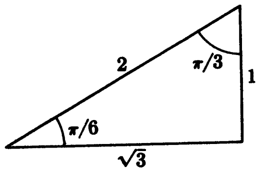
Ángulo	Seno	Coseno
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0
π	0	-1
2π	0	1

A menos que se indique otra cosa, *siempre usaremos la medición en radianes*, y nuestra tabla está dada para esa medida.

Los valores de esta tabla se determinan fácilmente usando las propiedades de los triángulos semejantes y geometría plana. Por ejemplo, deducimos que el seno del ángulo $\pi/4$ radianes $= 45°$ por medio de un triángulo rectángulo con dos lados iguales, como el de la página siguiente. Podemos determinar el seno de $\pi/4$ por medio del punto $(1, 1)$. Entonces $r = \sqrt{2}$ y el seno de $\pi/4$ radianes es $1/\sqrt{2}$. Lo mismo para el coseno.



Podemos obtener el seno de un ángulo de $\pi/6$ si consideramos un triángulo que tenga un ángulo de $\pi/6$ y otro de $\pi/3$ radianes (esto es, de 30° y 60°, respectivamente).



Si hacemos que el lado opuesto al ángulo de 30° tenga longitud 1, entonces la hipotenusa tiene longitud 2 y el lado adyacente al ángulo de 30° tiene longitud $\sqrt{3}$.

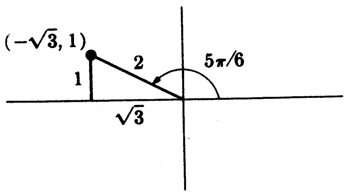
De este modo hallamos que

$$\boxed{\operatorname{sen} \pi/6 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Por otro lado, tenemos

$$\boxed{\operatorname{sen} 5\pi/6 = \frac{1}{2}, \quad \cos 5\pi/6 = \frac{-\sqrt{3}}{2}}$$

como la figura muestra claramente.



La selección de la medida en radianes nos permite definir el **seno de un número** en lugar del seno de un ángulo, de la siguiente manera.

Sea x un número con $0 \leq x < 2\pi$. Definimos **sen x** como el seno de x radianes.

Para un número arbitrario x escribimos

$$x = x_0 + 2\pi n$$

donde n es un entero, $0 \leq x_0 < 2\pi$, y definimos

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0.$$

De esta definición vemos que

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x + 2\pi n)}$$

para cualquier entero n.

Evidentemente, a esta función la llamamos **función seno**. Así $\operatorname{sen} \pi = 0$, $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$, $\operatorname{sen} 2\pi = 0$, $\operatorname{sen} 0 = 0$.

De manera análoga tenemos la **función coseno**, definida para todos los números x mediante la regla:

$\cos x$ es el número que es el coseno del ángulo de x radianes.

Así pues, $\cos 0 = 1$ y $\cos \pi = -1$.

Si hubiéramos usado los grados para medir los ángulos, obtendríamos *otra* función seno que no es igual a la función seno que hemos definido en términos de radianes. Supongamos que llamamos a esta otra función seno sen^*. Entonces

$$\operatorname{sen}^*(180) = \operatorname{sen} \pi,$$

y en general

$$\operatorname{sen}^*(180x) = \operatorname{sen} \pi x$$

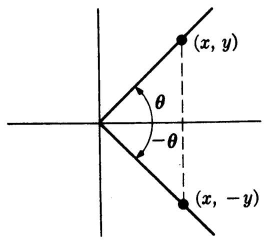
para cualquier número x. Así

$$\operatorname{sen}^* x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{180}x\right)$$

es la fórmula que relaciona a las dos funciones seno. Más adelante se verá con claridad por qué siempre escogemos la medida en radianes en lugar de la otra.

Por ahora no tenemos modo de calcular otros valores para el seno y el coseno además de los casos muy particulares listados en la tabla anterior (y casos similares basados en simetrías sencillas de triángulos rectángulos). En el capítulo XIII desarrollaremos un método que nos permitirá hallar $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ para cualquier valor de x, con cualquier grado de precisión deseado.

En la figura siguiente ilustramos un ángulo de θ radianes. Por convención, el ángulo de $-\theta$ radianes es la reflexión respecto al eje x.



Si (x, y) son las coordenadas de un punto sobre el rayo que define al ángulo de θ radianes, entonces $(x, -y)$ son las coordenadas de un punto sobre el rayo reflejado. Así

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{sen}(-\theta) &= -\operatorname{sen}\theta,\\ \cos(-\theta) &= \cos\theta.\end{aligned}}$$

Recordemos finalmente las definiciones de las otras funciones trigonométricas:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Las más importantes son el seno, el coseno y la tangente. Haremos unas observaciones adicionales acerca de la tangente.

Es claro que la tangente está definida para todos los números θ tales que

$$\cos\theta \neq 0.$$

Éstos son los números distintos a

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

en general $\theta \neq (2n+1)/2$ para algún entero n. Hacemos una tabla de algunos valores de la tangente.

θ	$\tan\theta$
0	0
$\pi/6$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}$

Deberían completar esta tabla para todos los valores similares de θ en los cuatro cuadrantes.

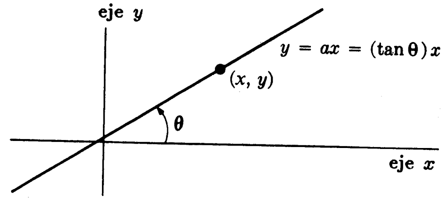
Consideren un ángulo de θ radianes y sea (x, y) un punto sobre el rayo que determina a este ángulo, con $x \neq 0$. Entonces

$$\tan\theta = y/x$$

de modo que

$$y = (\tan\theta)x.$$

Recíprocamente, cualquier punto (x, y) que satisfaga esta ecuación es un punto sobre la recta que forma un ángulo θ con el eje x, según se muestra en la figura siguiente.



En una ecuación $y = ax$ donde a es la pendiente, podemos decir que

$$a = \tan\theta,$$

donde θ es el ángulo que forma la recta con el eje x.

Ejemplo. Tomar $\theta = \pi/6$. Entonces $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$. Por lo tanto, la recta que forma un ángulo de θ con el eje x tiene la ecuación

$$y = \left(\tan\frac{\pi}{6}\right)x, \quad \text{o también} \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x.$$

Ejemplo. Tomar $\theta = 1$. No hay una manera más fácil de expresar $\tan 1$ que escribir $\tan 1$. En el capítulo XIII aprenderán a calcular aproximaciones decimales arbitrariamente cercanas; aquí no nos ocuparemos de ello. Simplemente señalamos que la ecuación de la recta que forma un ángulo de 1 radián con el eje x está dada por

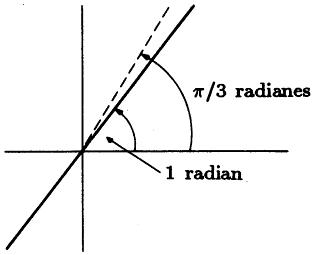
$$y = (\tan 1)x.$$

Del mismo modo, la ecuación de la recta que forma un ángulo de 2 radianes con el eje x está dada por

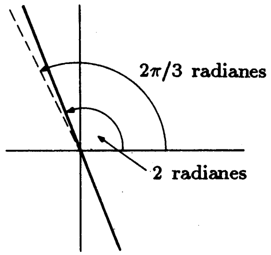
$$y = (\tan 2)x.$$

Supongamos que π es aproximadamente igual a 3.14. Entonces 1 es aproximadamente igual a $\pi/3$. Así, la recta que forma un ángulo de 1 radián con el eje

x, según se muestra en la figura 1(a), está cerca de la recta que forma un ángulo de $\pi/3$ radianes. Asimismo, la recta que forma un ángulo de 2 radianes con el eje x, como se muestra en la figura 1(b), está cerca de la recta que forma un ángulo de $2\pi/3$ radianes.



(a)



(b)

Figura 1

IV, §1. EJERCICIOS

Hallar los valores siguientes de la función sen y de la función cos:

1. $\operatorname{sen} 3\pi/4$ 2. $\operatorname{sen} 2\pi/6$ 3. $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$ 4. $\operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

5. $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ 6. $\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{6}\right)$ 7. $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ 8. $\cos \frac{5\pi}{4}$

Hallar los valores siguientes:

9. $\tan \frac{\pi}{4}$ 10. $\tan \frac{2\pi}{6}$ 11. $\tan \frac{5\pi}{4}$ 12. $\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

13. $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}$ 14. $\cos \frac{7\pi}{6}$ 15. $\cos 2\pi/3$ 16. $\cos(-\pi/6)$

17. $\cos(-5\pi/6)$ 18. $\cos(-\pi/3)$

19. Completar la tabla siguiente.

θ	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$2\pi/3$			
$3\pi/4$			
$5\pi/6$			
π			
$7\pi/6$			
$5\pi/4$			
$7\pi/4$			

IV, §2. LAS GRÁFICAS

sen x

Deseamos esbozar la gráfica de la función seno.

Sabemos que $\operatorname{sen} 0 = 0$. Conforme x va de 0 a $\pi/2$, el seno de x crece hasta que x llega a $\pi/2$, punto en el cual el seno es igual a 1.

Conforme x va de $\pi/2$ a π, el seno decrece hasta volverse

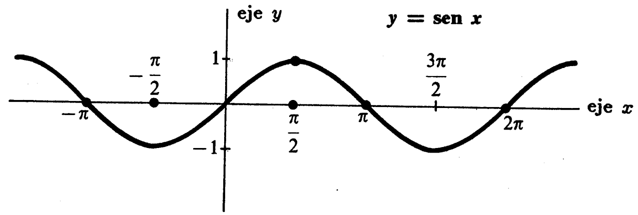
$$\operatorname{sen} \pi = 0.$$

Cuando x va de π a $3\pi/2$ el seno se vuelve negativo, pero en cualquier otro caso se comporta de manera similar a como lo hace en el primer cuadrante, hasta llegar a

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1.$$

Finalmente, conforme x va de $3\pi/2$ a 2π, el seno de x va de -1 a 0, y estamos en condiciones de comenzar de nuevo.

La gráfica se ve así:



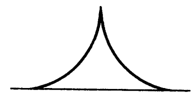
Si damos otra vuelta de 2π, el seno y el coseno tomarán cada uno los mismos valores que tenían originalmente, en otras palabras

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x,$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

para todo x. Esto se cumple sin importar si x es positivo o negativo, y lo mismo es cierto si tomamos $x - 2\pi$ en lugar de $x + 2\pi$.

Sería legítimo preguntar por qué un arco de la curva seno (o coseno) se ve como la hemos trazado, y no de la siguiente manera:

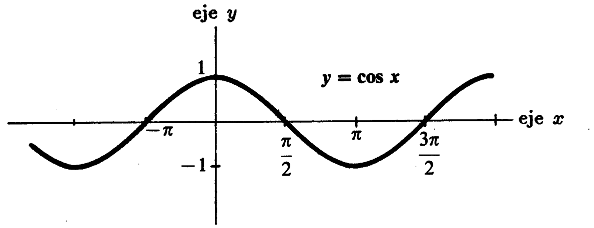


En la siguiente sección hallaremos la pendiente de la curva $y = \operatorname{sen} x$. Es igual a $\cos x$. Así, cuando $x = 0$, la pendiente es $\cos 0 = 1$. Más aún, cuando $x = \pi/2$, tenemos $\cos \pi/2 = 0$ y, por lo tanto, la pendiente es 0. Esto significa que la curva se vuelve horizontal, y no puede tener un pico como el de la figura anterior.

Hasta ahora no tenemos manera de calcular más valores de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Sin embargo, usando lo poco que sabemos y la derivada, nos podemos convencer de que la gráfica se ve como la hemos trazado.

$\cos x$

La gráfica del coseno se verá como la del seno, pero comienza con $\cos 0 = 1$.

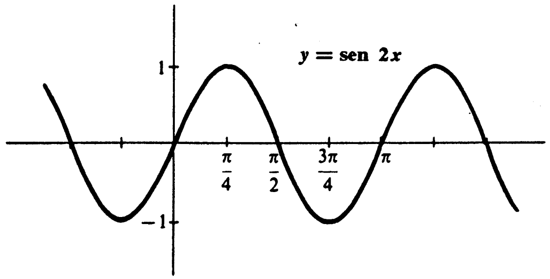


$\operatorname{sen} 2x$

A continuación graficamos $y = f(x) = \operatorname{sen} 2x$. Como el seno cambia su comportamiento en intervalos de longitud $\pi/2$, el $\operatorname{sen} 2x$ cambiará su comportamiento en intervalos de longitud $\pi/4$. Así, hagamos una tabla donde x varíe en intervalos de longitud $\pi/4$.

x	$2x$	$\operatorname{sen} 2x$
crec. de 0 a $\pi/4$	crec. de 0 a $\pi/2$	crec. de 0 a 1
crec. de $\pi/4$ a $\pi/2$	crec. de $\pi/2$ a π	dec. de 1 a 0
crec. de $\pi/2$ a $3\pi/4$	crec. de π a $3\pi/2$	dec. de 0 a -1
crec. de $3\pi/4$ a π	crec. de $3\pi/2$ a 2π	crec. de -1 a 0

Después la gráfica se repite. Por lo tanto, la gráfica de $\operatorname{sen} 2x$ se ve así.



Vemos que la gráfica de $y = \operatorname{sen} 2x$ tiene el doble de ondulaciones que la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$.

También se vería que $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ tiene la mitad de ondulaciones que la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$.

$\tan x$

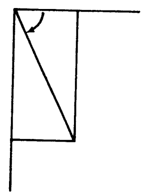
Finalmente, grafiquemos $y = \tan x$. Noten que $\tan 0 = 0$. Tomamos el intervalo

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Si x está cerca de $-\pi/2$, entonces la tangente es negativa y muy grande. A saber

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Cuando x está cerca de $-\pi/2$, $\cos x$ está cerca de 0 y $\operatorname{sen} x$ está cerca de -1. También se puede ver esto a partir de un triángulo rectángulo.



Conforme x crece de $-\pi/2$ a 0, $\operatorname{sen} x$ crece de -1 a 0. Por otro lado, cuando x crece de $-\pi/2$ a 0, $\cos x$ crece de 0 a 1. Por lo tanto $1/\cos x$ decrece desde positivo muy grande hasta 1. Así, cuando x crece de $-\pi/2$ a 0,

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \text{ crece desde negativo grande hasta } 0.$$

De manera análoga, cuando x crece de 0 a $\pi/2$, $\operatorname{sen} x$ crece de 0 a 1 y $\cos x$ decrece de 1 a 0. Por ello $1/\cos x$ crece de 1 a positivo muy grande y entonces

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \text{ crece desde } 0 \text{ hasta positivo grande.}$$

Con esto la gráfica de $y = \tan x$ se ve como en la página siguiente.

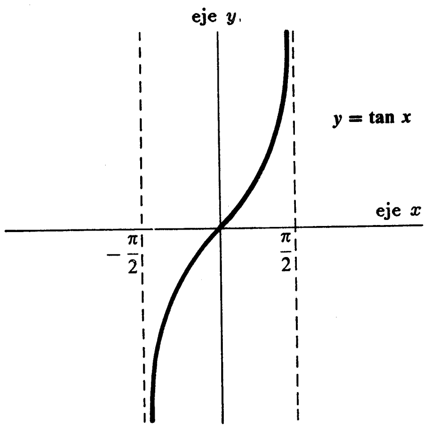
Observación sobre la notación. No confundan $\operatorname{sen} 2x$ con $(\operatorname{sen} 2)x$. Usualmente escribimos

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen} 2x$$

sin paréntesis para referirnos al seno de $2x$. En cambio, $(\operatorname{sen} 2)x$ es el número $\operatorname{sen} 2$ por x. La gráfica de

$$y = (\operatorname{sen} 2)x$$

es una recta, precisamente como $y = cx$ para algún número fijo c.



IV, §2. EJERCICIOS

1. Trazar la gráfica de $\tan x$ para todos los valores de x.

2. Sea $\sec x = 1/\cos x$ definida cuando $\cos x \neq 0$. Trazar la gráfica de $\sec x$.

3. Sea $\cot x = 1/\tan x$. Trazar la gráfica de $\cot x$.
(Sec y cot son abreviaciones de secante y cotangente.)

4. Trazar las gráficas de las funciones siguientes:
(a) $y = \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = \operatorname{sen} 3x$
(c) $y = \cos 2x$ (d) $y = \cos 3x$

5. Trazar las gráficas de las funciones siguientes:
(a) $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ (b) $y = \operatorname{sen} \frac{1}{3}x$ (c) $y = \operatorname{sen} \frac{1}{4}x$
(d) $y = \cos \frac{1}{2}x$ (e) $y = \cos \frac{1}{3}x$ (f) $y = \cos \frac{1}{4}x$

6. Trazar las gráficas de:
(a) $y = \operatorname{sen} \pi x$ (b) $y = \cos \pi x$
(c) $y = \operatorname{sen} 2\pi x$ (d) $y = \cos 2\pi x$

7. Trazar las gráficas de las funciones siguientes:
(a) $y = |\operatorname{sen} x|$ (b) $y = |\cos x|$.

8. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$. Localizar valores aproximados de $f(n\pi/4)$, para

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

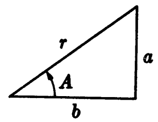
IV, §3. FÓRMULA DE LA SUMA

En esta sección enunciaremos y probaremos las fórmulas más importantes para el seno y el coseno.

Para comenzar, demostraremos, mediante el teorema de Pitágoras, que

$$\boxed{(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 = 1}$$

para todo x. Para mostrar esto tomamos un ángulo A y determinamos su seno y su coseno a partir del triángulo rectángulo, como en la figura siguiente.



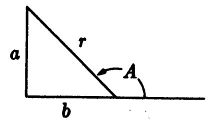
Entonces, por Pitágoras, tenemos

$$a^2 + b^2 = r^2.$$

Dividiendo entre r^2 tenemos

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1.$$

El mismo razonamiento funciona cuando A es mayor que $\pi/2$, mediante un triángulo como éste:



En ambos casos tenemos que el seno de $A = a/r$ y el coseno de $A = b/r$, de modo que tenemos la relación

$$(\text{seno } A)^2 + (\text{coseno } A)^2 = 1.$$

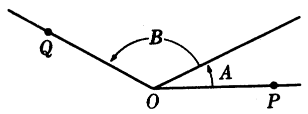
Se acostumbra escribir el cuadrado del seno y del coseno como $\operatorname{sen}^2 A$ y $\cos^2 A$. Nótese que en el segundo caso b es negativo.

Nuestro resultado principal es la **fórmula de la suma**, que deberá memorizarse.

Teorema 3.1. *Para dos ángulos A y B cualesquiera tenemos*

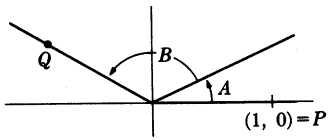
$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(A+B) &= \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B, \\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B. \end{aligned}}$$

Demostración. Probaremos primero la segunda fórmula.
Consideramos los dos ángulos, A y B, y su suma:



Tomamos dos puntos P y Q según se indica, a una distancia 1 del origen O. Calcularemos ahora la distancia de P a Q usando dos sistemas coordenados diferentes.

Primero tomamos un sistema coordenado como es usual:



Entonces $P = (1,0)$ y

$$Q = \big(\cos(A+B), \operatorname{sen}(A+B)\big).$$

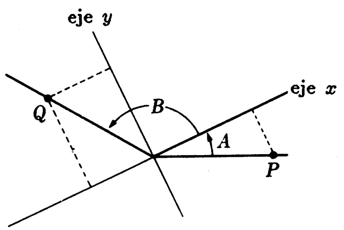
El cuadrado de la distancia entre $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ es

$$(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(P,Q)^2 &= \operatorname{sen}^2(A+B) + \big(\cos(A+B) - 1\big)^2,\\ &= -2\cos(A+B) + 2.\end{aligned}$$

A continuación colocamos el sistema coordenado como se muestra en la figura siguiente.



Entonces las coordenadas de P se vuelven

$$\big(\cos(-A), \operatorname{sen}(-A)\big) = (\cos A, -\operatorname{sen} A).$$

Las de Q son simplemente $(\cos B, \operatorname{sen} B)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(P,Q)^2 &= (\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} A)^2 + (\cos B - \cos A)^2,\\ &= \operatorname{sen}^2 B + 2\operatorname{sen} B \operatorname{sen} A + \operatorname{sen}^2 A\\ &\qquad + \cos^2 B - 2\cos B\cos A + \cos^2 A\\ &= 2 + 2\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B - 2\cos A\cos B.\end{aligned}$$

Si igualamos los cuadrados de las dos distancias obtenemos nuestra fórmula.

De la fórmula de la suma para el coseno obtenemos algunas fórmulas que relacionan al seno y al coseno.

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right),\\ \cos x &= \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right);\end{aligned}}$$

Para probar la primera comenzamos con el lado derecho:

$$\begin{aligned}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 0 + \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

porque $\cos(-\pi/2) = 0$ y $-\operatorname{sen}(-\theta) = \operatorname{sen}\theta$ (con $\theta = \pi/2$).

La segunda relación se sigue de la primera haciendo $x = z + \pi/2$ en la primera relación. Entonces

$$\operatorname{sen}\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(z + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos z.$$

Esto prueba la segunda relación.

De igual manera, se puede probar que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

Esto se usará en el siguiente argumento.

La fórmula de la suma para el seno se puede obtener de la fórmula de la suma para el coseno mediante el recurso siguiente:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(A+B) &= \cos\left(A + B - \frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos A\cos\left(B - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen} A \operatorname{sen}\left(B - \frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos A \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - B\right)\\ &= \cos A \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} A\cos B,\end{aligned}$$

probándose así la fórmula de la suma para el seno.

Ejemplo. Hallar $\operatorname{sen}(\pi/12)$.
Escribimos
$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$
Entonces $\operatorname{sen}(\pi/12) = \operatorname{sen}(\pi/3)\cos(\pi/4) - \cos(\pi/3)\operatorname{sen}(\pi/4)$ y, sustituyendo los valores conocidos, hallamos
$$\operatorname{sen}(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Ejemplo. Tenemos
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x,$$
pues
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -\operatorname{sen} x,$$
ya que $\cos\pi/2 = 0$ y $\operatorname{sen}\pi/2 = 1$.

En los ejercicios deducirán algunas otras fórmulas útiles para el seno y el coseno, especialmente:

$$\boxed{\begin{gathered}\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x,\\ \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x,\\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.\end{gathered}}$$

Las recordarán mejor después de haberlas obtenido, así que no las deduciremos en el texto.

IV, §3. EJERCICIOS

1. Hallar $\operatorname{sen} 7\pi/12$. [*Idea:* Escribir $7\pi/12 = 4\pi/12 + 3\pi/12$.]
2. Hallar $\cos 7\pi/12$.
3. Hallar los valores siguientes:
   (a) $\operatorname{sen}\pi/12$ (b) $\cos\pi/12$
   (c) $\operatorname{sen} 5\pi/12$ (d) $\cos 5\pi/12$
   (e) $\operatorname{sen} 11\pi/12$ (f) $\cos 11\pi/12$
   (g) $\operatorname{sen} 10\pi/12$ (h) $\cos 10\pi/12$
4. Probar las fórmulas siguientes.
   (a) $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$ (b) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
   (c) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ (d) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

   [*Idea:* Para (c) y (d), comenzar con el caso particular de la fórmula de la suma para $\cos 2x$. Después usar la identidad
   $$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.]$$
5. Hallar una fórmula para $\operatorname{sen} 3x$ en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Encontrar también una para $\cos 3x$.

6. Probar que $\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$, usando sólo la fórmula de la suma para el coseno.
7. Probar las fórmulas
$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$
$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x],$$
$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$
   [*Idea:* Expander el lado derecho mediante la fórmula de la suma y después cancelar todo lo que se pueda. El lado izquierdo se irá formando. Notar que, por ejemplo,
$$\begin{aligned}\cos(m-n)x &= \cos(mx - nx)\\ &= \cos mx\cos nx + \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx.]\end{aligned}$$

IV, §4. LAS DERIVADAS

Probaremos:

Teorema 4.1. *Las funciones* $\operatorname{sen} x$ *y* $\cos x$ *tienen derivadas y*

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x,\\ \frac{d(\cos x)}{dx} = -\operatorname{sen} x.\end{gathered}}$$

Demostración. Determinaremos primero la derivada de $\operatorname{sen} x$. Tenemos que ver el cociente de Newton de $\operatorname{sen} x$. Es
$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}.$$
Usando la fórmula de la suma para expander $\operatorname{sen}(x+h)$, vemos que el cociente de Newton es igual a
$$\frac{\operatorname{sen} x\cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}.$$
Juntamos los dos términos que incluyen a $\operatorname{sen} x$:
$$\frac{\cos x\operatorname{sen} h + \operatorname{sen} x(\cos h - 1)}{h}$$
y separamos nuestro cociente en una suma de dos términos:
$$\cos x\frac{\operatorname{sen} h}{h} + \operatorname{sen} x\frac{\cos h - 1}{h}.$$
Ahora enfrentamos el problema de hallar el límite de
$$\frac{\operatorname{sen} h}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\cos h - 1}{h} \quad \text{cuando } h \text{ tiende a } 0.$$

Éste es un problema un poco más difícil que los otros encontrados hasta ahora. No podemos precisar de momento cuáles serán estos límites. En la sección siguiente probaremos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

Una vez conocidos estos límites, vemos de inmediato que el primer término tiende a $\cos x$ y el segundo término tiende a

$$(\operatorname{sen} x)\cdot 0 = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \cos x.$$

Esto prueba que

$$\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x.$$

Para hallar la derivada de $\cos x$ podríamos proceder de la misma manera y encontraríamos los mismos límites. Sin embargo hay un truco que evita esto.

Sabemos que $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Hacemos $u = x + \frac{\pi}{2}$ y usamos la regla de la cadena. Obtenemos

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = \frac{d(\operatorname{sen} u)}{du}\frac{du}{dx}.$$

Sin embargo, $du/dx = 1$, por lo que

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = \cos u = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x,$$

lo cual prueba nuestro teorema.

Observación. No es cierto que la derivada de la función $\operatorname{sen}^* x$ sea $\cos^* x$. Usen la regla de la cadena para hallar cuál es su derivada. La razón para usar la medición de ángulos en radianes es obtener una función $\operatorname{sen} x$ cuya derivada sea $\cos x$.

Ejemplo. Hallar la recta tangente a la curva $y = \operatorname{sen} 4x$ en el punto $x = \pi/16$. Esto se hace fácilmente. Sea $f(x) = \operatorname{sen} 4x$. Entonces

$$f'(x) = 4\cos 4x.$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $x = \pi/16$ es igual a

$$f'\left(\frac{\pi}{16}\right) = 4\cos\left(\frac{4\pi}{16}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

Por otro lado, tenemos

$$f\left(\frac{\pi}{16}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{16}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

por lo que la ecuación de la recta tangente es

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{16}\right).$$

Teorema 4.2. *Tenemos*

$$\boxed{\frac{d(\tan x)}{dx} = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x.}$$

Demostración. Usamos la regla para la derivada de un cociente, de modo que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2}\\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.\end{aligned}$$

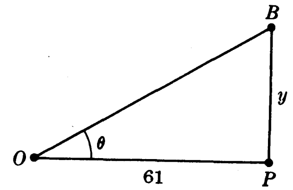
Pero también

$$\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Esto prueba el teorema.

Ejemplo. Un globo se eleva comenzando en un punto P. Un observador situado a 61 m dirige su mirada hacia el globo y el ángulo θ que forma el globo crece a razón de $\frac{1}{20}$ rad/seg. Hallar la razón con la cual está creciendo la distancia del globo al suelo cuando $\theta = \pi/4$.

La ilustración es como sigue, donde y es la distancia del globo al suelo.



Tenemos que $\tan\theta = y/61$, de donde

$$y = 61\cdot\tan\theta.$$

Queremos hallar la razón con la cual está creciendo y, i.e. queremos hallar dy/dt. Al tomar la derivada con respecto al tiempo t se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 61\frac{d\tan\theta}{dt}\\ &= 61(1+\tan^2\theta)\frac{d\theta}{dt}\end{aligned}$$

por el teorema 4.2 y la regla de la cadena. Por consiguiente,

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\theta=\pi/4} = 61\left(1+\tan^2\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{20}$$
$$= 61(1+1)\frac{1}{20}$$
$$= 6.1\,\mathrm{m/seg.}$$

Ésta es nuestra respuesta.

Ejemplo. En el ejemplo anterior, hallar la razón con la cual está creciendo la distancia del globo al suelo cuando $\operatorname{sen}\theta = 0.2$.

Tenemos
$$\frac{dy}{dt} = 61\frac{d\tan\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = 61(1+\tan^2\theta)\frac{d\theta}{dt}.$$

Cuando $\operatorname{sen}\theta = 0.2$, tenemos que $\operatorname{sen}^2\theta = 0.04$, y
$$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = 0.96.$$

Por lo tanto,
$$\tan^2\theta = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}.$$

Como nos dan $d\theta/dt = 1/20$, hallamos
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\operatorname{sen}\theta=0.2} = 61\left(1+\frac{1}{24}\right)\frac{1}{20}$$
$$= \frac{61}{20}\frac{25}{24}$$
$$= \frac{305}{96}\,\mathrm{m/seg.}$$

IV, §4. EJERCICIOS

1. ¿Cuál es la derivada de $\cot x$?

Hallar la derivada de las funciones siguientes:

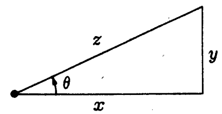
2. $\operatorname{sen}(3x)$
3. $\cos(5x)$
4. $\operatorname{sen}(4x^2 + x)$
5. $\tan(x^3 - 5)$
6. $\tan(x^4 - x^3)$
7. $\tan(\operatorname{sen} x)$
8. $\operatorname{sen}(\tan x)$
9. $\cos(\tan x)$

10. ¿Cuál es la pendiente de la curva $y = \operatorname{sen} x$ en el punto cuya abscisa es π?

Hallar la pendiente de las curvas siguientes en el punto indicado (damos sólo la abscisa del punto):

11. $y = \cos(3x)$ en $x = \pi/3$

12. $y = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi/6$
13. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$ en $x = 3\pi/4$
14. $y = \tan x$ en $x = -\pi/4$
15. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ en $x = -\pi/6$
16. Dar la ecuación de la recta tangente a las curvas siguientes en el punto indicado.
    (a) $y = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi/2$ (b) $y = \cos x$ en $x = \pi/6$
    (c) $y = \operatorname{sen} 2x$ en $x = \pi/4$ (d) $y = \tan 3x$ en $x = \pi/4$
    (e) $y = 1/\operatorname{sen} x$ en $x = \pi/2$ (f) $y = 1/\cos x$ en $x = \pi/4$
    (g) $y = 1/\tan x$ en $x = \pi/4$ (h) $y = \tan\dfrac{x}{2}$ en $x = \pi/2$
    (i) $y = \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$ en $x = \pi/3$ (j) $y = \cos\dfrac{\pi x}{3}$ en $x = 1$
    (k) $y = \operatorname{sen}\pi x$ en $x = \frac{1}{2}$ (l) $y = \tan\pi x$ en $x = \frac{1}{6}$
17. En el siguiente triángulo rectángulo, suponer que θ está decreciendo a razón de $\frac{1}{30}$ rad/sec. Hallar cada una de las derivadas indicadas:
    (a) dy/dt, cuando $\theta = \pi/3$ y x es constante, $x = 12$.
    (b) dz/dt, cuando $\theta = \pi/4$ y y es constante, $y = 10\sqrt{2}$.
    (c) dx/dt, cuando $x = 1$ si x y y están cambiando, pero z es constante, $z = 2$.



    Recordar que θ está decreciendo, de modo que $d\theta/dt = -\frac{1}{30}$.
18. Una rueda de feria de 15 m de diámetro efectúa una revolución cada 2 min. Si el centro de la rueda está a 9 m del suelo, ¿con qué rapidez se mueve verticalmente un pasajero cuando la rueda está a 13 m sobre el suelo?
19. Un globo se está elevando desde el punto P. Un observador O, situado a 91 m, dirige su mirada hacia el globo, y el ángulo θ que forma con el globo crece a razón de 0.3 rad/seg. Hallar la razón con la que está creciendo la distancia del globo al suelo cuando
    (a) $\theta = \pi/4$, (b) $\theta = \pi/3$, (c) $\cos\theta = 0.2$,
    (d) $\operatorname{sen}\theta = 0.3$, (e) $\tan\theta = 4$.
20. Un aeroplano vuela horizontalmente sobre una recta a una rapidez de 1 000 km/hr, a una altura de 10 km. Una cámara automática está fotografiando un punto del suelo, justo adelante. ¿Con qué rapidez debe girar la cámara cuando el ángulo entre la trayectoria del avión y la recta de la cámara al punto es de 30°?
21. Una luz de un faro está localizada a 306 m de un rompeolas y gira a razón constante de 2 revoluciones por minuto.
    (a) ¿Con qué rapidez se va moviendo el punto de luz a lo largo del rompeolas en el punto más cercano al faro?
    (b) ¿Con qué rapidez se va moviendo el punto de luz en un punto situado a 153 m de este punto más cercano?

22. Un aeroplano va volando a una altura de 6 116 m siguiendo un curso horizontal que pasa directamente sobre un observador en el suelo. El observador nota que cuando el ángulo entre el suelo y su línea de visión es de 60°, el ángulo está decreciendo a razón de 2° por segundo. ¿Cuál es la rapidez del avión?

23. Un asta tiene 9 m de altura y está ubicada a 9 m al este de un edificio alto. Si el sol sale a razón de 18° por hora, ¿con qué rapidez se va acortando la sombra del asta sobre el edificio cuando la elevación del sol es de 30°? [*Idea:* La razón de salida del sol es la razón de cambio del ángulo de elevación θ del sol. Primero convertir los grados a radianes por hora, a saber

$$18\,\text{grad/hr} = 18\pi/180 = \pi/10\,\text{rad/hr}.$$

Si s es la longitud de la sombra, se tiene entonces que $\tan\theta = (9-s)/9$.]

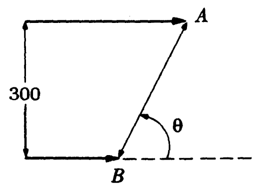
24. Un globo meteorológico se suelta desde el suelo a 460 m de un observador y se eleva verticalmente a razón constante de 76 m/min. ¿Con qué rapidez está creciendo el ángulo entre la línea de visión del observador y el suelo, cuando el globo está a una altura de 612 m? Dar la respuesta en grados por minuto.

25. Una escalera de 9 m de largo está apoyada sobre una pared. Suponiendo que la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a razón de 0.9 m/seg, ¿con qué rapidez está cambiando el ángulo entre la escalera y el suelo cuando la parte inferior de la escalera está a 4.5 m de la pared?

26. Un cohete parte del suelo a 612 m de un observador y se eleva verticalmente a razón constante de 30.6 m/seg. ¿Con qué rapidez está cambiando el ángulo entre la línea de visión del observador y el suelo, después de 20 seg? Dar la respuesta en grados por segundo.

27. Una cometa a una altura de 60 m se mueve horizontalmente a razón de 6 m/seg. ¿A qué razón está cambiando el ángulo entre el cordel y el suelo cuando se han soltado 120 m de cordel?

28. Dos aeroplanos van volando en la misma dirección, a una altitud constante. En $t=0$ el aeroplano A está 300 m verticalmente arriba del aeroplano B. El aeroplano A viaja a una rapidez constante de 180 m/seg, y B a una rapidez constante de 120 m/seg. Hallar la razón de cambio del ángulo de elevación θ de A respecto a B en el tiempo $t = 10$ seg.



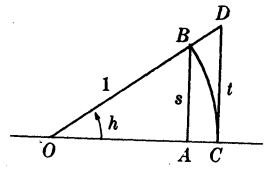
IV, §5. DOS LÍMITES BÁSICOS

Probaremos primero que

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1.}$$

Tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando h tiende a 0, y no obtenemos información al intentar algún procedimiento de cancelación de la manera como la obtuvimos con las potencias.

Supongamos primero que h es positivo y veamos el diagrama siguiente.



Tomando un círculo de radio 1 y un ángulo de h radianes, sea s la altura del triángulo pequeño OAB, y t la del triángulo grande OCD. Entonces, usando el triángulo pequeño OAB,

$$\operatorname{sen} h = \frac{s}{1} = s$$

y usando el triángulo grande, OCD,

$$\tan h = \frac{t}{1} = t = \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}.$$

Puede verse que:

área del triángulo OAB < área del sector OCB < área del triángulo OCD.

La base OA del triángulo pequeño es igual a $\cos h$ y su altura AB es $\operatorname{sen} h$. La base OC del triángulo grande es igual a 1. Su altura CD es

$$t = \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}.$$

El área de cada triángulo es $\frac{1}{2}$ de la base por la altura.

El área del sector es la fracción $h/2\pi$ del área del círculo, que es π. Por lo tanto, el área del sector es $h/2$. Así se obtiene:

$$\frac{1}{2}\cos h \operatorname{sen} h < \frac{1}{2}h < \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}.$$

Se multiplica todo por 2 para obtener

$$\cos h \operatorname{sen} h < h < \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}.$$

Como supusimos que $h > 0$, se sigue que $\operatorname{sen} h > 0$, y se dividen ambas desigualdades entre $\operatorname{sen} h$, con lo cual se obtiene

$$\cos h < \frac{h}{\operatorname{sen} h} < \frac{1}{\cos h}.$$

Conforme h tiende a 0, tanto $\cos h$ como $1/\cos h$ tienden a 1. Así $h/\operatorname{sen} h$ está atrapado entre dos cantidades que tienden a 1, por lo que $h/\operatorname{sen} h$ también debe tender a 1. Así podemos escribir

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{\operatorname{sen} h} = 1.$$

Como

$$\frac{\operatorname{sen} h}{h} = \frac{1}{h/\operatorname{sen} h}$$

y el límite de un cociente es el cociente de los límites, se sigue que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1,$$

como queríamos demostrar.

Ya calculamos nuestro límite cuando $h > 0$. Suponiendo ahora que $h < 0$, podemos escribir

$$h = -k$$

con $k > 0$. Entonces

$$\frac{\operatorname{sen}(-k)}{-k} = \frac{-\operatorname{sen} k}{-k} = \frac{\operatorname{sen} k}{k}.$$

Cuando h tiende a 0 también lo hace k, por lo cual estamos reducidos al caso anterior, pues $k > 0$.

Falta probar el límite

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} \\ &= \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\ &= \frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= -\frac{\operatorname{sen} h}{h}(\operatorname{sen} h)\frac{1}{\cos h + 1}. \end{aligned}$$

Usaremos la propiedad acerca del producto de los límites. Tenemos un producto de tres factores. El primero es

$$-\frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

y tiende a -1 cuando h tiende a 0.

El segundo es $\operatorname{sen} h$ y tiende a 0 cuando h tiende a 0.

El tercero es

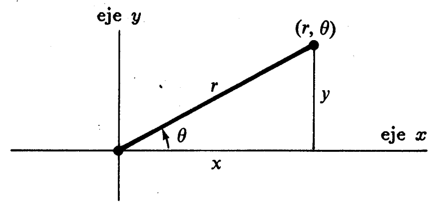
$$\frac{1}{\cos h + 1}$$

y su límite es $\frac{1}{2}$ cuando h tiende a 0.

Por lo tanto, el límite del producto es 0 y ¡todo está probado!

IV, §6. COORDENADAS POLARES

Además de describir un punto en el plano mediante sus coordenadas respecto a dos ejes perpendiculares, también las podemos describir como sigue. Trazamos un rayo entre el punto y un origen dado. El **ángulo** θ que forma este rayo con el eje horizontal y la **distancia** r entre el punto y el origen determinan nuestro punto. Así, el punto está descrito por un par de números (r, θ), que se llaman sus **coordenadas polares**.



Si tenemos los ejes usuales y x y y son las coordenadas ordinarias de nuestro punto, puede verse que

$$\boxed{\frac{x}{r} = \cos\theta \quad \text{y} \quad \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta,}$$

de donde

$$\boxed{x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\operatorname{sen}\theta.}$$

Esto permite cambiar de coordenadas polares a coordenadas ordinarias.

Se sobreentiende que r siempre es ≥ 0. En términos de las coordenadas ordinarias tenemos

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}.}$$

Por Pitágoras, r es la distancia del punto (x, y) al origen $(0, 0)$. Nótese que la distancia es siempre ≥ 0.

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas polares del punto cuyas coordenadas ordinarias son $(1, \sqrt{3})$.

Tenemos que $x = 1$ y $y = \sqrt{3}$, de modo que $r = \sqrt{1+3} = 2$. Además

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo tanto $\theta = \pi/3$, y las coordenadas polares son $(2, \pi/3)$.

Observamos que se puede tener varias coordenadas polares que correspondan al mismo punto. El punto cuyas coordenadas polares son $(r, \theta + 2\pi)$ es el mismo punto que (r, θ). Así, en el ejemplo anterior, $(2, \pi/3 + 2\pi)$ también serían coordenadas polares para nuestro punto. En la práctica es común usar el valor para el ángulo que está entre 0 y 2π.

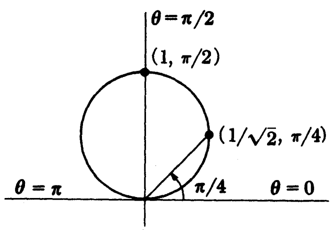
Supongan que un insecto viaja en un plano. Su posición está completamente determinada si conocemos el ángulo θ y la distancia del insecto al origen, esto es, si conocemos las coordenadas polares. Si la distancia r al origen está dada como función de θ, entonces el insecto está viajando a lo largo de una curva y es posible trazar esta curva.

Ejemplo 2. Trazar la gráfica de la función $r = \operatorname{sen}\theta$ para $0 \leq \theta \leq \pi$.

Si $\pi < \theta < 2\pi$, entonces $\operatorname{sen}\theta < 0$ y, por lo tanto, para dicha θ no se obtendrá un punto sobre la curva. A continuación haremos una tabla de valores. Consideramos intervalos de θ tales que $\operatorname{sen}\theta$ siempre crezca o siempre decrezca en esos intervalos. Esto indicará si el punto se mueve alejándose del origen o acercándose al origen, pues r es la distancia del punto al origen. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento para $\operatorname{sen}\theta$ se pueden considerar de longitud $\pi/2$. Así hallamos la tabla siguiente:

θ	$\operatorname{sen}\theta = r$
crec. de 0 a $\pi/2$	crec. de 0 a 1
crec. de $\pi/2$ a π	dec. de 1 a 0
$\pi/6$	$1/2$
$\pi/4$	$1\sqrt{2}$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$

Expresado en palabras: conforme θ crece de 0 a $\pi/2$, $\operatorname{sen}\theta$ y, por lo tanto, r crecen hasta que r llega a 1. Conforme θ crece de $\pi/2$ a π, $\operatorname{sen}\theta$ y por lo tanto r decrecen de 1 a 0. Por consiguiente, la gráfica se ve así.



Hemos trazado la gráfica como un círculo. En realidad no se sabe si es o no un

círculo.

Ejemplo 3. Cambiar la ecuación

$$\boxed{r = \operatorname{sen}\theta}$$

a coordenadas rectangulares.

Sustituimos las expresiones

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y

$$\operatorname{sen}\theta = y/r = y/\sqrt{x^2+y^2}$$

en la ecuación polar, para obtener

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Es obvio que esta sustitución es válida sólo cuando $r \neq 0$, i.e. $r > 0$. Después podemos simplificar la ecuación recién obtenida multiplicando ambos lados por $\sqrt{x^2+y^2}$. Entonces obtenemos

$$x^2 + y^2 = y.$$

Por el capítulo II se sabe que si se completa el cuadrado, ésta es la ecuación de un círculo. Recordemos aquí como se hace eso. Escribimos la ecuación en la forma

$$x^2 + y^2 - y = 0.$$

Nos gustaría que esta ecuación tuviera la forma

$$x^2 + (y-b)^2 = c^2,$$

pues así se sabría de manera inmediata que se trata de un círculo con centro en $(0, b)$ y radio c. Sabemos que

$$(y-b)^2 = y^2 - 2by + b^2.$$

Por lo tanto, hacemos $2b = 1$ y $b = \frac{1}{2}$. Entonces

$$x^2 + y^2 - y = x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4}$$

ya que se cancela $\frac{1}{4}$. Así, la ecuación

$$\boxed{x^2 + y^2 - y = 0}$$

es equivalente a

$$\boxed{x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}.}$$

Ésta es la ecuación de un círculo con centro en $(0, \frac{1}{2})$ y radio $\frac{1}{2}$. El punto correspondiente a la coordenada polar $r = 0$ es el punto con coordenadas rectangulares $x = 0$ y $y = 0$.

Ejemplo 4. La ecuación del círculo de radio 3 y centro en el origen en coordenadas polares es simplemente

$$r = 3 \quad \text{o} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = 9.$$

Esto expresa la condición de que esa distancia del punto (x, y) al origen es la constante 3. El ángulo θ puede ser arbitrario.

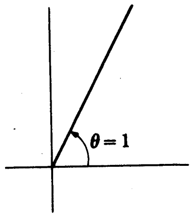
Ejemplo 5. Considerar la ecuación $\theta = 1$ en coordenadas polares. Un punto con coordenadas polares (r, θ) satisface esta ecuación si y sólo si su ángulo θ es 1 y no hay restricción en su coordenada r, i.e. $r \geq 0$. Así, geométricamente este conjunto de puntos se puede describir como una semirrecta, o un rayo, como en la figura (a) de la página siguiente.

Por la definición de tangente, si (x, y) son las coordenadas ordinarias de un punto sobre este rayo y $y \neq 0$, entonces

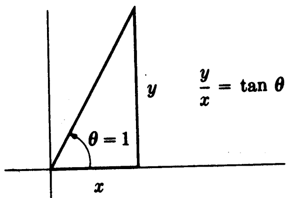
$$y/x = \tan 1 \quad \text{y} \quad x > 0,$$

de donde

$$y = (\tan 1)x \quad \text{y} \quad x > 0.$$



(a)



(b)

Por supuesto, el punto con $x = y = 0$ también está sobre el rayo. Recíprocamente, cualquier punto cuyas coordenadas polares (x, y) satisfacen

$$y = (\tan 1)x \quad \text{y} \quad x \geq 0$$

están sobre el rayo. Por lo tanto, el rayo definido en coordenadas polares por medio de la ecuación $\theta = 1$ está definido en coordenadas ordinarias mediante el par de condiciones

$$y = (\tan 1)x \quad \text{y} \quad x \geq 0$$

En lugar de 1 se podría tomar cualquier número. Por ejemplo, el rayo definido por la ecuación $\theta = \pi/6$ en coordenadas polares también está definido por el par de condiciones

$$y = (\tan \pi/6)x \quad \text{y} \quad x \geq 0.$$

Dado que $\tan \pi/6 = 1/\sqrt{3}$, podemos escribir el par equivalente de condiciones

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \quad \text{y} \quad x \geq 0.$$

Nótese que no hay una manera más sencilla de expresar $\tan 1$ que escribir precisamente $\tan 1$. Sólo al tratar con múltiplos fraccionarios de π tenemos la posibilidad de escribir las funciones trigonométricas en términos de raíces, como $\tan \pi/6 = 1/\sqrt{3}$.

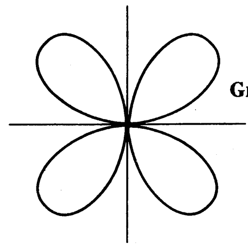
Ejemplo 6. Esbocemos la curva dada en coordenadas polares por medio de la ecuación

$$r = |\operatorname{sen} 2\theta|.$$

El signo de valor absoluto hace que el lado derecho sea siempre ≥ 0, y así existe un valor de r para todo valor de θ. Las regiones de crecimiento y decrecimiento para $\operatorname{sen} 2\theta$ ocurrirán cuando 2θ varíe en intervalos de longitud $\pi/2$. Por lo tanto, es natural ver intervalos para θ de longitud $\pi/4$. Hagamos ahora una tabla del comportamiento de crecimiento y de decrecimiento de $|\operatorname{sen} 2\theta|$ y r sobre dichos intervalos.

θ	$r = \lvert\operatorname{sen} 2\theta\rvert$
crec. de 0 a $\pi/4$	crec. de 0 a 1
crec. de $\pi/4$ a $\pi/2$	dec. de 1 a 0
crec. de $\pi/2$ a $3\pi/4$	crec. de 0 a 1
crec. de $3\pi/4$ a π	dec. de 1 a 0
y así sucesivamente	

Entonces la gráfica se ve así:



Gráfica de $r = |\operatorname{sen} 2\theta|$

Debido al signo de valor absoluto, para cualquier valor de θ se obtiene un valor para r que es ≥ 0. De acuerdo con nuestra convención, si queremos graficar

$$r = \operatorname{sen} 2\theta$$

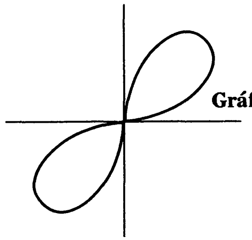
sin el signo de valor absoluto, entonces hemos de omitir aquellas porciones de la gráfica anterior para las cuales $\operatorname{sen} 2\theta$ es negativo, i.e. aquellas porciones de la gráfica para las que

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

y

$$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi.$$

Así, la gráfica de $r = \operatorname{sen} 2\theta$ se vería como en la figura siguiente.



Ejemplo 7. Queremos trazar la curva dada en coordenadas polares por medio de la ecuación

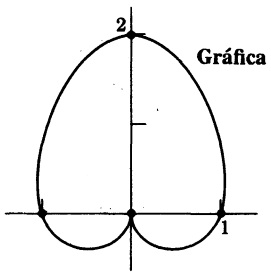
$$r = 1 + \operatorname{sen}\theta.$$

Vemos el comportamiento de r cuando θ varía en los intervalos

$$[0, \pi/2], \quad [\pi/2, \pi], \quad [\pi, 3\pi/2], \quad [3\pi/2, 2\pi].$$

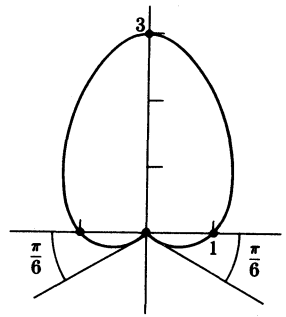
θ	$\operatorname{sen}\theta$	r
crec. de 0 a $\pi/2$	crec. de 0 a 1	crec. de 1 a 2
crec. de $\pi/2$ a π	dec. de 1 a 0	dec. de 2 a 1
crec. de π a $3\pi/2$	dec. de 0 a -1	dec. de 1 a 0
crec. de $3\pi/2$ a 2π	crec. de -1 a 0	crec. de 0 a 1

De este modo, la gráfica se ve aproximadamente como sigue:



Ejemplo 8. Veamos la ecuación ligeramente diferente

$$r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta.$$



Funcionará un análisis similar, pero debemos tener cuidado con la posibilidad de que la expresión del lado derecho sea negativa. De acuerdo con nuestra convención, esto no produciría un punto, pues suponemos que $r \geq 0$ en coordenadas polares. Así, cuando $2\operatorname{sen}\theta < -1$, no se obtienen puntos. Esto ocurre precisamente en el intervalo

$$\frac{7\pi}{6} < \theta < \frac{11\pi}{6}.$$

La gráfica se verá entonces como en la figura de la página anterior, donde hemos trazado también los rayos que determinan los ángulos de $\frac{7\pi}{6}$ y $\frac{11\pi}{6}$.

IV, §6. EJERCICIOS

1. Localizar los puntos siguientes en coordenadas polares:
   (a) $(2, \pi/4)$ (b) $(3, \pi/6)$ (c) $(1, -\pi/4)$ (d) $(2, -3\pi/6)$
2. Seguir las mismas instrucciones que en el ejercicio 1.
   (a) $(1, 1)$ (b) $(4, -3)$
   (Éstas son coordenadas polares. Exhibir de manera aproximada el ángulo representado por las coordenadas polares dadas.)
3. Hallar las coordenadas polares para los puntos siguientes dados en las coordenadas usuales de abscisa y ordenada:
   (a) $(1, 1)$ (b) $(-1, -1)$ (c) $(3, 3\sqrt{3})$ (d) $(-1, 0)$
4. Trazar las curvas siguientes y poner la ecuación en coordenadas rectangulares.
   (a) $r = 2\operatorname{sen}\theta$ (b) $r = 3\cos\theta$
5. Cambiar lo siguiente a coordenadas rectangulares y trazar la curva. Se supone que $a > 0$.
   (a) $r = a\operatorname{sen}\theta$ (b) $r = a\cos\theta$
   (c) $r = 2a\operatorname{sen}\theta$ (d) $r = 2a\cos\theta$

Trazar las gráficas de las curvas siguientes dadas en coordenadas polares

6. $r^2 = \cos\theta$
7. $r^2 = \operatorname{sen}\theta$
8. (a) $r = \operatorname{sen}^2\theta$ (b) $r = \cos^2\theta$
9. $r = 4\operatorname{sen}^2\theta$
10. $r = 5$
11. $r = 4$
12. (a) $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$
13. $r = 3/\cos\theta$
14. $r = 1 + \cos\theta$
15. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$
16. $r = 1 - \cos\theta$
17. $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$
18. $r = \operatorname{sen} 3\theta$
19. $r = \operatorname{sen} 4\theta$
20. $r = \cos 2\theta$
21. $r = \cos 3\theta$
22. $r = |\cos 2\theta|$
23. $r = |\operatorname{sen} 3\theta|$
24. $r = |\cos 3\theta|$
25. $r = \theta$
26. $r = 1/\theta$

En los tres problemas siguientes poner la ecuación en coordenadas rectangulares y trazar la curva.

27. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$
28. $r = \dfrac{2}{2 - \cos\theta}$
29. $r = \dfrac{4}{1 + 2\cos\theta}$

Trazar las curvas siguientes dadas en coordenadas polares.

30. $r = \tan\theta$
31. $r = 5 + 2\operatorname{sen}\theta$
32. $r = |1 + 2\cos\theta|$
33. (a) $r = 2 + \operatorname{sen} 2\theta$
    (b) $r = 2 - \operatorname{sen} 2\theta$
34. $\theta = \pi$
35. $\theta = \pi/2$
36. $\theta = -\pi/2$
37. $\theta = 5\pi/4$
38. $\theta = 3\pi/2$
39. $\theta = 3\pi/4$

CAPÍTULO V

El teorema del valor medio

Dada una curva $y = f(x)$, usaremos la derivada para obtener información acerca de la curva. Por ejemplo, hallaremos el máximo y el mínimo de la gráfica y las regiones donde la curva crece o decrece. Usaremos el teorema del valor medio, que es fundamental en la teoría de las derivadas.

V, §1. TEOREMA DEL MÁXIMO Y EL MÍNIMO

Definición. Sea f una función diferenciable. Un **punto crítico** de f es un número c tal que

$$f'(c) = 0.$$

El hecho de que la derivada sea cero significa que la pendiente de la recta tangente es 0 y, por ello, que la recta tangente misma es horizontal. He aquí tres ejemplos de este fenómeno.

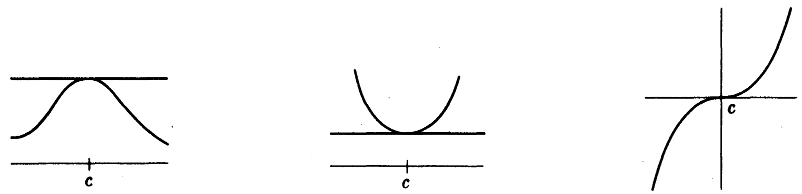


Figura 1 Figura 2 Figura 3

El tercer ejemplo es una función como $f(x) = x^3$. Tenemos que $f'(x) = 3x^2$ y, por lo tanto, cuando $x = 0$, $f'(0) = 0$.

Los otros dos ejemplos son los de un máximo y un mínimo, respectivamente, viendo la gráfica de la función sólo alrededor de nuestro punto c. Formalizaremos ahora estos conceptos.

Sean a y b dos números con $a < b$. Se empleará repetidamente el intervalo de números entre a y b, a veces incluyendo los puntos extremos a y b, y a veces no. Recordemos la terminología usual.

La colección de números x tales que $a < x < b$ se llama **intervalo abierto** entre a y b.

La colección de números x tales que $a \leq x \leq b$ se llama **intervalo cerrado** entre a y b. Denotamos este intervalo cerrado mediante los símbolos $[a, b]$. (Un solo punto será también un intervalo cerrado.)

Si deseamos incluir sólo un punto extremo, diremos que el intervalo es **semicerrado.** Es evidente que hay dos intervalos semicerrados, a saber el formado por los números x con $a \leq x < b$ y el otro que consta de los números x con $a < x \leq b$.

Si a es un número, a la colección de números $x > a$ (o $x < a$) en ocasiones se le llama intervalo abierto. El contexto ayudará a comprender esto mejor.

Sea f una función y c un número en el que está definida f.

Definición. Diremos que c es un **punto máximo** de la función f si, y sólo si,

$$f(c) \geq f(x)$$

para todos los números x en los que está definido f. Si la condición $f(c) \geq f(x)$ se cumple para todos los números x en algún intervalo, decimos entonces que la **función tiene un máximo en c en ese intervalo.** Llamamos **valor máximo** a $f(c)$.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces f tiene un máximo en $\pi/2$ porque $f(\pi/2) = 1$ y $\operatorname{sen} x \leq 1$ para todos los valores de x. Esto se ilustra en la figura 4. Nótese que $-3\pi/2$ también es un máximo para $\operatorname{sen} x$.

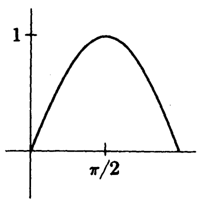


Figura 4

Ejemplo 2. Sea $f(x) = 2x$, y vean a f como una función definida sólo en el intervalo

$$0 \leq x \leq 2.$$

Entonces la función tiene un máximo en 2 en este intervalo porque $f(2) = 4$ y $f(x) \leq 4$ para todo x en el intervalo. Esto se ilustra en la figura 5.

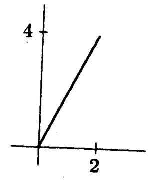


Figura 5

Ejemplo 3. Sea $f(x) = 1/x$. Sabemos que f no está definida para $x = 0$. Esta función no tiene máximo: se vuelve arbitrariamente grande cuando x se acerca a 0 y $x > 0$. Esto se ilustra en la figura 6.

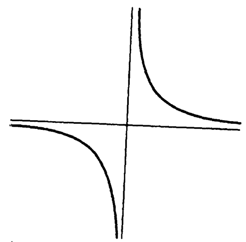


Figura 6

Definición. Un **punto mínimo** para f es un número c tal que

$$f(x) \geq f(c) \quad \text{para todo } x \text{ donde está definida } f.$$

Un **valor mínimo** para la función es el valor $f(c)$, tomado en un punto mínimo.

Ilustramos varios mínimos con las gráficas de ciertas funciones.

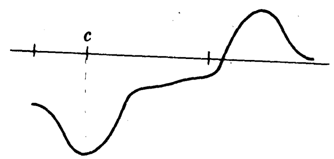


Figura 7

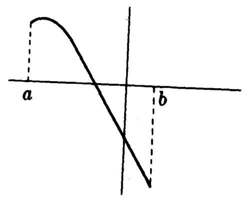


Figura 8

En la figura 7 la función tiene un mínimo. En la figura 8 el mínimo está en el extremo del intervalo. En las figuras 3 y 6 la función no tiene mínimo.

En la figura siguiente, el punto c_1 se ve como un máximo y el punto c_2 se ve como un mínimo, siempre que se permanezca cerca de esos puntos y no se vea lo que sucede en otros lugares de la curva.

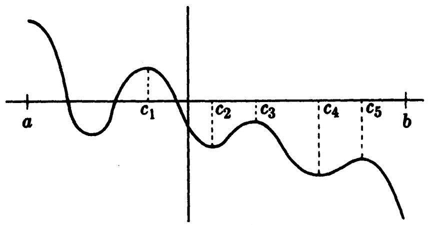


Figura 9

Hay un nombre para dichos puntos. Diremos que un punto c es un **mínimo local** o un **mínimo relativo** de la función f si existe un intervalo

$$a_1 < c < b_1$$

tal que $f(c) \leq f(x)$ para todos los números x con $a_1 \leq x \leq b_1$.

La noción de **máximo local** o **máximo relativo** se define de manera análoga. (Hacerlo.) En la figura 9 el punto c_3 es un máximo local, c_4 es un mínimo local y c_5 es un máximo local.

El máximo y el mínimo reales están en los puntos extremos.

Usando las propiedades básicas de los números podemos probar el teorema siguiente, el cual es tan obvio que omitimos la demostración.

Teorema 1.1. *Sea f una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces existe un punto en el intervalo donde f tiene un máximo y existe un punto donde f tiene un mínimo.*

Deseamos tener alguna idea del margen de valores de la función dada. El siguiente teorema brinda esta información.

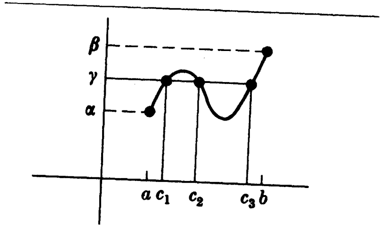
Teorema 1.2. Teorema del valor intermedio. *Sea f una función continua sobre el intervalo $[a, b]$. Sea $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$. Sea γ un número entre α y β. Por ejemplo, si $\alpha < \beta$, sea $\alpha < \gamma < \beta$ y, si $\alpha > \beta$, entonces sea*

$$\alpha > \gamma > \beta.$$

Entonces existe un número c tal que $a < c < b$ y tal que

$$f(c) = \gamma.$$

El teorema es intuitivamente obvio, pues una función continua no tiene saltos, como se ilustra en la figura de la página siguiente. La demostración pertenece al conjunto de ideas del apéndice sobre épsilon y delta y puede omitirse sin peligro. Cabe mencionar que puede haber varios puntos c en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$. En la figura hay tres de dichos puntos, denominados c_1, c_2 y c_3.



Como se ha comentado, el punto donde f tiene un máximo puede ser uno de los puntos extremos del intervalo. Sin embargo, cuando dicho punto no es un punto extremo y la función es diferenciable, la situación es análoga a la de las figuras 4 o 9, donde vemos que la tangente a la curva en ese punto es una recta horizontal; en otras palabras, la derivada de la función es 0. Podemos probar esto en forma de teorema.

Teorema 1.3. *Sea f una función que está definida y es diferenciable en el intervalo abierto $a < x < b$. Sea c un número en el intervalo en el cual la función tiene un máximo local o un mínimo local. Entonces*

$$f'(c) = 0.$$

Demostración. Esta demostración corresponde al caso de un máximo local. Si se toman valores pequeños de h (positivos o negativos), el número $c + h$ estará en el intervalo. Hallemos el límite del cociente de Newton conforme nos acercamos a c por la derecha y por la izquierda, y de esa manera se determinará el valor $f'(c)$.

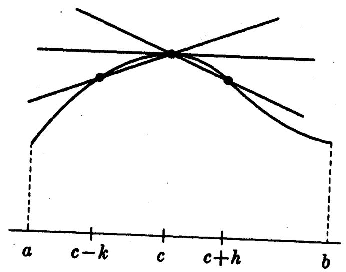


Figura 10

Tomemos primero h positivo (ver la figura 10). Debemos tener

$$f(c) \geq f(c + h)$$

sin importar cómo sea h (siempre que sea pequeño), pues $f(c)$ es el máximo local. Por lo tanto, $f(c + h) - f(c) \leq 0$. Como $h > 0$, el cociente de Newton satisface

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0.$$

En consecuencia, el límite es ≤ 0 o, en símbolos:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0.$$

Tomemos ahora h negativo, digamos $h=-k$ con $k>0$. Entonces

$$f(c-k)-f(c) \leq 0, \qquad f(c)-f(c-k) \geq 0$$

y el cociente es

$$\frac{f(c-k)-f(c)}{-k} = \frac{f(c)-f(c-k)}{k}.$$

Así, el cociente de Newton es ≥ 0. Al tomar el límite cuando h (o k) tiende a 0, vemos que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0.$$

La única manera en que estos dos límites pueden ser iguales es que ambos sean 0. Por lo tanto, $f'(c)=0$. Esto concluye la demostración.

Podemos interpretar geométricamente estos argumentos diciendo que la recta entre nuestros dos puntos se inclina hacia la izquierda cuando tomamos $h<0$ y se inclina hacia la derecha cuando tomamos $h>0$. Conforme h tiende a 0, ambas rectas deben tender a la recta tangente a la curva. La única manera en que esto es posible es que la recta tangente en el punto cuya abscisa es c, sea horizontal. Esto significa que su pendiente es 0, i.e. $f'(c)=0$.

En la práctica, una función usualmente tiene sólo un número finito de puntos críticos, y es fácil hallar todos los puntos c tales que $f'(c)=0$. Se puede entonces determinar por inspección cuáles de éstos son máximos, cuáles son mínimos y cuáles no son ni lo uno ni lo otro.

Ejemplo 4. Hallar los puntos críticos de la función $f(x)=x^3-1$.

Tenemos $f'(x)=3x^2$. Por lo tanto, hay un solo punto crítico, a saber, $x=0$, pues $3x^2=0$ sólo cuando $x=0$.

Ejemplo 5. Hallar los puntos críticos de la función

$$y=x^3-2x+1.$$

La derivada es $3x^2-2$. Es igual a 0 precisamente cuando

$$x^2=\tfrac{2}{3},$$

lo cual significa que $x=\sqrt{2/3}$ o $-\sqrt{2/3}$. Éstos son los puntos críticos.

En las siguientes secciones hallaremos varias maneras de ver si el punto crítico es un máximo o un mínimo local. En casos sencillos, con sólo esbozar la curva se puede determinar esto mediante inspección.

V, §1. EJERCICIOS

Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones.

1. x^2-2x+5
2. $2x^2-3x-1$
3. $3x^2-x+1$
4. $-x^2+2x+2$
5. $-2x^2+3x-1$
6. x^3+2
7. x^3-3x
8. $\operatorname{sen} x+\cos x$
9. $\cos x$
10. $\operatorname{sen} x$

V, §2. FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Sea f una función definida en algún intervalo (que puede ser abierto o cerrado).

Definición. Diremos que f es **creciente** sobre este intervalo si

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

cada vez que x_1 y x_2 sean dos puntos del intervalo tales que

$$x_1 \leq x_2.$$

Así, si un número está a la derecha de otro, el valor de la función en el número mayor debe ser mayor o igual que el valor de la función en el número menor.

En la figura siguiente hemos trazado la gráfica de una función creciente.

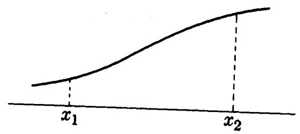


Figura 11

Decimos que una función definida en algún intervalo es **decreciente** en ese intervalo si

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

cada vez que x_1 y x_2 sean dos puntos del intervalo tales que $x_1 \leq x_2$.

Observamos que una función constante (cuya gráfica es horizontal) es creciente y decreciente.

Si queremos omitir el signo de igualdad en nuestras definiciones, usaremos la palabra **estrictamente** para calificar a creciente o decreciente. Así, una función f es **estrictamente creciente** si

$$x_1 < x_2 \quad \text{implica} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

y f es **estrictamente decreciente** si

$$x_1 < x_2 \quad \text{implica} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Supongamos que una función tiene una derivada positiva en todo un intervalo, como se muestra, por ejemplo, en la figura 11. Entonces se puede interpretar esto como que la razón de cambio de la función siempre es positiva y, por lo tanto, que la función siempre es creciente. Enunciamos esto como un teorema.

Teorema 2.1. *Sea f una función que es continua en algún intervalo, y diferenciable en el intervalo (excluyendo los puntos extremos).*

Si $f'(x) > 0$ en el intervalo (excluyendo los puntos extremos), entonces f es estrictamente creciente.

Si $f'(x) < 0$ en el intervalo (excluyendo los puntos extremos), entonces f es estrictamente decreciente.

Si $f'(x) = 0$ en el intervalo (excluyendo los puntos extremos), entonces f es constante.

En esta última afirmación, la hipótesis de que $f'(x) = 0$ en el intervalo significa que la razón de cambio es 0, así que es plausible que la función sea constante. En la sección §3 puede verse cómo se ubican estas afirmaciones en un contexto más formal.

Aplicación. Gráficas de parábolas

Ejemplo. Graficar la curva

$$y = f(x) = x^2 - 3x + 5,$$

la cual, como ya se sabe desde el capítulo II, es una parábola. Tratamos aquí la gráfica por el método que funciona en los casos más generales. Primero tenemos

$$f'(x) = 2x - 3,$$

y

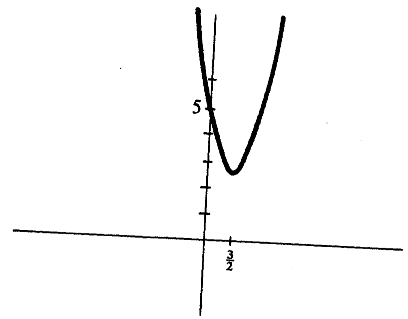
$f'(x) = 0$	si, y sólo si,	$x = 3/2$,	de modo que $x = 3/2$ es el único punto crítico.
$f'(x) > 0$	si, y sólo si,	$2x - 3 > 0$	
	si, y sólo si,	$x > 3/2$.	
$f'(x) < 0$	si, y sólo si,	$x < 3/2$.	

Así, la función es estrictamente creciente para $x > 3/2$ y estrictamente decreciente para $x < 3/2$. De este modo, al usar la derivada podemos hallar el pico de la parábola.

Los puntos donde $f(x) = 0$, esto es, donde la gráfica cruza al eje x, están dados por la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{2}.$$

No existen tales puntos, por lo que la gráfica se ve como en la página siguiente.



Observen que, aunque no conociéramos la apariencia general de una parábola, podríamos deducirla ahora y sabríamos que $x = 3/2$ es un punto mínimo de la gráfica. Esto es porque $f(x)$ es estrictamente decreciente para $x < 3/2$ y estrictamente creciente para $x > 3/2$. Así $x = 3/2$ debe ser un mínimo.

Ejemplo. Esbozar la gráfica de

$$y = f(x) = x^2 - 5x + 9/4.$$

Ahora tenemos

$$f'(x) = 2x - 5,$$

En consecuencia, hay exactamente un punto crítico, a saber:

$f'(x) = 0$	si, y sólo si,	$x = 5/2$.
$f'(x) > 0$	si, y sólo si,	$2x - 5 > 0$
	si, y sólo si,	$x > 5/2$.
$f'(x) < 0$	si, y sólo si,	$2x - 5 < 0$
	si, y sólo si,	$x < 5/2$.

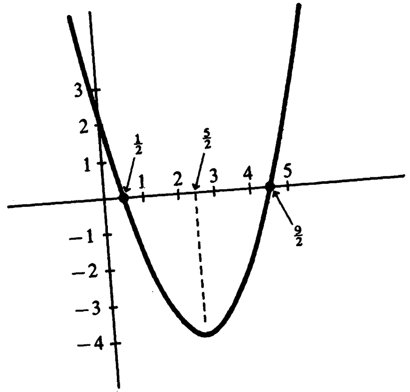
De modo que f es estrictamente creciente para $x > 5/2$ y estrictamente decreciente para $x < 5/2$. Por lo tanto, f tiene un mínimo en $x = 5/2$.

Los cruces de la gráfica de f con el eje x son

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 9}}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}.$$

Definición. Los cruces de la gráfica de f con el eje x también se llaman **raíces** de f. En el caso de un polinomio cuadrático, las raíces se calculan mediante la fórmula cuadrática.

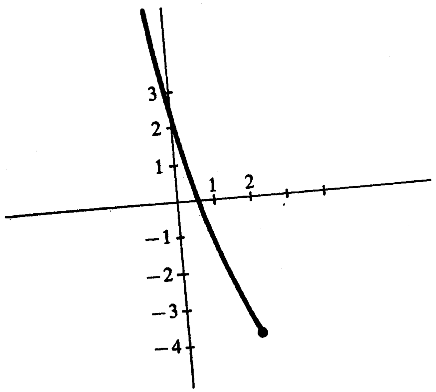
Por lo tanto, la gráfica de f se ve como en la página siguiente.



En los ejemplos anteriores la función estaba definida para todos los números. En el ejemplo siguiente la función está definida sólo en un intervalo.

Ejemplo. Sea $f(x) = x^2 - 5x + 9/4$. Hallar el mínimo y el máximo de f para $x \leq 2$.

Por el ejemplo anterior sabemos que f es estrictamente decreciente para $x \leq 2$, por lo cual el mínimo está en el punto extremo del intervalo, que es $x = 2$, como se muestra en la figura. Noten que en este punto extremo, $f'(2) \neq 0$. Así, el criterio de los puntos críticos es válido sólo en intervalos abiertos.



La expresión "si y sólo si" se presentará con frecuencia, por lo que usaremos un símbolo para representarla; escribiremos

$\iff$ como abreviación de "si, y sólo si,"

Así pues, podemos escribir la afirmación:

$$x^2 = 3 \iff x = \sqrt{3} \quad \text{o} \quad x = -\sqrt{3}.$$

De manera análoga,

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ejemplo. Demostrar que entre todos los rectángulos de área dada, el que tiene menor perímetro es un cuadrado.

Sea a el área dada y sea x la longitud de un lado del rectángulo posible con área a. Expresaremos el perímetro como una función $f(x)$. Después diferenciamos con respecto a x, teniendo en mente que a es constante, y esto dará un valor para x que muestre que el rectángulo es un cuadrado. Para efectuar esto, tomamos $0 < x$ porque el lado de un rectángulo real no puede ser 0 o tener longitud negativa. Si y es la longitud del otro lado, entonces $xy = a$, de modo que $y = a/x$ es la longitud del otro lado. Por lo tanto, el perímetro es

$$f(x) = 2\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

Tenemos

$$f'(x) = 2\left(1 - \frac{a}{x^2}\right),$$

y:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\iff \quad \frac{x^2 - a}{x^2} = 0 \\ &\iff \quad x^2 - a = 0 \\ &\iff \quad x^2 = a \\ &\iff \quad x = \sqrt{a}, \end{aligned}$$

porque consideramos sólo a $x > 0$. Así, el único punto crítico de f para $x > 0$ es cuando $x = \sqrt{a}$. Más aún, $x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$. Por lo tanto, la fracción $(x^2 - a)/x^2$ es positiva si, y sólo si, su numerador $x^2 - a$ es positivo. Así:

$$f'(x) > 0 \iff x^2 - a > 0 \iff x^2 > a \iff x > \sqrt{a},$$
$$f'(x) < 0 \iff x^2 - a < 0 \iff x^2 < a \iff x < \sqrt{a}.$$

Por lo tanto:

f es estrictamente creciente $\iff x > \sqrt{a}$,

f es estrictamente decreciente $\iff x < \sqrt{a}$.

De modo que, finalmente, $x = \sqrt{a}$ es un mínimo para f. Cuando $x = \sqrt{a}$ tenemos también que $y = \sqrt{a}$ porque

$$y = a/x = a/\sqrt{a}.$$

Esto prueba que el rectángulo es un cuadrado.

Ejemplo. Mostrar que entre todas las cercas rectangulares de longitud dada, la que abarca la mayor área debe ser una cuadrada.

Para esto, sea c la longitud fija y sea x uno de los lados. Si y es el otro lado, entonces

$$2x + 2y = c,$$

de modo que $y = (c - 2x)/2$. Por lo tanto, el área abarcada por la cerca es igual a

$$xy = \frac{x(c-2x)}{2} = \frac{xc - 2x^2}{2} = A(x).$$

Esta área $A(x)$ es una función de x, la cual tiene un punto crítico cuando $A'(x) = 0$. Pero

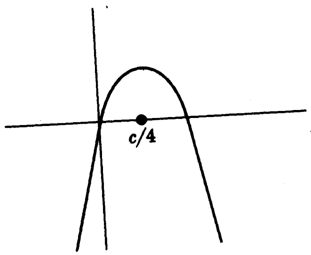
$$A'(x) = \tfrac{1}{2}(c - 4x).$$

Así, $A'(x) = 0$ si, y sólo si, $c = 4x$, esto es, $x = c/4$ es el único punto crítico.

Debemos ver ahora que es un máximo. La función

$$A(x) = \frac{xc - 2x^2}{2}$$

tiene una gráfica que es una parábola. Cuando x se vuelve positivo o negativo grande, entonces $A(x)$ se vuelve negativo grande. Por lo tanto, la parábola se ve como en la figura siguiente.



Sólo tiene un máximo y ese máximo debe estar entonces en $x = c/4$. Hallamos entonces que también $y = c/4$. En otras palabras, la cerca debe formar un cuadrado.

Desigualdades

El criterio de la derivada para funciones crecientes y decrecientes también se puede usar para probar desigualdades.

Ejemplo. Probar que $\operatorname{sen} x < x$ para todo $x > 0$.

Sea $f(x) = x - \operatorname{sen} x$. Entonces

$$f'(x) = 1 - \cos x.$$

En primer lugar tomamos $0 < x < \pi/2$. Entonces $f'(x) > 0$ pues $\cos x < 1$ en este intervalo. Por lo tanto, $f(x)$ es estrictamente decreciente para $0 \le x \le \pi/2$. Pero

$$f(0) = 1 - \cos 0 = 0.$$

Por eso debemos tener $f(x) > 0$ para $0 < x \le \pi/2$.

Si $x \ge \pi/2$, entonces $x > 1$ (pues π es aproximadamente 3.14), y así $\operatorname{sen} x < x$ cuando $x > \pi/2$. En esta forma, la desigualdad deseada se cumple, por razones más sencillas, para $x > \pi/2$.

El ejemplo anterior ilustra una técnica que se usa para probar ciertas desigualdades entre funciones. En general:

> *Suponiendo que se tienen dos funciones f y g sobre cierto intervalo $[a, b]$ y que f y g son diferenciables, considerar que*
>
> $$f(a) \le g(a),$$
>
> y que $f'(x) \le g'(x)$ en todo el intervalo. Entonces $f(x) \le g(x)$ en el intervalo.

Demostración. Sea

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

Entonces, por hipótesis,

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \ge 0,$$

de modo que h es creciente en todo el intervalo. Como

$$h(a) = g(a) - f(a) \ge 0,$$

se sigue que $h(x) \ge 0$ en todo el intervalo, de donde

$$g(x) \ge f(x).$$

El principio recién enunciado se puede visualizar en la figura siguiente, trazada para el caso en que $f(a) = g(a)$.

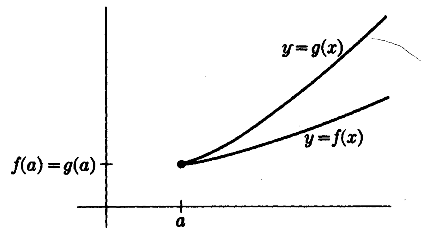


Figura 12

En otras palabras, si f es más grande o igual que g en $x = a$, y si f crece más rápido que g, entonces $f(x)$ es más grande que $g(x)$ para todo $x > a$.

Ejemplo. Mostrar que para cualquier entero $n \geq 1$ y cualquier número $x \geq 1$, tenemos la desigualdad

$$x^n - 1 \geq n(x-1).$$

Sea $f(x) = x^n - 1 - n(x-1)$. Entonces

$$f'(x) = nx^{n-1} - n.$$

Como $x \geq 1$, se sigue que $x^{n-1} \geq 1$ y, así, $f'(x) \geq 0$. Por lo tanto, f es creciente para $x \geq 1$. Pero $f(1) = 0$. Por lo que $f(x) \geq 0$ para $x \geq 1$. Esto es equivalente a la desigualdad deseada.

Por otro lado, el siguiente teorema indica lo que sucede si dos funciones tienen la misma derivada en un intervalo.

Constantes

Teorema 2.2. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones diferenciables en algún intervalo y supongamos que*

$$f'(x) = g'(x)$$

para todo x en el intervalo. Entonces existe una constante C tal que

$$f(x) = g(x) + C$$

para todo x en el intervalo.

Demostración. Sea $h(x) = f(x) - g(x)$ la diferencia de nuestras dos funciones. Entonces

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Por lo tanto, $h(x)$ es constante, por el teorema 2.1, esto es, $h(x) = C$ para algún número C y todo x. Esto prueba el teorema.

Observación. El teorema es el *recíproco* del enunciado:
Si una función es constante, entonces su derivada es igual a 0.
Usaremos intensivamente el teorema 2.2 cuando lleguemos al capítulo de integración.

Para las aplicaciones del teorema, vean el principio del capítulo sobre logaritmos y también el principio del capítulo X, §1. Aquí daremos aplicaciones más sencillas.

Ejemplo. Sea f una función de x tal que $f'(x) = 5$. Suponer que $f(0) = 2$. Determinar completamente $f(x)$.

De nuestra experiencia anterior sabemos que la función

$$g(x) = 5x$$

tiene la derivada

$$g'(x) = 5.$$

Por lo tanto, existe una constante C tal que

$$f(x) = 5x + C.$$

También se establece que $f(0) = 2$. Por lo tanto,

$$2 = f(0) = 0 + C.$$

Entonces $C = 2$. Y, finalmente,

$$f(x) = 5x + 2.$$

Ejemplo. Una partícula se mueve sobre el eje x hacia la izquierda a razón de 5 cm/seg. Al tiempo $t = 5$, la partícula está en el punto 8 cm a la derecha del origen. Determinar completamente la abscisa $x = f(t)$ como función del tiempo.

Nos dan

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) = -5.$$

Sea $g(t) = -5t$. Entonces también $g'(t) = -5$, y por ende existe una constante C tal que

$$f(t) = -5t + C.$$

Pero también se sabe que $f(5) = 8$. Por lo tanto,

$$8 = -5 \cdot 5 + C = -25 + C.$$

En consecuencia, $C = 8 + 25 = 33$ y, por último,

$$f(t) = -5t + 33.$$

V, §2. EJERCICIOS

Determinar los intervalos sobre los cuales las funciones siguientes son crecientes y decrecientes.

1. $f(x) = x^3 + 1$
2. $f(x) = x^2 - x + 5$
3. $f(x) = x^3 + x - 2$
4. $f(x) = -x^3 + 2x + 1$
5. $f(x) = 2x^3 + 5$
6. $f(x) = 5x^2 + 1$
7. $f(x) = -4x^3 - 2x$
8. $f(x) = 5x^3 + 6x$

Esbozar las gráficas de las parábolas siguientes. Determinar en cada caso el punto crítico.

9. $f(x) = x^2 - x - 1$
10. $f(x) = x^2 + x + 1$
11. $f(x) = -x^2 + x - 1$
12. $f(x) = -x^2 - x - 1$
13. $f(x) = x^2 + 3x + 1$
14. $f(x) = x^2 - 5x + 1$
15. $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$
16. $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$

Para cada una de las funciones siguientes, hallar el máximo y el mínimo para todo x en el intervalo dado.

17. $x^2 - 2x - 8$, $[0,4]$
18. $x^2 - 2x + 1$, $[-1,4]$
19. $4 - 4x - x^2$, $[-1,4]$
20. $x - x^2$, $[-1,2]$
21. $3x - x^3$, $[-2,\sqrt{3}]$
22. $(x-4)^5$, $[3,6]$
23. Los pasos siguientes muestran cómo se puede probar desigualdades para el seno y el coseno. Comenzamos con la desigualdad probada como ejemplo en el texto, a saber

(a) $\operatorname{sen} x \leq x$ para todo $x \geq 0$.
Sea $f_1(x) = x - \operatorname{sen} x$. Entonces esta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$f_1(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \geq 0. \tag{1}$$

Probar ahora que:

(b) $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x$ para $x \geq 0$.
[*Idea:* Sea $f_2(x) = \cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$ y usar (1), para probar

$$f_2(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x \geq 0.] \tag{2}$$

(c) $x - \dfrac{x^3}{3\cdot 2} \leq \operatorname{sen} x$. $\left[\textit{Idea: } \text{Sea } f_3(x) = \operatorname{sen} x - \left(x - \dfrac{x^3}{3\cdot 2}\right).\right]$

(d) $\cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2}$ (e) $\operatorname{sen} x \leq x - \dfrac{x^3}{3\cdot 2} + \dfrac{x^5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$

24. Probar que $\tan x > x$ si $0 < x < \pi/2$.
25. (a) Probar que

$$t + \frac{1}{t} \geq 2 \quad \text{para} \quad t > 0.$$

[*Idea:* Sea $f(t) = t + 1/t$. Mostrar que f es estrictamente decreciente para $0 < t \leq 1$ y f es estrictamente creciente para $1 \leq t$. ¿Cuál es $f(1)$?]

(b) Sean a y b dos números positivos. Sea

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Mostrar que el valor mínimo de f es $2\sqrt{ab}$.

26. Se va a fabricar una caja sin tapa con una base cuadrada y una superficie constante C. Determinar los lados de la caja si el volumen ha de ser máximo.
27. Un recipiente en forma de cilindro sin tapa superior ha de tener un área de superficie fija C. Hallar el radio de su base y su altura si ha de tener volumen máximo.
28. Resolver los dos problemas anteriores cuando la caja y el recipiente están cerrados por arriba. (El área de un círculo de radio x es πx^2 y su longitud es de $2\pi x$. El volumen de un cilindro de altura y y cuya base tiene radio x es $\pi x^2 y$.)
29. Suponer que existe una función $f(x)$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo x, y $f'(x) = f(x)$. Sea $g(x)$ cualquier función tal que $g'(x) = g(x)$. Mostrar que existe una constante C tal que $g(x) = Cf(x)$. [*Idea:* Diferenciar el cociente g/f.]

30. Suponer que f es una función diferenciable de t tal que (a) $f'(t) = -3$, (b) $f'(t) = 2$. ¿Qué pueden decir acerca de $f(t)$?
31. Suponer que $f'(t) = -3$ y $f(0) = 1$. Determinar completamente $f(t)$.
32. Suponer que $f'(t) = 2$ y $f(0) = -5$. Determinar completamente $f(t)$.
33. Una partícula se mueve sobre el eje x hacia la derecha a velocidad constante de 7 m/seg. Si al instante $t = 9$ la partícula está a una distancia de 2 m a la derecha del origen, hallar su abscisa como función de t.
34. Está goteando agua de un tanque vertical de manera que la altura del agua disminuye a razón de 0.6 m al día. Cuando el tanque está lleno, la altura del agua es de 9 m. Hallar de manera explícita la altura del agua como función del tiempo.

V, §3. EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Los teoremas de esta sección se pueden deducir intuitivamente, por lo cual, si lo desean, pueden omitir las demostraciones del teorema de Rolle y del teorema 3.2, pero **después de haber comprendido su enunciado.**

Primero supongamos que tenemos una función sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ cuya gráfica se ve así.

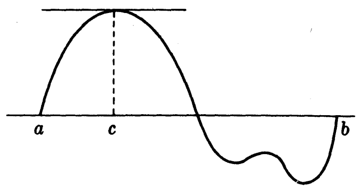


Figura 13

Entonces tenemos el siguiente teorema acerca de esta función.

Teorema 3.1. Teorema de Rolle. *Sean a y b dos números, $a < b$. Sea f una función continua en el intervalo cerrado*

$$a \leq x \leq b$$

y diferenciable en el intervalo abierto $a < x < b$. Supongamos que

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Entonces existe un punto c tal que

$$a < c < b$$

y tal que $f'(c) = 0$.

Demostración. Si la función es constante en el intervalo, entonces su derivada es 0 y cualquier punto en el intervalo abierto $a < x < b$ servirá.

Si la función no es constante, entonces existe algún punto en el intervalo donde la función no es 0, y este punto no puede ser uno de los puntos extremos a o b. Supongamos que algún valor de nuestra función es positivo. Por el teorema 1.1, la función tiene un máximo en un punto c. Entonces $f(c)$ debe ser mayor que 0, y c no puede ser uno de los puntos extremos porque $f(a) = f(b) = 0$. En consecuencia,

$$a < c < b.$$

Por el teorema 1.3, debemos tener $f'(c) = 0$. Esto prueba nuestro teorema en caso de que la función sea positiva en algún lugar del intervalo.

Si la función es negativa para algún número en el intervalo, entonces usamos el teorema 1.1 para obtener un mínimo y argumentamos de manera similar, usando el teorema 1.3 (aplicado a un mínimo). (Escribir, como ejercicio, toda la argumentación.)

Sea $f(x)$ una función diferenciable para $a < x < b$ y continua en el intervalo cerrado

$$a \leq x \leq b.$$

Seguimos suponiendo que $a < b$. Esta vez no consideraremos que $f(a) = f(b) = 0$, como en el teorema 3.1. Probaremos que existe un punto c entre a y b tal que la pendiente de la recta tangente en $(c, f(c))$ es la misma que la pendiente de la recta entre los puntos extremos de nuestra gráfica. En otras palabras, la recta tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos extremos de nuestra gráfica.

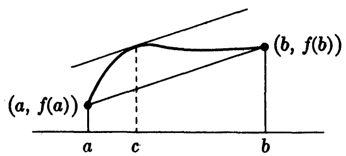


Figura 14

La pendiente de la recta entre los dos puntos extremos es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

pues las coordenadas de los puntos extremos son $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ respectivamente. Así, tenemos que hallar un punto c tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 3.2. Teorema del valor medio. *Sea $a < b$ como antes. Sea f una función continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y diferenciable en el intervalo $a < x < b$. Entonces existe un punto c tal que $a < c < b$ y*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración. La ecuación de la recta entre los dos puntos extremos es

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

En efecto, la pendiente

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

es el coeficiente de x. Cuando $x = a$, $y = f(a)$. Por lo tanto, hemos escrito la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por un punto dado. Cuando $x = b$ notamos que $y = f(b)$.

Consideremos ahora geométricamente la diferencia entre $f(x)$ y la recta. Dicha diferencia se vuelve 0 en los puntos extremos. Esta idea geométrica nos permite aplicar el teorema de Rolle. En otras palabras, consideramos la función

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Entonces

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

y también

$$g(b) = f(b) - f(b) = 0.$$

Podemos entonces aplicar el teorema 3.1 a la función $g(x)$. Sabemos que existe un punto c entre a y b, y que no es igual ni a a ni a b, tal que

$$g'(c) = 0$$

Pero

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

En consecuencia

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Esto nos da el valor deseado para $f'(c)$, y concluye la demostración.

El objetivo del teorema del valor medio no es tanto hallar explícitamente un valor c tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

sino usarlo para consideraciones teóricas.

Corolario 3.3. *Sea f una función diferenciable en algún intervalo y tal que $f'(x) = 0$ para todo x en el intervalo. Entonces f es constante.*

Demostración. Sean a y b números distintos en el intervalo. Por el teorema del valor medio, existe c entre a y b tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero, por hipótesis, $f'(c) = 0$. Por ello, $f(b) - f(a) = 0$ y así $f(b) = f(a)$. Por lo tanto, f tiene el mismo valor en todos los puntos del intervalo, de modo que f es constante, como se debía demostrar.

Del mismo modo daremos ahora el resto de la demostración del teorema 2.1 de la sección anterior:

Corolario 3.4. *Si $f'(x) > 0$ para x en un intervalo, excluyendo los puntos extremos, y si f es continua en el intervalo, entonces f es estrictamente creciente.*

Demostración. Sean x_1 y x_2 dos puntos del intervalo, y supongamos que $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio, existe un punto c tal que $x_1 < c < x_2$ y

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

La diferencia $x_2 - x_1$ es positiva, y tenemos

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c).$$

Si la derivada $f'(x)$ es > 0 para todo x en el intervalo, excluyendo los puntos extremos, entonces $f'(c) > 0$ (porque c está en el intervalo). Por lo tanto, el producto $(x_2 - x_1)f'(c)$ es positivo, y $f(x_2) - f(x_1) > 0$, de modo que

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Esto prueba que la función es creciente.

Dejamos como ejercicio la demostración de la afirmación que se refiere a las funciones decrecientes.

Cuando estudiemos la fórmula de Taylor usaremos los teoremas del valor medio para estimar varias funciones. Aunque no se conozca el valor exacto de $f'(c)$, se puede tener un estimado para la derivada. Por ejemplo, las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se pueden estimar en valor absoluto por 1. En muchas aplicaciones, esto es lo que cuenta.

CAPÍTULO VI

Trazado de curvas

Hemos desarrollado técnicas suficientes para poder trazar ahora curvas y gráficas de funciones con una eficiencia mucho mayor. Investigaremos de manera sistemática el comportamiento de una curva, donde el teorema del valor medio desempeña un papel fundamental.

Estudiaremos de manera especial los siguientes aspectos de la curva:

1. Intersecciones con los ejes coordenados.
2. Puntos críticos.
3. Regiones de crecimiento.
4. Regiones de decrecimiento.
5. Máximos y mínimos (incluyendo los locales).
6. Comportamiento cuando x se hace positivo grande y negativo grande.
7. Valores de x cerca de donde y se hace positivo grande o grande negativo.

Estos siete puntos de información serán suficientes para darnos una idea bastante precisa de cómo luce una gráfica. Dedicaremos una sección a considerar otro aspecto, a saber:

8. Regiones en donde la curva se dobla hacia arriba o hacia abajo.

VI, §1. COMPORTAMIENTO CUANDO x SE HACE MUY GRANDE

Supongamos que se tiene una función f definida para todos los números suficientemente grandes. En ese caso podemos obtener información significativa referente a nuestra función si investigamos cómo se comporta cuando x se hace grande.

Por ejemplo, $\operatorname{sen} x$ oscila entre -1 y $+1$ sin importar cuán grande sea x.

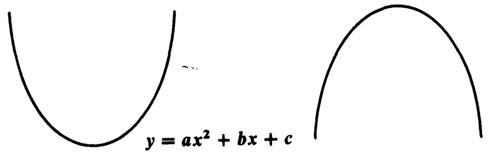
Sin embargo, los polinomios no oscilan. Cuando $f(x) = x^2$, si x se hace positivo grande, también lo hará x^2. Lo mismo sucede con x^3, o x^4 (etc.). Consideraremos esto sistemáticamente.

Parábolas

Ejemplo 1. Considerar una parábola

$$y = ax^2 + bx + c,$$

con $a \neq 0$. Hay dos casos esenciales, cuando $a > 0$ y cuando $a < 0$, y las parábolas respectivas se ven como en la figura.



Caso $a > 0$ Caso $a < 0$

Veamos los ejemplos numéricos.

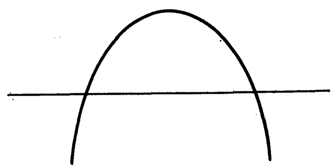
Ejemplo 2. Trazar la gráfica de la curva

$$y = f(x) = -3x^2 + 5x - 1.$$

Reconocemos esto como una parábola. Factorizando x^2 se ve que

$$f(x) = x^2\left(-3 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

Cuando x es positivo o negativo grande, entonces x^2 es positivo grande y el factor de la derecha está cerca de -3. Por lo tanto, $f(x)$ es negativo grande, lo cual significa que la parábola tiene la forma mostrada en la figura.



Tenemos que $f'(x) = -6x + 5$. Así, $f'(x) = 0$ si, y sólo si, $-6x + 5 = 0$ o, en otras palabras,

$$x = \tfrac{5}{6}.$$

Hay exactamente un punto crítico. Tenemos

$$f(\tfrac{5}{6}) = -3(\tfrac{5}{6})^2 + \tfrac{25}{6} - 1 > 0.$$

El punto crítico es un máximo, pues ya hemos visto que la parábola se dobla hacia abajo.

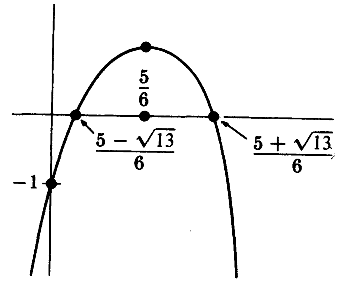
La curva cruza el eje x exactamente cuando

$$-3x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Por la fórmula cuadrática (ver el capítulo II, §8), esto sucede cuando

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{-6} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Por consiguiente, la gráfica de la parábola se ve como en la figura.



Se aplican los mismos principios para trazar cualquier parábola.

(i) Al ver lo que sucede cuando x se vuelve positivo grande o negativo grande sabremos si la parábola se dobla hacia arriba o hacia abajo.

(ii) Una función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad \text{con} \qquad a \neq 0$$

tiene un solo punto crítico, cuando

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$

es decir, cuando

$$x = -b/2a.$$

Sabiendo si la parábola se dobla hacia arriba o hacia abajo se sabe si el punto crítico es un máximo o un mínimo, y el valor $x = -b/2a$ indica exactamente dónde está el punto crítico.

(iii) Los puntos donde la parábola cruza el eje x se determinan por la fórmula cuadrática.

Ejemplo 3. **Cúbicas.** Considerar un polinomio

$$f(x) = x^3 + 2x - 1.$$

Podemos escribirlo en la forma

$$x^3\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right).$$

Cuando x se vuelve muy grande, la expresión

$$1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$$

tiende a 1. En particular, dado un número pequeño $\delta>0$, tenemos, para todo x suficientemente grande, la desigualdad

$$1-\delta<1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}<1+\delta.$$

Por lo tanto, $f(x)$ satisface la desigualdad

$$x^3(1-\delta)<f(x)<x^3(1+\delta).$$

Esto nos dice que $f(x)$ se comporta de manera muy parecida a como lo hace x^3 cuando x es muy grande. En particular:

Si x se vuelve positivo grande, entonces $f(x)$ se vuelve positivo grande.

Si x se vuelve negativo grande, entonces $f(x)$ se vuelve negativo grande.

Se puede aplicar un argumento similar a cualquier polinomio.

Es conveniente usar una abreviación para la expresión "se vuelve positivo grande." En lugar de decir que x se vuelve positivo grande, escribimos

$$x\to\infty$$

y decimos además que x **tiende, o va a infinito. Advertencia: no existe un número llamado infinito.** Los símbolos anteriores simplemente abrevian el concepto de volverse positivo grande. Tenemos una notación similar para cuando x se vuelve negativo grande: escribimos

$$x\to-\infty$$

y decimos que x **tiende a menos infinito.** Así, en el caso de que

$$f(x)=x^3+2x-1,$$

podemos afirmar:

$$\text{Si}\quad x\to\infty,\quad\text{entonces}\quad f(x)\to\infty.$$

$$\text{Si}\quad x\to-\infty,\quad\text{entonces}\quad f(x)\to-\infty.$$

Ejemplo 4. Considerar un cociente de polinomios como

$$Q(x)=\frac{x^3+2x-1}{2x^3-x+1}.$$

Factorizamos la potencia mayor de x del numerador y del denominador y, por lo tanto, escribimos $Q(x)$ en la forma

$$Q(x)=\frac{x^3(1+2/x^2-1/x^3)}{x^3(2-1/x^2+1/x^3)}=\frac{1+2/x^2-1/x^3}{2-1/x^2+1/x^3}.$$

Cuando x se vuelve muy grande, el numerador tiende a 1 y el denominador tiende a 2. Así, nuestra fracción tiende a $\frac{1}{2}$. Podemos expresar esto en la forma

$$\lim_{x\to\infty}Q(x)=\frac{1}{2}.$$

O podemos escribir:

$$\text{Si}\quad x\to\pm\infty,\quad\text{entonces}\quad Q(x)\to\tfrac{1}{2}.$$

Ejemplo 5. Considerar el cociente

$$Q(x)=\frac{x^2-1}{x^3-2x+1}.$$

¿Tiende éste a algún límite cuando x se vuelve muy grande?

Escribimos

$$Q(x)=\frac{x^2(1-1/x^2)}{x^3(1-2/x^2+1/x^3)}$$

$$=\frac{1}{x}\frac{1-1/x^2}{1-2/x^2+1/x^3}.$$

Conforme x se vuelve grande, el término $1/x$ tiende a 0, y el otro factor tiende a 1. Por lo tanto, $Q(x)$ tiende a 0 cuando x se vuelve negativo o positivo grande.

También podemos escribir

$$\text{Si}\quad x\to\pm\infty\quad\text{entonces}\quad Q(x)\to0,$$

o

$$\lim_{x\to\pm\infty}Q(x)=0.$$

Ejemplo 6. Considerar el cociente

$$Q(x)=\frac{x^3-1}{x^2+5}$$

y determinar lo que sucede cuando x se vuelve grande.

Escribimos

$$Q(x)=\frac{x^3(1-1/x^3)}{x^2(1+5/x^2)}$$

$$=x\frac{1-1/x^3}{1+5/x^2}.$$

Conforme x se vuelve grande, positivo o negativo, el cociente

$$\frac{1-1/x^3}{1+5/x^2}$$

tiende a 1. Por lo tanto, $Q(x)$ difiere de x en un factor cercano a 1. Así pues, $Q(x)$ se vuelve positivo grande cuando x es positivo grande, y se vuelve negativo grande cuando x es negativo grande. Podemos expresar esto diciendo:

$$\text{Si} \quad x \to \infty, \quad \text{entonces} \quad Q(x) \to \infty.$$
$$\text{Si} \quad x \to -\infty, \quad \text{entonces} \quad Q(x) \to -\infty.$$

También podemos escribir estas afirmaciones en forma de límite:

$$\lim_{x\to\infty} Q(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} Q(x) = -\infty.$$

Sin embargo, aunque se use esta notación y se pueda decir que el límite de $Q(x)$ es $-\infty$ cuando x se vuelve negativo grande, insistimos en que $-\infty$ no es un número, por lo que este límite no es igual que cuando el límite es un número. Es correcto decir que no existe número que sea el límite de $Q(x)$ cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

Estos cuatro últimos ejemplos son típicos de lo que sucede cuando tratamos con cocientes de polinomios.

Más adelante, cuando tratemos con exponentes y logaritmos, se encontrará el problema de comparar el cociente de dos expresiones que se vuelven grandes. Habrá una base común para algunos argumentos, resumida en la tabla siguiente:

Positivo grande por positivo grande es positivo grande.
Positivo grande por negativo grande es negativo grande.
Negativo grande por negativo grande es positivo grande.
Positivo pequeño por positivo grande: no se puede saber sin tener más información.

VI, §1. EJERCICIOS

Hallar los límites de los siguientes cocientes $Q(x)$ cuando x se vuelve positivo o negativo, grande. En otras palabras, hallar

$$\lim_{x\to\infty} Q(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} Q(x).$$

1. $\dfrac{2x^3 - x}{x^4 - 1}$
2. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
3. $\dfrac{\cos x}{x}$
4. $\dfrac{x^2 + 1}{\pi x^2 - 1}$
5. $\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x^3}$
6. $\dfrac{5x^4 - x^3 + 3x + 2}{x^3 - 1}$
7. $\dfrac{-x^2 + 1}{x + 5}$
8. $\dfrac{2x^4 - 1}{-4x^4 + x^2}$
9. $\dfrac{2x^4 - 1}{-4x^3 + x^2}$
10. $\dfrac{2x^4 - 1}{-4x^5 + x^2}$

Describir el comportamiento de los polinomios siguientes cuando x se vuelve positivo grande y negativo grande.

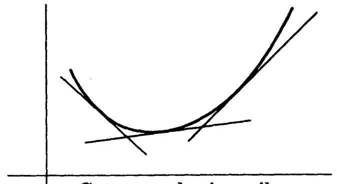
11. $x^3 - x + 1$
12. $-x^3 - x + 1$
13. $x^4 + 3x^3 + 2$
14. $-x^4 + 3x^3 + 2$
15. $2x^5 + x^2 - 100$
16. $-3x^5 + x + 1000$
17. $10x^6 - x^4$
18. $-3x^6 + x^3 + 1$
19. Una función $f(x)$ que se puede expresar como sigue:

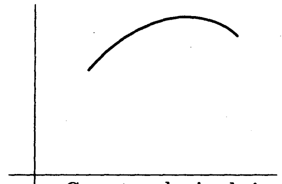
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

donde n es un entero positivo y las a_n, a_{n-1}, ..., a_0 son números, se llama polinomio. Si $a_n \neq 0$, entonces n se llama el **grado** del polinomio. Describir el comportamiento de $f(x)$ cuando x se vuelve positivo o negativo grande, n es impar o par, y $a_n > 0$ o $a_n < 0$. Habrá que considerar ocho casos y llenar la tabla siguiente.

n	a_n	$x \to \infty$	$x \to -\infty$
Impar	> 0	$f(x) \to ?$	$f(x) \to ?$
Impar	< 0	$f(x) \to ?$	$f(x) \to ?$
Par	> 0	$f(x) \to ?$	$f(x) \to ?$
Par	< 0	$f(x) \to ?$	$f(x) \to ?$

20. Usando el teorema del valor intermedio, mostrar que cualquier polinomio de grado impar tiene una raíz.


Curvatura hacia arriba

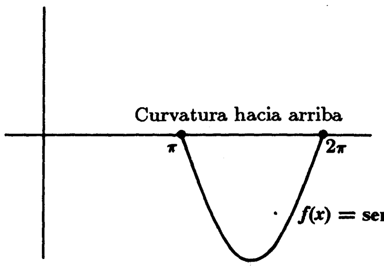

Curvatura hacia abajo

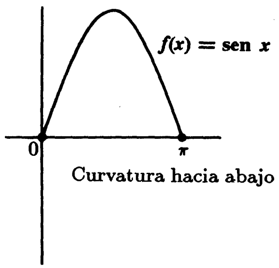
VI, §2. DOBLAMIENTOS HACIA ARRIBA Y HACIA ABAJO

Sean a y b números tales que $a < b$. Sea f una función continua definida en el intervalo $[a, b]$. Supongamos que f' y f'' existen en el intervalo $a < x < b$. Se ve la segunda derivada f'' como la razón de cambio de la pendiente de la curva $y = f(x)$ sobre el intervalo. Si la segunda derivada es positiva en el intervalo $a < x < b$, entonces la pendiente de la curva es creciente, e interpretamos esto como una referencia a que la curva se **dobla hacia arriba**. Si la segunda derivada es negativa, interpretamos esto como una referencia a que la curva se **dobla hacia abajo**. Las dos figuras siguientes ilustran esto.

Ejemplo 1. La curva $y = x^2$ se dobla hacia arriba. Podemos ver esto usando la segunda derivada. Sea $f(x) = x^2$. Entonces $f''(x) = 2$, y la segunda derivada siempre es positiva. Las consideraciones presentes justifican que hayamos dibujado la curva como lo hicimos, doblada hacia arriba.

Ejemplo 2. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Tenemos $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, y así $f''(x) > 0$ en el intervalo $\pi < x < 2\pi$. Por lo tanto, la curva se dobla hacia arriba en ese intervalo. De manera análoga, $f''(x) < 0$ en el intervalo $0 < x < \pi$, por lo que la curva se dobla hacia abajo en este intervalo, según se muestra en las figuras siguientes. Por supuesto, esto justifica los dibujos que siempre hemos hecho para la gráfica de la función seno.





Ejemplo 3. Determinar los intervalos donde la curva

$$y = -x^3 + 3x - 5$$

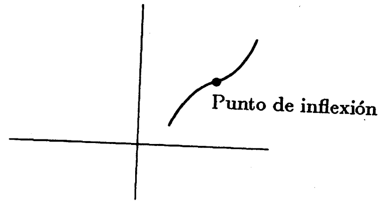
se dobla hacia arriba y se dobla hacia abajo.

Sea $f(x) = -x^3 + 3x - 5$. Entonces $f''(x) = -6x$. Así:

$$f''(x) > 0 \iff x < 0,$$
$$f''(x) < 0 \iff x > 0.$$

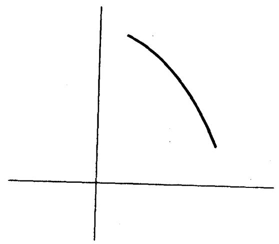
Por lo tanto, f se dobla hacia arriba si, y sólo si, $x < 0$; y f se dobla hacia abajo si, y sólo si, $x > 0$. La gráfica de esta curva se estudiará por completo en la sección siguiente, donde se grafican cúbicas sistemáticamente.

Un punto donde una curva cambia su comportamiento de doblarse hacia arriba para doblarse hacia abajo (o viceversa) se llama **punto de inflexión**. Si la curva es la gráfica de una función f cuya segunda derivada existe y es continua, entonces debemos tener $f''(x) = 0$ en ese punto. La siguiente figura ilustra esto.

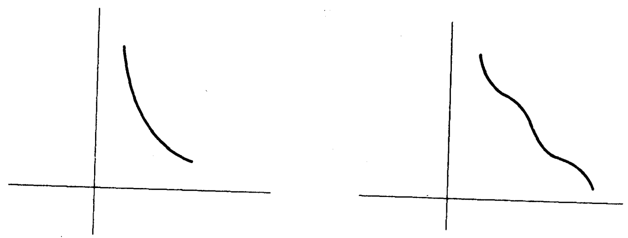


En el ejemplo 3 recién visto, el punto $(0, -5)$ es un punto de inflexión.

Al determinar las regiones donde se doblan hacia arriba o hacia abajo, y los puntos de inflexión, se tienen valiosos datos acerca de las curvas. Por ejemplo, saber que una curva en una región de decrecimiento se dobla hacia abajo indica que el decrecimiento sucede esencialmente como en esta figura:



y no como en estas otras:



La segunda derivada puede usarse además como un criterio para determinar el caso en el que un punto crítico es un máximo, o un mínimo, **local**.

Criterio de la segunda derivada. *Sea f dos veces continuamente diferenciable en un intervalo abierto y suponer que existe un punto c donde*

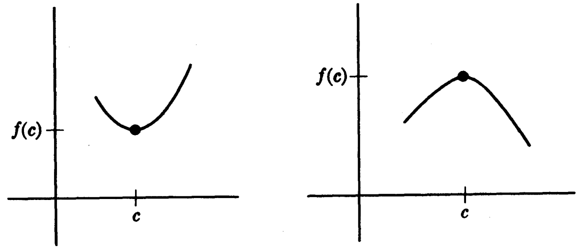
$$f'(c) = 0 \quad y \quad f''(c) > 0.$$

Entonces c es un punto mínimo local de f. Por otro lado, si

$$f''(c) < 0$$

entonces c es un punto máximo local de f.

Para ver esto, supongamos que $f''(c) > 0$. Entonces $f''(x) > 0$ para todo x cerca de c, pues se consideró que la segunda derivada es continua. Así, la curva se dobla hacia arriba; en consecuencia, la gráfica de f es como la figura 1(a) y c es un mínimo local.



(a) (b)

Figura 1

Un argumento similar demuestra que si $f''(c) < 0$, entonces c es un máximo local como en la figura 1(b).

VI, §2. EJERCICIOS

1. Determinar todos los puntos de inflexión de $\operatorname{sen} x$.
2. Determinar todos los puntos de inflexión de $\cos x$.
3. Determinar todos los puntos de inflexión de $f(x) = \tan x$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$.
4. Trazar la curva $y = \operatorname{sen}^2 x$. Determinar los puntos críticos y los puntos de inflexión. Comparar con la gráfica de $|\operatorname{sen} x|$.
5. Trazar la curva $y = \cos^2 x$. Determinar los puntos críticos y los puntos de inflexión. Comparar con la gráfica de $|\cos x|$.

Determinar los puntos de inflexión y los intervalos en donde se doblan hacia arriba, y donde lo hacen hacia abajo, las curvas siguientes.

6. $y = x + \dfrac{1}{x}$ 7. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ 8. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

9. Trazar la curva $y = f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$. Primero localizar todos los valores $f(n\pi/4)$ con $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Después determinar todos los puntos críticos. Después determinar las regiones de crecimiento y decrecimiento. Después determinar los puntos de inflexión y las regiones en donde la curva se dobla hacia arriba, y donde se dobla hacia abajo.

VI, §3. POLINOMIOS CÚBICOS

Podemos ahora trazar sistemáticamente las gráficas de polinomios cúbicos.

Ejemplo 1. Trazar la gráfica de $f(x) = x^3 - 2x + 1$.

1.

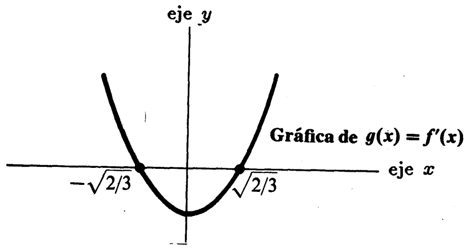
$$\text{Si } x \to \infty, \text{ entonces, por §1, } f(x) \to \infty.$$
$$\text{Si } x \to -\infty, \text{ entonces, por §1, } f(x) \to -\infty.$$

2. Tenemos $f'(x) = 3x^2 - 2$. Así

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{2/3}.$$

Los puntos críticos de f son $x = \sqrt{2/3}$ y $x = -\sqrt{2/3}$.

3. Sea $g(x) = f'(x) = 3x^2 - 2$. Entonces la gráfica de g es una parábola, y los cruces de la gráfica de g son precisamente los puntos críticos de f. (No se confundan las funciones f y $f' = g$.) La gráfica de g es una parábola doblada hacia arriba, como sigue.



Por lo tanto:

$$f'(x) > 0 \iff x > \sqrt{2/3} \text{ y } x < -\sqrt{2/3}, \quad \text{donde } g(x) > 0$$

y f es estrictamente creciente en los intervalos

$$x \geq \sqrt{2/3} \quad \text{y} \quad x \leq -\sqrt{2/3}.$$

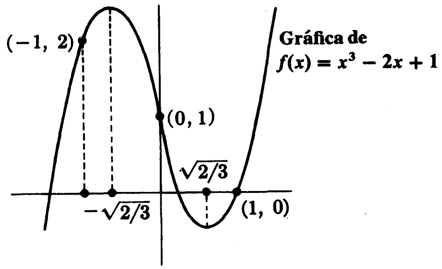
De manera análoga:

$$f'(x) < 0 \iff -\sqrt{2/3} < x < \sqrt{2/3}, \quad \text{donde } g(x) < 0,$$

y f es estrictamente decreciente en este intervalo. Por lo tanto, $-\sqrt{2/3}$ es un máximo local para f, y $\sqrt{2/3}$ es un mínimo local.

4. $f''(x) = 6x$ y $f''(x) > 0$ si, y sólo si, $x > 0$. Además, $f''(x) < 0$ si, y sólo si, $x < 0$. Por lo tanto, f se dobla hacia arriba para $x > 0$ y se dobla hacia abajo para $x < 0$. Hay un punto de inflexión en $x = 0$.

Juntando todo esto hallamos que la gráfica de f se ve como lo muestra la figura de la página siguiente.



Obsérvese cómo usamos un polinomio cuadrático, a saber, $f'(x) = 3x^2 - 2$, como paso intermedio en la argumentación.

Observación 1. En lugar de usar el polinomio cuadrático, pudimos haber procedido como sigue, después de saber que los únicos puntos críticos de f son $x = \sqrt{2/3}$ y $x = -\sqrt{2/3}$. Considerar el intervalo $x < -\sqrt{2/3}$. Entonces $f'(x) \neq 0$ para todo $x < -\sqrt{2/3}$. Por lo tanto, por el teorema del valor intermedio, $f'(x)$ es > 0 para todo $x < -\sqrt{2/3}$, o $f'(x) < 0$ para todo $x < -\sqrt{2/3}$. ¿Cuál es? Basta con tratar un valor, digamos $x = -10$, para ver que $f'(x) > 0$ para $x < -\sqrt{2/3}$, pues $f'(-10) = 3 \cdot 10^2 - 2 = 298$. Por consiguiente, debemos tener $f'(x) > 0$ para $x < -\sqrt{2/3}$.

Observación 2. Es mucho más difícil determinar las raíces para un polinomio cúbico, esto es, los cruces con el eje x, y usualmente no se hace, a menos que, por accidente, haya una manera fácil de hacerlo. En el caso anterior, cuando

$$f(x) = x^3 - 2x + 1,$$

hay uno de dichos accidentes, pues $f(1) = 0$. Por lo tanto, 1 es una raíz de f, de ahí que se factorice $f(x)$

$$x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1).$$

Las otras raíces de f son las raíces de $x^2 + x - 1$, que podemos hallar por medio de la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Sin embargo, en el ejemplo siguiente no hay una manera fácil de hallar las raíces, y no las hallamos.

Ejemplo 2. Trazar la gráfica de la curva

$$y = -x^3 + 3x - 5.$$

1. Cuando $x = 0$, tenemos $y = -5$. Con polinomios de grado ≥ 3, en general no hay una fórmula sencilla para hallar los x tales que $f(x) = 0$, de

modo que no damos de manera explícita la intersección de la gráfica con el eje x.

2. La derivada es

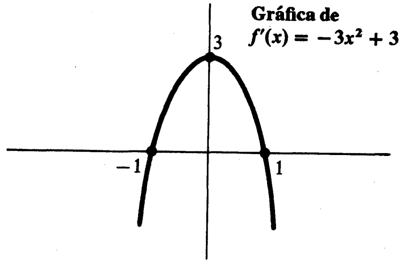
$$f'(x) = -3x^2 + 3.$$

La gráfica de $f'(x)$ es una parábola doblada hacia abajo, como ya se sabrá gracias a la experiencia previa con parábolas. Tenemos

$$f'(x) = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1 \text{ y } x = -1.$$

Así, hay dos puntos críticos de f, a saber, $x = 1$ y $x = -1$.

3. La gráfica de $f'(x)$ se ve como una parábola doblada hacia abajo, como sigue:



Entonces:

$$\begin{aligned}
f \text{ es estrictamente decreciente} &\iff f'(x) < 0 \\
&\iff x < -1 \quad \text{y} \quad x > 1. \\
f \text{ es estrictamente creciente} &\iff f'(x) > 0 \\
&\iff -1 < x < 1.
\end{aligned}$$

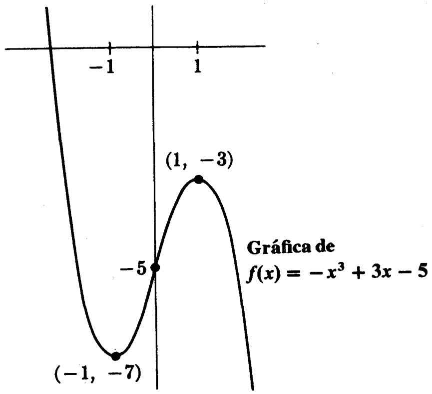
Por tal motivo, f tiene un mínimo local en $x = -1$, y tiene un máximo local en $x = 1$.

4.

$$\begin{aligned}
&\text{Si} \quad x \to \infty, \quad \text{entonces, por §1,} \quad f(x) \to -\infty. \\
&\text{Si} \quad x \to -\infty, \quad \text{entonces, por §1,} \quad f(x) \to +\infty.
\end{aligned}$$

5. Tenemos $f''(x) = -6x$. Por lo tanto, $f''(x) > 0$ si, y sólo si, $x < 0$ y $f''(x) < 0$ si, y sólo si, $x > 0$. Hay un punto de inflexión en $x = 0$.

Juntando toda esta información vemos que la gráfica de f se ve como en la página siguiente.



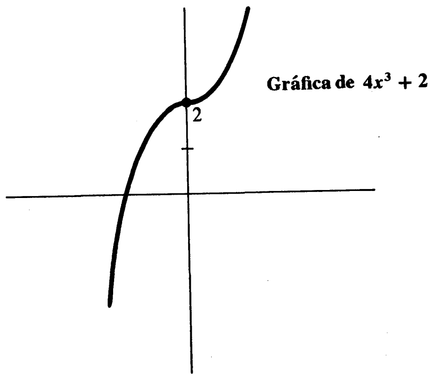
Observación. Cuando f es un polinomio de grado 3, su derivada $f'(x)$ es un polinomio de grado 2 y, en general, este polinomio tiene dos raíces, que dan los dos puntos críticos de la curva $y = f(x)$. En el ejemplo precedente, estos puntos críticos están en $(-1, -7)$ y $(1, -3)$.

Nótese de nuevo cómo usamos la gráfica de una parábola, a saber, la gráfica de $f'(x)$, en el proceso de determinar la propia gráfica de f.

En los últimos dos ejemplos, el polinomio cúbico tiene dos jorobas, en los dos puntos críticos. Ésta es la forma más general de los polinomios cúbicos, pero hay casos particulares en los que no hay punto crítico, o sólo un punto crítico.

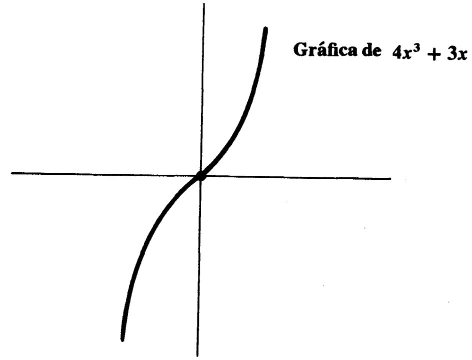
Ejemplo 3(a). Sea $f(x) = 4x^3 + 2$. Trazar la gráfica de f.

Aquí tenemos que $f'(x) = 12x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$. Hay sólo un punto crítico, cuando $x = 0$. Por lo tanto, la función es estrictamente creciente para todo x y su gráfica se ve así.



Ejemplo 3(b). Sea $f(x) = 4x^3 + 3x$. Trazar la gráfica de f.

Aquí tenemos que $f'(x) = 12x^2 + 3 > 0$ para *todo* x, por lo que la gráfica de f se ve así. No hay punto crítico.



En ambos ejemplos tenemos

$$f''(x) = 24x.$$

Así, en los dos ejemplos hay un punto de inflexión en $x = 0$. La gráfica de f se dobla hacia abajo para $x < 0$ y se dobla hacia arriba para $x > 0$. La diferencia entre el caso (a) y el caso (b) es que en el caso (a) el punto de inflexión es un punto crítico, donde la derivada de f es igual a 0, de modo que la curva es plana en el punto crítico. En el caso (b), la derivada en el punto de inflexión es

$$f'(x) = 3,$$

de modo que en el caso (b) la derivada en el punto de inflexión es positiva.

VI, §3. EJERCICIOS

1. Mostrar que una curva

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

con $a \neq 0$ tiene exactamente un punto de inflexión.

Trazar las gráficas de las curvas siguientes.

2. $x^3 - 2x^2 + 3x$
3. $x^3 + x^2 - 3x$
4. $2x^3 - x^2 - 3x$
5. $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x$
6. $x^3 - 3x^2 + 6x - 3$
7. $x^3 + x - 1$
8. $x^3 - x - 1$
9. $-x^3 + 2x + 5$
10. $-2x^3 + x + 2$
11. $x^3 - x^2 + 1$
12. $y = x^4 + 4x$
13. $y = x^5 + x$
14. $y = x^6 + 6x$
15. $y = x^7 + x$
16. $y = x^8 + x$

17. ¿Cuál de los polinomios siguientes tiene un mínimo (para todo x)?
(a) $x^6 - x + 2$ (b) $x^5 - x + 2$
(c) $-x^6 - x + 2$ (d) $-x^5 - x + 2$
(e) $x^6 + x + 2$ (f) $x^5 + x + 2$

Trazar las gráficas de estos polinomios.

18. ¿Cuál de los polinomios del ejercicio 17 tiene un máximo (para todo x)?

En los dos problemas siguientes:
(a) Demostrar que f tiene exactamente dos puntos de inflexión.
(b) Trazar la gráfica de f. Determinar explícitamente los puntos críticos. Determinar las regiones donde se dobla hacia arriba y donde se dobla hacia abajo.

19. $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 5$

20. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$

21. Trazar la gráfica de la función

$$f(x) = x^6 - \tfrac{3}{2}x^4 + \tfrac{9}{16}x^2 - \tfrac{1}{32}.$$

Hallar los puntos críticos. Hallar los valores de f en estos puntos críticos. Trazar la gráfica de f. Se verá mucho más clara de lo que parece a primera vista.

VI, §4. FUNCIONES RACIONALES

Consideraremos ahora cocientes de polinomios.

Ejemplo. Trazar la gráfica de la curva

$$y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

y determinar las ocho propiedades enunciadas en la introducción.

1. Cuando $x = 0$, tenemos $f(x) = -1$. Cuando $x = 1$, $f(x) = 0$.
2. La derivada es

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

(Se puede calcular usando la regla del cociente.) Nunca es 0 y, por lo tanto, la función f no tiene puntos críticos.

3. El denominador es un cuadrado y, por lo tanto, siempre es positivo donde está definido, esto es, para $x \neq -1$. Así, $f'(x) > 0$ para todo $x \neq -1$. La función es creciente para todo x. Es evidente que la función no está definida para $x = -1$ y tampoco lo está su derivada, así que sería más preciso decir que la función es creciente en la región

$$x < -1$$

y es creciente en la región $x > -1$.

4. No hay región de decrecimiento.

5. Como la derivada nunca es 0, no hay máximos o mínimos relativos.
6. La segunda derivada es

$$f''(x) = \frac{-4}{(x+1)^3}.$$

No hay punto de inflexión porque $f''(x) \neq 0$ para todo x donde la función está definida. Si $x < -1$, entonces el denominador $(x+1)^3$ es negativo, y $f''(x) > 0$, de modo que la gráfica se dobla hacia arriba. Si $x > -1$, entonces el denominador es positivo y $f''(x) < 0$, de modo que la gráfica se dobla hacia abajo.

7. Cuando x se vuelve positivo grande nuestra función tiende a 1 (usando el método de la sección §1). Cuando x se vuelve grande negativo nuestra función también tiende a 1.

Otro elemento de información muy útil es ver lo que ocurre cuando $f(x)$ mismo se vuelve positivo o negativo, grande. Esto sucede cerca de los puntos donde el denominador de $f(x)$ es 0. En el ejemplo presente, $x = -1$.

8. Cuando x tiende a -1, el denominador tiende a 0 y el numerador tiende a -2. Si x tiende a -1 por la derecha, de modo que $x > -1$, entonces el denominador es positivo y el numerador es negativo. Por lo tanto, la fracción

$$\frac{x-1}{x+1}$$

es negativa, y es negativa grande.

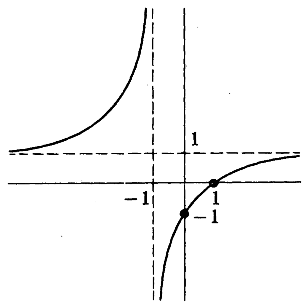


Figura 2

Si x tiende a -1 por la izquierda de modo que $x < -1$, entonces $x - 1$ es negativo, pero también $x + 1$ es negativo. Por lo tanto, $f(x)$ es positivo y grande, pues el denominador es pequeño cuando x está cerca de -1.

Juntando toda esta información vemos que la gráfica se ve como la figura anterior.

Hemos trazado las dos rectas $x = -1$ y $y = 1$, pues desempeñan un papel importante cuando x tiende a -1 y cuando x se vuelve positivo o negativo, grande.

Observación. Sea de nuevo

$$y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Entonces podemos escribir esta relación para ver directamente que la gráfica de f es una hipérbola, como se ve enseguida. Escribimos la relación en la forma

$$y = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1},$$

esto es, $y - 1 = -2/(x+1)$. Al quitar los denominadores queda

$$(y-1)(x+1) = -2.$$

Por el capítulo II se sabe que es una hipérbola. Realizamos el trazo por medio de un método más general porque también funciona en los casos en que no se puede reducir la ecuación a una de las curvas usuales, como círculos, parábolas o hipérbolas.

Ejemplo. Trazar la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x-1}$.

Nótese que f no está definida en $x = 1$. Podemos escribir

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{x-1}.$$

Tenemos $f(x) = 0$ si, y sólo si, el numerador $x(x+1) = 0$. Así:

$$f(x) = 0 \quad \text{si, y sólo si,} \quad x = 0 \quad \text{o} \quad x = -1.$$

A continuación vemos la derivada, que es

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

(Calcularla usando la regla del cociente.) Entonces

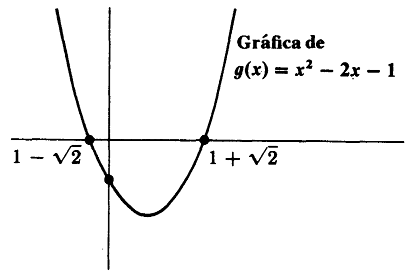
$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 1 = 0.$$
$$\iff x = 1 \pm \sqrt{2} \quad \text{(por la fórmula cuadrática)}$$

Éstos son los puntos críticos de f.

El denominador $(x-1)^2$ en $f'(x)$ es un cuadrado, por lo que siempre es positivo donde está definido, esto es, para $x \neq 1$. Por lo tanto, el signo de $f'(x)$ es el mismo que el signo de su numerador $x^2 - 2x - 1$. Sea

$$g(x) = x^2 - 2x - 1.$$

La gráfica de g es una parábola y, como el coeficiente de x^2 es $1 > 0$, esta parábola se dobla hacia arriba como se muestra en la figura.



Las dos raíces de $g(x) = 0$ son $x = 1 - \sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{2}$. De la gráfica de $g(x)$ vemos que

$$g(x) < 0 \quad \text{cuando} \quad 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2},$$
$$g(x) > 0 \quad \text{cuando} \quad x < 1-\sqrt{2} \quad \text{o} \quad x > 1+\sqrt{2}.$$

Esto nos da las regiones de crecimiento y de decrecimiento para $f(x)$.

Para $x \leq 1-\sqrt{2}$, $f(x)$ es estrictamente creciente.
Para $1-\sqrt{2} \leq x < 1$, $f(x)$ es estrictamente decreciente.
Para $1 < x \leq 1+\sqrt{2}$, $f(x)$ es estrictamente decreciente.
Para $1+\sqrt{2} \leq x$, $f(x)$ es estrictamente creciente.

Se sigue que f tiene un máximo local en $x = 1-\sqrt{2}$ y f tiene un mínimo local en $x = 1+\sqrt{2}$.

Cuando x se vuelve positivo grande, $f(x)$ se vuelve positivo grande como se deduce de la expresión

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x-1} = \frac{x^2(1+1/x)}{x(1-1/x)} = x\frac{1+1/x}{1-1/x}.$$

Cuando x se vuelve negativo grande, $f(x)$ se vuelve negativo grande.

Cuando x tiende a 1 y $x < 1$, la función $f(x)$ se vuelve negativa grande porque el denominador $x-1$ tiende a 0 y es negativo, mientras que el numerador x^2+x tiende a 2.

Cuando x tiende a 1 y $x > 1$, la función $f(x)$ se vuelve positiva grande porque el denominador $x-1$ tiende a 0 y tanto el numerador como el denominador son positivos, mientras que el numerador tiende a 2.

Por consiguiente, la gráfica se ve como se dibujó en la figura 3.

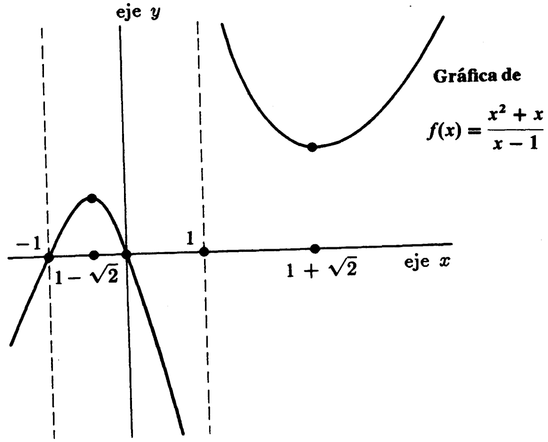


Figura 3

VI, §4. EJERCICIOS

Trazar las curvas siguientes, indicando toda la información enunciada en la introducción. Puede considerarse opcional la convexidad.

1. $y = \dfrac{x^2+2}{x-3}$
2. $y = \dfrac{x-3}{x^2+1}$
3. $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$
4. $y = \dfrac{x^2-1}{x} = x - \dfrac{1}{x}$
5. $\dfrac{x}{x^3-1}$
6. $y = \dfrac{2x^2-1}{x^2-2}$
7. $y = \dfrac{2x-3}{3x+1}$
8. $\dfrac{4x}{x^2-9}$
9. $x + \dfrac{3}{x}$
10. $\dfrac{x^2-4}{x^3}$
11. $\dfrac{3x-2}{2x+3}$
12. $\dfrac{x}{3x-5}$
13. $\dfrac{2x}{x+4}$
14. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$
15. $\dfrac{x+1}{x^2+5}$
16. $\dfrac{x+1}{x^2-5}$
17. $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
18. $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$
19. Trazar la gráfica de $f(x) = x + 1/x$.
20. Sean a y b dos números positivos. Sea
$$f(x) = ax + \frac{b}{x}.$$
Mostrar que el valor mínimo de $f(x)$ para $x > 0$ es $2\sqrt{ab}$. Dar razones para cada afirmación. Deducir que $\sqrt{ab} \le (a+b)/2$. Trazar la gráfica de f para $x > 0$.

VI, §5. APLICACIONES DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

En esta sección se estudiarán problemas expresados en lenguaje cotidiano que tratan sobre máximos y mínimos y aplican las técnicas estudiadas antes. En cada caso queremos maximizar o minimizar una función, la cual en un principio puede estar dada incluso en términos de dos variables. Procedemos como sigue.

1. Se dan datos suficientes a fin de que una de estas variables, por medio de alguna relación, se pueda expresar en términos de la otra. Terminamos tratando con una función de una sola variable.
2. Después se hallan sus puntos críticos haciendo la derivada igual a 0, y en seguida se determina si los puntos críticos son máximos o mínimos locales.
3. Verificamos si estos máximos o mínimos locales son también máximos o mínimos en todo el intervalo de definición de la función. Si la función está dada sólo en intervalos finitos, puede suceder que el máximo ocurra, por ejemplo, en un punto extremo, donde no se aplica el criterio de la derivada.

Ejemplo 1. Hallar el punto sobre la gráfica de la ecuación $y^2 = 4x$ que está cerca del punto $(2,3)$.

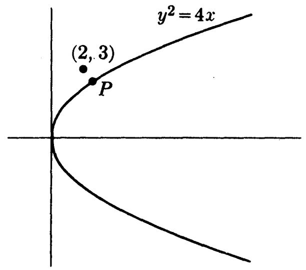


Figura 4

Para minimizar la distancia entre un punto (x,y) y $(2,3)$, basta minimizar el cuadrado de la distancia, que tiene la ventaja de que en su fórmula no hay ninguna raíz cuadrada. En efecto, suponer que z_0^2 es un valor mínimo para el cuadrado de la distancia, con z_0 positivo. Entonces z_0 mismo es un valor mínimo para la distancia, ya que un número positivo tiene una raíz cuadrada positiva única. El cuadrado de la distancia es igual a

$$z^2 = (2-x)^2 + (3-y)^2.$$

Así z^2 está expresado en términos de las dos variables x y y. Pero sabemos que el punto (x,y) está sobre la curva cuya ecuación es $y^2 = 4x$. Por lo tanto, podemos despejar una variable en términos de la otra, a saber, $y = 2\sqrt{x}$. Al sustituir $y = 2\sqrt{x}$, hallamos una expresión para el cuadrado de la distancia sólo en términos de x, a saber

$$\begin{aligned} f(x) &= (2-x)^2 + (3-2\sqrt{x})^2 \\ &= 4 - 4x + x^2 + 9 - 12\sqrt{x} + 4x \\ &= 13 + x^2 - 12\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Determinamos ahora los puntos críticos de f. Tenemos

$$f'(x) = 2x - \frac{6}{\sqrt{x}},$$

de modo que

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x\sqrt{x} = 6 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{9}. \end{aligned}$$

Más aún, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x\sqrt{x} > 6 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^3 > 9. \\ f'(x) < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^3 < 9. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x)$ es estrictamente creciente cuando $x > \sqrt[3]{9}$ y es estrictamente decreciente cuando $x < \sqrt[3]{9}$. Por lo tanto, $\sqrt[3]{9}$ es un mínimo. Cuando $x = \sqrt[3]{9}$, el valor correspondiente para y es

$$y = 2\sqrt{x} = 2\sqrt[3]{3}.$$

Por lo tanto, el punto sobre la gráfica de $y^2 = 4x$ más cercano a $(2,3)$ es el punto

$$P = (\sqrt[3]{9}, 2\sqrt[3]{3}).$$

Ejemplo 2. Se va a fabricar una lata de aceite en forma de cilindro, para contener un cuarto de aceite. ¿Qué dimensiones deberá tener de modo que el área de la superficie sea mínima (en otras palabras, que minimice el costo del material para hacer la lata)?

Sea r el radio de la base del cilindro y sea h su altura. Entonces el volumen es

$$V = \pi r^2 h.$$

El área de la superficie total es la suma de la tapa, el fondo y los lados circulares, a saber,

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Así, el área está dada en términos de las dos variables r y h. Sin embargo, también se indica que el volumen V es constante, $V = 1$. De este modo obtenemos una relación entre r y h,

$$\pi r^2 h = 1,$$

y podemos despejar h en términos de r, a saber,

$$h = 1/\pi r^2.$$

Por lo tanto, el área se puede expresar completamente en términos de r, esto es,

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r/\pi r^2 = 2\pi r^2 + 2/r.$$

Queremos que el área sea mínima. Primero hallamos los puntos críticos de A. Tenemos:

$$\begin{aligned} A'(r) = 4\pi r - 2/r^2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 4\pi r = 2/r^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \pi r^3 = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así hallamos exactamente un punto crítico

$$r = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/3}$$

Considerando factores físicos podemos ver que esto corresponde a un mínimo, pero también podemos proceder de la manera siguiente. Cuando r se vuelve positivo grande, o cuando r tiende a 0, la función $A(r)$ se vuelve grande, de modo que debe haber un mínimo de la función para algún valor $r > 0$. Este mínimo es un punto crítico, y ya se sabe que hay sólo un punto crítico. Por lo tanto, hemos hallado que el mínimo ocurre cuando r es el punto crítico. En este caso podemos sustituir y encontrar h, como sigue:

$$h = \frac{1}{\pi r^2} = \frac{(2\pi)^{2/3}}{\pi} = \frac{2^{2/3}}{\pi^{1/3}}.$$

Esto proporciona las dimensiones requeridas.

Ejemplo 3. Un camión se va a conducir durante 320 km a velocidad constante de x km/h. Las reglamentaciones de velocidad requieren que $50 \le x \le 100$. Supóngase que la gasolina cuesta 15 centavos/litro y se consume a razón de

$$9 + \frac{x^2}{500} \text{ lit/hr.}$$

Si el chofer gana \$8 la hora, hallar la velocidad más económica.

El costo total se expresa como la suma del costo de la gasolina y el salario. El tiempo total del viaje será

$$\frac{320}{x}$$

pues (tiempo)(velocidad) = (distancia) si la velocidad es constante. El costo de la gasolina es entonces igual al producto de

(precio por litro)(número de litros usados por hora)(tiempo total)

de modo que el costo de la gasolina es

$$G(x) = .15\left(9 + \frac{x^2}{500}\right)\frac{320}{x}.$$

Por otro lado, el salario está dado por el producto

$$(\text{salario por hora})(\text{tiempo total}),$$

de modo que el costo del salario es

$$W(x) = 8 \cdot \frac{320}{x}.$$

Por lo tanto, el costo total del viaje es

$$\begin{aligned} f(x) &= G(x) + W(x) \\ &= .15\left(9 + \frac{x^2}{500}\right)\frac{320}{x} + \frac{8 \cdot 320}{x} \\ &= 48\left(\frac{9}{x} + \frac{x}{500}\right) + \frac{2560}{x}. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{432}{x^2} + \frac{12}{125} - \frac{2560}{x^2} \\ &= -\frac{2992}{x^2} + \frac{12}{125}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f'(x) = 0$ si, y sólo si,

$$\frac{2992}{x^2} = \frac{12}{125}$$

en otras palabras,

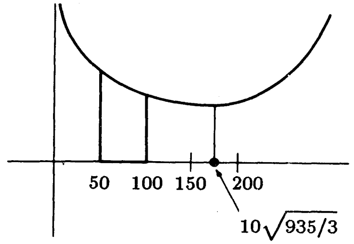
$$x^2 = \frac{93500}{3}.$$

Así $x = 10\sqrt{\frac{935}{3}}$. [Tomamos x positivo, ya que es la solución que tiene significado físico.]

Observamos ahora que $10\sqrt{\frac{935}{3}}$ es aproximadamente igual a 176, de modo que rebasa el límite de velocidad de 100 que se asignó al principio. Más aún, si $0 < x < 176$, entonces

$$f'(x) < 0.$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ es decreciente para $0 \leq x \leq 176$. Su gráfica se puede esbozar como en la figura de la página siguiente.



Como al empezar restringimos la velocidad posible al intervalo $50 \leq x \leq 100$, se sigue que el mínimo de f en el intervalo debe ocurrir cuando $x = 100$. Por lo tanto, ésta es la velocidad que minimiza el costo total.

Ejemplo 4. Suponer en el ejemplo anterior que no hay límite de velocidad. Vemos entonces que si $x > 176$, entonces $f'(x) > 0$, de modo que $f(x)$ es creciente para

$$x > 176.$$

Por lo tanto, $10\sqrt{\frac{935}{3}}$ es un punto mínimo para f cuando no se colocan restricciones en x. En consecuencia, en este caso, la velocidad que minimiza al costo es

$$x = 10\sqrt{\frac{935}{3}}.$$

Ejemplo 5. Cuando la luz emitida desde una fuente puntual choca con una superficie plana, la intensidad de la iluminación es proporcional al coseno del ángulo de incidencia e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la fuente. ¿A qué altura deberá colocarse una luz arriba del centro de un círculo de 12 m de radio para dar la mejor iluminación a lo largo de la circunferencia?

El **ángulo de incidencia** se mide a partir de la perpendicular al plano. La figura es así.

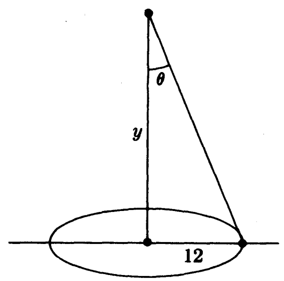


Figura 5

Denotamos por θ el ángulo de incidencia y por y la altura de la luz. Sea I la intensidad de la iluminación. Que dos cantidades sean proporcionales significa que existe una constante tal que una cantidad es igual a la constante por la otra. Así, existe una constante c tal que

$$\begin{aligned} I(y) &= c\cos\theta\frac{1}{12^2+y^2} \\ &= c\frac{y}{\sqrt{12^2+y^2}}\frac{1}{12^2+y^2} \\ &= \frac{cy}{(12^2+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Los puntos críticos de $I(y)$ son aquellos puntos donde $I'(y) = 0$. Tenemos

$$I'(y) = c\left[\frac{(12^2+y^2)^{3/2} - y\cdot\frac{3}{2}(12^2+y^2)^{1/2}(2y)}{(12^2+y^2)^3}\right],$$

y esta expresión es igual a 0 precisamente cuando el numerador es igual a 0, esto es,

$$(12^2+y^2)^{3/2} = 3y^2(12^2+y^2)^{1/2}.$$

Al cancelar $(4^2+y^2)^{1/2}$, vemos que esto equivale a

$$12^2+y^2 = 3y^2,$$

o, en otras palabras,

$$12^2 = 2y^2.$$

Despejando y se obtiene

$$y = \pm\frac{12}{\sqrt{2}}.$$

Sólo el valor positivo de y tiene significado físico, y así la altura que da la máxima intensidad es de $4/\sqrt{2}\,\mathrm{m}$, a condición de que sepamos que este punto crítico es un máximo para la función $I(y)$, para $y > 0$. Esto se puede ver de la siguiente manera.

Si y está muy cerca de 0, entonces el numerador cy de $I(y)$ está cerca de 0, y el denominador $(4^2+y^2)^{3/2}$ está cerca de $(4^2)^{3/2}$ de modo que $I(y)$ se analiza factorizando y^2, a saber

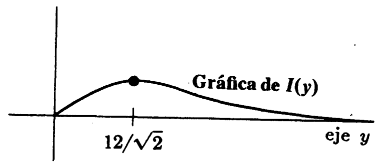
$$(12^2+y^2)^{3/2} = \left(\frac{12^2}{y^2}+1\right)^{3/2} y^3.$$

Entonces $I(y)$ tiende a 0 cuando y se vuelve grande, porque

$$I(y) = \frac{cy}{(\text{término cercano a }1)y^3} = \frac{c}{(\text{término cercano a }1)}\frac{1}{y^2}$$

si y es positivo grande. Por lo tanto, hemos mostrado que $I(y)$ tiende a 0 cuando y tiende a 0 o y se vuelve grande. Se sigue que $I(y)$ alcanza un máximo para

algún valor de $y > 0$, y este máximo debe ser un punto crítico. Por otro lado, también hemos probado que hay un solo punto crítico. Por lo tanto, este punto crítico es el máximo, según se deseaba. Así, $y = 12/\sqrt{2}$ es un máximo para la función. En vista del análisis anterior, se puede trazar la gráfica como en la figura.



Ejemplo 6. Un negocio fabrica transmisiones de automóvil que se venden en \$400. El costo total de colocar en el mercado x unidades es

$$f(x) = 0.02x^2 + 160x + 400\,000.$$

¿Cuántas transmisiones deberán venderse para obtener una ganancia máxima?

Sea $P(x)$ la ganancia obtenida al vender x unidades. Entonces $P(x)$ es la diferencia entre el ingreso total y el costo de colocar en el mercado. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(x) &= 400x - (0.02x^2 + 160x + 400\,000) \\ &= -0.02x^2 + 240x - 400\,000. \end{aligned}$$

Queremos saber cuándo es máximo $P(x)$. Tenemos:

$$P'(x) = -0.04x + 240$$

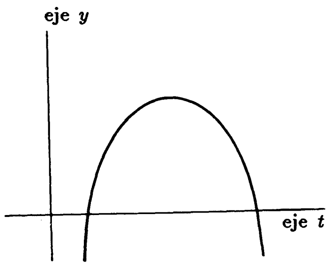
de modo que la derivada es 0 cuando

$$0.04x = 240,$$

o en otras palabras,

$$x = \frac{240}{0.04} = 6000.$$

La ecuación $y = P(x)$ es una parábola, que se dobla hacia abajo porque el coeficiente principal es -0.02 (negativo). Por lo tanto, el punto crítico es un máximo, y la respuesta es entonces 6000 unidades.



Parábola $y = at^2 + bt + c$ con $a < 0$.

Ejemplo 7. Un granjero compra un toro que pesa 270 kg a un costo de \$180. Cuesta 15 centavos diarios alimentar al animal, que aumenta 0.45 kg al día. Cada día que se tiene al toro el precio de venta por kilo declina de acuerdo con la fórmula

$$B(t) = 1 - \frac{1}{1800}t$$

donde t es el número de días. ¿Cuánto tiempo deberá esperar el granjero para maximizar sus ganancias?

Para determinarlo, nótese que el costo total después del tiempo t está dado por

$$f(t) = 180 + 0.15t.$$

El total de la venta equivale al producto del precio $B(t)$ por kilo, por el peso del animal; en otras palabras,

$$\begin{aligned} S(t) &= (1 - \frac{1}{1800}t)(270 + .45t) \\ &= -0.00025t^2 + 0.30t + 270. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ganancia es

$$\begin{aligned} P(t) &= S(t) - f(t) \\ &= -0.00025t^2 + 0.15t + 90. \end{aligned}$$

Entonces

$$P'(t) = -0.0005t + 0.15$$

y $P'(t) = 0$ exactamente cuando $0.0005t = 0.15$ o, en otras palabras,

$$t = \frac{0.15}{0.0005} = 300.$$

Por lo tanto, la respuesta es que el granjero debe esperar 300 días antes de vender el toro, siempre que podamos probar que este valor de t da un máximo. Pero la fórmula para la ganancia es una expresión cuadrática en t, de la forma

$$P(t) = at^2 + bt + c,$$

y $a < 0$. Por lo tanto, $P(t)$ es una parábola, y como $a < 0$ esta parábola se abre hacia abajo, como en la figura. Como resultado, el punto crítico debe ser un máximo, según se deseaba.

VI, §5. EJERCICIOS

1. Hallar la longitud de los lados del rectángulo de área más grande que pueda inscribirse en un semicírculo, de manera que la base inferior esté sobre el diámetro.
2. Una caja rectangular tiene una base cuadrada y no tiene tapa. El área combinada de los lados y el fondo es de $4.5\,\text{m}^2$. Hallar las dimensiones de la caja de máximo volumen que cumple con estos requisitos.
3. Probar que, entre todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es el de menor perímetro.
4. Se conducirá un camión por 300 km a una velocidad constante de x km/hr. Las reglamentaciones sobre velocidad requieren que $30 \leq x \leq 60$.
   Suponiendo que la gasolina cuesta 8 centavos/litro y se consume a razón de $8 + x^2/600$ lit/hr, y si el salario del chofer es de D dólares la hora, hallar la velocidad más económica y el costo del viaje si (a) $D = 0$, (b) $D = 1$, (c) $D = 2$, (d) $D = 3$, (e) $D = 4$.
5. Un rectángulo ha de tener un área de $64\,\text{m}^2$. Hallar sus dimensiones de modo que la distancia de una esquina al punto medio de un lado no adyacente sea un mínimo.
6. Expresar el número 4 como la suma de dos números positivos de manera que la suma del cuadrado del primero y del cubo del segundo sea lo más pequeño posible.
7. Un alambre de 24 cm de largo se corta en dos, una parte se dobla para darle forma de círculo y la otra en forma de cuadrado. ¿Cómo deberá cortarse si la suma de las áreas del círculo y del cuadrado ha de ser (a) un mínimo, (b) un máximo?
8. Hallar el punto sobre la gráfica de la ecuación $y^2 = 4x$ que está más cerca del punto $(2, 1)$.
9. Hallar los puntos sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ más cercanos al punto $(0, 1)$.
10. Demostrar que $(2, 2)$ es el punto sobre la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 3x$ que está más cerca del punto $(11, 1)$.
11. Hallar las coordenadas de los puntos sobre la curva $x^2 - y^2 = 16$ que estén más cerca del punto $(0, 6)$.
12. Hallar las coordenadas de los puntos sobre la curva $y^2 = x + 1$ que estén más cerca del origen.
13. Hallar las coordenadas del punto sobre la curva $y^2 = \frac{5}{2}(x + 1)$ que estén más cerca del origen.
14. Hallar las coordenadas de los puntos sobre la curva $y = 2x^2$ que estén más cerca del punto $(9, 0)$.

15. Un anillo circular de radio b está cargado uniformemente de electricidad; la carga total es Q. La fuerza ejercida por esta carga sobre una partícula a una distancia x del centro del anillo, en una dirección perpendicular al plano del anillo está dada por $F(x) = Qx(x^2 + b^2)^{-3/2}$. Hallar el máximo de F para todo $x \geq 0$.

16. Sea F la razón de flujo de agua sobre cierto vertedero. Suponer que F es proporcional a $y(h-y)^{1/2}$, donde y es la profundidad de la corriente y h es la altura y es constante. ¿Qué valor de y hace máxima a F?

17. Hallar sobre el eje x el punto tal que la suma de sus distancias a $(2,0)$ y $(0,3)$ sea un mínimo.

18. Una pieza de alambre de longitud L se va a cortar en dos partes, una de ellas se va a doblar en forma de triángulo equilátero y la otra en forma de círculo. ¿Cómo deberá cortarse el alambre de modo que la suma de las áreas comprendidas sea (a) un mínimo, (b) un máximo?

19. Una cerca de 4 m de alto está a 1.20 m de la pared de una casa. ¿Cuál es la longitud mínima que debe tener una escalera para que uno de sus extremos descanse en el suelo, fuera de la cerca, y el otro sobre la pared de la casa?

20. Un tanque ha de tener un volumen dado V y se hará en forma de cilindro circular recto con hemisferios agregados en cada extremo. El material para los extremos cuesta el doble por metro cuadrado que para los lados. Hallar las proporciones más económicas. [Se puede suponer que el área de una esfera es $4\pi r^2$.]

21. Hallar la longitud de la barra más larga que puede transportarse horizontalmente y dar la vuelta en una esquina pasando de un corredor de 2.44 m a uno de 1.22 m.

22. Sean P y Q dos puntos en el plano en el mismo lado del eje x. Sea R un punto sobre el eje x (figura 6). Demostrar que la suma de las distancias PR y QR es menor cuando los ángulos θ_1 y θ_2 son iguales.

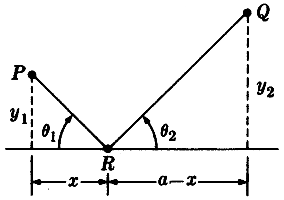


Figura 6

[*Idea:* Usar primero el teorema de Pitágoras para dar una expresión para las distancias PR y RQ en términos de x y de las cantidades fijas y_1, y_2. Sea $f(x)$ la suma de las distancias. Mostrar que la condición $f'(x) = 0$ significa que $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$. Usando valores de x cercanos a 0 y a a, demostrar que $f(x)$ es decreciente cerca de $x = 0$ y es creciente cerca de $x = a$. Por lo tanto, el mínimo debe estar en el intervalo abierto $0 < x < a$, y es, en consecuencia, el punto crítico.]

23. Suponer que la velocidad de la luz es v_1 en el aire y v_2 en el agua. Un rayo de luz que viaja de un punto P_1 sobre la superficie del agua a un punto P_2 debajo de la

superficie, viajará por la trayectoria que requiera el menor tiempo. Demostrar que el rayo cruzará la superficie en el punto Q en el plano vertical que pasa por P_1 y P_2, de manera que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2},$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos mostrados en la figura de la página siguiente:

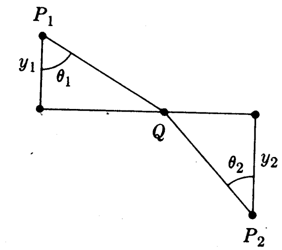


Figura 7

(Se puede suponer que la luz viajará en el plano vertical que pasa por P_1 y P_2. También se puede suponer que cuando la velocidad es constante, e igual a v, en toda una región, y s es la distancia recorrida, entonces el tiempo t es igual a $t = s/v$.)

24. Sea p la probabilidad de que ocurrirá cierto evento en todo ensayo. Suponer que en n ensayos el evento se observó s veces. La función de posibilidad se define como $L(p) = p^s(1-p)^{n-s}$. Hallar el valor de p que maximice la función de posibilidad. (Tomar $0 \leq p \leq 1$.) Considerar n y s como constantes.

25. Hallar una ecuación para la recta que pasa por los puntos siguientes y forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima en el primer cuadrante:
(a) que pase por el punto $(3,1)$.
(b) que pase por el punto $(3,2)$.

26. Sean $a_1, \ldots, a_n$ números. Mostrar que existe un solo número x tal que

$$(x-a_1)^2 + \cdots + (x-a_n)^2$$

es un mínimo, y hallar este número.

27. Cuando la luz emitida desde una fuente puntual choca con una superficie plana, la intensidad de la iluminación es proporcional al coseno del ángulo de incidencia e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la fuente. ¿A qué altura deberá colocarse una luz arriba del centro de un círculo de 25 cm de radio para dar la mejor iluminación a lo largo de la circunferencia? (El ángulo de incidencia se mide desde la perpendicular al plano.)

28. Un recipiente horizontal tiene una sección transversal en forma de triángulo isósceles invertido, donde la longitud de un cateto es de 20 m. Hallar el ángulo entre los catetos iguales que den la capacidad máxima.

29. Un recipiente tiene fondo horizontal plano y sección transversal como la mostrada en la figura de la página siguiente. Hallar el ángulo de inclinación de los lados a la horizontal que den la máxima capacidad.

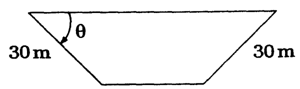


Figura 8

30. Determinar la constante a tal que la función

$$f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$$

tiene (a) un mínimo local en $x = 2$, (b) un mínimo local en $x = -3$. (c) Demostrar que la función no puede tener un máximo local para todo valor de a.

31. La intensidad de iluminación en cualquier punto es proporcional a la potencia de la fuente de luz y varía inversamente con el cuadrado de la distancia a la fuente. Si dos fuentes de potencia a y b distan entre sí una distancia c, ¿en qué punto de la recta que las une será la intensidad un mínimo?

32. Una ventana tiene forma de rectángulo con un semicírculo superpuesto. Hallar las dimensiones cuando el perímetro es de 4 m y el área es lo más grande posible.

33. Hallar el radio y el ángulo del sector circular de área máxima si el perímetro es (a) 20 cm (b) 16 cm.

34. Estamos regando el prado con la manguera hacia arriba con un ángulo de inclinación θ. Sea r el alcance de la manguera, esto es, la distancia desde la manguera hasta el punto de impacto del agua. Entonces r está dado por

$$r = \frac{2v^2}{g} \operatorname{sen} \theta \cos \theta,$$

donde v y g son constantes. ¿Para qué ángulo es máximo el alcance?

35. Una escalera se coloca de manera que pasa sobre una cerca de 4 m de altura y se apoya en un muro que está a 0.7 m detrás de la cerca. ¿Cuál es la longitud de la escalera más corta que se puede usar?

36. Se supone que un tanque cilíndrico ha de tener un volumen dado V. Hallar las dimensiones del radio de la base y de la altura en términos de V, de manera que el área de la superficie sea mínima. El tanque deberá estar abierto por arriba pero cerrado por abajo.

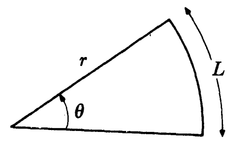
37. Se va a arreglar una cama de flores en forma de sector circular de radio r y ángulo central θ. Hallar r y θ si el área es fija y el perímetro es un mínimo en el caso:

(a) $0 < \theta \leq \pi$ y (b) $0 < \theta \leq \pi/2$.
Recordar que el área de un sector es

$$A = \pi r^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \theta r^2/2.$$

La longitud de un arco de un círculo de radio r es

$$L = 2\pi r \cdot \frac{\theta}{2\pi} = r\theta.$$



38. Una firma vende un producto a \$50 por unidad. El costo total de colocar en el mercado x unidades está dado por la función

$$f(x) = 5000 + 650x - 45x^2 + x^3.$$

¿Cuántas unidades deberán producirse al día para maximizar las ganancias? ¿Cuál es la ganancia diaria para este número de unidades?

39. El costo diario de producir x unidades de un producto está dado por la fórmula

$$f(x) = 2002 + 120x - 5x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Cada unidad se vende por \$264. ¿Cuántas unidades deberán producirse al día para maximizar las ganancias? ¿Cuál es la ganancia diaria para este número de unidades?

40. Un producto se coloca en el mercado a 50 dólares por unidad. El costo total de colocar x unidades del producto en el mercado es de

$$f(x) = 1000 + 150x - 100x^2 + 2x^3.$$

¿Cuántas unidades deberán producirse para maximizar las ganancias? ¿Cuál es la ganancia diaria para este x?

41. Una compañía es el único fabricante de un producto, cuya función de costo es

$$f(x) = 100 + 20x + 2x^2.$$

Si la compañía incrementa el precio, entonces se venden menos unidades, y de hecho, si expresamos el precio $p(x)$ como una función del número de unidades x, entonces

$$p(x) = 620 - 8x.$$

¿Cuántas unidades deberán producirse para maximizar las ganancias? ¿Cuál es esta ganancia máxima? [*Idea:* El ingreso total es igual al producto $xp(x)$, número de unidades por el precio.]

42. El costo de producir x unidades de un producto está dado por la función

$$f(x) = 10x^2 + 200x + 6000.$$

Si p es el precio por unidad, entonces el número de unidades vendidas a ese precio está dado por

$$x = \frac{1000 - p}{10}.$$

¿Para qué valor de x será positiva la ganancia? ¿Cuántas unidades deberán producirse para dar ganancias máximas?

CAPÍTULO VII

Funciones inversas

Supongamos que tenemos una función, por ejemplo

$$y = 3x - 5.$$

Entonces podemos despejar x en términos de y, a saber

$$x = \tfrac{1}{3}(y + 5).$$

Así x se puede expresar como función de y.

Aunque podemos resolver mediante una fórmula explícita, hay casos interesantes en los que x se puede expresar como función de y pero sin dicha fórmula explícita. En este capítulo investigaremos estos casos.

VII, §1. DEFINICIÓN DE FUNCIONES INVERSAS

Sea $y = f(x)$ una función definida para todo x en algún intervalo. Si para cada valor y_1 de y existe exactamente *un* valor x_1 de x en el intervalo tal que $f(x_1) = y_1$, entonces podemos definir la **función inversa**

$x = g(y) =$ *al único número* x *tal que* $y = f(x)$.

Nuestra función inversa está definida sólo en aquellos números que son valores de f. Tenemos la relación fundamental

$$f(g(y)) = y \quad \text{y} \quad g(f(x)) = x.$$

Ejemplo 1. Considerar la función $y = x^2$, que se supone definida sólo para $x \geq 0$. Todo número positivo (o 0) se puede escribir de manera única como el cuadrado de un número positivo (o 0). Por lo tanto, podemos definir la función inversa, que también será definida para $y \geq 0$, pero no para $y < 0$. Es la función raíz cuadrada, $x = \sqrt{y}$.

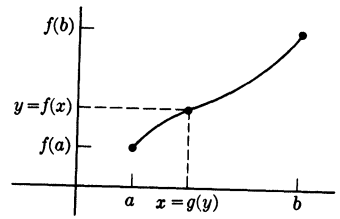
Ejemplo 2. Suponer que $y = 5x - 7$. Entonces podemos despejar x en términos de y, a saber,

$$x = \tfrac{1}{5}(y + 7).$$

Si $f(x) = 5x - 7$, entonces su función inversa es la función $g(y)$ tal que

$$g(y) = \tfrac{1}{5}(y + 7).$$

En estos ejemplos podemos escribir la función inversa mediante fórmulas explícitas. En general esto no es posible, pero hay criterios que nos dicen en qué caso existe la función inversa, por ejemplo cuando la gráfica de la función f se ve así.



En este caso, f es estrictamente creciente y está definida en el intervalo $[a, b]$. Para cada punto x de este intervalo existe un valor $f(x) = y$, y para cada y entre $f(a)$ y $f(b)$ existe x único entre a y b tal que $f(x) = y$. Formalizamos esto en el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Sea $f(x)$ una función estrictamente creciente. Entonces existe la función inversa y está definida en el conjunto de valores de f.*

Demostración. Esto es prácticamente obvio: Dado un número y_1 y un número x_1 tal que $f(x_1) = y_1$, no puede haber otro número x_2 tal que $f(x_2) = y_1$ a menos que $x_2 = x_1$, pues si $x_2 \neq x_1$, entonces

$$\text{o bien } x_2 > x_1, \text{ en cuyo caso } f(x_2) > f(x_1),$$

$$\text{o } x_2 < x_1, \text{ en cuyo caso } f(x_2) < f(x_1).$$

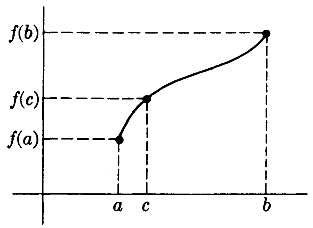
Como la positividad de la derivada nos da un buen criterio para saber cuándo una función es estrictamente creciente, podemos definir funciones inversas cuando la función es diferenciable y su derivada es positiva.

Como es usual, lo dicho anteriormente se aplica igual a funciones que son estrictamente decrecientes y cuya derivada es negativa.

El teorema siguiente se deduce intuitivamente y se prueba en el apéndice. Lo recordamos como el teorema 1.2 del capítulo V.

Teorema del valor intermedio. *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Sea v un número entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe un punto c entre a y b tal que $f(c) = v$.*

Este teorema dice que la función f toma todos los valores intermedios entre los valores en los puntos extremos del intervalo, lo cual se ilustra en la figura siguiente.



Usando el teorema del valor intermedio concluimos que:

Teorema 1.2. *Sea f una función continua en el intervalo cerrado*

$$a \leq x \leq b$$

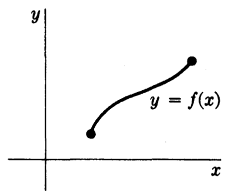
y suponer que f es estrictamente creciente. Sea $f(a) = \alpha$ y $f(b) = \beta$. Entonces la función inversa está definida en el intervalo cerrado $[\alpha, \beta]$.

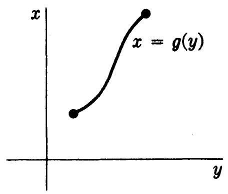
Demostración. Dado cualquier número γ entre α y β, por el teorema del valor intermedio existe un número c entre a y b tal que $f(c) = \gamma$. Nuestra afirmación se sigue ahora del teorema 1.1.

Si hacemos que esta función inversa sea g, entonces $g(\alpha) = a$ y $g(\beta) = b$. Más aún, la función inversa se caracteriza por la relación

$$f(x) = y \qquad \text{si, y sólo si,} \qquad x = g(y).$$

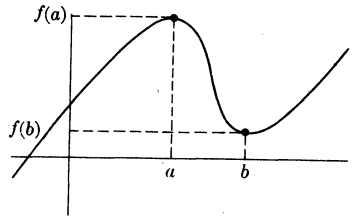
Nótese que podemos visualizar fácilmente la gráfica de una función inversa. Si queremos x en términos de y, simplemente se rota la página en un ángulo de 45° invirtiendo los papeles de los ejes x y y. Así, la gráfica de $y = f(x)$ se refleja respecto a una recta inclinada a 45° para dar la gráfica de $x = g(y)$.



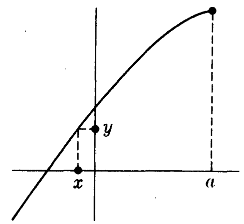


Daremos ahora algunos ejemplos de cómo se puede definir funciones inversas en ciertos intervalos.

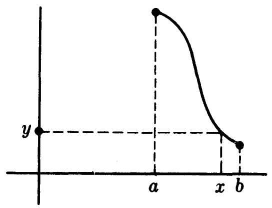
Ejemplo 3. Tomar como $f(x)$ un polinomio de grado 3. Cuando el coeficiente de x^3 es positivo, y cuando f tiene máximos y mínimos locales, su gráfica se ve así:

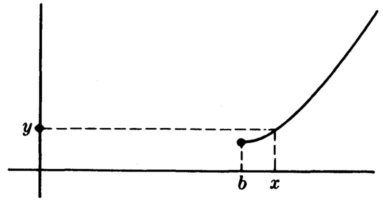


A cualquier valor dado de y entre $f(a)$ y $f(b)$ corresponden tres valores posibles para x y, por lo tanto, la función inversa no se puede definir a menos que demos otras especificaciones. Para esto, supongamos primero que se considera f definida sólo para aquellos números $\leq a$. Entonces la gráfica de f se ve así:



La función inversa está definida en este caso. Del mismo modo, podemos considerar f como definida en el intervalo $[a, b]$, o en el intervalo de todo $x \geq b$. En cada uno de estos casos, ilustrados en las siguientes figuras, estaría definida la función inversa.





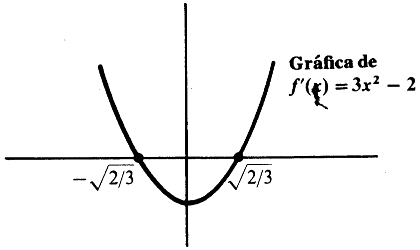
En cada caso hemos trazado un punto y y el valor correspondiente x de la función inversa. Ellos son diferentes en los tres casos.

Ejemplo 4. Consideremos un ejemplo numérico. Sea

$$f(x) = x^3 - 2x + 1,$$

vista como una función sobre el intervalo $x > \sqrt{2/3}$. ¿Podemos definir la función inversa? ¿Para qué números? Si g es la función inversa, ¿cuál es $g(0)$? ¿Cuál es $g(5)$?

Tenemos $f'(x) = 3x^2 - 2$. La gráfica de $f'(x)$ es una parábola doblada hacia arriba que cruza el eje x en $x = \pm\sqrt{2/3}$.



Por lo tanto,

$$f'(x) > 0 \iff x > \sqrt{2/3} \quad \text{y} \quad x < -\sqrt{2/3}.$$

Considérese el intervalo $x > \sqrt{2/3}$. Entonces f es estrictamente creciente en este intervalo, de modo que la función inversa g está definida. Como $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, se sigue que la función inversa $g(y)$ está definida para todo $y > f(\sqrt{2/3})$, esto es,

$$y > f(\sqrt{2/3}) = (2/3)^{3/2} - 2(2/3)^{1/2} + 1.$$

Ahora $1 > \sqrt{2/3}$, de modo que 1 está en el intervalo $x > \sqrt{2/3}$, y $f(1) = 0$. Por lo tanto, $g(0) = 1$.

De manera análoga, $f(2) = 5$ y 2 está en el intervalo $x > \sqrt{2/3}$, de modo que $g(5) = 2$.

Nótese que no damos una fórmula explícita para nuestra función inversa. Cuando se trata con polinomios de grado ≥ 3, no se puede dar fórmula alguna.

Ejemplo 5. Por otro lado, tomar f definida por la misma fórmula,

$$f(x) = x^3 - 2x + 1,$$

pero considerada como una función en el intervalo

$$-\sqrt{\tfrac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

La derivada de f está dada por $f'(x) = 3x^2 - 2$. Tenemos

$$f'(x) < 0 \iff -\sqrt{\tfrac{2}{3}} < x < \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Por lo tanto, f es estrictamente decreciente en este intervalo, y la función inversa está definida, pero es bastante diferente de la del ejemplo 4. Por ejemplo, 0 está en el intervalo y $f(0) = 1$, de modo que si h denota la función inversa, tenemos $h(1) = 0$.

Ejemplo 6. Sea $f(x) = x^n$ (donde n es un entero positivo) y consideremos f definida sólo para números $x > 0$. Como $f'(x)$ es nx^{n-1}, la función es estrictamente creciente, por lo que la función inversa existe. Esta función inversa g es, de hecho, lo que entendemos por raíz n-ésima.

En todos los ejercicios de los capítulos anteriores se determinaron intervalos en los cuales ciertas funciones crecían y decrecían. Ahora se pueden definir funciones inversas para dichos intervalos. En la mayoría de los casos no se puede escribir una fórmula explícita sencilla para tales funciones inversas.

VII, §1. EJERCICIOS

Para cada una de las funciones siguientes, determinar si existe una función inversa g y determinar los números para los cuales está definida g.

1. $f(x) = 3x + 2$, para todo x
2. $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $0 \leq x$
3. $f(x) = x^3 + 4x - 5$, para todo x
4. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $-1 < x$
5. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, $-2 < x$
6. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $1 < x$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $0 < x \leq 1$
8. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $0 \leq x \leq 5$
9. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$, $0 \leq x < 2$
10. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $1 \leq x \leq 10$
11. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$
12. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$
13. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$
14. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $1 \leq x$

VII, §2. DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS

Enunciaremos un teorema que nos permita determinar la derivada de una función inversa cuando conocemos la derivada de la función dada.

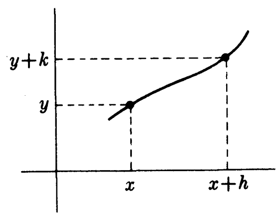
Teorema 2.1. *Sean a y b dos números, $a < b$. Sea f una función diferenciable en el intervalo $a < x < b$ y tal que su derivada $f'(x)$ es > 0 para toda x en este intervalo abierto. Entonces existe la función inversa $x = g(y)$ y tenemos*

$$\boxed{g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.}$$

Demostración. Se supone que investigamos el cociente de Newton

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{k}.$$

La siguiente figura ilustra la situación:



Por el teorema del valor intermedio, todo número de la forma $y+k$ con valores pequeños de k se puede escribir como un valor de f. Sean $x = g(y)$ y $h = g(y+k) - g(y)$. Entonces

$$x = g(y) \quad \text{y} \quad g(y+k) = x+h.$$

Más aún, $y+k = f(x+h)$ y, por lo tanto,

$$k = f(x+h) - f(x).$$

El cociente de Newton para g puede entonces escribirse como

$$\frac{g(y+k)-g(y)}{k} = \frac{x+h-x}{f(x+h)-f(x)} = \frac{h}{f(x+h)-f(x)},$$

y vemos que es el recíproco del cociente de Newton para f, a saber,

$$\frac{1}{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}}.$$

Cuando h tiende a 0 sabemos que k tiende a 0, pues

$$k = f(x+h) - f(x).$$

Recíprocamente, cuando k tiende a 0 sabemos que existe exactamente un valor de h tal que $f(x+h) = y+k$, pues la función inversa está definida. En consecuencia, el valor correspondiente de h también debe tender a 0.

Si tomamos ahora el límite del recíproco del cociente de Newton de f, cuando h (o k) tiende a 0, tenemos

$$\frac{1}{f'(x)}.$$

Por definición, ésta es la derivada $g'(y)$ y nuestro teorema está probado.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Hallar un intervalo tal que la función inversa g de f esté definida, y hallar $g'(0)$, $g'(5)$.

Por inspección vemos que

$$f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f(2) = 5.$$

Entonces debemos hallar un intervalo que contenga 1 y 2 y tal que la función inversa de f esté definida para ese intervalo. Pero

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

y $f'(x) > 0$ si, y sólo si, $x > \sqrt{2/3}$ o $x < -\sqrt{2/3}$. (Ver el ejemplo 4 de la sección anterior.) Seleccionamos el intervalo $x > \sqrt{2/3}$, que contiene tanto a 1 como a 2. Entonces podemos aplicar el teorema general acerca de la derivada de la función inversa, que asegura que si $y = f(x)$ entonces

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Esto da:

$$g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = 1 \quad \text{y} \quad g'(5) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{10}.$$

Favor de notar que la derivada $g'(y)$ está dada en términos de $f'(x)$. No tenemos una fórmula en términos de y.

El teorema que nos da la derivada de la función inversa también se puede expresar diciendo que

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.}$$

Aquí también la derivada se comporta *como si* estuviéramos tomando un cociente. Así, la notación es sugestiva y, a partir de ahora, podemos usarla sin dudar, pues ya probamos un teorema que la justifica.

Observación. En el teorema 2.1 probamos que, de hecho, la derivada de la función inversa g existe, y está dada por $g'(y) = 1/f'(x)$. Si sólo se *supone* que esta derivada existe, entonces puede darse un argumento mucho más corto para hallar su valor, usando la regla de la cadena. En efecto, tenemos

$$f(g(y)) = y, \quad \text{pues} \quad g(y) = x.$$

Al diferenciar respecto a y podemos hallar, mediante la regla de la cadena, que

$$f'(g(y))g'(y) = 1, \quad \text{porque} \quad \frac{dy}{dy} = 1.$$

Por lo tanto,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))},$$

como se debía demostrar.

VII, §2. EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 10, restringir f a un intervalo de modo que la función inversa g esté definida en un intervalo que contenga al punto indicado, y hallar la derivada de la función inversa en el punto indicado

0. $f(x) = -x^3 + 2x + 1$. Hallar $g'(2)$.
1. $f(x) = x^3 + 1$. Hallar $g'(2)$.
2. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Hallar $g'(6)$.
3. $f(x) = x^2 - x + 5$. Hallar $g'(7)$.
4. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$. Hallar $g'(-)$.
5. $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$. Hallar $g'(\sqrt{3}/2)$.
6. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$. Hallar $g'(-1)$.
7. $f(x) = x^3 + x - 2$. Hallar $g'(0)$.
8. $f(x) = -x^3 + 2x + 1$. Hallar $g'(2)$.
9. $f(x) = 2x^3 + 5$. Hallar $g'(21)$.
10. $f(x) = 5x^2 + 1$. Hallar $g'(11)$.
11. Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Suponer que f es dos veces diferenciable en el intervalo abierto $a < x < b$, y que $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ en este intervalo. Sea g la función inversa de f.
    (a) Hallar una expresión para la segunda derivada de g.
    (b) Mostrar que $g''(y) < 0$ en su intervalo de definición. Así g se dobla en la dirección opuesta a f.

VII, §3. EL ARCOSENO

Es imposible definir una función inversa para la función $y = \operatorname{sen} x$, ya que a cada valor de y le corresponde una infinidad de valores de x pues $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$. Sin embargo, si restringimos nuestra atención a intervalos especiales, podemos definir la función inversa.

Restringimos la función seno al intervalo

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

La derivada de $\operatorname{sen} x$ es $\cos x$ y en ese intervalo tenemos

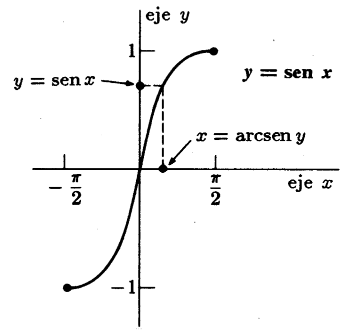
$$0 < \cos x, \quad \text{de modo que la derivada es positiva,}$$

excepto cuando $x = \pi/2$ o $x = -\pi/2$, en cuyo caso el coseno es 0.

Entonces, en el intervalo

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

la función es estrictamente creciente. La función inversa existe, y se llama **arcoseno**.



Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$, y $x = \operatorname{arcsen} y$, la función inversa. Como $f(0) = 0$, tenemos $\operatorname{arcsen} 0 = 0$. Más aún, como

$$\operatorname{sen}(-\pi/2) = -1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\pi/2) = 1,$$

sabemos que la función inversa está definida en el intervalo que va de -1 a $+1$, esto es, para

$$-1 \leq y \leq 1.$$

En palabras, podemos decir burdamente que $\operatorname{arcsen} x$ *es el ángulo cuyo seno es* x. (Decimos *burdamente* porque, hablando estrictamente, $\operatorname{arcsen} x$ es un número, no un ángulo, y además porque nos referimos al ángulo entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.)

Ejemplo 1. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ y sea $g(y) = \operatorname{arcsen} y$. Entonces

$$\operatorname{arcsen}(1/\sqrt{2}) = \pi/4$$

porque

$$\operatorname{sen} \pi/4 = 1/\sqrt{2}.$$

De manera análoga,

$$\operatorname{arcsen} 1/2 = \pi/6$$

porque

$$\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2.$$

Para cualquier valor de x *en el intervalo* $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ *tenemos*

$$\boxed{\operatorname{arcsen} \operatorname{sen} x = x,}$$

por definición de función inversa. Sin embargo, si x no está en este intervalo, entonces **no** tenemos

$$\operatorname{arcsen} \operatorname{sen} x = x.$$

Ejemplo 2 Sea $x = -\pi$. Entonces

$$\operatorname{sen}(-\pi) = 0,$$

y

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(-\pi)) = \operatorname{arcsen} 0 = 0 \neq -\pi.$$

Ejemplo 3. Tenemos

$$\operatorname{arcsen} \operatorname{sen}(3\pi/4) = \pi/4,$$

porque $\operatorname{sen} 3\pi/4 = 1/\sqrt{2}$, y $\operatorname{arcsen} 1/\sqrt{2} = \pi/4$.

Consideremos ahora la derivada y la gráfica de la función inversa.

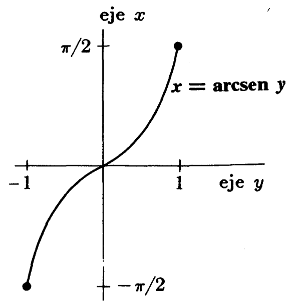
La derivada de $\operatorname{sen} x$ es positiva en el intervalo

$$-\pi/2 < x < \pi/2.$$

Como la derivada de la función inversa $x = g(y)$ es $1/f'(x)$, la derivada de $\operatorname{arcsen} y$ también es positiva en el intervalo

$$-1 < y < 1.$$

Por ello, la función inversa es estrictamente creciente en ese intervalo. Su gráfica se ve como en la figura que se muestra a continuación.



De acuerdo con la regla general para la derivada de funciones inversas, sabemos que, cuando $y = \operatorname{sen} x$ y $x = \operatorname{arcsen} y$, la derivada es

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{\cos x}.$$

Cuando x está muy cerca de $\pi/2$, se sabe que $\cos x$ está cerca de 0. Por lo tanto, la derivada es muy grande, de ahí que la curva sea casi vertical. Igualmente, cuando x está cerca de $-\pi/2$ y y está cerca de -1, la curva es casi vertical, como se dibujó.

Por último, sucede que podemos expresar nuestra derivada de manera explícita como función de y. En efecto, tenemos la relación

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

de donde

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x.$$

En el intervalo entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, el coseno es ≥ 0. Por lo tanto, podemos tomar la raíz cuadrada y obtener

$$\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

en ese intervalo. Como $y = \operatorname{sen} x$, podemos escribir nuestra derivada en la forma

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

la cual está expresada completamente en términos de y.

Ejemplo 4. Sea $x = \operatorname{arcsen} y$. Hallar dx/dy cuando $y = 1/\sqrt{2}$. Esto se hace fácilmente, a saber, si $g(y) = \operatorname{arcsen} y$, entonces

$$g'(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{1-(1/\sqrt{2})^2}} = \sqrt{2}.$$

Una vez obtenida toda la información deseada acerca del arcoseno, volvamos a nuestras letras usuales. Enunciamos la propiedad principal como un teorema.

Teorema 3.1. *Considerar la función seno definida en el intervalo*

$$[-\pi/2, \pi/2].$$

Entonces la función inversa está definida en el intervalo $[-1, 1]$. *Vamos a llamarla*

$$g(x) = \operatorname{arcsen} x.$$

Entonces g es diferenciable en el intervalo abierto $-1 < x < 1$, y

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

VII, §3. EJERCICIOS

1. Considerar el coseno definido sólo en el intervalo $[0, \pi]$ y probar que existe la función inversa arccos. ¿En qué intervalo está definida? Trazar la gráfica.
2. ¿Cuál es la derivada del arcocoseno?
3. Sea $g(x) = \operatorname{arcsen} x$. Hallar los valores siguientes:

(a) $g'(1/2)$ (b) $g'(1/\sqrt{2})$ (c) $g(1/2)$
(d) $g(1/\sqrt{2})$ (e) $g'(\sqrt{3}/2)$ (f) $g(\sqrt{3}/2)$

4. Sea $g(x) = \arccos x$. ¿Cuál es $g'(\frac{1}{2})$? ¿Cuál es $g'(1/\sqrt{2})$? ¿Cuál es $g(\frac{1}{2})$? ¿Cuál es $g(1/\sqrt{2})$?
5. Sea $\sec x = 1/\cos x$. Definir la función inversa de la secante en un intervalo adecuado y obtener una fórmula para la derivada de su función inversa.

Hallar los números siguientes.

6. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 3\pi/2)$ 7. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 2\pi)$ 8. $\arccos(\cos 3\pi/2)$
9. $\arccos(\cos -\pi/2)$ 10. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} -3\pi/4)$

Hallar las derivadas de las siguientes funciones.

11. $\operatorname{arcsen}(x^2 - 1)$ 12. $\arccos(2x + 5)$
13. $\dfrac{1}{\operatorname{arcsen} x}$ 14. $\dfrac{2}{\arccos 2x}$
15. Determinar los intervalos en los cuales la función arcsen se dobla hacia arriba y en cuáles se dobla hacia abajo.

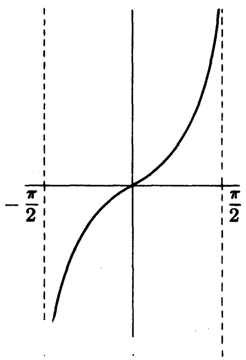
VII, §4. EL ARCOTANGENTE

Sea $f(x) = \tan x$ y considerar esta función definida en el intervalo

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Conforme x va de $-\pi/2$ a $\pi/2$, la tangente va desde valores negativos muy grandes hasta valores positivos muy grandes. Cuando x tiende a $\pi/2$, la tangente tiene de hecho valores positivos arbitrariamente grandes y, de manera análoga, cuando x tiende a $-\pi/2$, la tangente tiene valores negativos arbitrariamente grandes.

Recordamos que la **gráfica de la tangente** se ve como en la figura siguiente.



La derivada de $\tan x$ es

$$\frac{d(\tan x)}{dx} = 1 + \tan^2 x.$$

Por lo tanto, la derivada siempre es positiva y la función tan es estrictamente creciente. Más aún, cuando x varía en el intervalo

$$-\pi/2 < x < \pi/2,$$

$\tan x$ varía de valores negativos grandes a valores positivos grandes. Por lo tanto, $\tan x$ varía sobre todos los números, y así, la función inversa está definida para todos los números. La llamamos **arcotangente**.

Como sucedió con arcsen y arccos, podemos decir burdamente que $\arctan y$ es el ángulo cuya tangente es y. Decimos "burdamente" en nuestras afirmaciones porque, como ya señalamos, en realidad nos referimos al número de radianes del ángulo cuya tangente es y, tal que este número está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

Ejemplo 1. Tenemos que $\arctan(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$, pero

$$\arctan(-1/\sqrt{3}) \neq 5\pi/6,$$

aunque $\tan 5\pi/6 = -1/\sqrt{3}$.

Ejemplo 2. Con la misma disposición, hallamos que

$$\arctan \tan 5\pi/6 = \arctan(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6.$$

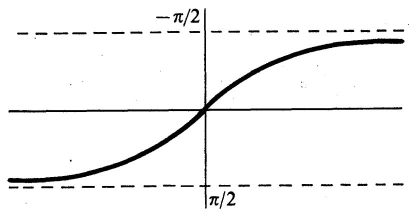
La razón por la cual $\tan x \neq x$ en este caso, se debe a la manera en que escogimos el intervalo de definición de la tangente para tener una función inversa y al hecho de que $x = 5\pi/6$ no está en este intervalo. Es evidente que, si x está entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, entonces debemos tener

$$\arctan \tan x = x.$$

Así,

$$\arctan \tan(-\pi/6) = -\pi/6.$$

La **gráfica del arctan** se ve así:



Ahora la derivada. Sea $x = g(y) = \arctan y$. Entonces

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

de modo que

$$g'(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Aquí de nuevo podemos obtener una fórmula explícita para la derivada de la función inversa.

Como con el arcoseno, al tratar de manera simultánea con la función y su inversa, debemos mantener separadas nuestras letras x y y. Sin embargo ahora resumimos las propiedades del arctan en términos de nuestra notación usual.

Teorema 4.1. *La función inversa de la tangente está definida para todos los números. Llamémosla arcotangente. Entonces tiene derivada, y esa derivada está dada por la relación*

$$\frac{d(\arctan x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Cuando x se vuelve positivo muy grande, $\arctan x$ *tiende a* $\pi/2$.

Cuando x se vuelve muy grande negativo, $\arctan x$ *tiende a* $-\pi/2$.
El arcotangente es estrictamente creciente para todo x.

Ejemplo 3. Sea $h(x) = \arctan 2x$. Para hallar la derivada usamos la regla de la cadena, haciendo $u = 2x$. Entonces

$$h'(x) = \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2 = \frac{2}{1+4x^2}.$$

Ejemplo 4. Sea g la función arctan. Entonces

$$g'(5) = \frac{1}{1+5^2} = \frac{1}{26}.$$

Ejemplo 5. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \arctan 2x$$

en el punto $x = 1/(2\sqrt{3})$.

Sea $h(x) = \arctan 2x$. Entonces

$$h'\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{1+4\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

Cuando $x = 1/2\sqrt{3}$ tenemos

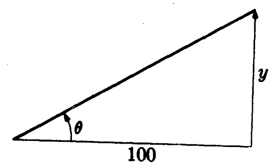
$$y = \arctan\left(2\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi/6.$$

Por lo tanto, debemos hallar la ecuación de la recta con pendiente $3/2$ que pasa por el punto $(1/2\sqrt{3}, \pi/6)$. Sabemos cómo hacerlo; la ecuación es

$$y - \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

Ejemplo 6 Un globo se eleva desde el suelo a 100 m de un observador, a razón de 50 m/min. ¿Con qué rapidez está creciendo el ángulo de elevación de la línea de visión del observador cuando el globo está a una altura de 100 m?

La figura es como sigue:



Es preciso determinar $d\theta/dt$. Sabemos que $dy/dt = 50$. Tenemos

$$\frac{y}{100} = \tan\theta, \quad \text{de donde} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{100}\right).$$

Como

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dy}\frac{dy}{dt}$$

obtenemos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{100}\right)^2}\frac{1}{100}50.$$

Por lo tanto,

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{y=100} = \frac{1}{1+1^2}\frac{1}{100}50 = \frac{1}{4}\ \text{rad/min}.$$

VII, §4. EJERCICIOS

1. Sea g la función arctan. ¿Cuál es $g(1)$? ¿Cuál es $g(1/\sqrt{3})$? ¿Cuál es $g(-1)$? ¿Cuál es $g(\sqrt{3})$?

2. Sea g la función arctan. ¿Cuál es $g'(1)$? ¿Cuál es $g'(1/\sqrt{3})$? ¿Cuál es $g'(-1)$? ¿Cuál es $g'(\sqrt{3})$?

3. Suponer que vamos a definir una función inversa para la tangente en el intervalo $\pi/2 < x < 3\pi/2$. ¿Cuál sería la derivada de esta función inversa?

4. ¿Cuál es
   (a) $\arctan(\tan 3\pi/4)$? (b) $\arctan(\tan 2\pi)$?
   (c) $\arctan(\tan 5\pi/6)$? (d) $\arctan(\tan -5\pi/6)$?

Hallar las derivadas de las funciones siguientes.

5. $\arctan 3x$ 6. $\arctan \sqrt{x}$ 7. $\operatorname{arcsen} x + \arccos x$

8. $x \operatorname{arcsen} x$ 9. $\arctan(\operatorname{sen} 2x)$ 10. $x^2 \arctan 2x$

11. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{arcsen} x}$ 12. $\operatorname{arcsen}(\cos x - x^2)$ 13. $\arctan \dfrac{1}{x}$

14. $\arctan \dfrac{1}{2x}$ 15. $(1 + \operatorname{arcsen} 3x)^3$ 16. $(\operatorname{arcsen} 2x + \arctan x^2)^3/2$

Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto indicado para las curvas siguientes.

17. $y = \operatorname{arcsen} x,\ x = 1/\sqrt{2}$ 18. $y = \arccos x,\ x = 1/\sqrt{2}$

19. $y = \arctan 2x,\ x = \sqrt{3}/2$ 20. $y = \arctan x,\ x = -1$

21. $y = \operatorname{arcsen} x,\ x = -\frac{1}{2}$

22. Un globo se eleva desde el suelo a 150 m de un observador a razón de 60 m/min. ¿Con qué rapidez está creciendo el ángulo de elevación de la línea de visión del observador cuando el globo está a una altura de 300 m?

23. Un aeroplano a una altura de 1400 m vuela horizontal y directamente alejándose de un observador. Cuando el ángulo de elevación es $\pi/4$, el ángulo está decreciendo a razón de 0.05 rad/seg. ¿Con qué rapidez está volando el aeroplano es ese instante?

24. Un hombre va caminando a lo largo de una acera a razón de 1.5 m/seg. A 10 m de la acera hay un faro buscador apuntándole. ¿A qué razón está girando el faro cuando el hombre está a 5 m del punto de la acera más cercano al faro?

25. Hay una torre al final de una calle. Un hombre va en automóvil hacia la torre a razón de 15 m/seg, y la torre mide 150 m de altura. ¿Con qué rapidez está creciendo el ángulo subtendido por la torre en el ojo del hombre cuando el hombre está a 300 m de la torre?

26. Un carro de policía se aproxima a un cruce de calles a 25 m/seg. Cuando está a 60 m del cruce, un carro pasa por la calle transversal, viajando en un ángulo recto respecto a la dirección en que viaja el carro de policía, a razón de 18 m/seg. Si el policía dirige su rayo de luz sobre el segundo carro, ¿con qué rapidez está girando el rayo de luz 2 segundos después, suponiendo que ambos carros continúan a su razón original?

27. Se jala un peso a lo largo de un piso horizontal mediante una cuerda que pasa sobre un gancho a 1.80 m sobre el piso. Si la cuerda se jala sobre el gancho a razón de 0.3 m/seg, hallar una expresión para la razón de cambio del ángulo θ entre la cuerda y el piso como función del ángulo θ.

28. Un hombre parado en un punto fijo de un muelle jala un pequeño bote. El muelle está a 6 m sobre el nivel del agua. Si el hombre jala la cuerda a 0.6 m/seg, ¿con qué rapidez está creciendo el ángulo que forma la cuerda con el agua cuando la distancia del hombre al bote es de 15 m?

29. Un helicóptero despega a 300 m de un observador y se eleva verticalmente a 6 m/seg. ¿Con qué rapidez está cambiando el ángulo de elevación del helicóptero respecto al observador cuando el helicóptero está a 240 m sobre el suelo?

30. Determinar los intervalos en donde el arctan se dobla hacia arriba y en donde se dobla hacia abajo.

31. Un helicóptero parte de una base, elevándose verticalmente en línea recta a una velocidad de 4.5 m/seg. Al mismo tiempo que parte el helicóptero, un observador situado en un punto a 30 m de la base comienza a alejarse de la base en línea recta a una velocidad de 24 m/seg. ¿Con qué rapidez está creciendo el ángulo de elevación del observador al helicóptero cuando el observador está (a) a 120 m de la base? (b) a 180 m de la base?

32. Un tren se mueve sobre una recta alejándose de la estación a un velocidad de 6 m/seg. Un camarógrafo situado en un punto a 15 m de la estación comienza a alejarse de la estación al mismo tiempo que parte el tren, y, dirigiendo la cámara hacia el tren, se aleja de la estación perpendicularmente a los rieles con una rapidez de 3 m/seg. ¿A qué razón está girando el ángulo de la cámara después de que el tren se ha movido (a) 25 m? (b) 30 m?

33. Un carro viaja a 15 m/seg sobre una recta hacia un punto donde se va a lanzar un cohete. Cuando el carro está a 91 m del lugar del lanzamiento, empieza a subir el cohete y su altura está dada como función del tiempo por $y = \frac{1}{3}t^3$ m. Una persona dentro del carro está fotografiando el cohete. ¿Con qué rapidez está girando el ángulo de elevación de la cámara después de 5 segundos de la partida del cohete?

CAPÍTULO VIII

Exponentes y logaritmos

Recordemos las dificultades que tuvimos al principio con la función 2^x (o 3^x, o 10^x). Por intuición se consideraba posible la existencia de dichas funciones, de modo que satisficieran la ecuación fundamental

$$2^{x+y} = 2^x 2^y$$

para todos los números x y y, y $2^0 = 1$, pero teníamos dificultades para decir cuál es el significado de $2^{\sqrt{2}}$ (o 2^π).

El propósito de este capítulo es estudiar estas funciones y otras parecidas.

VIII, §1. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Si n es un entero positivo, conocemos el significado de 2^n: es el producto de 2 consigo mismo n veces. Por ejemplo, 2^8 es el producto de 2 consigo mismo ocho veces.

Más aún, también sabemos que $2^{1/n}$ es la raíz n-ésima de 2; es el número cuya n-ésima potencia es 2. Así, $2^{1/8}$ es el número cuya 8-ésima potencia es 2.

Si $x = m/n$ es un cociente de dos enteros positivos, entonces

$$2^{m/n} = (2^{1/n})^m = (2^m)^{1/n}$$

se puede expresar en términos de raíces y potencias, de modo que es fácil comprender las potencias fraccionarias de 2. El problema surge al querer comprender 2^x cuando x no es un cociente de dos enteros positivos. Por el momento dejamos este problema de lado y suponemos que existe una función definida para todo x, denotada por 2^x, que es diferenciable. Veremos ahora cómo hallar su derivada.

Formamos el cociente de Newton. Es

$$\frac{2^{x+h} - 2^x}{h}.$$

Usando la ecuación fundamental vemos que este cociente es igual a

$$\frac{2^x 2^h - 2^x}{h} = 2^x \frac{2^h - 1}{h}.$$

Cuando h tiende a 0, 2^x permanece fijo, pero es muy difícil ver lo que sucede a

$$\frac{2^h - 1}{h}.$$

No es muy claro que este cociente tenga un límite. Hablando en términos generales, nos topamos con una dificultad análoga a la que surgió cuando tratamos de hallar la derivada de $\operatorname{sen} x$. Sin embargo, en la situación presente, un enfoque directo causaría más dificultades que las halladas cuando estudiamos

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

De hecho, es cierto que

$$\lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$

existe. Vemos que no depende de x, sino sólo de 2.

Si tratáramos de tomar la derivada de 10^x, terminaríamos con el problema de determinar el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{10^h - 1}{h},$$

que también es independiente de x.

En general, supondremos lo siguiente.

Sea a un número > 1. *Existe una función a^x, definida para todos los números x, que satisface las propiedades siguientes:*

Propiedad 1. La ecuación fundamental

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

se cumple para todos los números x y y.

Propiedad 2. Si x es un número racional, $x = m/n$ con m y n enteros positivos, entonces $a^{m/n}$ tiene el significado usual:

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$$

Propiedad 3. La función a^x es diferenciable.

La función a^x se llama **función exponencial.**

Podemos entonces aplicar a a^x el mismo procedimiento que aplicamos a 2^x. Formamos el cociente de Newton

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = a^x \left(\frac{a^h - 1}{h}\right).$$

Como suponemos que a^x es diferenciable, se sigue que

$$\boxed{\frac{da^x}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}.}$$

Así nos encontramos con el misterioso límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Esta situación es semejante a la que se presentó al diferenciar $\operatorname{sen} x$, pero antes pudimos hallar el límite de $(\operatorname{sen} h)/h$ cuando h tiende a 0. Aquí no podemos tomar un enfoque directo. El límite se aclarará posteriormente cuando estudiemos el log.

Sin embargo, podemos analizar un poco más este límite. Sea

$$f(x) = a^x.$$

Afirmamos que

$$\boxed{a^0 = 1.}$$

Esto es porque

$$a = a^{1+0} = a \cdot a^0.$$

Si multiplicamos por a^{-1} en ambos lados, obtenemos $1 = a^0$.

De la misma manera hallamos

$$\boxed{a^{-x} = \frac{1}{a^x},}$$

puesto que

$$1 = a^0 = a^{x-x} = a^x a^{-x}.$$

Ahora bien, si hacemos $x = 0$ en la fórmula

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h},$$

entonces hallamos que

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}}$$

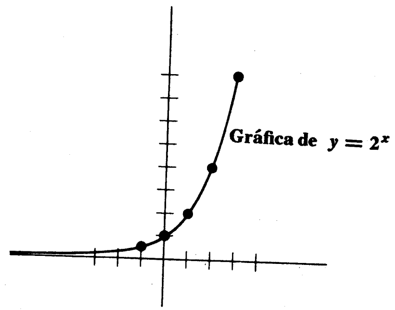
pues $a^0 = 1$. *En consecuencia, el misterioso límite del lado derecho es la pendiente de la curva $y = a^x$ en $x = 0$.*

Tratemos de ver la apariencia de curvas como 2^x, o 3^x, o bien 10^x, localizando algunos puntos. Damos una tabla de valores para 2^x.

x	2^x
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
10	1024
20	1048576

x	2^x
-1	1/2
-2	1/4
-3	1/8
-4	1/16
-5	1/32
-10	1/1024
-20	1/1048576

Vemos que el valor $y = 2^x$ crece rápidamente cuando x se vuelve grande, y tiende a 0 rápidamente cuando x se vuelve negativo grande, como se ilustra en la figura.



El comportamiento cuando x se vuelve negativo grande se debe a la relación $2^{-x} = 1/2^x$. Por ejemplo, $2^{-10} = 1/2^{10}$, que es pequeño. Podemos escribir

$$\lim_{x\to -\infty} 2^x = 0.$$

Observen que $2^x > 0$ para todos los números x. De igual manera, si $a > 0$, entonces

$$\boxed{a^x > 0 \quad \text{para todo } x.}$$

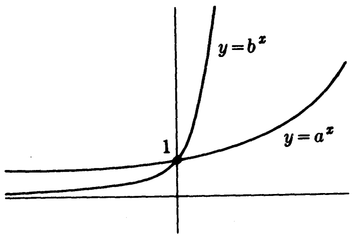
Incluso podemos probar esto a partir de lo que hemos supuesto explícitamente. Para ello supongan que $a^c = 0$ para algún número c. Entonces, para todo x, tenemos

$$a^x = a^{x-c+c} = a^{x-c}a^c = 0,$$

lo cual no es cierto, pues $a^1 = a \neq 0$.

Ejercicio. Hacer una tabla análoga para 3^x, 10^x y $(3/2)^x$.

A continuación supongamos que $1 < a < b$. Es posible que la curva b^x tenga una pendiente mayor que la curva a^x. Estamos interesados especialmente en la pendiente cuando $x = 0$. Si b es muy grande, entonces la curva $y = b^x$ tendrá una pendiente muy empinada en $x = 0$. Si a es > 1 pero está cerca de 1, entonces la curva $y = a^x$ tendrá una pendiente pequeña en $x = 0$. Hemos trazado estas curvas en la figura siguiente.



Traten de localizar algunos puntos sobre las curvas 2^x, 3^x y 10^x para ver lo que sucede en estos casos concretos. Es posible que, cuando a vaya aumentando desde números cercanos a 1 (y > 1) a números muy grandes, la pendiente de a^x en $x = 0$ irá creciendo continuamente de valores cercanos a 0 hasta valores grandes y, por lo tanto, para algún valor de a, que llamaremos e, esta pendiente es precisamente igual a 1. Así, en este enfoque intuitivo, e es el número tal que la pendiente de e^x en $x = 0$ es igual a 1, esto es, para $f(x) = e^x$, tenemos

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = 1.}$$

De modo que, además de las tres propiedades enunciadas anteriormente, suponemos:

Propiedad 4. Existe un número $e > 1$ tal que

$$\frac{de^x}{dx} = e^x,$$

o, de manera equivalente,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Este número e se llama **base natural para las funciones exponenciales.**

Advertencia. No se confundan las funciones 2^x y x^2. La derivada de x^2 es $2x$. La derivada de 2^x es

$$\frac{d(2^x)}{dx} = 2^x \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}.$$

De manera análoga, cuando a es un número fijo, no se confunda la función a^x con x^a, donde x es la variable.

Al principio no tenemos idea de lo grande o pequeño que pueda ser e. En los ejercicios del 16 al 20 se aprenderá una manera muy eficiente de hallar una expansión decimal, o aproximaciones para e mediante números racionales. Sucede que e está entre 2 y 3, y en particular, es aproximadamente igual a $2.7183\ldots$.

Al suponer, tal y como lo hemos hecho, las propiedades básicas de e^x, podemos aplicar algunas de las técnicas anteriores en el contexto de esta función exponencial. Mostramos primero que e^x es la única función igual a su propia derivada, salvo por un factor constante.

Teorema 1.1. *Sea $g(x)$ una función definida para todos los números y tal que $g'(x) = g(x)$. Entonces existe una constante C tal que $g(x) = Ce^x$.*

Demostración. Tenemos que probar que $g(x)/e^x$ es constante, y sabemos cómo hacerlo. Basta probar que la derivada es 0. Pero hallamos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{e^x}\right) &= \frac{e^x g'(x) - g(x)e^x}{e^{2x}}\\ &= \frac{e^x g(x) - g(x)e^x}{e^{2x}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una constante C tal que $g(x)/e^x = C$. Al multiplicar ambos lados por e^x obtenemos

$$g(x) = Ce^x,$$

lo cual prueba el teorema.

Como un caso particular del teorema tenemos:

Sea g una función diferenciable tal que $g'(x) = g(x)$ y $g(0) = 1$. Entonces $g(x) = e^x$.

Demostración. Como $g(x) = Ce^x$, obtenemos $g(0) = Ce^0 = C$. Por lo tanto, $C = 1$ y $g(x) = e^x$.

Así, hay una, y sólo una, función g que es igual a su propia derivada y tal que $g(0) = 1$. Esta función se llama **función exponencial,** y a veces se denota por **exp**. Se puede escribir como

$$\exp'(x) \quad \text{y} \quad \exp(0) = 1.$$

Pero usualmente utilizamos la notación previa e^x, en lugar de $\exp(x)$.

Hay muchas maneras de *probar* la existencia de una función $g(x)$ tal que $g'(x) = g(x)$ y $g(0) = 1$, en lugar de dar argumentos de plausibilidad como los anteriores.

En el capítulo XIV daremos una demostración mediante series infinitas. Por otro lado, cuando estudiemos el logaritmo en la sección §6 de este capítulo, mostraremos primero que existe una función $L(x)$ tal que $L'(x) = 1/x$ y $L(1) = 0$. Entonces se podrá definir la función inversa, y es fácil ver que esta función inversa g satisface $g'(y) = g(y)$ y $g(0) = 1$. Quien esté interesado en dicha teoría puede ojear estas últimas secciones a ver si se ajustan a sus gustos.

Damos ahora ejemplos y aplicaciones relacionados con la función e^x.

Ejemplo. Hallar la derivada de e^{3x^2}.

Usamos la regla de la cadena, con $u = 3x^2$. Entonces

$$\frac{d(e^u)}{dx} = \frac{de^u}{du}\frac{du}{dx} = e^{3x^2}\cdot 6x.$$

Ejemplo. Sea $f(x) = e^{\cos 2x}$. Hallamos la derivada de f por medio de la regla de la cadena, a saber,

$$f'(x) = e^{\cos 2x}(-\operatorname{sen} 2x)2.$$

No tiene caso simplificar esta expresión.

Ejemplo. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$ en $x = 2$.

Sea $f(x) = e^x$. Entonces $f'(x) = e^x$ y $f'(2) = e^2$. Cuando $x = 2$, $y = e^2$. Por lo tanto, debemos hallar la ecuación de la recta con pendiente e^2, que pasa por el punto $(2, e^2)$. Esta ecuación es

$$y - e^2 = e^2(x - 2).$$

Gráfica de e^x

Tracemos la gráfica de e^x. Justificamos nuestros afirmaciones usando sólo las cuatro propiedades listadas antes. Como

$$\frac{de^x}{dx} = e^x > 0 \quad \text{para todo } x,$$

concluimos que la función $f(x) = e^x$ es estrictamente creciente. Como

$$f''(x) = f'(x) = f(x) > 0 \quad \text{para todo } x,$$

concluimos que la función se dobla hacia arriba.

Como $f(0) = 1$ y la función es estrictamente creciente, concluimos que

$$f(1) = e > 1.$$

Por lo tanto, cuando n es un entero positivo, $n = 1, 2, 3, \ldots$, las potencias e^n se vuelven grandes conforme n se vuelve grande. Como e^x es estrictamente creciente para todo x, esto muestra también que e^x se vuelve grande cuando x es un número real grande.

Hemos visto que

$$e^{-x} = (e^x)^{-1}.$$

Por lo tanto, cuando x es grande, la inversa

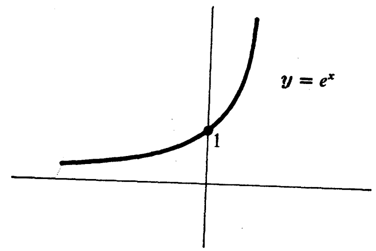
$$(e^x)^{-1} = 1/e^x$$

es pequeña (positiva).

Así podemos escribir:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Si } x \to \infty, & \text{entonces} & e^x \to \infty. \\ \text{Si } x \to -\infty, & \text{entonces} & e^x \to 0. \end{array}}$$

Estamos ahora en posición de ver que la gráfica de e^x se ve así:



VIII, §1. EJERCICIOS

1. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^{2x}$ en el punto cuya abscisa es (a) 1, (b) -2, (c) 0?
2. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^{x/2}$ en el punto cuya abscisa es (a) -4, (b) 1, (c) 0?
3. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = xe^x$ en el punto cuya abscisa es 2?
4. Hallar las derivadas de las funciones siguientes:
   (a) $e^{\operatorname{sen} 3x}$ (b) $\operatorname{sen}(e^x + \operatorname{sen} x)$
   (c) $\operatorname{sen}(e^{x+2})$ (d) $\operatorname{sen}(e^{4x-5})$
5. Hallar las derivadas de las funciones siguientes:
   (a) $\arctan e^x$ (b) $e^x \cos(3x + 5)$
   (c) $e^{\operatorname{sen} 2x}$ (d) $e^{\arccos x}$
   (e) $1/e^x$ (f) x/e^x
   (g) e^{e^x} (h) $e^{-\operatorname{arcsen} x}$
   (i) $\tan(e^x)$ (j) $\arctan e^{2x}$
   (k) $1/(\operatorname{sen} e^x)$ (l) $\operatorname{arcsen}(e^x + x)$
   (m) $e^{\tan x}$ (n) $\tan e^x$
6. (a) Mostrar que la n-ésima derivada de xe^x es $(x + n)e^x$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
   (b) Mostrar que la n-ésima derivada de xe^{-x} es $(-1)^n(x - n)e^{-x}$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
   (c) Suponer que ya se probaron las fórmulas anteriores para la n-ésima derivada de xe^x y xe^{-x}. ¿Cómo se procedería para probar estas fórmulas para la $(n + 1)$-ésima derivada?

7. Sea $f(x)$ una función tal que $f'(x) = f(x)$ y $f(0) = 2$. Determinar completamente f en términos de e^x.

8. (a) Sea $f(x)$ una función diferenciable en algún intervalo que satisfaga la relación $f'(x) = Kf(x)$ para alguna constante K. Mostrar que existe una constante C tal que $f(x) = Ce^{Kx}$. [*Idea:* Mostrar que la función $f(x)/e^{Kx}$ es constante.]
(b) Sea f una función diferenciable tal que $f'(x) = -2xf(x)$. Mostrar que existe una constante C tal que $f(x) = Ce^{-x^2}$.
(c) En general, suponer que existe una función h tal que $f'(x) = h'(x)f(x)$. Mostrar que $f(x) = Ce^{h(x)}$. [*Idea:* Mostrar que la función $f(x)/e^{h(x)}$ es constante.]
La técnica de este ejercicio se usará en aplicaciones en la última sección.

Hallar la recta tangente a la curva en el punto indicado.

9. $y = e^{2x}$, $x = 1$
10. $y = xe^x$, $x = 2$
11. $y = xe^x$, $x = 5$
12. $y = xe^{-x}$, $x = 0$
13. $y = e^{-x}$, $x = 0$
14. $y = x^2e^{-x}$, $x = 1$

15. Probar que existe un número único x tal que $e^x + x = 0$. [*Idea:* Mostrar que la función es estrictamente creciente, y que tiene valores positivos y negativos.]

16. Probar las desigualdades para $x > 0$:
(a) $1 < e^x$ (*b*) $1 + x < e^x$ (*c*) $1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x$
[*Idea:* Primero probar (a) usando el método del capítulo V, §2. Después probar (b) usando (a). Después probar (c) usando (b).]

17. Sea $x = 1$ en el ejercicio 16. Mostrar que $2 < e$. Mostrar además que $2.5 < e$.

18. Probar para $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6$ que, para $x > 0$, tenemos

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} < e^x.$$

Por $n!$ (se lee n **factorial**) nos referimos al producto de los primeros n enteros. Por ejemplo:

$$1! = 1 \qquad 4! = 24$$
$$2! = 2 \qquad 5! = 120$$
$$3! = 6 \qquad 6! = 720$$

19. Para $x > 0$ probar:
(a) $1 - x < e^{-x}$ (b) $e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2}$
(c) $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} < e^{-x}$
(d) $e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2}$

20. (a) Sea $x = 1/2$ en el ejercicio 19(a). Mostrar que $e < 4$.
(b) Sea $x = 1$ en el ejercicio 19(c). Mostrar que $e < 3$.

Funciones hiperbólicas

21. (a) Definir las funciones **coseno hiperbólico y seno hiperbólico** mediante las fórmulas

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Mostrar que sus derivadas están dadas por

$$\cosh' = \operatorname{senh} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{senh}' = \cosh.$$

(b) Mostrar que, para todo t, tenemos

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1.$$

Nota: Vemos que las funciones $\cosh t$ y $\operatorname{senh} t$ satisfacen la ecuación de una hipérbola, de manera análoga al seno y coseno ordinarios que satisfacen la ecuación de un círculo, a saber,

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Ésta es la razón por la cual $\cosh t$ y $\operatorname{senh} t$ se llaman coseno hiperbólico y seno hiperbólico, respectivamente.

22. Trazar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Localizar al menos seis puntos sobre esta gráfica.

23. Trazar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Localizar al menos seis puntos sobre esta gráfica.

24. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x = y$.
(a) Mostrar que f es estrictamente creciente para $x \geq 0$. Entonces existe la función inversa para este intervalo. Denotar esta función inversa por $x = \operatorname{arccosh} y = g(y)$.
(b) ¿Para qué números y está definida $\operatorname{arccosh} y$?
(c) Mostrar que

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

25. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{senh} x = y$.
(a) Mostrar que f es estrictamente creciente para todo x. Sea $x = \operatorname{arcsenh} y$ la función inversa.
(b) ¿Para qué números y está definida $\operatorname{arcsenh} y$?
(c) Sea $g(y) = \operatorname{arcsenh} y$. Mostrar que

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

VIII, §2. EL LOGARITMO

Si $e^x = y$, entonces definimos $x = \log y$. *Así, de aquí en adelante,* log *es lo que algunos llaman* log *natural.* No tratamos con otro log. Por definición, tenemos entonces

$$\boxed{e^{\log x} = x \qquad \text{y} \qquad \log e^x = x.}$$

Así, el log es la función inversa de la función exponencial e^x. Como e^x es estrictamente creciente, la función inversa existe.

Ejemplos. Tenemos

$$\log e^x = 2, \qquad \log e^{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2},$$
$$\log e^{-3} = -3, \qquad \log e^{\pi} = \pi.$$

De otra manera:

$$e^{\log 2} = 2, \qquad e^{\log \pi} = \pi.$$

Más aún, la relación $e^0 = 1$ significa que

$$\boxed{\log 1 = 0.}$$

Como todos los valores e^x son positivos para todos los números x, se sigue que

$\log y$ *se define sólo para números positivos*

La regla $e^{(a+b)} = e^a e^b$ se traduce en una regla para el log, como sigue.

Teorema 2.1. *Si* u *y* v *son* > 0, *entonces*

$$\boxed{\log uv = \log u + \log v.}$$

Demostración. Sea $a = \log u$ y $b = \log v$. Entonces

$$e^{a+b} = e^a e^b = e^{\log u} e^{\log v} = uv.$$

Por definición, la relación

$$e^{a+b} = uv$$

significa que

$$\log uv = a + b = \log u + \log v$$

que era lo que se tenía que demostrar.

Teorema 2.2. *Si* $u > 0$, *entonces*

$$\boxed{\log u^{-1} = -\log u.}$$

Demostración. Tenemos que $1 = uu^{-1}$. Por lo tanto,

$$0 = \log 1 = \log(uu^{-1}) = \log u + \log u^{-1}.$$

Al sumar $-\log u$ en ambos lados, se prueba el teorema.

Ejemplos. Tenemos

$$\log(1/2) = -\log 2$$
$$\log(2/3) = \log 2 - \log 3.$$

Es obvio que podemos tomar el log de un producto con más de dos términos, así como podemos tomar la exponencial de una suma de más de dos términos. Por ejemplo

$$e^{a+b+c} = e^{a+b}e^c = e^a e^b e^c.$$

De manera análoga, si n es un entero positivo, entonces

$$e^{na} = e^{a+a+\cdots+a} = e^a e^a \cdots e^a = (e^a)^n,$$

donde el producto de la derecha se toma n veces.

Tenemos la regla correspondiente para el log, a saber,

$$\boxed{\log(u^n) = n \log u.}$$

Por ejemplo, por el teorema 2.1, hallamos que:

$$\log(u^2) = \log(u \cdot u) = \log u + \log u = 2 \log u.$$
$$\begin{aligned} \log(u^3) &= \log(u^2 u) = \log u^2 + \log u \\ &= 2\log u + \log u \\ &= 3 \log u. \end{aligned}$$

Y así sucesivamente, para obtener $\log u^n = n \log u$.

Se sigue ahora que, si n es un entero positivo, entonces

$$\boxed{\log u^{1/n} = \frac{1}{n} \log u.}$$

Demostración. Sea $v = u^{1/n}$. Entonces $v^n = u$, y hemos visto ya que

$$\log v^n = n \log v.$$

Por lo tanto,

$$\log v = \frac{1}{n} \log v^n,$$

que es precisamente la relación $\log u^{1/n} = 1/n \log u$.

El mismo tipo de regla vale para exponentes fraccionales, esto es:

Si m *y* n *son enteros positivos, entonces*

$$\log u^{m/n} = \frac{m}{n} \log u.$$

Demostración. Escribimos $u^{m/n} = (u^m)^{1/n}$. Entonces

$$\begin{aligned} \log u^{m/n} &= \log(u^m)^{1/n} \\ &= \frac{1}{n}\log u^m \\ &= \frac{m}{n}\log u \end{aligned}$$

al usar los dos casos por separado.

Para dar idea del comportamiento de log, damos unos cuantos valores aproximados:

$$\log 10 = 2.3,\ldots, \qquad \log 10\,000 = 9.2,\ldots,$$
$$\log 100 = 4.6,\ldots, \qquad \log 100\,000 = 11.5,\ldots,$$
$$\log 1000 = 6.9,\ldots, \qquad \log 1\,000\,000 = 13.8,\ldots,$$

Se puede ver que, si x crece como una progresión geométrica, entonces $\log x$ crece como una progresión aritmética. Los valores anteriores ilustran la regla

$$\log 10^n = n \log 10,$$

donde $\log 10$ es aproximadamente 2.3.

En los ejercicios 17 y 19 de la sección §1 habrán probado que $2.5 < e < 3$. Hacer una tabla de los valores e^n y $\log e^n = n$. Entonces se puede comparar el crecimiento de e^n con $\log e^n$ de manera similar. Para enteros positivos se puede ver que $\log e^n$ crece muy despacio comparado con e^n. Por ejemplo,

$$\log e^3 = 3,$$
$$\log e^4 = 4,$$
$$\log e^5 = 5,$$
$$\log e^{10} = 10.$$

Usando el hecho de que e está entre 2 y 3, se puede ver que las potencias como e^5 o e^{10} son bastante grandes comparadas con los valores de log, que son 5 y 10, respectivamente, en estos casos. Por ejemplo, como $e > 2$, tenemos

$$e^{10} > 2^{10} > 1000.$$

Se observa el mismo fenómeno en dirección opuesta para las potencias negativas de e. Por ejemplo:

$$\log \frac{1}{e} = -1,$$
$$\log \frac{1}{e^2} = -2,$$
$$\log \frac{1}{e^3} = -3,$$
$$\log \frac{1}{e^{10}} = -10.$$

Hacer $h = 1/e^y$. Conforme h tiende a 0, y se vuelve positivo grande, pero bastante despacio. Hacer una tabla análoga para $\log(1/10^n)$ con $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, para obtener una idea con ejemplos numéricos.

Observen que si x es un número entero positivo y escribimos $x = e^y$, entonces $y = \log x$ es negativo grande. Por ejemplo,

$$\text{si } x = 1/e^{10^6} = e^{-10^6}, \qquad \text{entonces} \qquad \log x = -10^6,$$
$$\text{si } x = 1/e^{10^{100}} = e^{-10^{100}}, \qquad \text{entonces} \qquad \log x = -10^{100}.$$

En resumen:

$$\boxed{\text{Si } x \to 0, \text{ entonces } \log x \to -\infty.}$$

La razón viene del comportamiento de e^y. Si $y \to -\infty$, entonces $e^y \to 0$. Del mismo modo, si $y \to \infty$, entonces $e^y \to \infty$. Esto se traduce en la propiedad correspondiente de la función inversa:

$$\boxed{\text{Si } x \to \infty, \text{ entonces } \log x \to \infty.}$$

La derivada de log

A continuación consideramos las propiedades de diferenciación de la función log. Sea

$$y = e^x \qquad \text{y} \qquad x = \log y.$$

Por medio de la regla para diferenciar funciones inversas, hallamos

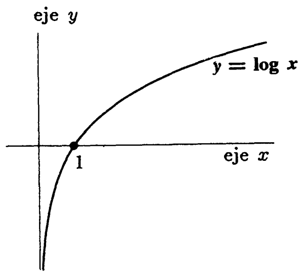
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Por lo tanto, tenemos la fórmula:

Teorema 2.3.

$$\boxed{\frac{d \log y}{dy} = \frac{1}{y}.}$$

De la gráfica de e^x vemos que e^x toma todos los valores > 0. Por ello, la función inversa log está definida para todos los números reales positivos, y por la manera general de hallar la gráfica de una función inversa, vemos que su gráfica se ve como en la figura.



En la figura, la gráfica cruza el eje horizontal en 1, pues

$$e^0 = 1 \quad \text{significa que} \quad \log 1 = 0.$$

Nótese que la derivada satisface

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x} > 0, \quad \text{para todo} \quad x > 0,$$

de modo que la función log es estrictamente creciente.

Más aún

$$\boxed{\frac{d^2 \log x}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} < 0.}$$

Concluimos que la función log se dobla hacia abajo según se mostró.

Observación. A veces consideraremos funciones compuestas del tipo $\log(f(x))$. Como log no está definida para números < 0, la expresión $\log(f(x))$ está definida sólo para números x tales que $f(x) > 0$. Esto es lo que debe entenderse cuando se escriba este tipo de expresión.

Entonces, si escribimos $\log(x-2)$, estará definida sólo cuando $x - 2 > 0$, en otras palabras, $x > 2$. Cuando escribamos $\log(\operatorname{sen} x)$, la expresión tendrá sentido sólo cuando $\operatorname{sen} x > 0$. No está definida cuando $\operatorname{sen} x \leq 0$.

Ejemplo. Hallar la recta tangente a la curva $y = \log(x-2)$ en el punto $x = 5$.

Sea $f(x) = \log(x-2)$. Entonces $f'(x) = 1/(x-2)$ y

$$f'(5) = 1/3.$$

Cuando $x = 5$, $\log(x-2) = \log 3$. Debemos hallar la ecuación de la recta con pendiente $1/3$, que pasa por $(5, \log 3)$. Esto es fácil, como puede verse:

$$y - \log 3 = \tfrac{1}{3}(x-5).$$

Ejemplo. Esbozar la gráfica de la función $f(x) = x^2 + \log x$, para $x > 0$.

Comenzamos tomando la derivada, a saber,

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}.$$

La función f tiene un punto crítico precisamente cuando $2x = -1/x$, esto es, $2x^2 = -1$. Esto nunca puede suceder, por lo cual no hay punto crítico. Cuando $x > 0$, la derivada es positiva, por lo que en este intervalo la función es estrictamente creciente.

Cuando x se vuelve positivo grande, x^2 y $\log x$ se vuelven positivos grandes. Por lo tanto,

$$\text{si} \quad x \to \infty, \quad \text{entonces} \quad f(x) \to \infty.$$

Conforme x tiende a 0 por la derecha, x^2 tiende a 0, pero $\log x$ se vuelve negativo grande. Por lo tanto,

$$\text{si} \quad x \to 0 \quad \text{y} \quad x > 0, \quad \text{entonces} \quad f(x) \to -\infty.$$

Finalmente, para determinar las regiones donde f se dobla hacia arriba o hacia abajo, tomamos la segunda derivada y hallamos

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 - 1}{x^2}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \quad &\iff \quad 2x^2 - 1 > 0 \quad \iff \quad x > 1/\sqrt{2} \\ &\iff \quad \text{se dobla hacia arriba.} \end{aligned}$$

De manera semejante,

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 \quad &\iff \quad 2x^2 - 1 < 0 \quad \iff \quad x < 1/\sqrt{2} \\ &\iff \quad f \text{ se dobla hacia abajo.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $1/\sqrt{2}$ es un punto de inflexión. Afirmamos que

$$f(1/\sqrt{2}) > 0.$$

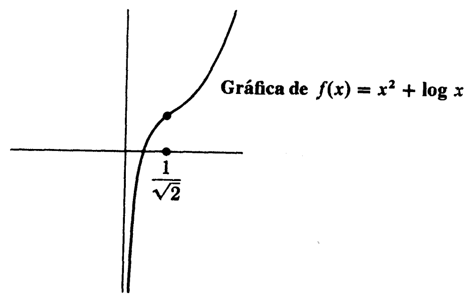
En efecto,

$$f(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{2} - \log(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2.$$

Pero el log es estrictamente creciente y $2 < e$, de modo que

$$\log 2 < \log e = 1.$$

Por lo tanto, $1 - \log 2 > 0$. Esto prueba que $f(1/\sqrt{2}) > 0$. Se sigue que la gráfica de f se ve así.



VIII, §2. EJERCICIOS

1. ¿Cuál es la recta tangente a la curva $y = \log x$ en el punto cuya abscisa es (a) 2, (b) 5, (c) $\frac{1}{2}$?
2. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \log(x^2 + 1)$ en el punto cuya abscisa es (a) -1, (b) 2, (c) -3?
3. Hallar las derivadas de las funciones siguientes:

   (a) $\log(\operatorname{sen} x)$ (b) $\operatorname{sen}\big(\log(2x+3)\big)$ (c) $\log(x^2+5)$ (d) $\dfrac{\log 2x}{\operatorname{sen} x}$
4. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \log(x+1)$ en el punto cuya abscisa es 3?
5. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \log(2x - 5)$ en el punto cuya abscisa es 4?
6. (a) Probar que $\log(1+x) < x$ para todo $x > 0$. [*Idea:* Sea $f(x) = x - \log(1+x)$, hallar $f(0)$ y mostrar que f es estrictamente creciente para $x \geq 0$.]
   (b) Para $x > 0$, mostrar que
$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x).$$

Hallar la recta tangente a la curva en el punto indicado.

7. $y = \log x$, en $x = e$
8. $y = x \log x$, en $x = e$
9. $y = x \log x$, en $x = 2$
10. $y = \log(x^3)$, en $x = e$
11. $y = \dfrac{1}{\log x}$ en $x = e$
12. $y = \dfrac{1}{\log x}$, en $x = 2$

Diferenciar las funciones siguientes.

13. $\log(2x+5)$
14. $\log(x^2+3)$
15. $\dfrac{1}{\log x}$
16. $\dfrac{x}{\log x}$
17. $x(\log x)^{1/3}$
18. $\log\sqrt{1-x^2}$
19. Trazar la curva $y = x + \log x$, $x > 0$.
20. Probar que existe un número único $x > 0$ tal que $\log x + x = 0$. [*Idea:* Mostrar que la función es estrictamente creciente y toma valores positivos y negativos. Usar el teorema del valor intermedio.]

VIII, §3. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL GENERAL

Sea a un número > 0. En la sección §1 listamos cuatro propiedades de la función a^x, con x como la variable. Listaremos una más:

Propiedad 5. Para todos los números x y y tenemos
$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Por ejemplo, si $x = n$ y $y = m$ son enteros positivos, entonces $(a^m)^n$ es el producto de a^m consigo mismo n veces, que es igual a a^{mn}. Deduciremos ahora algunas consecuencias de esta propiedad.

En primer lugar, de la sección anterior sabemos que
$$a = e^{\log a}.$$
Por lo tanto,
$$a^x = (e^{\log a})^x.$$
Por la propiedad 5, se tiene
$$\boxed{a^x = e^{x \log a}}$$
pues $(\log a)x = x \log a$. Así por ejemplo,
$$2^x = e^{x \log 2}, \qquad \pi^x = e^{x \log \pi}, \qquad 10^x = e^{x \log 10}.$$
La fórmula anterior permite hallar la derivada de a^x. Recuerden que a debe considerarse *constante*.

Teorema 3.1. *Tenemos*
$$\boxed{\frac{d(a^x)}{dx} = a^x(\log a).}$$

Demostración. Usamos la regla de la cadena. Sea $u = (\log a)x$. Entonces $du/dx = \log a$ y $a^x = e^u$. Por lo tanto,
$$\frac{d(a^x)}{dx} = \frac{d(e^u)}{du}\frac{du}{dx} = e^u(\log a) = a^x \log a$$
según se deseaba.

Ejemplo.
$$\frac{d(2^x)}{dx} = 2^x \log 2.$$

Advertencia. La derivada de x^x **NO** es $x^x \log x$. Obténgase en el ejercicio 7. La diferencia entre x^x y a^x (como 2^x o 10^x) es que a es constante, mientras que, en la expresión x^x, la variable x aparece dos veces.

El resultado del teorema 3.1 aclara el misterioso límite
$$\lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$
encontrado en la sección §1. Veremos ahora que este límite es igual a $\log 2$. De manera más general, sea $a > 0$ y sea
$$f(x) = a^x > .$$
En la sección §1 dimos el argumento de que
$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Por el teorema 3.1 sabemos además que

$$f'(x) = a^x \log a.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \log a.}$$

Como el log es estrictamente creciente, hay un solo número a tal que $\log a = 1$, y ese número es $a = e$. Así, la función exponencial e^x es la única entre todas las posibles funciones exponenciales a^x cuya derivada es igual a sí misma. Por el teorema 3.1, como

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \log a,$$

si $a \neq e$, entonces obtenemos el factor $\log a \neq 1$ en la fórmula para la derivada de a^x.

Como aplicación de nuestra teoría de la función exponencial podemos ocuparnos de la función potencia general (que dejamos pendiente en el capítulo III).

Teorema 3.2. *Sea c cualquier número, y sea*

$$f(x) = x^c$$

definida para $x > 0$. Entonces $f'(x)$ existe y es igual a

$$f'(x) = cx^{c-1}.$$

Demostración. Hacer $u = c\log x$. Por definición,

$$f(x) = e^{c\log x} = e^u.$$

Entonces

$$\frac{du}{dx} = \frac{c}{x}.$$

Usando la regla de la cadena, vemos que

$$f'(x) = e^u \cdot \frac{du}{dx} = e^{c\log x} \cdot \frac{c}{x} = x^c \cdot \frac{c}{x} = cx^c x^{-1} = cx^{c-1}.$$

Esto prueba nuestro teorema.

Advertencia. El número c en el teorema 3.2 es constante, y x es la variable. **No confundir**

$$\frac{dc^x}{dx} = c^x \log c \qquad \text{con} \qquad \frac{dx^c}{dx} = cx^{c-1}.$$

Ejemplo. Hallar la recta tangente a la curva $y = x^x$ en $x = 2$.

Podemos escribir la función x^x en la forma

$$y = f(x) = e^{x\log x}.$$

Entonces,

$$f'(x) = e^{x\log x}\left(x \cdot \frac{1}{x} + \log x\right)$$
$$= x^x(1 + \log x).$$

En particular, obtenemos la derivada (pendiente) en $x = 2$,

$$f'(2) = 2^2(1 + \log 2) = 4(1 + \log 2).$$

Tenemos $f(2) = 2^2 = 4$. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es

$$y - 4 = 4(1 + \log 2)(x - 2).$$

Definición. Cuando x y y son dos números tales que $y = 2^x$, es costumbre decir que x es el **log de y de base 2**. De manera análoga, si a es un número > 0 y $y = a^x = e^{x\log a}$, decimos que x es el **log de y de base a**. Cuando $y = e^x$, decimos simplemente que $x = \log y$.

El log de base a se escribe a veces $\log_a$.

Concluimos esta sección estudiando límites, que ahora son fáciles de manejar. En primer lugar tenemos

Límite 1.

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\log(1+h) = 1.}$$

En efecto, el límite del lado izquierdo no es más que el límite del cociente de Newton

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h) - \log 1}{h} = \log'(1).$$

Como $\log'(x) = 1/x$, se sigue que $\log'(1) = 1$, como se deseaba.

Límite 2.

$$\boxed{\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e.}$$

Demostración. Tenemos

$$(1+h)^{1/h} = e^{1/h\log(1+h)}$$

ya que, por definición, $a^x = e^{x\log a}$. Acabamos de ver que

$$\frac{1}{h}\log(1+h) \to 1 \qquad \text{cuando} \qquad h \to 0.$$

Por consiguiente,

$$e^{(1/h)\log(1+h)} \to e^1 = e \qquad \text{cuando} \qquad h \to 0.$$

Esto prueba el límite deseado.

Observación. Aquí estamos usando la *continuidad* de la función e^x.

Si x tiende a un número x_0, entonces e^x tiende a e^{x_0}.

Que la función e^x sea continua se sigue de la hipótesis de que e^x es diferenciable.

Por ejemplo, si x tiende a $\sqrt{2}$, entonces e^x tiende a $e^{\sqrt{2}}$.
Si x tiende a 1, entonces e^x tiende a $e^1 = e$.
Si x tiende a 0, entonces e^x tiende a $e^0 = 1$.

Regresemos al límite 2 y reformulemos este límite. Escribimos $h = 1/x$. Cuando h tiende a 0, x se vuelve grande, esto es,

$$h \to 0 \quad \text{si, y sólo si,} \quad x \to \infty.$$

A partir de eso hallamos el límite:

Límite 3.

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

En los ejercicios se dedujo fácilmente de este límite que, para $r > 0$, tenemos

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^x = e^r.}$$

Esto tiene una aplicación interesante.

Ejemplo. Interés compuesto. Sea A una cantidad de dinero invertida a interés compuesto anual de $100r$ por ciento, donde $r > 0$. Así r es la razón de la tasa de interés de 100 por ciento. Entonces esta cantidad original crece hasta las cantidades siguientes después del número indicado de años:

Después de 1 año: $A + rA = (1+r)A$.
Después de 2 años: $(1+r)A + r(1+r)A = (1+r)^2A$.
Después de 3 años: $(1+r)^2A + r(1+r)^2A = (1+r)^3A$.

Al continuar de esta manera concluimos que, después de n años, la cantidad es

$$A_n = (1+r)^nA.$$

Supongamos ahora que esta misma tasa de interés de $100r$ se compone cada $1/m$ años, donde m es un entero positivo. Esto es equivalente a decir que la tasa es de $100r/m$ por ciento por $1/m$ años, compuesto cada $1/m$ años. Apliquemos la fórmula anterior al caso donde la unidad de tiempo es $1/m$ años. Entonces q años son iguales a $qm \cdot 1/m$ años. Por lo tanto, si el interés se compone cada $1/m$ años, depués de q años la cantidad es

$$A_{q,m} = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{qm}A.$$

La cantidad que se obtiene después de q años, si el interés está compuesto continuamente, es el límite de $A_{q,m}$ cuando $m \to \infty$. A la luz del límite que el lector ya debe haber determinado, vemos que después de q años de composición continua, la cantidad es

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{qm}A = e^{rq}A.$$

Para dar un caso numérico, suponer que 1000 dólares producen el 15 por ciento compuesto anualmente. Entonces $r = 15/100$. Después de 10 años, la cantidad será

$$e^{\frac{15}{100}10}\cdot 1000 = e^{1.5}1000.$$

Como e es aproximadamente 2.7, se puede obtener una respuesta numérica definida.

VIII, §3. EJERCICIOS

1. ¿Cuál es la derivada de 10^x? ¿Y de 7^x?
2. ¿Cuál es la derivada de 3^x? ¿Y de π^x?
3. Trazar las curvas $y = 3^x$ y $y = 3^{-x}$. Localizar al menos cinco puntos.
4. Trazar las curvas $y = 2^x$ y $y = 2^{-x}$. Localizar al menos cinco puntos.
5. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 10^x$ en $x = 0$.
6. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de $y = \pi^x$ en $x = 2$.
7. (a) ¿Cuál es la derivada de la función x^x (definida para $x > 0$)? [*Idea:* $x^x = e^{x\log x}$]
   (b) ¿Cuál es la derivada de la función $x^{(x^x)}$?
8. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^x$
   (a) en el punto $x = 1$ (b) en $x = 2$ (c) en $x = 3$.

Hallar las rectas tangentes a las curvas siguientes:

9. $y = x^{\sqrt{x}}$ (*a*) en $x = 2$ (*b*) en $x = 5$
10. $y = x^{-\sqrt{x}}$ (*a*) en $x = 2$ (*b*) en $x = 5$
11. Si a es un número > 1 y $x > 0$, mostrar que
$$x^a - 1 \geq a(x-1).$$
12. Sea a un número > 0. Hallar los puntos críticos de la función $f(x) = x^2/a^x$.
13. Sea $0 < r$. Usando el límite 3, probar el límite
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{r}{x}\right)^x = e^r.$$
[*Idea:* Sea $x = ry$ y sea $y \to \infty$.]

14. Mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \log a.$$

[*Idea:* Sea $h = 1/n$.] Este ejercicio muestra cómo se pueden obtener aproximaciones del logaritmo con sólo tomar raíces n-ésimas ordinarias. De hecho, al tomar $n = 2^k$ y usar enteros grandes k, obtenemos aproximaciones arbitrariamente buenas de log al extraer una sucesión de raíces cuadradas. Hacerlo en una calculadora de bolsillo para verificarlo.

VIII, §4. ALGUNAS APLICACIONES

Se sabe (de datos experimentales) que cuando un trozo de radio se deja para que se desintegre, la razón de desintegración es proporcional a la cantidad de radio que queda. Dos cantidades son proporcionales cuando una es un múltiplo constante de la otra.

Supóngase que en el tiempo $t = 0$ tenemos 10 gramos de radio y que en el tiempo t queda $f(t)$ cantidad de radio. Entonces

$$\boxed{\frac{df}{dt} = Kf(t)}$$

para alguna constante K. Tomamos K negativa porque la interpretación física es que la cantidad de substancia decrece.

Mostremos que existe una constante C tal que

$$\boxed{f(t) = Ce^{Kt}.}$$

Si tomamos la derivada del cociente

$$\frac{f(t)}{e^{Kt}}$$

y usamos la regla para la derivada de un cociente, hallamos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{e^{Kt}}\right) = \frac{e^{Kt}f'(t) - Ke^{Kt}}{e^{2Kt}} = 0$$

pues $f'(t) = Kf(t)$. Como la derivada es 0, el cociente $f(t)/e^{Kt}$ es constante, o, de manera equivalente, hay una constante C tal que

$$f(t) = Ce^{Kt}.$$

Sea $t = 0$. Entonces $f(0) = C$. Así, $C = 10$, si se supone que comenzamos con 10 gramos.

En general, si $f(t) = Ce^{Kt}$ es la función que da la cantidad de substancia como función del tiempo, entonces

$$\boxed{f(0) = C,}$$

y C se interpreta como la cantidad de substancia cuando $t = 0$, esto es, la cantidad original.

También se puede considerar una reacción química. Es frecuente el caso en que la razón de la reacción es proporcional a la cantidad de la substancia reactiva presente. Si $f(t)$ denota la cantidad de substancia que queda después del tiempo t, entonces

$$\frac{df}{dt} = Kf(t)$$

para alguna constante K (determinada experimentalmente en cada caso). Estamos entonces en una situación semejante a la anterior, y

$$f(t) = Ce^{Kt},$$

donde C es la cantidad de substancia en $t = 0$.

Ejemplo 1. Suponer que $f(t) = 10e^{Kt}$, donde K es una constante. Suponer que $f(3) = 5$. Hallar K.

Tenemos

$$5 = 10e^{K3},$$

y entonces

$$e^{3K} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},$$

de donde

$$3K = \log(1/2) \quad \text{y} \quad K = \frac{-\log 2}{3}.$$

Ejemplo 2. El azúcar se disuelve en el agua a una razón proporcional a la cantidad aún sin disolver. Si 25 kg de azúcar se reducen a 7 kg en 3 hr, ¿cuándo se disolverá el 20 por ciento del azúcar?

Sea $S(t)$ la cantidad de azúcar que aún no se disuelve, en el instante t. Entonces, por hipótesis,

$$S(t) = Ce^{-kt}$$

para constantes adecuadas C y k. Más aún, como $S(0) = C$, tenemos $C = 25$. Así

$$S(t) = 25e^{-kt}.$$

También tenemos

$$S(3) = 25e^{-3k} = 7$$

de modo que

$$e^{-3k} = \frac{7}{25}.$$

Así podemos despejar k, a saber, tomamos el log y obtenemos

$$-3k = \log(7/25),$$

de donde

$$-k = \frac{1}{3}\log(7/25).$$

Cuando se ha disuelto el 20 por ciento, queda el 80 por ciento. Nótese que el 80 por ciento de 25 es 20. Queremos hallar t tal que

$$20 = 25e^{-kt},$$

o, en otras palabras,

$$e^{-kt} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Obtenemos

$$-kt = \log(4/5),$$

de donde

$$t = \frac{\log(4/5)}{-k} = 3\frac{\log(4/5)}{\log(3/10)}.$$

Ésta es nuestra respuesta.

Observación. No cambia el resultado si comenzamos con

$$S(t) = Ce^{-kt} \quad \text{o} \quad S(t) = Ce^{kt}.$$

Incluso pudimos haber trabajado el problema de otra manera. Para aplicaciones, cuando las substancias decrecen resulta conveniente usar una convención tal que $k > 0$, de modo que la expresión e^{-kt} decrezca cuando t crece. Pero matemáticamente, los procedimientos son equivalentes, basta hacer $K = -k$.

Ejemplo 3. Una substancia radiactiva se desintegra proporcionalmente a la cantidad de substancia presente en un instante dado, digamos

$$f(t)Ce^{-kt}$$

para alguna constante positiva k. ¿En qué instante quedará exactamente 1/4 de la cantidad original?

Para hacer esto, queremos saber el valor de t tal que

$$f(t) = C/4.$$

Por ello, queremos resolver

$$Ce^{-kt} = C/4.$$

Nótese que podemos cancelar C para obtener $e^{-kt} = 1/4$. Tomando logaritmos se tiene

$$-kt = -\log 4,$$

de donde

$$t = \frac{\log 4}{k}.$$

Observen que la respuesta es independiente de la cantidad original C. Los experimentos permiten determinar la constante k. Por ejemplo, si se pudiera analizar una muestra y determinar que queda 1/4 parte después de 1000 años, hallaríamos que

$$k = \frac{\log 4}{1000}.$$

Ejemplo 4 El crecimiento exponencial también refleja la explosión demográfica de la población. Si $P(t)$ es la población como función del tiempo t, entonces su razón de crecimiento es proporcional a la población total; en otras palabras,

$$\frac{dp}{dt} = KP(t)$$

para alguna constante positiva K. Se sigue entonces que

$$P(t) = Ce^{Kt}$$

para alguna constante C, que es la población en el instante $t = 0$.

Supongan que buscamos el instante en que se duplicará la población. Debemos entonces hallar t tal que

$$Ce^{Kt} = 2C,$$

o, de manera equivalente,

$$e^{Kt} = 2.$$

Al tomar log se tiene

$$Kt = \log 2,$$

de donde

$$t = \frac{\log 2}{K}.$$

Nótese que este instante depende sólo de la razón de cambio de la población, no del valor original de C.

VIII, §4. EJERCICIOS

1. Sea $f(t) = 10e^{Kt}$ para alguna constante K. Suponer que se sabe que $f(1/2) = 2$. Hallar K.
2. Sea $f(t) = Ce^{2t}$. Suponer que se sabe que $f(2) = 5$. Determinar la constante C.
3. Un gramo de radio se deja para que se desintegre. Después de un millón de años queda 0.1 gramo. ¿Cuál es la fórmula que da la razón de desintegración?
4. Cierta substancia química reacciona de manera que la razón de reacción es igual a la cantidad de substancia presente. Después de una hora, quedan 20 gramos de substancia. ¿Cuánta substancia había al principio?
5. Una substancia radiactiva se desintegra proporcionalmente a la cantidad de substancia presente en un instante dado, digamos

$$f(t) = Ce^{Kt}.$$

¿En qué instante habrá exactamente la mitad de la cantidad original presente?

6. Suponer que $K = -4$ en el ejercicio anterior. ¿En qué instante habrá un tercio de la substancia?

7. Si las bacterias crecen en número con una razón proporcional al número presente, ¿cuánto tiempo pasará antes de que 1 000 000 de bacterias aumenten a 10 000 000 si tardan 12 minutos en aumentar a 2 000 000?

8. Una substancia se descompone a razón proporcional a la cantidad presente. Después de 3 minutos se ha descompuesto el 10 por ciento de la substancia original. ¿Cuándo se descompondrá la mitad de la cantidad original?

9. Sea f una función de una variable t y crece a la razón $df/dt = kf$, donde k es una constante. Sea $a_n = f(nt_1)$, donde t_1 es un valor fijo de t, $t_1 > 0$. Mostrar que $a_0, a_1, a_2, \ldots$ es una progresión geométrica.

10. En 1900, la población de una ciudad fue de 50 000 habitantes. En 1950 fue de 100 000. Si la razón de crecimiento de la población es proporcional a la población, ¿cuál será la población en 1984? ¿En qué año será de 200 000?

11. Suponer que la razón de cambio de la presión atmosférica con respecto a la altura, a cualquier altura, es proporcional a la presión que hay ahí. Si en el barómetro se lee 30 a nivel del mar y 24 a 1835 m, hallar la lectura barométrica a los 3058 m sobre el nivel del mar.

12. El azúcar se disuelve en el agua a razón proporcional a la cantidad todavía sin disolverse. Si 13.6 kg de azúcar se reducen a 4.5 kg en 4 hr, ¿cuándo se disolverá el 95 por ciento del azúcar?

13. Una partícula se mueve con velocidad $s(t)$ que satisface $ds/dt = -ks$, donde k es alguna constante. Si la velocidad inicial es de 16 unidades/min y si la velocidad se disminuye a la mitad en 2 min, hallar el valor de t cuando la velocidad es de 10 unidades/min.

14. Suponer que la diferencia x entre la temperatura de un cuerpo y su medio ambiente decrece a razón proporcional a su diferencia. Si $x = 100°$ cuando $t = 0$, y $x = 40°$ cuando $t = 40$ minutos, hallar t (a) cuando $x = 70°$, (b) cuando $x = 16°$, (c) el valor de x cuando $t = 20$.

15. Al apostar, un jugador inexperto pierde dinero a una razón igual a la cantidad que tiene en cada instante. ¿En qué instante t habrá perdido la mitad de su capital inicial?

16. Se sabe que el carbono radiactivo tiene una vida media de 5568 años, lo cual significa que eso tarda en descomponerse la mitad de la cantidad original. Además, la razón de descomposición es proporcional a la cantidad presente, de modo que, por lo que hemos visto en el texto, tenemos la fórmula
$$f(t) = Ce^{Kt}$$
para esta cantidad, donde C y K son constantes.
(a) Hallar explícitamente la constante K.
(b) Se halla algo de carbono descompuesto en una cueva y un análisis muestra que se ha descompuesto un quinto de la cantidad original. ¿Cuánto tiempo lleva el carbono en la cueva?

VIII, §5. ORDEN DE MAGNITUD

En esta sección analizamos más de cerca el significado de nuestra expresión acerca de que e^x crece mucho más rápido que x, y $\log x$ crece mucho más despacio que x, cuando x se vuelve grande positivo.

Consideremos el cociente
$$\frac{e^x}{x}$$
cuando x se vuelve grande positivo. Tanto el numerador como el denominador se vuelven grandes, y la cuestión es: ¿cuál es el comportamiento del cociente?

Primero hagamos una tabla para valores sencillos $2^n/n$ cuando n es un *entero positivo*, para ver experimentalmente que $2^n/n$ se vuelve grande cuando n se vuelve grande. Acordemos que n denotará siempre a un entero positivo, a menos que se especifique otra cosa.

n	2^n	$2^n/n$
1	2	2
2	4	2
3	8	8/3
4	16	4
5	32	$32/5 > 6$
10	1024	$102.4 > 100$
20	1048 576	$52\,428.8 > 5 \times 10^4$

Como $2 < e$, tenemos $2^n/n < e^n/n$, y vemos *experimentalmente* que e^n/n se vuelve grande. Ahora queremos *probar* esto. Probemos primero algunas desigualdades para e^x. Usamos técnicas de los ejercicios de la sección §1 y procedemos por pasos. Consideremos $x \geq 0$.

(a) Mostremos primero que
$$\boxed{1 + x < e^x \quad \text{para} \quad x > 0.}$$

Sea $f_1(x) = e^x - (1 + x)$. Entonces $f_1'(x) = e^x - 1$. Como $e^x > 1$ para $x > 0$, concluimos que
$$f_1'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.$$
Por lo tanto, $f_1(x)$ es estrictamente creciente para $x \geq 0$. Como $f_1(0) = 0$, concluimos que $f_1(x) > 0$ para $x > 0$, lo cual significa que
$$e^x - (1 + x) > 0, \quad \text{o en otras palabras,} \quad e^x > 1 + x,$$
como se quería demostrar.

(b) A continuación mostramos que
$$\boxed{1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x \text{ para } x > 0.}$$

Sea $f_2(x) = e^x - (1 + x + x^2/2)$. Entonces $f_2(0) = 0$. Más aún,

$$f_2'(x) = e^x - (1 + x).$$

Por la parte (a), sabemos que $f_2'(x) > 0$ para $x > 0$. Por lo tanto, f_2 es estrictamente creciente, y se sigue que $f_2(x) > 0$ para $x > 0$, o, en otras palabras,

$$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Esto prueba la desigualdad deseada.

Teorema 5.1. *La función e^x/x se vuelve grande cuando x se vuelve grande.*

Demostración. Dividimos ambos lados de la desigualdad (b) entre x y obtenemos

$$\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} < \frac{e^x}{x}.$$

Cuando x se vuelve grande, sucede lo mismo con el lado izquierdo, y queda probado el teorema 5.1.

Teorema 5.2. *La función e^x/x^2 se vuelve grande cuando x se vuelve grande. De manera más general, sea m un número positivo. Entonces*

$$\frac{e^x}{x^m} \to \infty \quad \textit{cuando} \quad x \to \infty.$$

Demostración. Usamos el mismo método. Primero se prueba la desigualdad

(c) $$\boxed{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} < e^x \quad \textit{para} \quad x > 0.}$$

Recordar que, por definición, $2! = 2$ y $3! = 3 \cdot 2 = 6$. Esta vez hacemos

$$f_3(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right).$$

Entonces $f_3(0) = 0$. Más aún, al usar la desigualdad (b) hallamos

$$f_3'(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) = f_2(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Por lo tanto, $f_3(x)$ es estrictamente creciente y entonces $f_3(x) > 0$ para $x > 0$. Esto prueba la desigualdad (c).

Si dividimos ambos lados de la desigualdad (c) por x^2, hallaremos

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{6} < \frac{e^x}{x^2}.$$

Cuando x se vuelve grande, el lado izquierdo se vuelve grande, de modo que e^x/x^2 se vuelve grande. Esto prueba la primera afirmación del teorema 5.2.

Podemos continuar con el mismo método para probar el enunciado general acerca de e^x/x^n. En primer lugar deberá probarse que

(d) $$\boxed{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} < e^x \quad \textit{para} \quad x > 0}$$

para tener idea del procedimiento secuencial que se usó. Probaremos ahora el paso general usando un entero arbitrario n. En general, sea

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Supongamos que ya se probó que

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} < e^x \quad \text{para} \quad x > 0,$$

o, en otras palabras, que

$$P_n(x) < e^x \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Después probaremos que

$$P_{n+1}(x) < e^x \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Para esto, hagamos

$$f_{n+1}(x) = e^x - P_{n+1}(x) \quad \text{y} \quad f_n(x) = e^x - P_n(x).$$

Entonces, $f_{n+1}(0) = 0$ y $f_{n+1}'(x) = f_n(x) > 0$ para $x > 0$. Por lo tanto, f_{n+1} es estrictamente creciente, y entonces $f_{n+1}(x) > 0$ para $x > 0$, como se deseaba.

Así pues, dado nuestro entero m, tenemos una desigualdad

$$\boxed{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} < e^x \quad \text{para} \quad x > 0.}$$

Dividimos ambos lados de esta desigualdad entre x^m. Entonces el lado izquierdo está formado por una suma de términos positivos, el último de los cuales es

$$\frac{x}{(m+1)!}.$$

Por lo tanto, obtenemos la desigualdad

$$\frac{x}{(m+1)!} < \frac{e^x}{x^m} \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Como el lado izquierdo se vuelve grande cuando x se vuelve grande, sucede lo mismo con el lado derecho, y queda probado el teorema 5.2.

Ejemplo. Tracemos la gráfica de $f(x) = xe^x$. Tenemos

$$f'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1).$$

Como $e^x > 0$ para todo x, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\iff x+1=0 &\iff x=-1,\\
f'(x) > 0 &\iff x+1>0 &\iff x>-1,\\
f'(x) < 0 &\iff x+1<0 &\iff x<-1.
\end{aligned}
$$

Hay un solo punto crítico en $x = -1$, y las otras desigualdades nos dan regiones de crecimiento y de decrecimiento para f.

Respecto hacia dónde se dobla:

$$f''(x) = e^x \cdot 1 + e^x(x+1) = e^x(x+2).$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
f''(x) = 0 &\iff x=-2, &\\
f''(x) > 0 &\iff x>-2 &\iff f \text{ se dobla hacia arriba},\\
f''(x) < 0 &\iff x<-2 &\iff f \text{ se dobla hacia abajo}.
\end{aligned}
$$

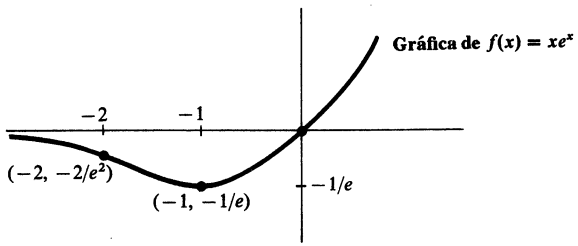
Si $x \to \infty$, entonces $e^x \to \infty$, de modo que $f(x) \to \infty$.

Si $x \to -\infty$, entonces hacemos $x = -y$, con $y \to \infty$.

Por el teorema 5.1,

$$xe^x = -ye^{-y} \to 0 \quad \text{si} \quad y \to \infty.$$

Finalmente, $f(0) = 0$, $f(-1) = -1/e$, $f(-2) = -2/e^2$, por lo que la gráfica se ve así.



Ejemplo. Sea $0 < a < 1$, donde a es un número fijo. Hallar el máximo de la función

$$f(x) = xa^x.$$

Primero se toma la derivada:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= x \cdot a^x \log a + a^x\\
&= a^x(x \log a + 1)
\end{aligned}
$$

Como $a^x > 0$ para todo x, vemos que

$$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{\log a}.$$

Así, la función tiene exactamente un punto crítico. Más aún,

$$
\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\iff x\log a + 1 > 0 &\iff x < -\frac{1}{\log a}\\
f'(x) < 0 &\iff x\log a + 1 < 0 &\iff x > -\frac{1}{\log a}.
\end{aligned}
$$

(Recuerden que $0 < a < 1$, de modo que $\log a$ es negativo.) En consecuencia, la función es creciente en el intervalo situado a la izquierda del punto crítico, y decreciente en el intervalo que está a la derecha del punto crítico. Entonces, el punto crítico es el máximo deseado. El valor de f en este punto crítico es igual a

$$
\begin{aligned}
f(-1/\log a) &= -\frac{1}{\log a} a^{-1/\log a} = -\frac{1}{\log a} e^{-\log a/\log a}\\
&= -\frac{1}{e \log a}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo. Mostrar que la ecuación $3^x = 5x$ tiene al menos una solución.

Sea $f(x) = 3^x - 5x$. Entonces $f(0) = 1$ y, mediante intento y corrección, hallamos un valor donde f sea negativa, a saber

$$f(2) = 9 - 10 < 0.$$

Por el teorema del valor intermedio, existe algún número x entre 2 y 0 tal que $f(x) = 0$, y este número llena nuestros requerimientos.

De los teoremas 5.1 y 5.2, por medio de un cambio de variable, podemos analizar lo que sucede cuando se compara $\log x$ con potencias de x.

Teorema 5.3. *Cuando x se vuelve grande, el cociente $x/\log x$ también se vuelve grande.*

Demostración. Nuestra estrategia es reducir este enunciado al teorema 5.1. Hacemos un cambio de variables. Sea $y = \log x$. Entonces $x = e^y$ y nuestro cociente tiene la forma

$$\frac{x}{\log x} = \frac{e^y}{y}.$$

Sabemos que $y = \log x$ se vuelve grande cuando x se vuelve grande. Y, por el teorema 5.1, lo mismo sucede con e^y/y. Esto prueba el teorema.

Corolario 5.4. *Cuando x se vuelve grande, la función $x - \log x$ también se vuelve grande.*

Demostración. Escribimos

$$x - \log x = x\left(1 - \frac{\log x}{x}\right),$$

que es el factor x en la expresión $x - \log x$. Por el teorema 5.3, $(\log x)/x$ tiende a 0 cuando x se vuelve grande y, como resultado, el factor

$$1 - \frac{\log x}{x}$$

tiende a 1. El factor x se vuelve grande, por lo que el producto se vuelve grande. Esto prueba el corolario.

Observación. Hemos usado la misma técnica de factorización que la usada al analizar el comportamiento de los polinomios, como cuando escribimos

$$x^3 - 2x^2 + 5 = x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^3}\right)$$

para ver que el término x^3 determina el comportamiento del polinomio cuando x se vuelve grande.

Corolario 5.5. *Cuando x se vuelve grande, $x^{1/x}$ tiende a 1 como límite.*
Demostración. Escribimos

$$x^{1/x} = e^{(\log x)/x}.$$

Por el teorema 5.3 sabemos que $(\log x)/x$ tiende a 0 cuando x se vuelve grande. Por lo tanto,

$$e^{(\log x)/x}$$

tiende a 1, según se deseaba.

Observación. En el corolario 4.5 usamos el hecho de que la función e^u es continua, pues cualquier función diferenciable es continua. Si u tiende a u_0 entonces e^u tiende a e^{u_0}. Así, si $u = (\log x)/x$, entonces u tiende a 0 cuando x se vuelve grande, de modo que e^u tiende a $e^0 = 1$.

VIII, §5. EJERCICIOS

1. Trazar la gráfica de la curva $y = xe^{2x}$. En éstos y otros ejercicios pueden considerarse opcionales las cuestiones de convexidad, pero suelen salir fácilmente.
Trazar las gráficas de las funciones siguientes. (En los ejercicios del 6 al 10, $x \neq 0$.)

2. xe^{-x}	3. xe^{-x^2}	4. $x^2e^{-x^2}$
5. x^2e^{-x}	6. e^x/x	7. e^x/x^2
8. e^x/x^3	9. $e^x - x$	10. $e^x + x$
11. $e^{-x} + x$		

12. Trazar la gráfica de $f(x) = x - \log x$.
13. Mostrar que la ecuación $e^x = ax$ tiene al menos una solución para cualquier número a excepto cuando $0 \leq a < e$.
14. (a) Dar valores de $x \log x$ cuando $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, en general cuando $x = 1/2^n$ para algún entero positivo n.
(b) ¿Tiende $x \log x$ a un límite cuando $x \to 0$? ¿Qué sucede con $x^2 \log x$? [*Idea:* Sea $x = e^{-y}$, donde y se hace grande.]
15. Sea n un entero positivo. Probar que $x(\log x)^n \to 0$ cuando $x \to 0$.
16. Probar que $(\log x)^n x \to 0$ cuando $x \to \infty$.

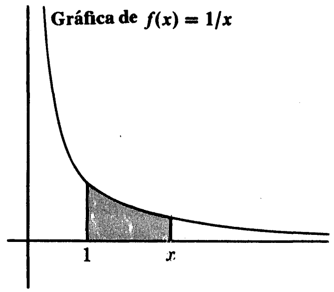
17. Trazar las curvas siguientes para $x > 0$.
(a) $y = x \log x$ (b) $y = x^2 \log x$
(c) $y = x(\log x)^2$ (d) $y = x/\log x$
18. Mostrar que la función $f(x) = x^x$ es estrictamente creciente para $x > 1/e$.
19. Trazar la curva $f(x) = x^x$ para $x > 0$.
20. Trazar la curva $f(x) = x^{-x}$ para $x > 0$.
21. Sea $f(x) = 2^x x^x$. Mostrar que f es estrictamente creciente para $x > 1/2e$.
22. Hallar los límites siguientes cuando $n \to \infty$
(a) $(\log n)^{1/n}$ (b) $[(\log n)/n]^{1/n}$
(c) $(n/e^n)^{1/n}$ (d) $(n \log n)^{1/n}$

VIII, §6. EL LOGARITMO COMO EL ÁREA BAJO LA CURVA 1/x

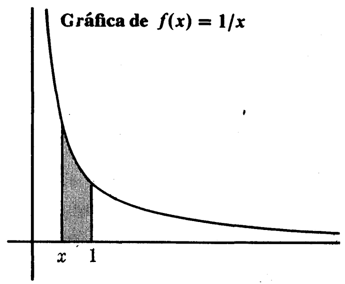
Esta sección es interesante por sí misma, pues nos da una idea más clara de lo que es el logaritmo. También proporciona una agradable y breve introducción a la integración, la cual se analizará en la parte siguiente. Daremos una interpretación del logaritmo como el área bajo una curva.

Definimos una función $L(x)$ como el área bajo la curva $1/x$ entre 1 y x si $x \geq 1$, y el negativo del área bajo la curva $1/x$ entre 1 y x si $0 < x < 1$. En particular, $L(1) = 0$.

La parte sombreada de la figura siguiente representa el área bajo la curva entre 1 y x. Del lado izquierdo tomamos $x > 1$.



$L(x)$ para $x > 1$



$L(x)$ para $0 < x < 1$

Si $0 < x < 1$, tendríamos la figura que se muestra a la derecha. Hemos dicho que, si $0 < x < 1$, entonces $L(x)$ es igual al negativo del área. Así, $L(x) < 0$ si $0 < x < 1$, y $L(x) > 0$ si $x > 1$.

Probaremos:

1. $L'(x) = 1/x$.
2. $L(x) = \log x$.

La primera afirmación de que $L'(x) = 1/x$ es independiente de todo lo demás en este capítulo, y lo enunciamos en un teorema separado.

Teorema 6.1. *La función $L(x)$ es diferenciable, y*

$$\frac{dL(x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Demostración. Formamos el cociente de Newton

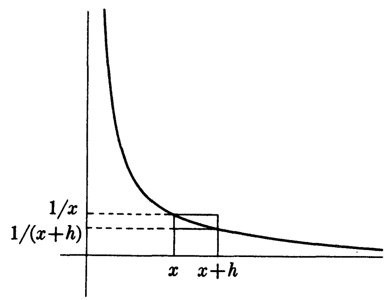
$$\frac{L(x+h) - L(x)}{h}$$

y debemos probar que tiende al límite $1/x$ cuando h tiende a 0.

Tomemos por el momento $x \geq 1$ y $h > 0$. Entonces, $L(x+h) - L(x)$ es el área bajo la curva entre x y $x+h$. Como la curva $1/x$ es decreciente, esta área satisface las desigualdades siguientes:

$$h\frac{1}{x+h} < L(x+h) - L(x) < h\frac{1}{x}.$$

En efecto, $1/x$ es la altura del rectángulo grande según está trazado en la figura siguiente y $1/(x+h)$ es la altura del rectángulo pequeño. Como h es la base del rectángulo, y como el área bajo la curva $1/x$ entre x y $x+h$ está entre



los dos rectángulos, vemos que satisface nuestras desigualdades. Dividimos ambos lados de las desigualdades entre el número positivo h. Entonces se preservan las desigualdades y obtenemos

$$\frac{1}{x+h} < \frac{L(x+h) - L(x)}{h} < \frac{1}{x}.$$

Cuando h tiende a 0, el cociente de Newton está comprimido entre $1/(x+h)$ y $1/x$ y en consecuencia tiende a $1/x$. Esto prueba nuestro teorema en el caso $h > 0$.

Cuando $h < 0$, usamos un argumento análogo, que dejamos como ejercicio. (Se deberá prestar atención al signo de L. Además, cuando se divida una desigualdad entre h y $h < 0$, se invertirá el sentido de la desigualdad. Sin embargo, se verá que de nuevo el cociente de Newton se comprimé entre $1/x$ y $1/(x+h)$.)

Teorema 6.2. *La función $L(x)$ es igual a $\log x$.*

Demostración. Ambas funciones, $L(x)$ y $\log x$, tienen la misma derivada, a saber, $1/x$ para $x > 0$. Por lo tanto, existe una constante C tal que

$$L(x) = \log x + C.$$

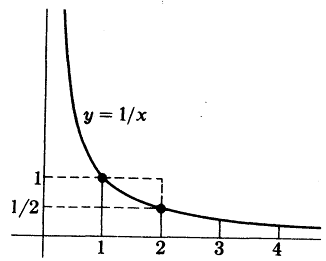
Esto es cierto para todo $x > 0$. En particular, sea $x = 1$. Obtenemos

$$0 = L(1) = \log 1 + C.$$

Pero $\log 1 = 0$. Por lo tanto, $C = 0$, y el teorema está probado.

Puede usarse la identificación de log con el área bajo la curva $1/x$ para dar desigualdades para el log. Esto es sencillo y se propone como ejercicio. También podemos obtener un estimado para e.

Ejemplo. El área bajo la curva $1/x$ entre 1 y 2 es menor que el área de un rectángulo cuya base es el intervalo $[1, 2]$ y cuya altura es 1, según se muestra en la figura siguiente.



Por lo tanto, obtenemos la desigualdad

$$\log 2 < 1.$$

Como $\log e = 1$, se sigue que $2 < e$. Esto da un estimado por abajo de e.

De manera análoga obtenemos un estimado por arriba. El área bajo la curva $1/x$ entre 1 y 2 es mayor que el área del rectángulo cuya base es el intervalo $[1, 2]$ y cuya altura es $1/2$, según se mostró en la figura anterior. Por lo tanto, obtenemos la desigualdad

$$\log 2 > \frac{1}{2}.$$

Entonces

$$\log 4 = \log(2^2) = 2\log 2 > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Como $\log e = 1$, se sigue que $e < 4$.

En los ejercicios del 16 al 19 de la sección §1 vimos otro método para obtener estimados para e. El método con el área bajo la curva se puede usar en otros contextos, y es útil por sí mismo.

VIII, §6. EJERCICIOS

1. Sea h un número positivo. Comparar el área bajo la curva $1/x$ entre 1 y $1+h$ con el área de rectángulos adecuados para mostrar que
$$\frac{h}{1+h} < \log(1+h) < h.$$
2. Probar, usando el ejercicio 1, que
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\log(1+h) = 1.$$
3. Probar, mediante comparación de áreas, que para todo entero positivo n tenemos
$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$
4. En lugar de usar, como en el texto, $\log 4 = \log(2^2)$, usar dos rectángulos bajo la gráfica de $1/x$, con bases $[1,2]$ y $[2,4]$, para mostrar que $\log 4 > 1$.

VIII, APÉNDICE. DEMOSTRACIÓN SISTEMÁTICA DE LA TEORÍA DE EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

En lugar de suponer las cinco propiedades básicas de la función exponencial, como en las secciones §1 y §3, pudimos dar una presentación del log y de la exponencial como sigue. Esto es sólo para quienes estén interesados en la teoría.

Comenzamos definiendo $L(x)$ como lo hicimos en la sección §6. La demostración de que $L'(x) = 1/x$ es autocontenida y produce una función L definida para todo $x > 0$ y que satisface
$$L'(x) = 1/x \quad \text{y} \quad L(0) = 1.$$
Como $1/x > 0$ para todo $x > 0$, se sigue que la función L es estrictamente creciente, de modo que tiene función inversa que denotamos por $x = E(y)$. Entonces, al usar la regla para la derivada de una función inversa, hallamos:
$$E'(y) = \frac{1}{L'(x)} = \frac{1}{1/x} = x = E(y).$$
Así hemos hallado una función E tal que $E'(y) = E(y)$ para todo y. En otras palabras, hemos hallado una función igual a su propia derivada.

Como $L(0) = 1$, hallamos que $E(1) = 0$.

A continuación probamos:

Para todos los números a, $b > 0$ tenemos
$$\boxed{L(ab) = L(a) + L(b).}$$

Demostración. Fijar el número a y sea $f(x) = L(ax)$. Por la regla de la cadena, obtenemos
$$f'(x) = \frac{1}{ax}\cdot a = \frac{1}{x}.$$

Como L y f tienen la misma derivada, hay una constante C tal que $f(x) = L(x) + C$ para todo $x > 0$. En particular, para $x = 1$ obtenemos
$$L(a) = f(1) = L(1) + C = 0 + C = C.$$
De modo que $L(a) = C$ y $L(ax) = L(x) + L(a)$. Esto prueba la primera propiedad.

Como $L'(x) = 1/x > 0$ para $x > 0$, se sigue que L es estrictamente creciente. Como $L''(x) = -1/x^2 < 0$, se sigue que L se dobla hacia abajo.

Sea $a > 0$. Obtenemos:
$$L(a^2) = L(a) + L(a) = 2L(a),$$
$$L(a^3) = L(a^2a) = L(a^2) + L(a) = 2L(a) + L(a) = 3L(a).$$
Al continuar de esta manera, obtenemos que, para todos los enteros positivos n:
$$L(a^n) = nL(a)$$
En particular, tómese $a > 1$. Como $L(1) = 0$, concluimos que $L(a) > 0$, pues L es estrictamente creciente. Por lo tanto, $L(a^n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$. De nuevo, dado que L es estrictamente creciente, se sigue que $L(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$.

De la fórmula
$$0 = L(1) = L(aa^{-1}) = L(a) + L(a^{-1})$$
concluimos que
$$\boxed{L(a^{-1}) = -L(a).}$$
A continuación, sea x que tiende a 0. Se escribe $x = 1/y$ donde $y \to \infty$. Entonces
$$L(x) = -L(y) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad y \to \infty$$
de modo que $L(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0$.

Sea ahora E la función inversa de L. Ya probamos que $E' = E$. La función inversa de L se define en el conjunto de valores de L, que son todos los números. El conjunto de valores de E es el dominio de definición de L, que es el conjunto de los números positivos. De este modo, $E(y) > 0$ para todo y. Así, E es estrictamente creciente y $E''(y) = E(y)$ para todo y muestra que la gráfica de E se dobla hacia arriba.

Tenemos que $E(0) = 1$, pues $L(1) = 0$.

Entonces podemos probar que
$$\boxed{E(u+v) = E(u)E(v).}$$
A saber, sean $a = E(u)$ y $b = E(v)$. Por el significado de función inversa, $u = L(a)$ y $v = L(b)$. Entonces:
$$L(ab) = L(a) + L(b) = u + v.$$
Por lo tanto,
$$E(u)E(v) = ab = E(u+v),$$
como había que mostrar.

Definimos ahora $e = E(1)$. Como E es la función inversa de L, tenemos $L(e) = 1$. De la regla

$$E(u+v) = E(u)E(v)$$

obtenemos ahora que, para cualquier entero positivo n,

$$E(n) = E(1+1+\cdots+1) = E(1)^n = e^n.$$

De manera análoga,

$$E(nu) = E(u)^n.$$

Hacer $u = 1/n$. Entonces

$$e = E(1) = E\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = E\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Por consiguiente, $E(1/n)$ es la raíz n-ésima de e. A partir de ahora escribiremos

$$e^u \quad \text{en lugar de} \quad E(u).$$

A continuación tratamos con la función exponencial general.

Sea a un número positivo y x cualquier número. **Definimos**

$$\boxed{a^x = e^{x \log a}.}$$

Así,

$$a^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\log a}.$$

Al hacer $u = x\log a$ y usando $\log e^u = u$, hallamos la fórmula

$$\boxed{\log a^x = x \log a.}$$

Por ejemplo,

$$\log 3^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\log 3.$$

Una vez hecha la definición general de a^x, en aquellos casos donde tenemos una idea preconcebida de lo que deberá ser a^x, por ejemplo cuando $x = n$ es un entero positivo, debemos estar seguros de que

$$e^{n\log a} \quad \text{es el producto de } a \text{ consigo mismo } n \text{ veces.}$$

Por ejemplo, tomar $x = 2$. Entonces

$$e^{2\log a} = e^{\log a + \log a} = e^{\log a}e^{\log a} = a \cdot a,$$

$$e^{3\log a} = e^{\log a + \log a + \log a} = e^{\log a}e^{\log a}e^{\log a} = a \cdot a \cdot a.$$

y así sucesivamente. Para cualquier entero positivo n tenemos

$$\begin{aligned} e^{n\log a} &= e^{\log a + \log a + \cdots + \log a} \\ &= e^{\log a}e^{\log a}\cdots e^{\log a} \\ &= a \cdot a \cdots a \quad \text{(producto tomado } n \text{ veces).} \end{aligned}$$

Entonces, si n es un entero positivo, $e^{n\log a}$ significa el producto de a consigo mismo n veces.

De manera análoga,

$$\begin{aligned} (e^{(1/n)\log a})^n &= e^{(1/n)\log a}e^{(1/n)\log a}\cdots e^{(1/n)\log a} \quad \text{(producto tomado } n \text{ veces)} \\ &= e^{(1/n)\log a + (1/n)\log a + \cdots + (1/n)\log a} \\ &= e^{\log a} \\ &= a. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la n-ésima potencia de $e^{(1/n)\log a}$ es igual a a, de modo que

$$e^{(1/n)\log a} \quad \textit{es la } n\textit{-ésima raíz de } a.$$

Esto muestra que $e^{x\log a}$ es lo que se espera cuando x es un entero positivo o una fracción.

A continuación probamos otras propiedades de la función a^x. En primer lugar:

$$\boxed{a^0 = 1.}$$

Demostración. Por definición, $a^0 = e^{0\log a} = e^0 = 1$.

Para todos los números x y y tenemos

$$\boxed{a^{x+y} = a^x a^y.}$$

Demostración. Comenzamos con el lado derecho para tener

$$\begin{aligned} a^x a^y = e^{x\log a}e^{y\log a} &= e^{x\log a + y\log a} \\ &= e^{(x+y)\log a} \\ &= a^{x+y}. \end{aligned}$$

Esto prueba la fórmula.

Para todos los números x y y,

$$\boxed{(a^x)^y = a^{xy}.}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= e^{y\log a^x} && (\text{pues } u^y = e^{y\log u} \text{ para } u > 0) \\ &= e^{yx\log a} && (\text{pues } \log a^x = x\log a) \\ &= a^{xy} && (\text{pues } a^t = e^{t\log a}, \text{ con el valor particular } t = xy = yx) \end{aligned}$$

probando así la propiedad deseada.

Hasta aquí ya recuperamos las cinco propiedades de la función exponencial general que se usaron en las secciones §1, §2 y §3.

VIII, APÉNDICE. EJERCICIO

Suponer que no se sabe nada acerca de las funciones logaritmo y exponencial. Se nos da una función E tal que

$$E'(x) = E(x) \quad \text{para todos los números } x, \quad \text{y} \quad E(0) = 1.$$

Probar:

(a) $E(x) \neq 0$ para todo x. [*Idea:* Diferenciar el producto $E(x)E(-x)$ para mostrar que este producto es constante. Usar $E(0) = 1$ y decir cuál es la constante.]

(b) Sea f una función tal que $f'(x) = f(x)$ para todo x. Mostrar que existe una constante C tal que $f(x) = CE(x)$.

(c) Para todos los números u y v, la función E satisface

$$E(u + v) = E(u)E(v).$$

[*Idea:* Fijar el número u y sea $f(x) = E(u + x)$. Después aplicar (b).]

Parte tres

Integración

CAPÍTULO IX

Integración

En este capítulo resolveremos de manera más o menos simultánea los problemas siguientes:

(1) Dada una función $f(x)$, hallar una función $F(x)$ tal que

$$F'(x) = f(x).$$

Esto es lo inverso de la diferenciación y se llama integración.

(2) Dada una función $f(x)$ que sea ≥ 0, dar una definición de área bajo la curva $y = f(x)$ que no recurra a la intuición geométrica.

En realidad, en este capítulo damos las ideas que dan origen a las soluciones de nuestros dos problemas. Las técnicas que nos permiten calcular realmente cuando se dan datos específicos se postergarán para el capítulo siguiente.

Al desarrollar el problema (2) seguiremos una idea de Arquímedes. Se trata de aproximar la función f mediante funciones horizontales, y el área bajo f mediante la suma de pequeños rectángulos.

IX, §1. LA INTEGRAL INDEFINIDA

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo.

Definición. Una **integral indefinida** para f es una función F tal que

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \text{ en el intervalo.}$$

Si $G(x)$ es otra integral indefinida de f, entonces también $G'(x) = f(x)$. Por lo tanto, la derivada de la diferencia $F - G$ es 0:

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

En consecuencia, por el corolario 3.3 del capítulo V, existe una constante C tal que

$$F(x) = G(x) + C$$

para todo x en el intervalo.

Ejemplo 1. Una integral indefinida para $\cos x$ sería $\operatorname{sen} x$. Pero también $\operatorname{sen} x + 5$ es una integral indefinida para $\cos x$.

Ejemplo 2. $\log x$ es una integral indefinida para $1/x$, y también lo es $\log x + 10$ o $\log x - \pi$.

En el capítulo siguiente se desarrollarán técnicas para hallar integrales indefinidas. Aquí simplemente observamos que cada vez que se prueba una fórmula para una derivada, tiene una análoga para la integral.

Es costumbre denotar una integral indefinida de una función f por

$$\int f \quad \text{o} \quad \int f(x)\,dx.$$

En esta segunda notación, la dx carece de sentido por sí misma. Es la expresión completa $\int f(x)\,dx$ la que tiene sentido. Cuando estudiemos el método de la sustitución en el siguiente capítulo, confirmaremos lo práctico de nuestra notación.

Haremos ahora una tabla de algunas integrales indefinidas usando la información obtenida sobre las derivadas.

Sea n un entero, $n \neq -1$. Entonces tenemos

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.}$$

Si $n = -1$, entonces

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \log x.}$$

(Esto es cierto sólo en el intervalo $x > 0$.)

En el intervalo $x > 0$ tenemos además

$$\boxed{\int x^c\,dx = \frac{x^{c+1}}{c+1}}$$

para cualquier número $c \neq -1$.

Las siguientes integrales indefinidas son válidas para todo x.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x, & \displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x, \\ \displaystyle\int e^x\,dx = e^x, & \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x. \end{array}}$$

Finalmente, para $-1 < x < 1$ tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x.$$

En la práctica se omite con frecuencia el intervalo en el cual están definidas las diferentes funciones con las que trabajamos. Sin embargo, debemos tenerlo presente en cualquier problema específico. Por ejemplo, si escribimos

$$\int x^{-1/3}\,dx = \tfrac{3}{2} \cdot x^{2/3},$$

esto es válido para $x > 0$ y también es válido para $x < 0$. Pero 0 no puede estar en ningún intervalo de definición de nuestra función. Así, podríamos tener

$$\int x^{-1/3}\,dx = \tfrac{3}{2} \cdot x^{2/3} + 5$$

cuando $x < 0$, y

$$\int x^{-1/3}\,dx = \tfrac{3}{2} \cdot x^{2/3} - 2$$

cuando $x > 0$. También se podrían usar otras constantes cualesquiera además de 5 y -2.

Acordemos que las integrales indefinidas están definidas sólo sobre intervalos. Así, al considerar la función $1/x$, tenemos que considerar **separadamente** los casos $x > 0$ y $x < 0$. Para $x > 0$ ya observamos que $\log x$ es una integral indefinida. Sucede que también para el intervalo $x < 0$ podemos encontrar una integral indefinida, y de hecho tenemos

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \log(-x), \quad \text{para} \quad x < 0.}$$

Observen que, cuando $x < 0$, $-x$ es positivo, y así $\log(-x)$ tiene sentido. Por la regla de la cadena, la derivada de $\log(-x)$ es igual a $1/x$; a saber, sea $u = -x$. Entonces $du/dx = -1$, y

$$\frac{d\log(-x)}{dx} = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Para $x < 0$, cualquier otra integral indefinida está dada por

$$\log(-x) + C,$$

donde C es una constante.

A veces se dice que, para todos los casos,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C.$$

Con nuestras convenciones no atribuimos significado a esto, pues nuestras funciones no están definidas sobre todos los intervalos (lo impide la ausencia del punto 0). En todo caso, la fórmula sería **falsa**. En efecto, para $x < 0$ tenemos

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C_1,$$

y para $x > 0$ tenemos

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C_2.$$

Sin embargo, las dos constantes no son iguales necesariamente, y, por lo tanto, no podemos escribir

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$$

para todos los casos. Esta fórmula es cierta sólo sobre un intervalo que no contenga a 0.

IX, §1. EJERCICIOS

Hallar integrales indefinidas para las funciones siguientes:

1. $\operatorname{sen} 2x$
2. $\cos 3x$
3. $\dfrac{1}{x+1}$
4. $\dfrac{1}{x+2}$

(En estos últimos dos problemas, especificar los intervalos sobre los cuales se halla la integral indefinida.)

IX, §2. FUNCIONES CONTINUAS

Definición. Sea $f(x)$ una función. Diremos que f es **continua** si

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

para todo x para el cual está definida la función.

Se sobreentiende que, al tomar el límite, sólo se consideran valores de h para los cuales $f(x+h)$ está definida. Por ejemplo, si f está definida en un intervalo

$$a \leq x \leq b$$

(suponiendo que $a < b$), entonces diríamos que f es continua en a si

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a+h) = f(a).$$

No podemos tomar $h < 0$, ya que la función no estaría definida para $a+h$ si $h < 0$.

En términos geométricos, una función es continua si no hay cortes en su gráfica. Todas las funciones diferenciables son continuas. Ya habíamos observado este hecho, pues si un cociente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tiene un límite, entonces el numerador $f(x+h) - f(x)$ debe tender a 0, puesto que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) = \lim_{h\to 0} h\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} h \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

Las siguientes son gráficas de funciones que no son continuas.

En la figura 1 tenemos la gráfica de una función como

$$f(x) = -1 \quad \text{si} \quad x \leq 0,$$
$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x > 0.$$

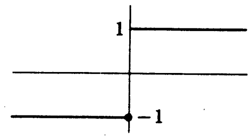


Figura 1

Vemos que

$$f(a+h) = f(h) = 1$$

para todo $h > 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(a+h) = 1,$$

lo que no es igual a $f(0)$.

Un fenómeno similar ocurre en la figura 2, en donde hay cortes. (Ver el ejemplo 6 del capítulo III, §2.)

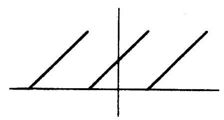


Figura 2

IX, §3. ÁREA

Sean $a < b$ dos números y sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $a \leq x \leq b$. Este intervalo cerrado se denota por $[a, b]$.

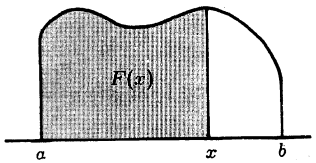
Deseamos hallar una función $F(x)$ que sea diferenciable en este intervalo y tal que

$$F'(x) = f(x).$$

En esta sección apelamos a nuestra intuición geométrica respecto al área. *Suponemos que $f(x) \geq 0$ para todo x en el intervalo.* Sea:

$F(x) =$ medida numérica del área bajo la gráfica de f entre a y x.

La figura siguiente ilustra esto.



Tenemos entonces que $F(a) = 0$. El área entre a y a es 0.

Teorema 3.1. *La función $F(x)$ es diferenciable, y su derivada es $f(x)$.*

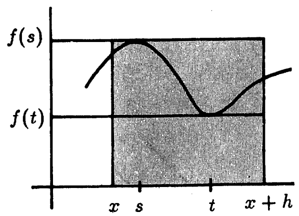
Demostración. Dado que definimos geométricamente a F, tendremos que argumentar geométricamente.

Tenemos que considerar el cociente de Newton

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Supongamos primero que x no es igual al punto extremo b, y supongamos además que consideramos solamente valores de $h > 0$.

Entonces, $F(x+h) - F(x)$ es el área entre x y $x+h$, lo cual, representado en una figura, se vería así.



El área sombreada representa $F(x+h) - F(x)$.

Sea s un punto, en el intervalo cerrado $[x, x+h]$, que es un máximo para nuestra función f *en ese pequeño intervalo.* Y sea t un punto, en el mismo intervalo cerrado, que es un mínimo para f en ese intervalo. Así,

$$f(t) \leq f(u) \leq f(s)$$

para todo u que satisfaga

$$x \leq u \leq x + h.$$

(Estamos forzados a usar otra letra, u, pues ya se usó x.)

El área bajo la curva entre x y $x+h$ es mayor que el área del pequeño rectángulo de la figura anterior, i.e. el rectángulo que tiene base h y altura $f(t)$.

El área bajo la curva entre x y $x+h$ es menor que el área del rectángulo grande, i.e. el rectángulo que tiene base h y altura $f(s)$.

Esto nos da

$$h \cdot f(t) \leq F(x+h) - F(x) \leq h \cdot f(s).$$

Dividiendo entre el número positivo h se tiene

$$f(t) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(s).$$

Como s y t están entre x y $x+h$, cuando h tiende a 0 tanto $f(s)$ como $f(t)$ tienden a $f(x)$. Por lo tanto, el cociente de Newton para F está comprimido entre dos números que tienden a $f(x)$, de modo que también debe tender a $f(x)$, y hemos probado el teorema 3.1 cuando $h > 0$.

La demostración es esencialmente la misma que aquella que usamos para obtener la derivada de $\log x$. La única diferencia en este caso es que escogimos un máximo y un mínimo sin poder dar un valor explícito para ellos, como lo hicimos para la función $1/x$. Aparte de esto, no hay diferencia en los argumentos.

Si $x = b$, vemos valores negativos para h. El argumento en ese caso es completamente análogo al que escribimos en detalle, y de nuevo hallamos que el cociente de Newton de F está comprimido entre $f(s)$ y $f(t)$. Lo dejamos como ejercicio.

Sabemos ahora que si $F(x)$ denota el área bajo la gráfica de f entre a y x, entonces

$$F'(x) = f(x).$$

Podemos calcular el área en la práctica mediante la propiedad que aparece en el cuadro de la página siguiente.

> *Sea G cualquier función en el intervalo $a \leq x \leq b$ tal que*
>
> $$G'(x) = f(x).$$
>
> *Entonces el área bajo la gráfica de f entre $x = a$ y $x = b$ es igual a*
>
> $$G(b) - G(a).$$

Demostración. Como $F'(x) = G'(x)$ para todo x, las dos funciones, F y G, tienen la misma derivada en el intervalo. Por lo tanto, existe una constante C tal que

$$F(x) = G(x) + C \quad \text{para todo } x.$$

Sea $x = a$. Obtenemos

$$0 = F(a) = G(a) + C.$$

Esto muestra que $C = -G(a)$. Por lo tanto, al hacer $x = b$ se tiene

$$F(b) = G(b) - G(a).$$

Así, el área bajo la curva entre a y b es $G(b) - G(a)$. En la práctica es muy útil saber esto pues usualmente podemos adivinar la función G.

Ejemplo 1. Hallar el área bajo la curva $y = x^2$ entre $x = 1$ y $x = 2$.

Sea $f(x) = x^2$. Si $G(x) = x^3/3$, entonces $G'(x) = f(x)$. Por lo tanto, el área bajo la curva entre 1 y 2 es

$$G(2) - G(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Ejemplo 2. Hallar el área bajo un arco de la función $\operatorname{sen} x$.

Tenemos que hallar el área bajo la curva entre 0 y π. Sea

$$G(x) = -\cos x.$$

Entonces $G'(x) = \operatorname{sen} x$, por lo que el área es

$$\begin{aligned} G(\pi) - G(0) &= -\cos \pi - (-\cos 0) \\ &= -(-1) + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Nótese lo asombroso que es esto. El arco de la curva seno que va de 0 a π parece una curva muy irracional y, sin embargo, ¡el área resulta ser el entero 2!.

IX, §3. EJERCICIOS

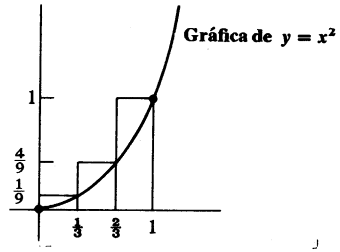
Hallar el área bajo las curvas dadas entre las cotas dadas.

1. $y = x^3$ entre $x = 1$ y $x = 5$.
2. $y = x$ entre $x = 0$ y $x = 2$.
3. $y = \cos x$, un arco.
4. $y = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = 2$.
5. $y = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = 3$.
6. $y = x^4$ entre $x = -1$ y $x = 1$.
7. $y = e^x$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

IX, §4. SUMAS SUPERIORES E INFERIORES

Para mostrar la existencia de la integral, usamos la idea de aproximar las curvas por medio de funciones constantes.

Ejemplo. Consideren la función $f(x) = x^2$. Suponiendo que queremos hallar el área entre su gráfica y el eje x, de $x = 0$ a $x = 1$, se corta el intervalo $[0, 1]$ en intervalos pequeños y se aproxima la función por medio de funciones constantes, como se muestra en la figura siguiente.



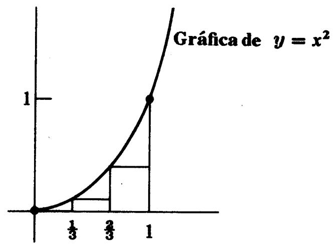
Hemos usado tres intervalos, de longitud $1/3$, y en cada uno de éstos tomamos la función constante cuyo valor es el cuadrado del extremo derecho del intervalo. Estos valores son, respectivamente,

$$f(1/3) = 1/9, \qquad f(2/3) = 4/9, \qquad f(1) = 1.$$

Así obtenemos tres rectángulos, situados sobre la curva $y = x^2$. Cada rectángulo tiene base de longitud $1/3$. La suma de las áreas de estos rectángulos es igual a

$$\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9} + 1) = \tfrac{14}{27}.$$

También pudimos haber tomado estos rectángulos debajo de la curva si hubiéramos usado los valores de f en los extremos izquierdos de los intervalos. La ilustración es como sigue:



Las alturas de los tres rectángulos obtenidos así son, respectivamente,

$$f(0) = 0, \qquad f(1/3) = 1/9, \qquad f(2/3) = 4/9.$$

La suma de sus áreas es igual a

$$\tfrac{1}{3}(0 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9}) = \tfrac{5}{27}.$$

De este modo, sabemos que el área bajo la curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$ está entre $5/27$ y $14/27$. Ésta no es una muy buena aproximación a esta área, pero podemos obtener una mejor si usamos intervalos más pequeños, digamos de longitudes $1/4$, $1/5$ o $1/6$, o, en general, $1/n$. Escribamos la aproximación con intervalos de longitud $1/n$; los extremos de los intervalos serán entonces

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1.$$

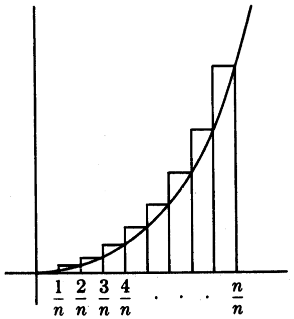
Si aproximamos la curva anterior, obtendremos rectángulos de alturas iguales a

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2},\ f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2^2}{n^2},\ \dots,\ f\left(\frac{n}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2},$$

respectivamente. El término general para la altura de dicho rectángulo es

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k^2}{n^2} \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

En la figura siguiente dibujamos estos rectángulos.



Vemos en la figura que la aproximación a la curva ya está mucho mejor. El área de cada rectángulo es igual a

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{k^2}{n^2}, \qquad k = 1, \dots, n,$$

puesto que es igual a la base por la altura. La suma de estas áreas es igual a

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2).$$

Dicha suma se llama **suma superior** porque se toma el máximo de la función x^2 sobre cada intervalo $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$. Cuando tomamos n cada vez más grande, es plausible que dichas sumas aproximen al área bajo la gráfica de x^2 entre 0 y 1. En todo caso, esta suma superior es mayor que el área.

Escribiremos ahora en general las sumas que aproximan el área bajo una curva. Nótese que podemos tomar rectángulos que estén sobre la curva o bajo la curva, dando lugar así a sumas superiores y a sumas inferiores.

Sean a y b dos números, con $a \leq b$. Sea f una función continua en el intervalo $a \leq x \leq b$.

Definición. Una **partición del intervalo** $[a, b]$ es una sucesión de números

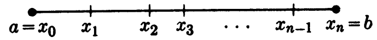
$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b, \quad (\text{también se escribe } \{a = x_0, \dots, x_n = b\})$$

entre a y b, tal que $x_i \leq x_{i+1}$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$. Por ejemplo, podríamos tomar sólo dos números,

$$x_0 = a \quad \text{y} \quad x_1 = b.$$

A ésta se le llamará **partición trivial.**

Una partición divide nuestro intervalo en una multitud de pequeños intervalos $[x_i, x_{i+1}]$.



Dado cualquier número entre a y b, además de $x_0, \dots, x_n$, podemos agregarlo a la partición para obtener una nueva partición que tenga un intervalo más pequeño. Si agregamos suficientes números intermedios, la partición se podrá hacer arbitrariamente pequeña.

Sea f una función definida en el intervalo

$$a \leq x \leq b$$

y continua. Si c_i es un punto entre x_i y x_{i+1}, entonces formamos la suma

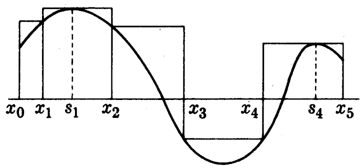
$$f(c_0)(x_1 - x_0) + f(c_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(c_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Dicha suma se llamará **suma de Riemann**. Cada valor $f(c_i)$ se puede ver como la altura de un rectángulo, y cada $(x_{i+1} - x_i)$ se puede ver como la longitud de la base.

Sea s_i un punto entre x_i y x_{i+1} tal que f tenga un **máximo** en este pequeño intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ en s_i. En otras palabras,

$$f(x) \leq f(s_i) \qquad \text{para} \qquad x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

Entonces los rectángulos se ven como los de la siguiente figura, en donde sucede que s_0 es igual a x_1, $s_1 = s_1$ según se muestra, $s_2 = x_2$, $s_3 = x_4$, $s_4 = s_4$ según se muestra.



La idea principal que vamos a desarrollar es que, conforme vamos haciendo cada vez más pequeños los intervalos de nuestras particiones, la suma de las áreas de los rectángulos tenderá a un límite, y este límite se puede usar para definir el área bajo la curva.

Si P es la partición dada por los números

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n,$$

entonces la suma

$$f(s_0)(x_1 - x_0) + f(s_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(s_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

se llamará **suma superior**, asociada con la función f y la partición P del intervalo $[a,b]$. La denotaremos por los símbolos

$$U_a^b(P,f) \quad \text{o, simplemente,} \quad U(P,f).$$

Observen, sin embargo, que cuando $f(x)$ se vuelve negativo, el valor $f(s_i)$ puede ser negativo. Así, el rectángulo correspondiente da una contribución negativa

$$f(s_i)(x_{i+1} - x_i)$$

a la suma. Además, es aburrido escribir la suma repitiendo cada término, de modo que usaremos la abreviación

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(x_{i+1} - x_i)$$

para referirnos a la suma de los términos $f(s_i)(x_{i+1} - x_i)$ cuando i varía de 0 a $n-1$. Así tenemos:

Definición. La suma superior de f respecto a la partición es

$$U_a^b(P,f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(x_{i+1} - x_i),$$

donde $f(s_i)$ es el máximo de f en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Nótese que los **índices** i van de 0 a $n-1$. Así, la suma se toma para $i = 0, \ldots, n-1$.

Por definición tenemos que

$$\max_{[x_i,x_{i+1}]} f = f(s_i) = \text{máximo de } f \text{ en el intervalo } \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

Entonces la suma podría escribirse también con la notación

$$\boxed{U_a^b(P,f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\max_{[x_i,x_{i+1}]} f \right) (x_{i+1} - x_i).}$$

En lugar de tomar un máximo s_i en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, pudimos haber tomado un mínimo. Sea t_i un punto en este intervalo, tal que

$$f(t_i) \leq f(x) \quad \text{para} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

Llamamos a la suma

$$f(t_0)(x_1 - x_0) + f(t_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(t_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

suma inferior asociada con la función f y la partición P del intervalo $[a,b]$. La suma inferior se denotará por

$$L_a^b(P,f) \quad \text{o, simplemente,} \quad L(P,f).$$

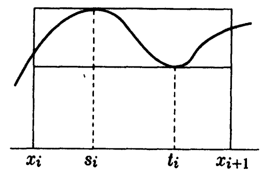
Así tenemos la

Definición. La suma inferior de f respecto a la partición es la suma

$$L_a^b(P,f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i),$$

donde $f(t_i)$ es el mínimo de f en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

En la figura siguiente hemos dibujado un término típico de la suma.



Podemos reescribir esta suma inferior usando una notación semejante a la usada en la suma superior. A saber, hacemos

$$\begin{aligned}\min_{[x_i,x_{i+1}]} f &= \text{mínimo de } f \text{ en el intervalo } \quad [x_i, x_{i+1}] \\ &= f(t_i).\end{aligned}$$

Entonces

$$\boxed{L_a^b(P,f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\min_{[x_i,x_{i+1}]} f \right) (x_{i+1} - x_i).}$$

Para todos los números x en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ tenemos

$$f(t_i) \leq f(x) \leq f(s_i).$$

Como $x_{i+1} - x_i$ es ≥ 0, se sigue que cada término de la suma inferior es menor o igual que cada término de la suma superior. Entonces

$$L_a^b(P,f) \leq U_a^b(P,f).$$

Más aún, cualquier suma de Riemann tomada con puntos c_i (que no necesariamente sean máximos o mínimos) está entre la suma inferior y la suma superior.

Ejemplo. Sea $f(x) = x^2$ y sea el intervalo $[0,1]$. Escribir las sumas superior e inferior para la partición formada por $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

El mínimo de la función en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ está en 0, y $f(0) = 0$. El mínimo de la función en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ está en $\frac{1}{2}$, y $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, la suma inferior es

$$L_0^1(P,f) = f(0)(\tfrac{1}{2} - 0) + f(\tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}.$$

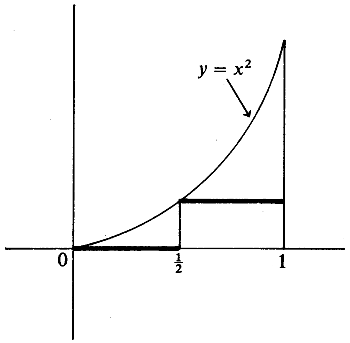


figura para la suma inferior

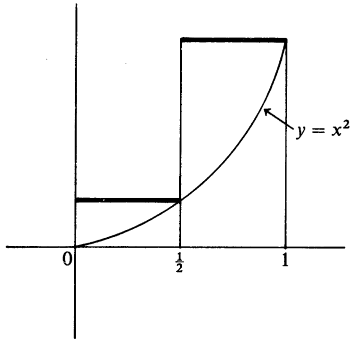


figura para la suma superior

El máximo de la función en el intervalo $[0,\frac{1}{2}]$ está en $\frac{1}{2}$ y el máximo de la función en el intervalo $[\frac{1}{2},1]$ está en 1. Así, la suma superior es

$$U_0^1(P,f) = f(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}-0) + f(1)(1-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{8}.$$

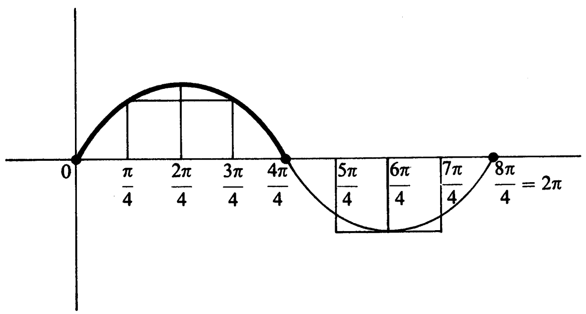
Hemos dado un valor numérico para las sumas superior e inferior. A menos que queramos compararlas explícitamente, podemos dejar la respuesta en la forma que está en el lado izquierdo de estas igualdades.

Ejemplo. Escribiremos ahora las sumas inferiores en otro caso particular, cuando la función es positiva y negativa en el intervalo.

Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$, sea el intervalo $[0,2\pi]$, y sea la partición

$$P = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{8\pi}{4}\right\}.$$

Ilustramos esto en la figura siguiente.



Cada pequeño intervalo de la partición tiene longitud $\pi/4$. Escribamos la suma

inferior:

$$L(P,f) = 0\frac{\pi}{4} + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4} + \left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4} + 0\frac{\pi}{4}$$
$$+ \left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4} + \left(\operatorname{sen}\frac{6\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4} + \left(\operatorname{sen}\frac{6\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4} + \left(\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4}.$$

Observen que el primer término de la suma inferior es 0 porque el mínimo de la función $\operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0,\pi/4]$ es igual a 0. De manera análoga, el cuarto término también es 0, de modo que lo podemos omitir, pues $0 + A = A$ para todos los números A.

Observen además que:

$$\text{mínimo de } \operatorname{sen} x \text{ en el intervalo } [5\pi/4, 6\pi/4] = \operatorname{sen} 6\pi/4$$
$$= -1.$$

Con números negativos tenemos, por ejemplo,

$$-1 = \operatorname{sen} 6\pi/4 < -\frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen} 5\pi/4.$$

Así, la suma inferior $L(P,f)$ contiene términos positivos y términos negativos. Los términos negativos representan menos $(-)$ el área de ciertos rectángulos, como se muestra en la figura.

¿Qué sucede con nuestras sumas cuando agregamos un nuevo punto a la partición? Veremos que la suma inferior crece y la suma superior decrece.

Teorema 4.1. *Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$. Sea*

$$P = (x_0, \ldots, x_n)$$

una partición de $[a,b]$. Sea $\overline{x}$ cualquier número en el intervalo y sea Q la partición obtenida de P al agregar $\overline{x}$ a $(x_0,\ldots,x_n)$. Entonces,

$$L_a^b(P,f) \le L_a^b(Q,f) \le U_a^b(Q,f) \le U_a^b(P,f).$$

Demostración. Veamos, por ejemplo, las sumas inferiores. Supongamos que el número $\overline{x}$ está entre x_j y x_{j+1}:

$$x_j \le \overline{x} \le x_{j+1}.$$

La suma inferior que formemos para P será igual que la suma inferior para Q, excepto que el término

$$f(t_j)(x_{j+1} - x_j)$$

se reemplazará ahora por dos términos. Si u es un mínimo para f en el intervalo entre x_j y $\overline{x}$, y v es un mínimo para f en el intervalo entre $\overline{x}$ y x_{j+1}, entonces estos dos términos son

$$f(u)(\overline{x} - x_j) + f(v)(x_{j+1} - \overline{x}).$$

Podemos escribir $f(t_j)(x_{j+1}-x_j)$ en la forma

$$f(t_j)(x_{j+1}-x_j)=f(t_j)(\overline{x}-x_j)+f(t_j)(x_{j+1}-\overline{x}).$$

Como $f(t_j)\le f(u)$ y $f(t_j)\le f(v)$ (pues t_j era un mínimo en todo el intervalo entre x_j y x_{j+1}), se sigue que

$$f(t_j)(x_{j+1}-x_j)\le f(u)(\overline{x}-x_j)+f(v)(x_{j+1}-\overline{x}).$$

Así pues, cuando reemplazamos el término en la suma para P por los dos términos en la suma para Q, el valor de la contribución de estos dos términos crece. Como todos los otros términos son iguales, queda probada nuestra afirmación.

La afirmación respecto al hecho de que la suma superior decrece se deja como ejercicio. La demostración es muy parecida.

Como consecuencia de nuestro teorema, obtenemos:

Corolario 4.2. *Toda suma inferior es menor o igual que toda suma superior.*

Demostración. Sean P y Q dos particiones. Si agregamos a P todos los puntos de Q y agregamos a Q todos los puntos de P, obtenemos una partición R tal que todo punto de P es un punto de R y todo punto de Q es un punto de R. Así, R se obtuvo agregando puntos a P y a Q. En consecuencia, tenemos las desigualdades

$$L_a^b(P,f)\le L_a^b(R,f)\le U_a^b(R,f)\le U_a^b(Q,f).$$

Esto prueba nuestra afirmación.

Ahora resulta natural preguntarnos si **existe un número único entre las sumas inferiores y las sumas superiores**. La respuesta es sí.

Teorema 4.3. *Sea f una función continua en $[a,b]$. Existe un número único que es mayor o igual que toda suma inferior y es menor o igual que toda suma superior.*

Definición. La integral definida de f entre a y b

$$\boxed{\int_a^b f}$$

es el único número que es mayor o igual que toda suma inferior y menor o igual que toda suma superior.

Usaremos una notación como

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{o} \quad \int_a^b f(t)\,dt.}$$

No importa cuál sea la letra que usemos, pero deberá ser la misma en ambos casos, i.e. en $f(x)\,dx$, $f(t)\,dt$ o $f(u)\,du$, etc.

No daremos los detalles de la demostración del teorema 4.3, la cual es tediosa. La técnica involucrada no se usará en ningún otro lugar en el curso.

Hay otra afirmación cuyo conocimiento resulta revelador. Sea P una partición,

$$x_0\le x_1\le\cdots\le x_n.$$

La máxima longitud de los intervalos $[x_i,x_{i+1}]$ se llama **tamaño** de la partición. Por ejemplo, si cortamos el intervalo $[0,1]$ en n intervalos pequeños de la misma longitud $1/n$, entonces el tamaño de esta partición es $1/n$.

Teorema 4.4. *Sea f una función continua en $[a,b]$. Entonces las sumas inferiores $L_a^b(P,f)$ y las sumas superiores $U_a^b(P,f)$ se acercan arbitrariamente a la integral*

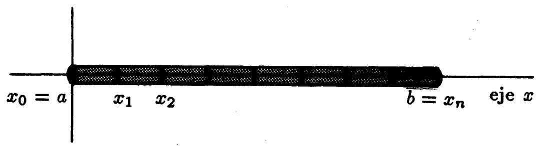
$$\int_a^b f$$

si el tamaño de la partición P es suficientemente pequeño.

De nuevo, no probaremos este teorema, pero dice, intuitivamente, que las sumas superior e inferior son buenas aproximaciones a la integral cuando el tamaño de la partición es suficientemente pequeño.

Ejemplo. Damos un ejemplo físico que ilustra la aplicación de las sumas superior e inferior, relacionando la densidad con la masa.

Considerar un intervalo $[a,b]$ con $0\le a<b$. Imaginemos este intervalo como una varilla, y sea f una función continua positiva definida en este intervalo. Interpretamos f como una densidad en la varilla, de modo que $f(x)$ es la densidad en x.



Dado

$$a\le c\le d\le b,$$

denotamos por $M_c^d(f)$ la masa de la varilla entre c y d, correspondiente a la densidad dada f. Deseamos determinar un concepto matemático para representar $M_c^d(f)$. Si f es una densidad constante, con valor constante $K\ge 0$ en $[c,d]$, entonces la masa $M_c^d(f)$ deberá ser $K(d-c)$. Por otro lado, si g es otra densidad tal que

$$f(x)\le g(x),$$

entonces ciertamente deberemos tener $M_c^d(f)\le M_c^d(g)$. En particular, si k y K son constantes ≥ 0 tales que

$$k\le f(x)\le K$$

para x en el intervalo $[c,d]$, entonces la masa deberá satisfacer

$$k(d-c) \leq M_c^d(f) \leq K(d-c).$$

Finalmente, la masa deberá ser aditiva, esto es, la masa de dos piezas ajenas deberá ser la suma de la masa de las piezas. En particular,

$$M_a^c(f) + M_c^d(f) = M_a^d(f).$$

Veremos ahora que la masa de la varilla está dada por la integral de la densidad, esto es

$$\boxed{M_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

Sea P una partición del intervalo $[a,b]$:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b.$$

Sea $f(t_i)$ el mínimo para f en el pequeño intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, y sea $f(s_i)$ el máximo para f en ese mismo intervalo pequeño. Entonces la masa de cada pieza de la varilla entre x_i y x_{i+1} satisface la desigualdad

$$f(t_i)(x_{i+1}-x_i) \leq M_{x_i}^{x_{i+1}}(f) \leq f(s_i)(x_{i+1}-x_i).$$

Sumando esto, hallamos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1}-x_i) \leq M_a^b(f) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(x_{i+1}-x_i).$$

Las expresiones a la izquierda y a la derecha son las sumas inferior y superior para la integral, respectivamente. Como la integral es el único número entre la suma inferior y la suma superior, se sigue que

$$M_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

como queríamos mostrar.

IX, §4. EJERCICIOS

Escribir las sumas inferior y superior para las funciones e intervalos siguientes. Usar una partición tal que la longitud de cada intervalo pequeño sea (a) $\frac{1}{2}$, (b) $\frac{1}{3}$, (c) $\frac{1}{4}$, (d) $\frac{1}{n}$.

1. $f(x) = x^2$ en el intervalo $[1,2]$.
2. $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1,3]$.
3. $f(x) = x$ en el intervalo $[0,2]$.
4. $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,2]$.
5. Sea $f(x) = 1/x$ y sea el intervalo $[1,2]$. Sea n un entero positivo. Escribir la suma superior y la inferior usando la partición tal que la longitud de cada intervalo pequeño sea $1/n$.
6. Usando la definición de integral definida, probar que
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \leq \log 2 \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$
7. Sea $f(x) = \log x$. Sea n un entero positivo. Escribir las sumas superior e inferior usando la partición del intervalo entre 1 y n formada por los enteros del 1 al n, i.e. la partición $(1, 2, \ldots, n)$.

IX, §5. EL TEOREMA FUNDAMENTAL

La integral satisface dos propiedades básicas que son muy parecidas a las que satisface el área. Enunciémoslas explícitamente.

Propiedad 1. *Si M y m son dos números tales que*

$$m \leq f(x) \leq M$$

para todo x en el intervalo $[b,c]$, entonces

$$m(c-b) \leq \int_b^c f \leq M(c-b).$$

Propiedad 2. *Tenemos*

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

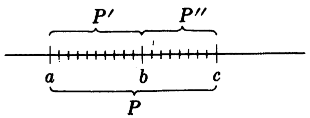
No daremos los detalles de las demostraciones de estas propiedades, pero haremos algunos comentarios que seguramente las aclararán.

Para la propiedad 1, supongamos que queremos verificar la desigualdad del lado izquierdo. Podemos tomar la partición trivial del intervalo $[b,c]$ formada precisamente por este intervalo. Entonces una suma inferior es ciertamente $\geq m(c-b)$. Como las sumas inferiores crecen cuando se toma una partición más fina, y como las sumas inferiores son a lo más iguales a la integral, vemos que la desigualdad de la izquierda

$$m(c-b) \leq \int_b^c f$$

es verdadera. La desigualdad del lado derecho de la propiedad 1 se prueba de la misma manera.

Para la propiedad 2, supongan que $a \leq b \leq c$. Sea P una partición de tamaño suficientemente pequeño, tal que la suma inferior $L_a^c(P,f)$ aproxime muy de cerca la integral $\int_a^c f$. Es posible que el punto b no esté en esta partición. Podemos tomar una partición más fina insertando este punto b, según se muestra en la figura.



Entonces P, junto con b, forma particiones P' y P'' de los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$. Si P tiene tamaño suficientemente pequeño, entonces P' y P'' tienen tamaño pequeño, y las sumas inferiores

$$L_a^b(P', f) \quad \text{y} \quad L_b^c(P'', f)$$

dan buenas aproximaciones a las integrales

$$\int_a^b f \quad \text{y} \quad \int_b^c f,$$

respectivamente. Pero tenemos

$$L_a^c(P', P'', f) = L_a^b(P', f) + L_b^c(P'', f).$$

Como $L_a^c(P', P'', f)$ es una aproximación de la integral

$$\int_a^c f,$$

se puede ver, pasando al límite, que

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

La propiedad 2 se formuló para $a < b < c$. Queremos ahora formularla cuando a, b y c se toman en cualquier orden. Para ello, suponemos que a y b son números en un intervalo donde f es continua, y $b < a$. **Definimos**

$$\boxed{\int_a^b f = -\int_b^a f.}$$

Entonces tenemos la **Propiedad 2 en general**:

Sean a, b y c tres números en un intervalo donde f sea continua. Entonces

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Demostración. Tenemos que distinguir cada caso. Supongamos por ejemplo que $b < a < c$. Entonces, por la propiedad original, para esta ordenación obtenemos

$$\int_b^c = \int_b^a + \int_a^c = -\int_a^b + \int_a^c \quad \text{por definición.}$$

Sumando $\int_a^b$ en ambos lados se prueba la relación deseada. Todos los otros casos se pueden probar de manera análoga.

Teorema 5.1. *Sea f continua en un intervalo $[a, b]$. Sea*

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Entonces F es diferenciable y su derivada es

$$F'(x) = f(x).$$

Demostración. Tenemos que formar el cociente de Newton

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right),$$

y ver si tiende a un límite cuando $h \to 0$. (Si $x = a$, entonces se sobreentiende que $h > 0$, y si $x = b$, entonces $h < 0$. Si $a < x < b$, entonces h puede ser positivo o negativo. La demostración muestra entonces que f es diferenciable por la derecha en a y diferenciable por la izquierda en b).

Supongan por el momento que $h > 0$. Por la propiedad 2, aplicada a los números a, x y $x + h$, concluimos que el cociente de Newton es igual a

$$\frac{1}{h}\left(\int_a^x f + \int_x^{x+h} f - \int_a^x f\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f.$$

Esto reduce nuestra investigación del cociente de Newton al intervalo entre x y $x + h$.

Sea s un punto entre x y $x+h$ tal que f alcance un máximo en este pequeño intervalo $[x, x+h]$ y sea t un punto en este intervalo tal que f alcance un mínimo. Sea

$$m = f(t) \quad \text{y} \quad M = f(s)$$

y, aplicando la propiedad 1 al intervalo $[x, x + h]$, se obtiene

$$f(t)(x + h - x) \leq \int_x^{x+h} f \leq f(s)(x + h - x),$$

que podemos reescribir como

$$f(t) \cdot h \leq \int_x^{x+h} f \leq f(s) \cdot h.$$

Al dividir entre el número positivo h se preservan las desigualdades y se obtiene

$$f(t) \leq \frac{\int_x^{x+h} f}{h} \leq f(s).$$

Como s y t están entre x y $x + h$, debemos tener (por continuidad)

$$\lim_{h\to 0} f(s) = f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} f(t) = f(x).$$

Así, nuestro cociente de Newton está comprimido entre dos números que tienden a $f(x)$ y, por lo tanto, debe tender a $f(x)$, y el teorema queda probado para $h > 0$.

El argumento para cuando $h < 0$ es completamente análogo, y lo omitimos.

IX, §5. EJERCICIOS

1. Usando el teorema 5.1, probar que si f es continua en un intervalo abierto que contenga a 0, entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h f = f(0).$$

[*Idea:* ¿Se puede interpretar el lado izquierdo como el límite de un cociente de Newton?]

2. Sea f continua en el intervalo $[a, b]$. Probar que existe algún número c en el intervalo tal que

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

[*Idea:* Aplicar el teorema del valor medio a $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$.]

CAPÍTULO X

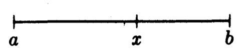
Propiedades de la integral

Éste es un capítulo corto. Muestra cómo se combina la integral con la suma y las desigualdades. No hay una buena fórmula para la integral de un producto. Lo más cercano es la integración por partes, pero la postergamos para el capítulo siguiente.

Conectar la integral con la derivada es lo que nos permite calcular integrales. El hecho de que dos funciones que tienen la misma derivada difieran en una constante, se explota a fondo una vez más.

X, §1. OTRAS CONEXIONES CON LA DERIVADA

Sea f una función continua en algún intervalo. Sean a y b dos puntos del intervalo tales que $a < b$, y sea F una función diferenciable en el intervalo y cuya derivada es f.



Por el teorema fundamental, las funciones

$$F(x) \quad \text{y} \quad \int_a^x f$$

tienen la misma derivada. Por lo tanto, existe una constante C tal que

$$\int_a^x f = F(x) + C \quad \text{para } todo\ x \text{ en el intervalo.}$$

¿Cuál es esta constante? Si hacemos $x = a$, obtenemos

$$0 = \int_a^a f = F(a) + C,$$

de donde $C = -F(a)$. Tenemos también que

$$\int_a^b f = F(b) + C.$$

De esto obtenemos: *Si* $dF/dx = f(x)$, *entonces*

$$\boxed{\int_a^b f = F(b) - F(a).}$$

Esto es sumamente útil en la práctica, pues por lo general podemos adivinar la función F y, una vez adivinada, podemos calcular la integral mediante esta relación.

Más aún, también es práctico usar la notación

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Observación. El argumento que dimos para calcular C muestra que el valor $F(b) - F(a)$ no depende de la selección de la función F tal que $F'(x) = f(x)$. Pero quizá se quiera ver esto de otra manera. Supongan que también $G'(x) = f(x)$ para todo x en el intervalo. Entonces existe una constante C tal que

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{para todo } x \text{ en el intervalo.}$$

Entonces

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= F(b) + C - [F(a) + C] \\ &= F(b) - F(a) \qquad \text{porque } C \text{ se cancela.} \end{aligned}$$

Finalmente, a la **integral indefinida** como

$$\int \operatorname{sen} x\, dx \qquad \text{o} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

la llamaremos simplemente **integral**, pues el contexto aclarará su significado. Cuando tratamos con una **integral definida**

$$\int_a^b$$

a veces llamamos a los números a y b **límite inferior** y **límite superior**, respectivamente.

Ejemplo. Queremos hallar la integral

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx.$$

Aquí tenemos $f(x) = \operatorname{sen} x$, y la integral indefinida es

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = F(x) = -\cos x.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2.$$

Ejemplo. Supongan que se quiere hallar

$$\int_1^3 x^2\, dx.$$

Sea $F(x) = x^3/3$. Entonces $F'(x) = x^2$. Por lo tanto,

$$\int_1^3 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.$$

Ejemplo. Hallemos

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Como $d\arctan x/dx = 1/1 + x^2$, tenemos la integral indefinida

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx &= \arctan x\Big|_0^1 \\ &= \arctan 1 - \arctan 0 \\ &= \pi/4. \end{aligned}$$

Ejemplo. Probar la desigualdad

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \le \log n.$$

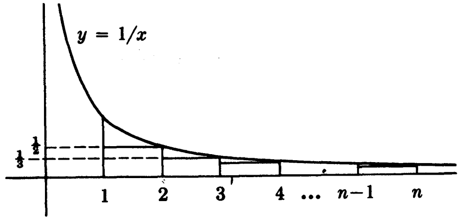
Para hacerlo tratamos de identificar el lado izquierdo con una suma inferior y el lado derecho con una integral correspondiente. Tenemos la integral indefinida

$$\log x = \int \frac{1}{x}\, dx.$$

Sea $f(x) = 1/x$.

Sea $[a, b]$ el intervalo $[1, n]$, esto es, todo x con $1 \le x \le n$.

Sea la partición $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ formada de los enteros positivos de 1 a n.



Entonces

$$L(P, f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

pues la longitud de la base de cada rectángulo es igual a 1. El valor de la integral es

$$\int_1^n \frac{1}{x}\, dx = \log x \Big|_1^n = \log n - \log 1 = \log n.$$

Así obtenemos la desigualdad deseada porque una suma inferior es $\leq$ que la integral.

Al trabajar o probar desigualdades análogas, se debe dar:

La función $f(x)$;
El intervalo $[a, b]$ y el valor de la integral definida

$$\int_a^b f(x)\, dx;$$

La partición P del intervalo $[a, b]$.

Se deberá entonces identificar la suma con una suma inferior (o suma superior, como puede ser el caso) con respecto a los datos anteriores, obteniéndose así una comparación con la integral del tipo deseado.

Ejemplo. Por un método análogo se puede dar una desigualdad que tenga considerable interés práctico. Denotemos por $n!$ el producto de los primeros n enteros. Así,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Tenemos los primeros:

$$1! = 1,$$
$$2! = 1 \cdot 2 = 2,$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$
$$5! = 24 \cdot 5 = 120.$$

El ejercicio 10 mostrará cómo probar la desigualdad

$$\boxed{(n-1)! \leq n^n e^{-n} e \leq n!}$$

Es divertido hacerlo, de modo que no lo haremos aquí en el texto.

El principio de estos ejemplos se aplica para comparar sumas de funciones con integrales, y las funciones pueden ser decrecientes como, por ejemplo, las funciones

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^{1/2}}, \quad \frac{1}{x^4}, \quad \text{etc.},$$

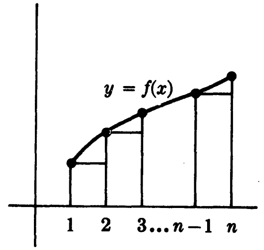
o pueden ser crecientes, como las funciones

$$x, \quad x^2, \quad x^4, \quad x^{1/3}.$$

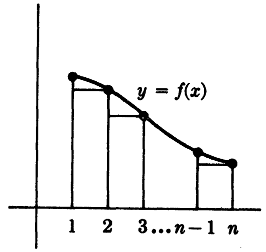
Las gráficas se pueden ver así, digamos sobre el intervalo $[1, n]$, donde n es un entero positivo, y la partición

$$P = \{1, \ldots, n\}$$

está formada de los enteros positivos del 1 al n.



Función creciente



Función decreciente

En dicho caso, la base de cada rectángulo tiene longitud 1. Por lo tanto, obtenemos las desigualdades, para f creciente:

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq f(2) + \cdots + f(n),$$

y para f decreciente:

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq f(1) + \cdots + f(n-1).$$

X, §1. EJERCICIOS

Hallar las integrales siguientes:

1. $\int_1^2 x^5\,dx$
2. $\int_{-1}^1 x^{1/3}\,dx$
3. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$
4. $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$
5. Probar la desigualdades siguientes:
   (a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \le \log n \le \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$
   (b) $\frac{1}{2^{1/2}}+\frac{1}{3^{1/2}}+\cdots+\frac{1}{(n)^{1/2}} \le 2(\sqrt{n}-1)$
   (c) $2(\sqrt{n}-1) \le 1+\frac{1}{2^{1/2}}+\frac{1}{3^{1/2}}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^{1/2}}$
6. Probar las desigualdades siguientes:
   (a) $1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2 \le \frac{n^3}{3} \le 1^2+2^2+\cdots+n^2$
   (b) $1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3 \le \frac{n^4}{4} \le 1^3+2^3+\cdots+n^3$
   (c) $1^{1/4}+2^{1/4}+\cdots+(n-1)^{1/4} \le \frac{4}{5}n^{5/4} \le 1^{1/4}+2^{1/4}+\cdots+n^{1/4}$
7. Dar desigualdades análogas a las del ejercicio 6, para las sumas:
   (a) $\sum_{k=1}^{n-1} k^4$ (b) $\sum_{k=1}^{n-1} k^{1/3}$ (c) $\sum_{k=1}^{n} k^5$ (d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$
8. Probar las desigualdades
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+k^2} \le \frac{\pi}{4} \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^2}{n^2+k^2}.$$
   $\left[\textit{Idea}: \text{Escribir } \frac{n^2}{n^2+k^2} = \frac{1}{1+k^2/n^2}.\right]$ ¿Cuál es el intervalo? ¿Cuál es la partición?
9. Probar la desigualdad
$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right] \le \frac{1}{3}.$$
10. Para este ejercicio, verificar primero que, si hacemos
$$F(x) = x\log x - x,$$
   entonces $F'(x) = \log x$.
   (a) Evaluar la integral
$$\int_1^n \log x\,dx.$$
   (b) Comparar esta integral con las sumas superior e inferior asociadas con la partición $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ del intervalo $[1, n]$.
   (c) En la parte (b) habrán encontrado ciertas desigualdades de la forma
$$A \le B \le C.$$
   Usando el hecho de que
$$e^A \le e^B \le e^C,$$

probar la desigualdad siguiente:
$$\boxed{(n-1)! \le n^n e^{-n} e \le n!.}$$
Aquí denotamos por $n!$ el producto de los n primeros enteros.

X, §2. SUMAS

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones definidas sobre algún intervalo, y sean $F(x)$ y $G(x)$ integrales (indefinidas) para f y g, respectivamente. Esto significa que $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Como la derivada de una suma es la suma de las derivadas, vemos que $F + G$ es una integral para $f + g$; en otras palabras,
$$(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x),$$
y entonces
$$\boxed{\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.}$$
De manera análoga, sea c un número. La derivada de $cF(x)$ es $cf(x)$. Por lo tanto,
$$\boxed{\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.}$$
Una constante se puede meter y sacar de una integral.

Ejemplo. Hallar la integral de $\operatorname{sen} x + 3x^4$.

Tenemos
$$\int(\operatorname{sen} x + 3x^4)\,dx = \int \operatorname{sen} x\,dx + \int 3x^4\,dx$$
$$= -\cos x + 3x^5/5.$$

Cualquier fórmula que incluya a la integral indefinida produce una fórmula para la integral definida. Usando la misma notación que antes, supongamos que tenemos que hallar
$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx.$$
Sabemos que es
$$[F(x)+G(x)]\Big|_a^b$$
lo cual es igual a
$$F(b)+G(b)-F(a)-G(a).$$

Así obtenemos la fórmula

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

De manera análoga, para cualquier constante c,

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ejemplo. Hallar la integral

$$\int_0^\pi [\operatorname{sen} x + 3x^4]\,dx.$$

Esta integral (definida) es igual a

$$\begin{aligned} -\cos x + 3x^5/5\Big|_0^\pi &= -\cos\pi + 3\pi^5/5 - (-\cos 0 + 0)\\ &= 1 + 3\pi^5/5 + 1\\ &= 2 + 3\pi^5/5.\end{aligned}$$

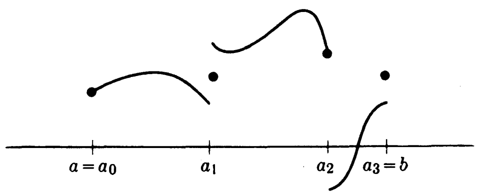
En algunas aplicaciones es posible encontrar una clase de funciones ligeramente más amplia que las funciones continuas. Sea f una función definida en un intervalo $[a,b]$. Diremos que f es **continua a trozos** en $[a,b]$ si existen números

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

y en cada intervalo $[a_{i-1}, a_i]$ hay una función continua f_i tal que $f(x) = f_i(x)$ para $a_{i-1} < x < a_i$. Si así sucede, definimos la integral de f de a a b como la suma

$$\int_a^b f = \int_{a_0}^{a_1} f_1 + \int_{a_1}^{a_2} f_2 + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f_n.$$

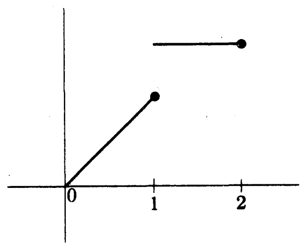
Una función continua a trozos se puede ver así:



Ejemplo. Sea f la función definida en el intervalo $[0,2]$ mediante las condiciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \quad \text{si} \quad 0 \le x \le 1,\\ f(x) &= 2 \quad \text{si} \quad 1 < x \le 2.\end{aligned}$$

La gráfica de f se ve así:



Para hallar la integral de f entre 0 y 2, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^2 f &= \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 2\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2\\ &= \tfrac{1}{2} + (4-2) = \tfrac{5}{2}.\end{aligned}$$

También podemos hallar

$$\int_0^x f(t)\,dt \qquad \text{para} \qquad 0 \le x \le 2.$$

Si $0 \le x \le 1$:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}.$$

Si $1 \le x \le 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,dt &= \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt\\ &= \frac{1}{2} + \int_1^x dt = \frac{1}{2} + 2x - 2.\end{aligned}$$

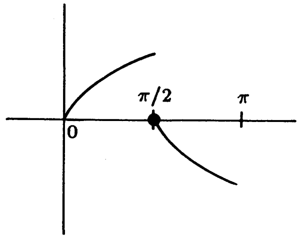
Ejemplo. Sea $f(x)$ definida para $0 \le x \le \pi$ por las fórmulas:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x \quad \text{si} \quad 0 \le x < \pi/2,\\ f(x) &= \cos x \quad \text{si} \quad \pi/2 \le x \le \pi.\end{aligned}$$

Entonces la integral de f de 0 a π está dada por:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx + \int_{\pi/2}^\pi \cos x\,dx\\ &= -\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \operatorname{sen} x\Big|_{\pi/2}^\pi = 0.\end{aligned}$$

La gráfica de f se ve así:



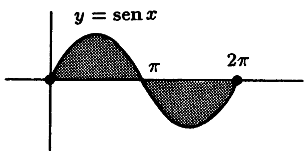
> *La integral de una función representa el área entre la gráfica de la función y el eje x sólo cuando la función es positiva. Si la función es negativa, entonces esta área se representa por menos la integral.*

Ejemplo. La función $\operatorname{sen} x$ es **negativa** en el intervalo $[\pi, 2\pi]$. El **área** entre la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje x sobre este intervalo está dada por **menos la integral**:

$$-\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 2.$$

El **área** entre la gráfica de $\operatorname{sen} x$ y el eje x entre 0 y 2π es igual al doble del área de uno de sus lazos, y es entonces igual a 4. Por otro lado,

$$\int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\Big|_{0}^{2\pi} = 0.$$

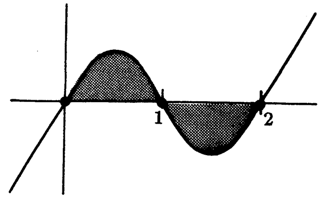


Ejemplo. Hallar el área entre la curva

$$y = f(x) = x(x-1)(x-2)$$

y el eje x.

La curva se ve así:



Hay dos porciones entre la curva y el eje x, correspondientes a los intervalos $[0, 1]$ y $[1, 2]$. Sin embargo, la función es negativa entre $x = 1$ y $x = 2$, de manera que para hallar la suma de las áreas de las dos regiones hemos de tomar el valor absoluto de la integral sobre la segunda. Por consiguiente, calculamos estas áreas separadamente.

Primero expandemos el producto dando $f(x)$ y obtenemos

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

La primera integral es igual a

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$
$$= \tfrac{1}{4} - 1 + 1 = \tfrac{1}{4}.$$

La segunda integral es igual a

$$\int_1^2 f(x)\, dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\Big|_1^2$$
$$= \tfrac{16}{4} - 8 + 4 - (\tfrac{1}{4} - 1 + 1) = -\tfrac{1}{4}.$$

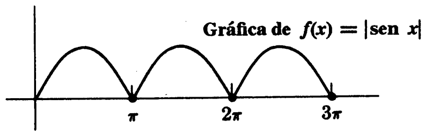
Por lo tanto, el **área** de las dos regiones es igual a

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}.$$

Ejemplo. Hallar la integral

$$\int_0^{3\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx.$$

Nótese que, debido al signo de valor absoluto, la gráfica de la función $|\operatorname{sen} x|$ se ve como lo muestra la figura de la página siguiente.



Si $\text{sen } x \geq 0$ en un intervalo, entonces $|\text{sen } x| = \text{sen } x$.
Si $\text{sen } x \leq 0$ en un intervalo, entonces $|\text{sen } x| = -\text{sen } x$.

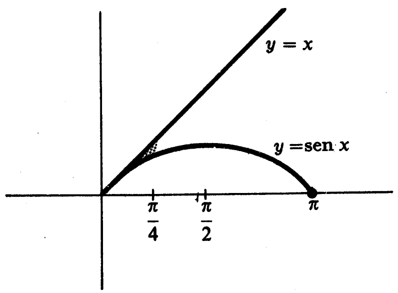
Por lo tanto,

$$\int_0^{3\pi} |\text{sen } x|\, dx = \int_0^{\pi} \text{sen } x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x\, dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \text{sen } x\, dx$$
$$= 2 + 2 + 2 = 6.$$

Advertencia. Es claro que el resultado es tres veces el área bajo un arco de la gráfica, debido a las simetrías. Pero si se intenta usar simetrías en ese tipo de integrales, hay que estar seguros de *probar* que son válidas.

Ejemplo. Hallar el área entre las curvas $y = x$ y $y = \text{sen } x$ para $0 \leq x \leq \pi/4$.

Las gráficas son como sigue.



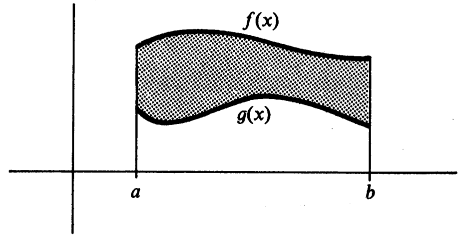
De las desigualdades probadas en el capítulo V, sección §2, se sabe que $\text{sen } x \leq x$ para $0 \leq x$. El área entre las dos curvas entre $x = 0$ y $x = \pi/4$ es la diferencia de las áreas bajo la curva más grande y la más chica, esto es:

$$\int_0^{\pi/4} (x - \text{sen } x)\, dx = \int_0^{\pi/4} x\, dx - \int_0^{\pi/4} \text{sen } x\, dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/4} + \cos x\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{2}{32} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1.$$

En general, si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x)$ en un intervalo $[a, b]$, entonces el área entre las dos curvas, de a a b, es

$$\boxed{\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.}$$



X, §2. EJERCICIOS

Hallar las integrales siguientes:

1. $\int 4x^3\, dx$
2. $\int (3x^4 - x^5)\, dx$
3. $\int (2\,\text{sen } x + 3 \cos x)\, dx$
4. $\int (3x^{2/3} + 5 \cos x)\, dx$
5. $\int \left(5e^x + \frac{1}{x}\right) dx$
6. $\int_{-\pi}^{\pi} (\text{sen } x + \cos x)\, dx$
7. $\int_{-1}^{1} 2x^5\, dx$
8. $\int_{-1}^{2} e^x\, dx$
9. $\int_{-1}^{3} 4x^2\, dx$
10. Hallar el área entre las curvas $y = x$ y $y = x^2$ de 0 a su primer punto de intersección para $x > 0$.
11. Hallar el área entre las curvas $y = x$ y $y = x^3$.
12. Hallar el área entre las curvas $y = x^2$ y $y = x^3$.
13. Hallar el área entre la curva $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ y el eje x. (Trazar la curva.)
14. Hallar el área entre la curva $y = (x+1)(x-1)(x+2)$ y el eje x.
15. Hallar el área entre las curvas $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$, el eje y y el primer punto donde se intersecan esas curvas para $x > 0$.

En cada uno de los problemas siguientes, del 16 al 25:
(a) Trazar la gráfica de la función $f(x)$.
(b) Hallar la integral de la función sobre el intervalo dado.

16. En $[-1,1]$, $f(x) = x$ si $-1 \leq x < 0$ y $f(x) = 5$ si $0 \leq x \leq 1$.
17. En $[-1,1]$, $f(x) = x^2$ si $-1 \leq x \leq 0$ y $f(x) = -x$ si $0 < x \leq 1$.
18. En $[-1,1]$, $f(x) = x - 1$ si $-1 \leq x < 0$ y $f(x) = x + 1$ si $0 \leq x \leq 1$.
19. En $[-\pi,\pi]$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ si $-\pi \leq x < 0$ y $f(x) = x$ si $0 < x \leq \pi$.
20. En $[-\pi,\pi]$, $f(x) = |\operatorname{sen} x|$.
21. En $[-\pi,\pi]$, $f(x) = |\cos x|$.
22. En $[-1,1]$, $f(x) = |x|$.
23. En $[-\pi,\pi]$, $f(x) = \operatorname{sen} x + |\cos x|$.
24. En $[-\pi,\pi]$, $f(x) = x - |x|$.
25. En $[-\pi,\pi]$, $f(x) = \operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|$.
26. Hallar el valor de las integrales (a) $\int_0^{7\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx$, (b) $\int_0^{7\pi} |\cos x|\,dx$. (c) Para cualquier entero positivo n, $\int_0^{n\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx$.

X, §3. DESIGUALDADES

Puede no leerse esta sección hasta que se use para estimar términos residuo en la fórmula de Taylor.

Teorema 3.1. *Sean a y b dos números, con $a \leq b$. Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ y suponer que $f(x) \leq g(x)$ para todo x en el intervalo. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Demostración. Como $g(x) - f(x) \geq 0$, podemos usar la propiedad básica 1 del capítulo IX, sección §5 (con $m = 0$) para concluir que

$$\int_a^b (g - f) \geq 0.$$

Pero

$$\int_a^b (g - f) = \int_a^b g - \int_a^b f.$$

Transponiendo la segunda integral a la derecha de nuestra desigualdad obtenemos

$$\int_a^b g \geq \int_a^b f,$$

como se deseaba.

El teorema 3.1 se usará principalmente cuando $g(x) = |f(x)|$. Como un número negativo siempre es $\leq$ que un número positivo, sabemos que

$$f(x) \leq |f(x)|$$

y

$$-f(x) \leq |f(x)|.$$

Teorema 3.2. *Sean a y b dos números, con $a \leq b$. Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$. Entonces*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Demostración. Simplemente hacemos $g(x) = |f(x)|$ en el teorema anterior. Entonces

$$f(x) \leq |f(x)|$$

y también $-f(x) \leq |f(x)|$. El valor absoluto de la integral de la izquierda es igual a

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{o} \quad -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Podemos aplicar el teorema 3.1 ya sea a $f(x)$ o a $-f(x)$ para obtener el teorema 3.2.

Tenemos otra aplicación del teorema 3.2.

Teorema 3.3. *Sean a y b dos números y f una función continua en el intervalo cerrado entre a y b. (No suponemos necesariamente que $a < b$.) Sea M un número tal que $|f(x)| \leq M$ para todo x en el intervalo. Entonces*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M|b - a|.$$

Demostración. Si $a \leq b$, podemos usar el teorema 3.2 para obtener

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b M\,dx = M\int_a^b dx = M(b - a).$$

Si $b < a$, entonces

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

Tomando valores absolutos obtenemos el estimado $M(a - b)$. Como

$$a - b = |b - a|$$

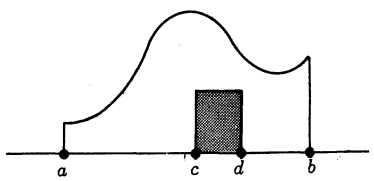
en el caso $b < a$, hemos probado nuestro teorema.

Teorema 3.4. *Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ con $a < b$. Se supone que $f(x) \geq 0$ para todo x en este intervalo, y $f(x) > 0$ para algún x en este intervalo. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Demostración. Sea c un número del intervalo tal que $f(c) > 0$, y suponer por simplicidad que $c \neq b$.

La idea geométrica que sustenta la demostración es bastante sencilla en términos de área. Como se supone que la función f es ≥ 0 donde sea, y > 0 en el punto c, entonces es mayor que algún número positivo fijo [digamos que $f(c)/2$] en algún intervalo cerca de c. Esto significa que podemos insertar un pequeño rectángulo de altura > 0 entre la curva $y = f(x)$ y el eje x. Entonces el área bajo la curva es al menos igual al área de este rectángulo, que es > 0.



Esta "demostración" se puede expresar en términos de propiedades formales de la integral de la manera siguiente. Como f es continua, existe algún número d cerca de c en el intervalo, con $c < d \leq b$, tal que $f(x)$ está cerca de $f(c)$ para todo x que satisfaga

$$c \leq x \leq d.$$

En particular, tenemos

$$f(x) \geq \frac{f(c)}{2}, \qquad c \leq x \leq d,$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f \\ &\geq \int_c^d f(x)\,dx \geq \int_c^d \frac{f(c)}{2}\,dx \\ &\geq \frac{f(c)}{2}(d-c) > 0.\end{aligned}$$

Esto prueba nuestro teorema si $c \neq b$. Si $c = b$, tomamos $d < c$ y procedemos de la misma manera.

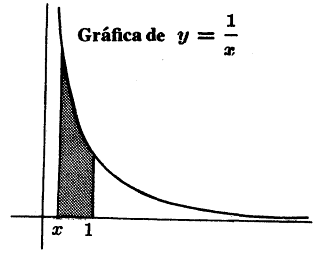
El teorema 3.4 no se usará en el resto de este libro excepto en un par de ejercicios, pero es importante en aplicaciones subsecuentes.

X, §4. INTEGRALES IMPROPIAS

Ejemplo 1. Comenzamos con un ejemplo. Sea $0 < c < 1$. Veamos la integral

$$\int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \log x \Big|_c^1 = \log 1 - \log c = -\log c.$$

La figura ilustra esta integral.



Se ha sombreado la parte del área bajo la gráfica que está entre c y 1. Vemos que, cuando c tiende a 0, el área se vuelve arbitrariamente grande, pues

$$-\log c \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad c \to 0.$$

Ejemplo 2. Sin embargo, es asombroso que ocurra una situación completamente diferente cuando consideramos el área bajo la curva $1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$. Tomamos $x > 0$, por supuesto. Sea $0 < c < 1$. Calculamos la integral:

$$\begin{aligned}\int_c^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx = \int_c^1 x^{-1/2}\,dx &= 2x^{1/2}\Big|_c^1 \\ &= 2 - 2c^{1/2}.\end{aligned}$$

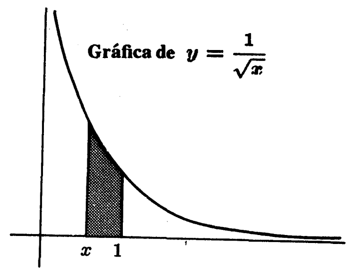
Entonces

$$\text{cuando} \qquad c \to 0, \qquad 2c^{1/2} \to 0$$

y, por lo tanto,

$$\int_c^1 x^{-1/2}\,dx \to 2 \qquad \text{cuando} \qquad c \to 0.$$

Podemos ilustrar la gráfica de $1/\sqrt{x}$ en la figura siguiente. Nótese que, a primera vista, no difiere gran cosa del ejemplo anterior, pero el cálculo del área muestra la existencia de una diferencia fundamental.



Tanto en el ejemplo 1 como en el ejemplo 2 vemos una chimenea infinita, cuando

$c \to 0$. Pero en el ejemplo 1 el área se vuelve arbitrariamente grande, mientras que, en el ejemplo 2, el área tiende al límite 2.

Definición. En el ejemplo 2 decimos que la integral

$$\int_0^1 x^{-1/2}\,dx$$

existe o **converge**, aunque la función $x^{-1/2}$ no esté definida en 0 y no sea continua en el intervalo **cerrado** $[0,1]$.

En general, supongamos que tenemos dos números a y b con, digamos, $a < b$. Sea f una función continua en el intervalo $a < x \leq b$. Esto significa que, para todo número c con $a < c < b$, la función f es continua en el intervalo

$$c \leq x \leq b.$$

Sea F cualquier función tal que $F'(x) = f(x)$.

Podemos entonces evaluar la integral como de costumbre:

$$\int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c).$$

Definición. Si existe el límite

$$\lim_{c \to a} F(c)$$

entonces decimos que **existe** la **integral impropia**

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

y entonces definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a}\int_c^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{c\to a} F(c).$$

Tendremos funciones parecidas cuando tratemos con un intervalo $a \leq x < b$ y una función f que sea continua en este intervalo. Si existe el límite

$$\lim_{c\to b}\int_a^c f(x)\,dx$$

entonces decimos que **existe** la **integral impropia**, y que es igual a este límite.

Ejemplo 3. Mostrar que la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

no existe.

Sea $0 < c < 1$. Primero evaluamos la integral:

$$\int_c^1 x^{-2}\,dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_c^1 = -1 - \left(-\frac{1}{c}\right) = -1 + \frac{1}{c}$$

Pero $1/c \to \infty$ cuando $c \to 0$ y, por lo tanto, la integral impropia no existe.

Ejemplo 4. Determinar si existe la integral

$$\int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx$$

y de ser así, hallar su valor.

Sea $1 < c < 3$. Entonces la función $1/(x-1)$ no es continua en el intervalo $[1,3]$, pero es continua en el intervalo $[c,3]$. Más aún,

$$\int_c^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \log(x-1)\Big|_c^3 = \log 2 - \log(c-1).$$

Pero

$$-\log(c-1) \to \infty \quad \text{cuando} \quad c \to 1 \quad \text{y} \quad c > 1.$$

Por lo tanto, la integral no existe.

Hay otro tipo de integral impropia, que trata con valores grandes.

Sea a un número y f una función continua definida para $x \geq a$. Considerar la integral

$$\int_a^B f(x)\,dx$$

para algún número $B > a$. Si $F(x)$ es cualquier integral indefinida de f, entonces nuestra integral es igual a $F(B) - F(a)$. Si tiende a un límite cuando B se vuelve muy grande, entonces **definimos**

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{o} \quad \int_a^\infty f = \lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)\,dx,}$$

y decimos que la **integral impropia converge** o **existe.**

Así,

$$\int_a^\infty f \quad \text{existe si} \quad \lim_{B\to\infty}\int_a^B f \quad \text{existe,}$$

y es igual al límite. De no ser así, decimos que la integral impropia **no converge** o **no existe.**

Ejemplo 5. Determinar si existe la integral impropia $\int_1^\infty 1/x\,dx$, y, de ser así, hallar su valor.

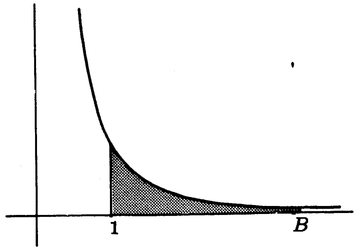
Sea B un número > 1. Entonces

$$\int_1^B \frac{1}{x}\,dx = \log B - \log 1 = \log B.$$

Cuando B se vuelve grande sucede lo mismo con $\log B$ y, por lo tanto, la integral impropia no existe.

Veamos la función $1/x^2$. Su gráfica es como en la siguiente figura. A primera vista no se percibe diferencia alguna entre esta función y $1/x$, excepto que

$1/x^2 < 1/x$ cuando $x > 1$. Sin embargo, hablando intuitivamente, hallaremos que $1/x^2$ tiende a 0 suficientemente más rápido que $1/x$ para garantizar que el área bajo la curva entre 1 y B tiende a un límite cuando B se vuelve grande.



Ejemplo 6. Determinar si existe la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

y, de ser así, hallar su valor.

Sea B un número > 1. Entonces

$$\int_1^B \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x}\bigg|_1^B = -\frac{1}{B} + 1.$$

Cuando B se vuelve grande, $1/B$ tiende a 0. Por lo tanto, el límite cuando B se vuelve grande existe y es igual a 1, que es el valor de nuestra integral. Tenemos así, por definición, que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{B}+1\right) = 1.$$

X, §4. EJERCICIOS

Determinar si las siguientes integrales impropias existen o no.

1. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^{3\;2}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{5-x}\,dx$
5. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x-2}\,dx$
6. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x-1}\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x-2}\,dx$
8. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$
9. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{3/2}}\,dx$
10. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$

En los ejercicios anteriores se evaluaron casos particulares de integrales impropias de la forma

$$\int_a^b \frac{1}{x^s}\,dx.$$

Los dos ejercicios siguientes son importantes porque indican en general si dichas integrales existen o no.

11. (a) Sea s un número < 1. Mostrar que la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$$

existe.

(b) Si $s > 1$, mostrar que la integral no existe.

(c) ¿Existe la integral cuando $s = 1$?

12. (a) Si $s > 1$, mostrar que existe la siguiente integral.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$$

(b) Si $s < 1$, mostrar que la integral no existe.

Determinar si existen las integrales siguientes; de ser así, hallar sus valores.

13. $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\,dx$
14. $\displaystyle\int_1^\infty e^{x}\,dx$

15. Sea B un número > 2. Hallar el área bajo la curva $y = e^{-2x}$ entre 2 y B. ¿Esta área tiende a un límite cuando B se vuelve muy grande? De ser así, ¿cuál es ese límite?

CAPÍTULO XI

Técnicas de integración

El propósito de este capítulo es enseñar ciertos trucos básicos para hallar integrales indefinidas. Obviamente es más fácil consultar las tablas de integrales, pero es conveniente tener un entrenamiento mínimo en las técnicas usuales.

XI, §1. SUSTITUCIÓN

Formularemos el análogo de la regla de la cadena para integración.

Supongan que tenemos una función $u(x)$ y otra función f tal que está definida $f(u(x))$. (Se supone que todas estas funciones están definidas en intervalos adecuados.) Deseamos evaluar una integral que tenga la forma

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx,$$

donde u es una función de x. Primero trabajaremos con ejemplos a fin de aprender la mecánica para hallar la respuesta.

Ejemplo 1. Hallar $\int (x^2+1)^3(2x)\,dx$.

Hacer $u = x^2+1$. Entonces $du/dx = 2x$ y nuestra integral está en la forma

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx,$$

donde la función f es $f(u) = u^3$. Abreviamos $(du/dx)dx$ por du, **como si pudiéramos cancelar** dx. Entonces podemos escribir la integral como

$$\int f(u)\,du = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} = \frac{(x^2+1)^4}{4}.$$

Podemos verificarlo diferenciando la expresión de la derecha mediante la regla de la cadena. Obtenemos

$$\frac{d}{dx}\frac{(x^2+1)^4}{4} = \frac{4}{4}(x^2+1)^3 2x = (x^2+1)^3(2x),$$

según se deseaba.

Ejemplo 2. Hallar $\int \operatorname{sen}(2x)(2)\,dx$.

Hacer $u = 2x$. Entonces $du/dx = 2$. Por lo tanto, nuestra integral está en la forma

$$\int \operatorname{sen} u\frac{du}{dx}\,dx = \int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u = -\cos(2x).$$

Observen que

$$\int \operatorname{sen}(2x)\,dx \neq -\cos(2x).$$

Si diferenciamos $-\cos(2x)$, obtenemos $\operatorname{sen}(2x)\cdot 2$.

La integral del ejemplo 2 también se puede escribir

$$\int 2\operatorname{sen}(2x)\,dx.$$

Está claro que no importa dónde coloquemos el 2.

Ejemplo 3. Hallar $\int \cos(3x)\,dx$

Sea $u = 3x$. Entonces $du/dx = 3$. No hay un 3 adicional en nuestra integral, pero podemos meter y sacar una constante de ella. Esta integral es igual a

$$\frac{1}{3}\int 3\cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\int \cos u\,du = \frac{1}{3}\operatorname{sen} u = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x).$$

Es conveniente usar una notación meramente formal que nos permita hacer una sustitución $u = g(x)$ como en los ejemplos anteriores. Así, en lugar de escribir

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

en el ejemplo 1, podríamos escribir $du = 2x\,dx$. Del mismo modo, en el ejemplo 2 escribiríamos $du = 2\,dx$, y en el ejemplo 3 escribiríamos $du = 3\,dx$. No atribuimos significado alguno a esto; es simplemente un recurso semejante al que se usa al programar una máquina computadora. La máquina no piensa: uno simplemente ajusta ciertos circuitos eléctricos de manera que ejecute una operación determinada y proporcione la respuesta correcta. El hecho de que escribir

$$du = \frac{du}{dx}\,dx$$

nos proporciona la respuesta correcta se probará en un momento.

Ejemplo 4. Hallar
$$\int (x^3+x)^9(3x^2+1)\,dx.$$
Sea
$$u = x^3 + x.$$
Entonces
$$du = (3x^2+1)\,dx.$$
Por lo tanto, nuestra integral es del tipo $\int f(u)\,du$ y es igual a
$$\int u^9\,du = \frac{u^{10}}{10} = \frac{(x^3+x)^{10}}{10}.$$

Mostraremos ahora cómo el procedimiento anterior, que puede verificarse en cada caso mediante diferenciación, da en realidad la respuesta correcta en todos los casos.

Suponemos entonces que queremos evaluar una integral de la forma
$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx,$$
donde u es una función de x. Sea F una función tal que
$$F'(u) = f(u).$$
Así pues, F es una integral indefinida
$$\boxed{F(u) = \int f(u)\,du.}$$
Si usamos la regla de la cadena, obtenemos
$$\frac{dF\big(u(x)\big)}{dx} = \frac{dF}{du}\frac{du}{dx} = f(u)\frac{du}{dx}.$$
Así hemos probado que
$$\boxed{\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = F\big(u(x)\big)}$$
según se deseaba.

Debemos observar además que la fórmula para integración por sustitución se aplica a la integral definida. Podemos enunciar esto formalmente como sigue.

Sea g una función diferenciable en el intervalo $[a,b]$ cuya derivada es continua. Sea f una función continua en un intervalo que contiene a los valores de g. Entonces
$$\boxed{\int_a^b f\big(g(x)\big)\frac{dg}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.}$$

La demostración es inmediata. Si F es una integral indefinida para f, entonces $F\big(g(x)\big)$ es una integral indefinida para
$$f\big(g(x)\big)\frac{dg}{dx}$$
debido a la regla de la cadena. Por lo tanto, el lado izquierdo de nuestra fórmula es igual a
$$F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big),$$
que es también el valor del lado derecho.

Ejemplo 5. Suponer que se considera la integral
$$\int_0^1 (x^3+x)^9(3x^2+1)\,dx$$
con $u = x^3 + x$. Cuando $x = 0$, $u = 0$, y cuando $x = 1$, $u = 2$. Así, nuestra integral definida es igual a
$$\int_0^2 u^9\,du = \frac{u^{10}}{10}\bigg|_0^2 = \frac{2^{10}}{10}.$$

Ejemplo 6. Evaluar
$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} x^2\,dx.$$
Hacemos $u = x^2$, $du = 2x\,dx$. Cuando $x = 0$, $u = 0$. Cuando $x = \sqrt{\pi}$, $u = \pi$. Entonces nuestra integral es igual a
$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} u\,du = \tfrac{1}{2}(-\cos u)\bigg|_0^{\pi} = \tfrac{1}{2}(-\cos\pi + \cos 0) = 1.$$

Ejemplo 7. Evaluar
$$I = \int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx.$$
Hacemos $u = 1 - x^2$ de modo que $du = -2x\,dx$. Entonces $x^2 = 1 - u$, $x^4 = (1-u)^2$, y
$$\begin{aligned} I = -\tfrac{1}{2}\int (1-u)^2u^{1/2}\,du &= -\tfrac{1}{2}\int (1-2u+u^2)u^{1/2}\,du \\ &= -\tfrac{1}{2}\int (u^{1/2} - 2u^{3/2} + u^{5/2})\,du \\ &= -\tfrac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2} - 2\frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{7/2}}{7/2}\right). \end{aligned}$$
Al sustituir $u = 1 - x^2$ se obtiene la respuesta en términos de x.

XI, §1. EJERCICIOS

Hallar las integrales siguientes

1. $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$

2. $\displaystyle\int x^3e^{-x^4}\,dx$

3. $\displaystyle\int x^2(1+x^3)\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^n}\,dx$ $\quad (n = \text{entero})$

6. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,dx$

8. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$

9. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}^5 x\cos x\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^\pi \cos^4 x\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

14. $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen}(2x^2)\,dx$

16. (a) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x\,dx$ (b) $\displaystyle\int \cos 2x\,dx$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x\,dx$ (d) $\displaystyle\int \cos 3x\,dx$

(e) $\displaystyle\int e^{4x}\,dx$ (f) $\displaystyle\int e^{5x}\,dx$ (g) $\displaystyle\int e^{-5x}\,dx$

En los problemas siguientes, usar los límites de la teoría de la función exponencial estudiados en el capítulo V, sección §5, a saber,

$$\boxed{\lim_{B\to\infty} \frac{B}{e^B} = 0.}$$

17. Hallar el área bajo la curva $y = xe^{-x^2}$ entre 0 y un número $B > 0$. ¿Tiende esta área a un límite conforme B se vuelve muy grande? De ser así, ¿cuál es este límite?

18. Hallar el área bajo la curva $y = x^2e^{-x^3}$ entre 0 y un número $B > 0$. ¿Esta área tiende a un límite cuando B se vuelve muy grande? De ser así, ¿cuál es este límite?

XI, §1. EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

Hallar las integrales siguientes.

1. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+2}\,dx$

2. $\displaystyle\int \sqrt{3x+1}\,dx$

3. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\cos x\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

6. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^4+1}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x}{(3x^2+5)^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int (x^2+3)^4x^3\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$

10. $\displaystyle\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$

11. $\displaystyle\int (x^3+1)^{7/5}x^5\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-4)^{3/2}}\,dx$

13. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x\,dx$

14. $\displaystyle\int \cos 4x\,dx$

15. $\displaystyle\int e^x\operatorname{sen} e^x\,dx$

16. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{(\log x)^4}{x}\,dx$

21. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx$

22. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

23. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2-x}\,dx$

24. $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

26. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+e^{2x}}{e^x}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen} x^2\,dx$

XI, §2. INTEGRACIÓN POR PARTES

Si f y g son dos funciones diferenciables de x, entonces

$$\frac{d(fg)}{dx} = f(x)\frac{dg}{dx} + g(x)\frac{df}{dx}.$$

Por lo tanto,

$$f(x)\frac{dg}{dx} = \frac{d(fg)}{dx} - g(x)\frac{df}{dx}$$

Usando la fórmula para la integral de una suma, que es la suma de las integrales, y el hecho de que

$$\int \frac{d(fg)}{dx}\,dx = f(x)g(x),$$

obtenemos

$$\int f(x)\,\frac{dg}{dx}\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)\,\frac{df}{dx}\,dx,$$

que se llama fórmula para la **integración por partes.**

Si hacemos $u = f(x)$ y $v = g(x)$, entonces la fórmula se puede abreviar en nuestra notación, como sigue:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Ejemplo 1. Hallar la integral $\int \log x\,dx$.

Sea $u = \log x$ y $dv = dx$. Entonces $du = (1/x)dx$ y $v = x$. Por lo tanto, nuestra integral está en la forma $\int u\,dv$ y es igual a

$$uv - \int v\,du = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x.$$

Ejemplo 2. Hallar la integral $\int xe^x\,dx$.

Sea $u = x$ y $dv = e^x\,dx$. Entonces $du = dx$ y $v = e^x$, de modo que

$$\int xe^x\,dx = \int u\,dv = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x.$$

Observen cómo du/dx es una función más sencilla que u misma, mientras que v y dv/dx son la misma, en este caso. Un procedimiento similar funciona para integrales de la forma $\int x^n e^x\,dx$ cuando n es un entero positivo, haciendo $u = x^n$, $du = nx^{n-1}\,dx$. Ver los ejercicios 7 y 8.

Los dos ejemplos anteriores ilustran un hecho general: Funcionará pasar de la función u a du/dx en el proceso de integración por partes, siempre que al ir de dv a v no se haga más complicado este lado del procedimiento. En el primer ejemplo, con $u = \log x$, después $du/dx = 1/x$ es una función más sencilla (una potencia de x), mientras que al ir de $dv = dx$ a $v = x$ sólo se aportan potencias de x al procedimiento.

A continuación damos un ejemplo donde se tiene que integrar por partes dos veces antes de obtener una respuesta.

Ejemplo 3. Hallar $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

Sea $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Entonces

$$du = e^x\,dx \quad \text{y} \quad v = -\cos x.$$

Si llamamos a nuestra integral I, entonces

$$I = -e^x\cos x - \int -e^x\cos x\,dx$$

$$= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx.$$

Esto es como si estuviéramos dando vueltas en círculos, pero no hay que desanimarse. En lugar de ello, conviene repetir el procedimiento en $e^x\cos x$. Sea

$$t = e^x \quad \text{y} \quad dz = \cos x\,dx.$$

Entonces,

$$dt = e^x\,dx \quad \text{y} \quad z = \operatorname{sen} x.$$

La segunda integral se convierte en

$$\int t\,dz = tz - \int z\,dt = e^x\operatorname{sen} x - \int e^x\operatorname{sen} x\,dx.$$

Hemos regresado a la integral original

$$\int e^x\operatorname{sen} x\,dx$$

¡pero con signo menos! Así,

$$I = -e^x\cos x + e^x\operatorname{sen} x - I.$$

Por lo tanto,

$$2I = e^x\operatorname{sen} x - e^x\cos x,$$

y dividiendo entre 2, nos da el valor

$$I = \frac{e^x\operatorname{sen} x - e^x\cos x}{2}.$$

Damos un ejemplo donde primero se hace una sustitución *antes* de integrar por partes.

Ejemplo 4. Hallar la integral $\int e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

Hacemos $x = u^2$, de modo que $dx = 2u\,du$. Entonces

$$\int e^{-\sqrt{x}}\,dx = \int e^{-u}2u\,du = 2\int ue^{-u}\,du.$$

Ahora esto se puede integrar por partes con $u = u$ y $dv = e^{-u}\,du$. Entonces $v = -e^{-u}$, y dejamos que el lector haga el resto.

Observación. Se puede mostrar, aunque no es fácil, que ningún procedimiento permitirá expresar la integral

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

en términos de funciones comunes: potencias de x, funciones trigonométricas, función exponencial o log, sumas, productos o composiciones de éstas.

XI, §2. EJERCICIOS

Hallar las integrales siguientes.

1. $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$
2. $\int \arctan x\, dx$
3. $\int e^{2x} \operatorname{sen} 3x\, dx$
4. $\int e^{-4x} \cos 2x\, dx$
5. $\int (\log x)^2\, dx$
6. $\int (\log x)^3\, dx$
7. $\int x^2 e^x\, dx$
8. $\int x^2 e^{-x}\, dx$
9. $\int x \operatorname{sen} x\, dx$
10. $\int x \cos x\, dx$
11. $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$
12. $\int x^2 \cos x\, dx$
13. $\int x^3 \cos x^2\, dx$
14. $\int x^5 \sqrt{1-x^2}\, dx$

[*Idea:* En el ejercicio 13, hacer primero la sustitución $u = x^2$, $du = 2x\, dx$. En el ejercicio 14, sea $u = 1 - x^2$, $x^2 = 1 - u$.]

15. $\int x^2 \log x\, dx$
16. $\int x^3 \log x\, dx$
17. $\int x^2 (\log x)^2\, dx$
18. $\int x^3 e^{-x^2}\, dx$
19. $\int \frac{x^7}{(1-x^4)^2}\, dx$
20. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\, dx$

En las siguientes integrales impropias usaremos límites de la teoría de exponenciales y logaritmos, estudiada en el capítulo VIII, sección §5. Estos límites son como sigue. Si n es un entero positivo, entonces

$$\boxed{\lim_{B\to\infty} \frac{B^n}{e^B} = 0.}$$

Además,

$$\boxed{\lim_{a\to 0} a \log a = 0.}$$

El primer límite asegura que la función exponencial se vuelve grande con más rapidez que cualquier polinomio. El segundo límite se puede deducir del primero; basta escribir $a = e^{-B}$. Entonces $a \to 0$ si, y sólo si, $B \to \infty$. Pero $\log a = -B$. De modo que

$$a \log a = \frac{-B}{e^B},$$

de donde vemos, al tomar $n = 1$, que el primer límite implica el segundo.

21. Sea B un número > 0. Hallar el área bajo la curva $y = xe^{-x}$ entre 0 y B. ¿Esta área tiende a un límite cuando B se vuelve muy grande? De ser así, ¿cuál es ese límite?
22. ¿Existe la integral impropia $\int_1^\infty x^2 e^{-x}\, dx$? De ser así, ¿cuál es su valor?
23. ¿Existe la integral impropia $\int_1^\infty x^3 e^{-x}\, dx$? De ser así, ¿cuál es su valor?
24. Sea B un número > 2. Hallar el área bajo la curva
$$y = \frac{1}{x(\log x)^2}$$
entre 2 y B. ¿Esta área tiende a un límite cuando B se vuelve muy grande? De ser así, ¿cuál límite?
25. ¿Existe la integral impropia
$$\int_3^\infty \frac{1}{x(\log x)^4}\, dx?$$
De ser así, ¿cuál es su valor?
26. ¿Existe la integral impropia
$$\int_0^2 \log x\, dx?$$
De ser así, ¿cuál es su valor?

XI, §2. EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

Hallar las integrales siguientes, usando sustituciones e integración por partes, según sea necesario.

1. $\int x \arctan x\, dx$
2. (a) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ [*Idea:* Usar $u = \sqrt{1-x^2}$ y $dv = dx$.]
   (b) $\int x \operatorname{arcsen} x\, dx$
3. $\int x \arccos x\, dx$
4. $\int x^3 e^{2x}\, dx$
5. $\int_{-1}^{0} \operatorname{arcsen} x\, dx$
6. $\int_1^2 x^3 \log x\, dx$
7. $\int_0^{1/2} x \operatorname{arcsen} 2x\, dx$
8. $\int_1^2 \sqrt{x} \log x\, dx$
9. $\int_{-1}^{1} xe^x\, dx$
10. $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2}\, dx$
11. $\int xe^{-\sqrt{x}}\, dx$
12. $\int \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}}\, dx$

Probar las fórmulas, donde m y n son enteros positivos.

13. $\int (\log x)^n \, dx = x(\log x)^n - n \int (\log x)^{n-1} \, dx$

14. $\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$

15. $\int x^m (\log x)^n \, dx = \frac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\log x)^{n-1} \, dx$

*16. Sea $n! = n(n-1)\cdots 1$ el producto de los primeros n enteros. Mostrar que

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx = n!.$$

[*Idea:* Hallar primero la integral indefinida $\int x^n e^{-x} \, dx$ en términos de $\int x^{n-1} e^{-x} \, dx$ como en el ejercicio 14. Después evaluar entre 0 y B y dejar que B se haga grande. Si I_n denota la integral deseada, deberá hallarse $I_n = nI_{n-1}$. Se puede continuar así, por pasos, hasta verse reducido a evaluar $I_0 = \int_0^\infty e^{-x} \, dx$.]

XI, §3. INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Investigaremos integrales que incluyen al seno y al coseno. Será útil tener las fórmulas siguientes:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},}$$

las cuales se prueban fácilmente usando

$$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Ejemplo. Usamos la primera fórmula del recuadro para obtener:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x.$$

Los dos ejemplos siguientes tratan con potencias *impares* de seno y coseno. Se puede usar un método en este caso, pero no se puede usar cuando haya sólo potencias *pares*.

Ejemplo. Queremos hallar

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx.$$

Reemplazamos $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, de modo que

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int (\operatorname{sen} x)(1 - cos^2 x) \, dx$$

$$= \int \operatorname{sen} x \, dx - \int (\cos^2 x)(\operatorname{sen} x) \, dx.$$

La segunda de estas integrales se puede evaluar por la sustitución

$$u = \cos x, \qquad du = -\operatorname{sen} x \, dx.$$

Hallamos entonces que

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}.$$

Para potencias bajas del seno y del coseno, los anteriores son los medios más fáciles. Especialmente si tenemos que integrar una potencia *impar* del seno o del coseno, podemos usar un método parecido.

Ejemplo. Hallar $I = \int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$.

Reemplazamos

$$\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 = (1 - \cos^2 x)^2,$$

de modo que

$$\int sen^5 x \cos^2 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx.$$

Ahora hacemos

$$u = \cos x \qquad \text{y} \qquad du = -\operatorname{sen} x \, dx.$$

Entonces

$$I = -\int (1 - u^2)^2 u^2 \, du = -\int (1 - 2u^2 + u^4) u^2 \, du$$

$$= -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du$$

$$= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right).$$

Si se quiere la respuesta en términos de x, se sustituye de regreso $u = \cos x$ en esta última expresión.

En los dos ejemplos anteriores tuvimos una potencia *impar* del seno. Entonces, al usar la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ y la sustitución

$$u = \cos x, \qquad du = -\operatorname{sen} x \, dx,$$

transformamos la integral en una suma de integrales de la forma

$$\int u^n \, du,$$

donde n es un entero positivo.

Este método trabaja sólo cuando hay una potencia impar del seno o del coseno. En general, se tiene que usar otro método para integrar potencias arbitrarias.

Hay una manera general en la cual se puede integrar $\operatorname{sen}^n x$ para cualquier entero positivo n: integración por partes. Tomemos primero un ejemplo.

Ejemplo. Hallar la integral $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$.

Escribimos la integral en la forma

$$I = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Sean $u = \operatorname{sen}^2 x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Entonces

$$du = 2\operatorname{sen} x \cos x\,dx \qquad \text{y} \qquad v = -\cos x.$$

Así

$$I = -(\operatorname{sen}^2 x)(\cos x) - \int -\cos x(2\operatorname{sen} x\cos x)\,dx$$

$$= -\operatorname{sen}^2 x\cos x + 2\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Esta última integral podría entonces determinarse por sustitución, por ejemplo

$$t = \cos x \qquad \text{y} \qquad dt = -\operatorname{sen} x\,dx.$$

La última integral se vuelve $-2\int t^2\,dt$, y, por lo tanto,

$$I = \int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\operatorname{sen}^2 x\cos x - \tfrac{2}{3}\cos^3 x.$$

Para tratar con un entero positivo arbitrario n, mostraremos cómo reducir la integral $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ a la integral $\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$. Procediendo por pasos hacia abajo se obtendrá un método que dará la respuesta completa.

Teorema 3.1. *Para cualquier entero $n \geq 2$ tenemos*

$$\boxed{\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.}$$

Demostración. Escribimos la integral como

$$I_n = \int \operatorname{sen}^n x\,dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Sea $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Entonces

$$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x\cos x\,dx \qquad \text{y} \qquad v = -\cos x.$$

Así

$$I_n = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x - \int -(n-1)\cos x \operatorname{sen}^{n-2} x\cos x\,dx$$

$$= -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\cos^2 x\,dx.$$

Reemplazamos $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$ y obtenemos

$$I_n = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx.$$

Entonces

$$I_n = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

de donde

$$nI_n = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2}.$$

Al dividir entre n obtenemos nuestra fórmula.

Dejamos como ejercicio la demostración de la fórmula análoga para el coseno.

$$\boxed{\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.}$$

Las integrales que tienen tangentes se pueden hacer mediante una técnica similar, puesto que

$$\frac{d\tan x}{dx} = 1 + \tan^2 x.$$

Dado que estas funciones se usan menos que el seno y el coseno, no escribiremos las fórmulas para aligerar esta página impresa que, de otra forma, se volvería deprimente.

Potencias mixtas del seno y del coseno

Es posible integrar potencias mixtas del seno y del coseno al reemplazar $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, por ejemplo.

Ejemplo. Hallar $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx$.

Al reemplazar $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$, vemos que nuestra integral es igual a

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx - \int \operatorname{sen}^4 x\,dx,$$

que sabemos cómo integrar. En este caso pudimos también hacer un truco, realizando las sustituciones del principio de la sección. Así,

$$(\operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x) = \frac{1 - \cos^2 2x}{4},$$

lo cual reduce las potencia dentro de la integral. Otra aplicación de este mismo tipo, a saber,

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

reduce nuestro problema más aún. Así que ¡a trabajar! Obtengan la integral, como ejercicio.

Advertencia. Debido a identidades trigonométricas como

$$\operatorname{sen}^2 x = -\tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{2},$$

son posibles diferentes formas de respuestas, las cuales diferirán en una constante de integración.

Cuando encontremos una integral que incluya una raíz cuadrada, con frecuencia podremos deshacernos de la raíz cuadrada efectuando una sustitución trigonométrica.

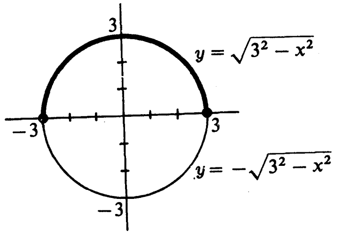
Ejemplo. Hallar el área de un círculo de radio 3.

La ecuación del círculo es

$$x^2 + y^2 = 9,$$

y la porción del círculo en el primer cuadrante se describe mediante la función

$$y = \sqrt{3^2 - x^2}.$$



Entonces, un cuarto del área está dado por la integral

$$\int_0^3 \sqrt{3^2 - x^2}\, dx.$$

Para dichas integrales, queremos deshacernos de ese espantoso signo de raíz cuadrada, de modo que tratamos de convertir la expresión bajo la raíz cuadrada en un cuadrado perfecto. Usamos la sustitución

$$x = 3 \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad dx = 3 \cos t\, dt, \quad \text{con} \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

Cuando $t = 0$, entonces $x = 0$, y cuando $t = \pi/2$, entonces $x = 3$. Por lo tanto, nuestra integral se vuelve

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sqrt{3^2 - 3^2 \operatorname{sen}^2 t}\, 3 \cos t\, dt &= \int_0^{\pi/2} 9 \cos t \cos t\, dt \\ &= 9 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt \\ &= \frac{9\pi}{4}.\end{aligned}$$

Nótese que, en el intervalo mencionado, $0 \le t \le \pi/2$, el coseno $\cos t$ es positivo, y así

$$\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t.$$

Si escogemos un intervalo donde el coseno es negativo, entonces, al tomar la raíz cuadrada, necesitaríamos usar un signo menos adicional. Esto es, si $\cos t < 0$, entonces

$$\sqrt{\cos^2 t} = -\cos t.$$

Como la integral anterior representaba $1/4$ del área del círculo, se sigue que el área total del círculo es 9π.

En general, una integral que incluya expresiones como

$$\sqrt{1 - x^2}$$

se puede a veces evaluar usando la sustitución

$$x = \operatorname{sen} \theta, \qquad dx = \cos \theta\, d\theta,$$

pues entonces la expresión bajo la raíz cuadrada se convierte en un cuadrado perfecto, a saber, $1 - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta$.

Al hacer esta sustitución, usualmente establecemos que

$$-\pi/2 \le \theta \le \pi/2 \quad \text{y} \quad -1 \le x \le 1.$$

Éste es el margen donde

$$x = \operatorname{sen} \theta \quad \text{tiene la función inversa} \quad \theta = \arcsen x.$$

Potencias negativas de seno y coseno

En general es molesto integrar potencias negativas del seno y del coseno, aunque es posible hacerlo. Sépase de una vez que existe la fórmula siguiente:

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos \theta}\, d\theta = \int \sec \theta\, d\theta = \log(\sec \theta + \tan \theta).}$$

Esto se hace por sustitución. Tenemos

$$\frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta = \frac{(\sec \theta)(\sec \theta + \tan \theta)}{\sec \theta + \tan \theta}.$$

Sea $u = \sec \theta + \tan \theta$. Entonces la integral está en la forma

$$\int \frac{1}{u}\, du.$$

(Ésta es una buena oportunidad de insistir en que la fórmula recién obtenida es válida en cualquier intervalo en que $\cos \theta \neq 0$ y

$$\sec \theta + \tan \theta > 0.$$

De otra manera, los símbolos no tienen sentido. Determinar dicho intervalo queda como ejercicio.) La expresión de la fórmula anterior es tan complicada que **no deberán memorizarla**. Conviene consultarla cuando sea necesario. Hay una fórmula parecida para la integral de $1/\operatorname{sen} \theta$, que se obtiene usando el prefijo co- en el lado derecho. La fórmula es:

$$\boxed{I = \int \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}\, d\theta = \int \csc \theta\, d\theta = -\log(\csc \theta + \cot \theta),}$$

que es similar a la respuesta dada antes para $\int (1/\cos \theta)\, d\theta$. Claro que la respuesta es en un intervalo donde la expresión dentro del logaritmo es positiva. De lo contrario se tiene que tomar el valor absoluto de esta expresión. La demostración es parecida, y también se puede verificar diferenciando el lado derecho para obtener $1/\operatorname{sen} \theta$.

Advertencia En el lado izquierdo tenemos seno en lugar de coseno, de manera que se elimina el prefijo co-. En el lado derecho tenemos la cosecante y la cotangente, de modo que se agrega el prefijo co-. *Se debe recordar que existe esta simetría*, pero siempre se debe verificar cuál es la relación correcta antes de usarla, ya que, al usar esta simetría, *aparecen ciertos signos menos*, así como el signo menos que aparece ahora en el lado derecho. No se intente memorizar en qué caso aparecen dicho signos menos; es mejor verificar cada vez que se necesite una fórmula similar, o verla en tablas de integrales.

Ejemplo. Evaluemos la integral

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Sean $x = \operatorname{sen}\theta$, $dx = \cos\theta\, d\theta$. Entonces

$$I = \int \frac{1}{\operatorname{sen}\theta\sqrt{\cos^2\theta}} \cos\theta\, d\theta.$$

Sobre un intervalo donde sea positivo $\cos\theta$, tenemos

$$\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta,$$

y, por lo tanto,

$$I = \int \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta.$$

Esta integral se evaluó en el recuadro anterior.

XI, §3. EJERCICIOS

Hallar las integrales siguientes.

1. $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$ 2. $\int \cos^3 x\, dx$ 3. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx$

Hallar el área de la región encerrada por las curvas siguientes.

4. $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ 5. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ 6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

7. Hallar el área de un círculo de radio $r > 0$.

8. Hallar las integrales

(a) $\int \sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta$ (b) $\int \sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta$

[*Idea:* Escribir $\theta = 2u$. Esto deberá ayudar para hacer que la expresión bajo la raíz cuadrada sea un cuadrado perfecto.]

9. Para cualesquiera enteros m y n, probar las fórmulas:

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

[*Idea:* Expander el lado derecho y cancelar lo más posible. Usar las fórmulas de suma del capítulo IV, sección §3.]

10. Usar el ejercicio anterior para hacer éste.

(a) Mostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 3x \cos 2x\, dx = 0.$$

(b) Mostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 5x \cos 2x\, dx = 0.$$

11. Mostrar en general que, para cualesquiera enteros positivos m y n, tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = 0.$$

12. Mostrar en general que, para enteros positivos m y n,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \pi, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

[*Idea:* Si $m \neq n$, usar el ejercicio 9. Si $m = n$, usar $\operatorname{sen}^2 nx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)$.]

13. Hallar $\int \tan x\, dx$.

Hallar las integrales siguientes.

14. $\int \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$ 15. $\int \dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}\, dx$

16. $\int \dfrac{1}{\sqrt{2-4x^2}}\, dx$ 17. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\, dx$

18. Sea f una función continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Definimos los números c_0, a_n y b_n para enteros positivos n mediante las fórmulas

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\, dx.$$

Estos números, c_0, a_n y b_n, se llaman **coeficientes de Fourier** de f.

Ejemplo. Sea $f(x) = x$. Entonces el 0-ésimo coeficiente de Fourier de f es la integral:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = \frac{1}{2\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Estos coeficientes a_n y b_n están dados por las integrales

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\, dx \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx.$$

Deberán evaluarse estas integrales usando integración por partes. Calcular los coeficientes de Fourier de las funciones siguientes. (Si se hace primero el 19, es posible que se tenga menos trabajo.)

(a) $f(x) = x$ (b) $f(x) = x^2$ (c) $f(x) = |x|$
(d) $f(x) = \cos x$ (e) $f(x) = \operatorname{sen} x$ (f) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$
(g) $f(x) = \cos^2 x$ (h) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ (i) $f(x) = |\cos x|$
(j) $f(x) = 1$

19. (a) Sea f una función par [esto es $f(x) = f(-x)$]. Mostrar que sus coeficientes de Fourier b_n son iguales a 0.
(b) Sea f una función impar [esto es $f(x) = -f(-x)$]. ¿Qué se puede decir acerca de sus coeficientes de Fourier?

XI, §3. EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

1. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}\,dx$
2. $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$
3. $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} e^x\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^6 x\,dx$
7. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx$
8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 2x\,dx$
9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2x\cos^2 2x\,dx$
10. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^4 x\,dx$
11. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$
13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$
15. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$
16. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

En los ejercicios siguientes, sea a un número positivo.

17. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$
18. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$
19. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$
21. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx$
22. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$
23. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx$
24. $\displaystyle\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

XI, §4. FRACCIONES PARCIALES

Queremos estudiar las integrales de cocientes de polinomios.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios. Queremos investigar la integral

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx.$$

Usando la división, se puede reducir el problema al caso en que el grado de f es menor que el grado de g. El ejemplo siguiente ilustra esta reducción.

Ejemplo. Considerar los dos polinomios $f(x) = x^3 - x + 1$ y

$$g(x) = x^2 + 1.$$

Al dividir f entre g (deben saber esto desde la secundaria) obtenemos un cociente de x con residuo $-2x+1$. Así,

$$x^3 - x + 1 = (x^2+1)x + (-2x+1).$$

Por lo tanto,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x + \frac{-2x+1}{x^2+1}.$$

Para hallar la integral de $f(x)/g(x)$ integramos x y el cociente de la derecha, que tiene la propiedad de que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

De ahora en adelante, *supondremos que, cuando se considere un cociente $f(x)/g(x)$, el grado de f será menor que el grado de g.* Lo suponemos porque el método que se describirá trabaja sólo en este caso. Factorizando una constante, de ser necesario, supondremos además que $g(x)$ se puede escribir

$$g(x) = x^d + \text{términos de orden menor.}$$

Comenzaremos estudiando casos especiales, y después describiremos cómo se puede reducir a éstos el caso general.

Primera parte. Factores lineales en el denominador

Caso 1. Si a es un número y n es un entero ≥ 1, entonces

$$\boxed{\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx &= \frac{1}{-n+1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} \quad &\text{si}\quad n \neq 1,\\ &= \log(x-a) \quad &\text{si}\quad n = 1.\end{aligned}}$$

Esto es bien conocido; y sabemos cómo hacerlo. De hecho, tenemos

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \int (x-a)^{-n}\,dx = \int u^{-n}\,du.$$

Suponer que $n \neq 1$. Entonces, por la sustitución $u = x - a$, $du = dx$, obtenemos

$$\int (x-a)^{-n}\,dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{-n+1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}$$

porque

$$u^{-n+1} = u^{-(n-1)} = \frac{1}{u^{n-1}}.$$

Suponer que $n = 1$. Entonces la integral tiene la forma

$$\int \frac{1}{u}\,du = \log u,$$

y, por lo tanto,

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \log(x-a).$$

Caso 2. A continuación consideramos integrales de expresiones como

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx \qquad \text{o} \qquad \int \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx,$$

donde el denominador está formado por un producto de términos de la forma

$$(x-a_1)\cdots(x-a_n)$$

para algunos números $a_1, \ldots, a_n$ que no necesariamente son distintos. El procedimiento equivale a escribir la expresión bajo la integral como una suma de términos, como en el caso 1.

Ejemplo. Deseamos hallar la integral

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx.$$

Para hacer esto, queremos escribir

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{c_1}{x-2} + \frac{c_2}{x-3}$$

con algunos números c_1 y c_2 que debemos despejar. Se coloca la expresión de la derecha sobre un común denominador y se tiene

$$\frac{c_1}{x-2} + \frac{c_2}{x-3} = \frac{c_1(x-3) + c_2(x-2)}{(x-2)(x-3)}.$$

Así, $(x-2)(x-3)$ es el común denominador, y

$$\text{numerador} = c_1(x-3) + c_2(x-2) = (c_1+c_2)x - 3c_1 - 2c_2.$$

Queremos que la fracción sea igual a $1/(x-2)(x-3)$, por lo que el numerador debe ser igual a 1; esto es, debemos tener

$$(c_1+c_2)x - 3c_1 - 2c_2 = 1.$$

Entonces basta resolver las ecuaciones simultáneas

$$c_1 + c_2 = 0,$$
$$-3c_1 - 2c_2 = 1.$$

Despejando c_1 y c_2 se tiene $c_2 = 1$ y $c_1 = -1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx &= \int \frac{-1}{(x-2)}\,dx + \int \frac{1}{(x-3)}\,dx \\ &= -\log(x-2) + \log(x-3).\end{aligned}$$

Ejemplo. Hallar la integral

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx.$$

Queremos hallar números c_1, c_2, c_3 tales que

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} + \frac{c_3}{x-2}.$$

Nótese que $(x-1)^2$ aparece en el denominador del cociente original. Para tomar esto en cuenta es necesario incluir dos términos con $(x-1)$ y $(x-1)^2$ en sus denominadores, que aparecieron como

$$\frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2}.$$

Por otro lado, $(x-2)$ aparece sólo a la primera potencia en el cociente original, de modo que da lugar únicamente a un término

$$\frac{c_3}{x-2}$$

en la descomposición en fracciones parciales. (La regla general se enuncia al final de esta sección.)

Describimos ahora cómo hallar las constantes c_1, c_2, c_3, que satisfacen la relación

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)} &= \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} + \frac{c_3}{x-2} \\ &= \frac{c_1(x-1)(x-2) + c_2(x-2) + c_3(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)}.\end{aligned}$$

Aquí pusimos la fracción de la derecha sobre el común denominador

$$(x-1)^2(x-2).$$

Tenemos

$$\begin{aligned}x + 1 = \text{numerador} &= c_1(x-1)(x-2) + c_2(x-2) + c_3(x-1)^2 \\ &= (c_1+c_3)x^2 + (-3c_1 + c_2 - 2c_3)x + 2c_1 - 2c_2 + c_3.\end{aligned}$$

Así que, para hallar las constantes c_1, c_2, c_3, que satisfacen la relación deseada, tenemos que resolver las ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} c_1 \qquad + c_3 &= 0, \\ -3c_1 + c_2 - 2c_3 &= 1, \\ 2c_1 - 2c_2 + c_3 &= 1. \end{aligned}$$

Éste es un sistema de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas, que se puede resolver para determinar c_1, c_2 y c_3. Se halla que $c_1 = -3$, $c_2 = -2$, $c_3 = 3$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx &= \int \frac{-3}{x-1}\,dx + \int \frac{-2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{3}{(x-2)}\,dx \\ &= -3\log(x-1) + \frac{2}{x-1} + 3\log(x-2). \end{aligned}$$

Éste es un teorema algebraico con el cual, si se sigue el procedimiento anterior para escribir una fracción en términos de fracciones más sencillas de acuerdo con el método ilustrado en los ejemplos, siempre se podrán despejar los coeficientes $c_1, c_2, c_3, \ldots$. No se puede dar la *demostración* en el nivel de este curso, pero en la práctica, a menos que ustedes o yo cometamos algún error, tan sólo despejamos numéricamente en cada caso. Si tenemos potencias de orden superior de algún factor en el denominador, entonces tenemos que usar también potencias de orden superior en las fracciones más simples del lado derecho.

Ejemplo. Podemos descomponer

$$\frac{x+1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} + \frac{c_3}{(x-1)^3} + \frac{c_4}{x-2}.$$

Al poner el lado derecho sobre un denominador común, e igualando el numerador con $x+1$, podemos despejar los coeficientes

$$c_1, c_2, c_3, c_4.$$

Segunda parte. Factores cuadráticos en el denominador

Caso 3. Queremos hallar la integral

$$\boxed{I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx}$$

cuando n es un entero positivo. Si $n = 1$, no hay nada nuevo: la integral es $\arctan x$. Si $n > 1$, usaremos integración por partes. Habrá un pequeño giro en el procedimiento usual, porque si integramos por partes I_n de la manera natural, hallamos que el exponente n crece en una unidad. Hagamos el caso $n = 1$ como ejemplo, de modo que comenzamos con

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

Sea

$$u = \frac{1}{x^2+1} = (x^2+1)^{-1}, \qquad dv = dx,$$

$$du = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,dx, \qquad v = x.$$

Entonces

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{x}{x^2+1} - \int \frac{-2x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \\ (*) \qquad &= \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx. \end{aligned}$$

En la última integral de la derecha escribimos $x^2 = x^2 + 1 - 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \arctan x - I_2. \end{aligned}$$

Si ahora sustituimos esto en la expresión $(*)$, obtenemos

$$I_1 = \frac{x}{x^2+1} + 2\arctan x - 2I_2.$$

Entonces podemos despejar I_2 en términos de I_1, y hallamos que

$$\begin{aligned} 2I_2 &= \frac{x}{x^2+1} + 2\arctan x - I_1 \\ &= \frac{x}{x^2+1} + 2\arctan x - \arctan x \\ &= \frac{x}{x^2+1} + \arctan x. \end{aligned}$$

Al dividir entre 2 se obtiene el valor de I_2:

$$\boxed{\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x.}$$

El mismo método funciona en general. Queremos reducir I_n para hallar I_{n-1}, donde

$$I_{n-1} = \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx.$$

Sea

$$u = \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \quad \text{y} \quad dv = dx.$$

Entonces,

$$du = -(n-1)\frac{2x}{(x^2+1)^n}\,dx \quad \text{y} \quad v = x.$$

Así,

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,dx.$$

Escribimos $x^2 = x^2 + 1 - 1$. Obtenemos

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx - 2(n-1)\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$

o, en otras palabras,

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)I_n.$$

Por lo tanto,

$$2(n-1)I_n = \frac{n}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1},$$

de donde

$$\boxed{\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{(2n-3)}{2(n-1)}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx,}$$

o, usando la abreviación I_n, hallamos:

$$\boxed{I_n = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}.}$$

Esto nos da una fórmula de recursión que baja el exponente n del denominador hasta que llega a $n = 1$. En ese caso sabemos que

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x.}$$

Si se quiere hallar I_3, se usa la fórmula para reducirla a I_2, después se usa la fórmula de nuevo para reducirla a I_1, que es $\arctan x$. Esto da una fórmula completa para I_3. Una fórmula completa para I_n lleva n pasos. Está claro que no se deberá memorizar la fórmula anterior; sólo se deberá recordar el método mediante el cual se obtiene y aplicarlo a un caso particular, digamos para hallar I_3 o I_4.

Eliminación de constantes adicionales mediante sustitución

A veces hallamos una integral que es una ligera variación de una recién considerada, con una constante extra. Por ejemplo, si b es un número, hallar

$$\int \frac{1}{(x^2+b^2)^n}\,dx.$$

Usando la sustitución $x = bz$, $dx = b\,dz$, se reduce la integral a

$$\int \frac{1}{(b^2z^2+b^2)^n}b\,dz = \int \frac{b}{b^{2n}(z^2+1)^n}\,dz = \frac{1}{b^{2n-1}}\int \frac{1}{(z^2+1)^n}\,dz.$$

Tenemos

$$\int \frac{1}{(z^2+1)^n}\,dz = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$

porque las dos integrales difieren sólo en un cambio de letras. Esto muestra cómo usar una sustitución para reducir el cálculo de la integral con b al de la integral cuando $b = 1$, tratado antes.

Caso 4. Hallar la integral

$$\int \frac{x}{(x^2+b^2)^n}\,dx.$$

Esto es pan comido. Hagamos la sustitución

$$u = x^2 + b^2 \quad \text{y} \quad du = 2x\,dx$$

Entonces

$$\boxed{\int \frac{x}{(x^2+b^2)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^n}\,du,}$$

que sabemos cómo evaluar, y así hallamos

$$\boxed{\int \frac{x}{(x^2+b^2)^n}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\log(x^2+b^2) & \text{si } n = 1, \\ \dfrac{1}{2(-n+1)}\dfrac{1}{(x^2+b^2)^{n-1}} & \text{si } n \neq 1. \end{cases}}$$

Ejemplo. Hallar

$$\int \frac{5x-3}{(x^2+5)^2}\,dx.$$

Escribimos

$$\int \frac{5x-3}{(x^2+5)^2}\,dx = 5\int \frac{x}{(x^2+5)^2}\,dx - 3\int \frac{1}{(x^2+5)^2}\,dx.$$

Entonces:

$$5\int \frac{x}{(x^2+5)^2}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{(x^2+5)^2}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{u^2}\,du = \frac{5u^{-1}}{2-1} = -\frac{5}{2}\frac{1}{x^2+5}.$$

Para la segunda integral de la derecha podemos poner

$$x = \sqrt{5}t \quad \text{y} \quad dx = \sqrt{5}\,dt.$$

Entonces:

$$\int \frac{1}{(x^2+5)^2}\,dx = \int \frac{1}{(5t^2+5)^2}\sqrt{5}\,dt = \frac{\sqrt{5}}{25}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$$

y ya antes calculamos

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \arctan t\right).$$

Juntando todo, y usando $t = x/\sqrt{5}$, hallamos:

$$\int \frac{5x-3}{(x^2+5)^2}\,dx = -\frac{5}{2}\frac{1}{x^2+5} - 3\frac{\sqrt{5}}{25}\frac{1}{2}\left(\frac{x/\sqrt{5}}{(x/\sqrt{5})^2+1} + \arctan\frac{x}{\sqrt{5}}\right).$$

Tercera parte. El cociente general $f(x)/g(x)$

Si nos dan un polinomio del tipo x^2+bx+c, entonces **factorizamos o completamos el cuadrado**. Así, el polinomio se puede escribir en la forma

$$(x-\alpha)(x-\beta) \qquad \text{o} \qquad (x-\alpha)^2+\beta^2$$

para números adecuados α y β. Surgen dos casos. Por ejemplo:

Caso 1. $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$.

Caso 2. $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 2^2$.

En el caso 1 hemos factorizado el polinomio en dos factores y cada factor tiene grado 1.

En el caso 2 no hemos factorizado el polinomio. Por medio de un cambio de variables podemos cambiarlo a una expresión t^2+1. A saber, sea

$$x - 1 = 2t \qquad \text{de modo que} \qquad x = 2t+1.$$

Entonces

$$(x-1)^2 + 2^2 = 2^2t^2 + 2^2 = 2^2(t^2+1).$$

Hicimos el cambio de variables de modo que 2^2 saliera como factor. Notemos que en el caso 2 no podemos factorizar más el polinomio.

Se puede probar el siguiente resultado general, pero la demostración es larga y no se puede dar en este curso.

Sea $g(x)$ un polinomio con números reales como coeficientes. Entonces $g(x)$ siempre se puede escribir como producto de términos del tipo

$$(x-\alpha)^n \qquad y \qquad [(x-\beta)^2+\gamma^2]^m,$$

donde n y m son enteros ≥ 0, y algún factor constante.

Puede ser bastante difícil hacer esto de manera explícita, pero en los ejercicios la situación está preparada para que sea fácil.

Ejemplo. Al completar el cuadrado escribimos

$$x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 = (x+1)^2 + (\sqrt{2})^2.$$

Podemos entonces evaluar la integral:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx.$$

Sea $x+1 = \sqrt{2}t$ y $dx = \sqrt{2}\,dt$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\sqrt{2}\,dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Ejemplo. Hallemos

$$\int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx.$$

Escribimos

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+3}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3).$$

Juntando esto con el ejemplo anterior, hallamos:

$$\int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx = \tfrac{1}{2}\log(x^2+2x+3) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right).$$

Ejemplo. Hallar la integral

$$\int \frac{2x+5}{(x^2+1)^2(x-3)}\,dx.$$

Podemos hallar números $c_1, c_2, \ldots$ tales que el cociente sea igual a

$$\begin{aligned}\frac{2x+5}{(x^2+1)^2(x-3)} &= \frac{c_1+c_2x}{x^2+1} + \frac{c_3+c_4x}{(x^2+1)^2} + \frac{c_5}{x-3} \\ &= \frac{c_1}{x^2+1} + c_2\frac{x}{x^2+1} + c_3\frac{1}{(x^2+1)^2} \\ &\quad + c_4\frac{x}{(x^2+1)^2} + c_5\frac{1}{x-3}.\end{aligned}$$

Hay un teorema del álgebra que afirma que siempre se pueden despejar las constantes c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 para obtener dicha descomposición de la fracción original en la suma de la derecha, que se llama **descomposición en fracciones parciales.** Observen que, en correspondencia con el término con x^2+1, se necesitan varios términos en el lado derecho, especialmente aquellos con x en el numerador. Si no se incluyeran se obtendría una fórmula incompleta, que no funcionaría. No se podrían calcular las constantes.

Calcularemos ahora las constantes. Colocamos el lado derecho de la descomposición sobre el denominador común

$$(x^2+1)^2(x-3).$$

El numerador es igual a

$$\begin{aligned}2x+5 =& c_1(x^2+1)(x-3)+c_2x(x^2+1)(x-3)+c_3(x-3)\\ &+c_4x(x-3)+c_5(x^2+1)^2.\end{aligned}$$

Igualamos los coeficientes de x^4, x^3, x^2, x y las constantes respectivas y obtenemos un sistema de cinco ecuaciones lineales en cinco incógnitas, el cual se puede resolver. Es tedioso hacerlo aquí y lo dejamos como ejercicio, pero escribimos las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
c_2 \qquad\qquad &+ c_5 = 0 \quad &&\text{(coeficiente de } x^4),\\
c_1-3c_2 \qquad\qquad &= 0 \quad &&\text{(coeficiente de } x^3),\\
-3c_1+c_2 \qquad + c_4 &+ 2c_5 = 0 \quad &&\text{(coeficiente de } x^2),\\
c_1-3c_2+c_3-3c_4 &= 2 \quad &&\text{(coeficiente de } x),\\
-3c_1 \quad -3c_3 \quad &+ c_5 = 5 \quad &&\text{(coeficiente de } 1).
\end{aligned}$$

Para la integral obtenemos entonces:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+5}{(x^2+1)^2(x-3)}\,dx =& c_1 \arctan x + \tfrac{1}{2}c_2 \log(x^2+1)\\ &+c_3\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx - \tfrac{1}{2}c_4\frac{1}{x^2+1}+c_5\log(x-3).\end{aligned}$$

La integral que dejamos en pie es precisamente la del caso 3, de modo que hemos mostrado cómo hallar la integral deseada.

Ejemplo. Esta es una descomposición en fracciones parciales.

$$\begin{aligned}\frac{x^4+2x-1}{(x^2+2)^3(x-5)^2} =& \frac{c_1+c_2x}{(x^2+2)}+\frac{c_3+c_4x}{(x^2+2)^2}+\frac{c_5+c_6x}{(x^2+2)^3}\\ &+\frac{c_7}{x-5}+\frac{c_8}{(x-5)^2}.\end{aligned}$$

Es tedioso calcular las constantes, y no lo haremos.

La regla general es como sigue: Supongan que tenemos un cociente $f(x)/g(x)$ con grado de $f <$ grado de g. Factorizamos g lo más que sea posible en términos como

$$(x-\alpha)^n \quad \text{y} \quad [(x-\beta)^2+\gamma^2]^m,$$

donde n y m son enteros ≥ 0. Entonces,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \text{suma de términos del tipo siguiente:}$$

$$\frac{c_1}{x-\alpha}+\frac{c_2}{(x-\alpha)^2}+\cdots+\frac{c_n}{(x-\alpha)^n}$$

$$+\frac{d_1+e_1x}{(x-\beta)^2+\gamma^2}+\cdots+\frac{d_m+e_mx}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^m}$$

para constantes adecuadas $c_1, c_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots, e_1\ e_2 \ldots$.

Una vez escrito el cociente $f(x)/g(x)$ como arriba, los casos 1, 2 y 3 nos permiten integrar cada término. Hallamos entonces que la integral incluye funciones del tipo siguiente:

Una función racional
Términos log
Términos arcotangente.

XI, §4. EJERCICIOS

Hallar las integrales siguientes.

1. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x-1)(x+7)}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-3)^2}\,dx$

3. (a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+2)}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+2)(x+1)}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+x}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}\,dx$

9. Escribir completamente la integral

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

10. Ya sea mediante integración por partes repetida o viendo la fórmula general en el texto, obtener completamente las siguientes integrales:

(a) $\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$ (b) $\int \frac{1}{(x^2+1)^4}\,dx$.

Hallar las integrales siguientes.

11. $\int \frac{2x-3}{(x^2+1)^2}\,dx$ 12. $\int \frac{x+1}{(x^2+9)^2}\,dx$

13. $\int \frac{4}{(x^2+16)^2}\,dx$ 14. $\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$

15. Hallar las constantes en la expresión del ejemplo que se encuentra en el texto:

$$\frac{2x+5}{(x^2+1)^2(x-3)} = \frac{c_1+c_2x}{x^2+1} + \frac{c_3+c_4x}{(x^2+1)^2} + \frac{c_5}{x-3}.$$

16. Usando sustitución, probar las dos fórmulas:

(a) $$\boxed{\int \frac{1}{x^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b}.}$$

(b) $$\boxed{\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b}\arctan\frac{x+a}{b}.}$$

Para los problemas siguientes, factorizar x^3-1 y x^4-1 en factores irreducibles.

17. (a) $\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$ (b) $\int \frac{x}{x^4-1}\,dx$

18. (a) $\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$ (b) $\int \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,dx$

19. $\int \frac{x^2-2x-2}{x^3-1}\,dx$

XI, §5. SUSTITUCIONES EXPONENCIALES

Esta sección tiene varios propósitos.

El primero es ampliar nuestras técnicas de integración mediante el uso de la función exponencial.

El segundo es practicar con la función exponencial y el logaritmo usándolos en un nuevo contexto, lo cual permitirá aprender más sobre estas funciones.

El tercero es introducir dos nuevas funciones

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

En el capítulo siguiente se verán estas funciones aplicadas a algunas situaciones físicas, para describir la ecuación de un cable colgante o de una pompa de jabón entre dos anillos. Dichas funciones se usarán también para hallar las integrales que dan la longitud de varias curvas. Aquí las usaremos de manera sistemática sólo para hallar integrales.

Comenzamos mostrando cómo hacer una sustitución sencilla.

Ejemplo. Hallemos

$$I = \int \sqrt{1-e^x}\,dx.$$

Hacemos $u = e^x$ y $du = e^x\,dx$, de modo que $dx = du/u$. Entonces

$$I = \int \sqrt{1-u}\frac{1}{u}\,du.$$

Ahora ponemos $1-u = v^2$ y $-du = 2v\,dv$ para librarnos del signo de la raíz cuadrada. Entonces $u = 1-v^2$ y obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{v}{1-v^2}(-2v)\,dv = 2\int \frac{v^2}{v^2-1}\,dv \\ &= 2\int \frac{v^2-1+1}{v^2-1}\,dv \\ &= 2\left[\int dv + \int \frac{1}{v^2-1}\,dv\right] \\ &= 2v + 2\int \frac{1}{(v+1)(v-1)}\,dv. \end{aligned}$$

Esta última integral se puede integrar mediante fracciones parciales para dar la respuesta final.

Hemos aprendido cómo integrar expresiones que incluyan

$$\sqrt{1-x^2}.$$

Sustituimos $x = \operatorname{sen}\theta$ para que la expresión bajo el signo de la raíz cuadrada sea un cuadrado perfecto. Pero, ¿qué sucede si hemos de tratar con una integral como

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx?$$

Necesitamos hacer una sustitución que convierta la expresión bajo el signo de la raíz cuadrada en un cuadrado perfecto. Hay dos tipos posibles de funciones que podemos usar. Primero, tratemos de sustituir $x = \tan\theta$ para deshacernos de la raíz cuadrada. Hallamos

$$\sqrt{1+\tan^2\theta} = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

sobre un intervalo donde $\cos\theta$ es positivo. Nuevamente, una potencia negativa de coseno no es de lo más agradable. Peor aún,

$$dx = \sec^2\theta\,d\theta,$$

de modo que

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sec^3\theta\,d\theta = \int \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta,$$

que se puede hacer, pero no es sencillo, así que no lo haremos.

Damos aquí una mejor manera de deshacernos de ese espantoso signo de raíz cuadrada. Necesitamos un mejor par de funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ tales que

$$1 + f_1(t)^2 = f_2(t)^2.$$

Dichas funciones se hallan fácilmente usando la función exponencial e^t. A saber, hacemos

$$f_1(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{y} \quad f_2(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Si se multiplica, se hallará inmediatamente que estas funciones satisfacen la relación deseada. Estas funciones tienen un nombre: se llaman **seno hiperbólico y coseno hiperbólico**, y se denotan por **senh** y **cosh**. (senh se pronuncia sench, mientras que cosh se pronuncia cosh.) Así, **definimos**

$$\boxed{\operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.}$$

Efectuando las operaciones se muestra que

$$\boxed{\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1.}$$

Más aún, las reglas usuales de la diferenciación muestran que

$$\boxed{\frac{d\cosh t}{dt} = \operatorname{senh} t} \quad \text{y} \quad \boxed{\frac{d\operatorname{senh} t}{dt} = \cosh t.}$$

Estas fórmulas son muy parecidas a las del seno y coseno ordinarios, excepto por algunos cambios de signo, y nos permiten tratar algunos casos de integrales que no podíamos hacer antes, y en particular deshacernos de los signos de raíz cuadrada como sigue.

Ejemplo. Hallar

$$I = \int \sqrt{1 + x^2}\, dx.$$

Hacemos la sustitución

$$x = \operatorname{senh} t \quad \text{y} \quad dx = \cosh t\, dt.$$

Entonces $1 + \operatorname{senh}^2 t = \cosh^2 t$, de modo que $\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int \cosh t \cosh t\, dt \\ &= \int \frac{e^t + e^{-t}}{2} \frac{e^t + e^{-t}}{2}\, dt \\ &= \frac{1}{4} \int (e^{2t} + 2 + e^{-2t})\, dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2t}}{2} + 2t - \frac{e^{-2t}}{2}\right).$$

Es obvio que la respuesta está dada en términos de t. Si la queremos en términos de x, necesitaremos estudiar la *función inversa*, que podemos llamar **arcsenh (arcoseno hiperbólico)**, y podemos escribir

$$t = \operatorname{arcsenh} x.$$

Al principio parece que estamos en una situación parecida a la del seno y del coseno, donde no pudimos dar una fórmula explícita para la función inversa. Simplemente llamamos a esas funciones inversas arcoseno y arcocoseno. Es asombroso que aquí podamos dar una fórmula como sigue

$$\boxed{\textit{Si} \quad x = \operatorname{senh} t, \quad \textit{entonces} \quad t = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).}$$

Demostración. Tenemos

$$x = \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

Sea $u = e^t$. Entonces

$$x = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right).$$

Multiplicamos esta ecuación por $2u$ y obtenemos la ecuación

$$u^2 - 2ux - 1 = 0.$$

Podemos entonces despejar u en términos de x mediante la fórmula cuadrática y obtener

$$u = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}$$

de modo que

$$u = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Pero $u = e^t > 0$ para todo t. Como $\sqrt{x^2 + 1} > x$, se sigue que no podemos tener el signo menos en esta relación. Por lo tanto, finalmente,

$$e^t = u = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

Tomamos ahora el log para hallar

$$t = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

lo cual prueba la fórmula deseada.

Así, a diferencia de los casos del seno y el coseno, obtenemos aquí una fórmula explícita para la función inversa del seno hiperbólico.

Si ahora sustituimos $t = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ en la integral indefinida hallada antes, obtenemos la respuesta explícita:

$$\boxed{\begin{aligned} \int \sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 1})^2 &+ 2\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &- \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 1})^{-2}\Big]. \end{aligned}}$$

Quizá queramos también hallar una integral definida.

Ejemplo. Sea $B > 0$. Hallar

$$\int_0^B \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Sustituimos B en la integral indefinida, sustituimos 0 y restamos, para hallar:

$$\begin{aligned}\int_0^B \sqrt{1+x^2}\,dx &= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{2t}}{2} + 2t - \frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^{\log(B+\sqrt{B^2+1})} \\ &= \tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{2}(B+\sqrt{B^2+1})^2 + 2\log(B+\sqrt{B^2+1}) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(B+\sqrt{B^2+1})^{-2}]\end{aligned}$$

porque, cuando sustituimos 0 en lugar de t en la expresión entre corchetes, obtenemos 0.

En los casos en que se tenga que usar una función inversa para cosh, podemos confiar en la siguiente afirmación.

Para $x \geq 0$, la función $x = \cosh t$ tiene una función inversa, dada por

$$t = \log(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Esto se prueba precisamente como la afirmación análoga para senh. Hagan los ejercicios 3 y 6, que en realidad están resueltos en la sección de respuestas, pero antes de consultar esa sección, para así aprender mejor el tema.

Observación. Las integrales como

$$\int \sqrt{1+x^3}\,dx \quad \text{y} \quad \int \sqrt{1+x^4}\,dx$$

son mucho más complicadas, y no se pueden hallar mediante las funciones elementales de este curso.

XI, §5. EJERCICIOS

Hallar las integrales.

1. $\displaystyle\int \sqrt{1+e^x}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$
5. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{senh} x = y$.
   (a) Mostrar que f es estrictamente creciente para todo x.
   (b) Trazar la gráfica de f.
   Sea $x = \operatorname{arcsenh} y$ la función inversa.

   (c) ¿Para qué números y está definido $\operatorname{arcsenh} y$?
   (d) Sea $g(y) = \operatorname{arcsenh} y$. Mostrar que

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

En el texto se mostró que $x = g(y) = \log(y + \sqrt{y^2+1})$.

6. Sea $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x = y$.
   (a) Mostrar que f es estrictamente creciente para $x \geq 0$.
   Entonces existe la función inversa en este intervalo. Denotar esta función inversa por $x = \operatorname{arccosh} y$.
   (b) Trazar la gráfica de f.
   (c) ¿Para qué números y está definido el $\operatorname{arccosh} y$?
   (d) Sea $g(y) = \operatorname{arccosh} y$. Mostrar que

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

   (e) Mostrar que $x = g(y) = \log(y + \sqrt{y^2-1})$. En consecuencia se puede dar en realidad una expresión explícita para esta función inversa en términos del logaritmo. Éste es otro aspecto en el que las funciones hiperbólicas se comportan de manera más sencilla que el seno y el coseno, pues no podemos dar una fórmula explícita para el arcoseno y el arcocoseno.

Hallar las integrales siguientes.

7. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-\sqrt{x^2+1}}\,dx$
10. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx$
11. Hallar el área entre el eje x y la hipérbola
$$x^2 - y^2 = 1$$
en el primer cuadrante, entre $x = 1$ y $x = B$, con $B > 1$. Para la gráfica de la hipérbola ver el capítulo II, sección §9.
12. Hallar el área entre el eje x y la hipérbola
$$y^2 - x^2 = 1$$
en el primer cuadrante, entre $x = 0$ y $x = B$.
13. Sea a un número positivo y sea $y = a\cosh(x/a)$. Mostrar que
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$
[Ésta es la ecuación diferencial del cable colgante. Ver el apéndice después de la sección §3 del capítulo siguiente.]
14. Verificar que, para cualquier número $a > 0$, tenemos
$$\boxed{\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}[x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\log(x+\sqrt{a^2+x^2})].}$$

CAPÍTULO XII

Aplicaciones de la integración

Las matemáticas consisten en el descubrimiento y descripción de ciertos objetos y estructuras. Es esencialmente imposible dar una descripción que abarque a todos esos objetos y estructuras. Luego, en lugar de dicha definición, diremos simplemente que los objetos estudiados por las matemáticas, tal como las conocemos, son los que se encuentran en las revistas de matemáticas de los últimos dos siglos. Hay muchas razones para estudiar estos objetos, entre las cuales hay razones estéticas (a algunas personas les resultan agradables) y razones prácticas (algunos resultados son aplicables).

La física, por otro lado, consiste en la descripción del mundo empírico mediante las estructuras matemáticas. El mundo empírico es el mundo con el que entramos en contacto a través de nuestros sentidos, mediante experimentos, mediciones, etc. Lo que caracteriza a un buen físico es su habilidad para elegir, entre muchas estructuras y objetos matemáticos, aquellos que se pueden usar para describir el mundo empírico. Por supuesto, las afirmaciones anteriores deben ser aclaradas en dos sentidos; primero: la descripción de situaciones físicas mediante estructuras matemáticas sólo puede hacerse dentro del grado de precisión que permitan los aparatos de experimentación. Segundo: la descripción deberá satisfacer ciertos tipos de criterio estético (sencillez, elegancia). Después de todo, una lista completa de la totalidad de los resultados de los experimentos que han sido realizados sería una descripción del mundo físico; pero otra cosa muy distinta es enunciar un solo principio que involucre simultáneamente a todos los resultados de esos experimentos.

Por razones psicológicas, es imposible (para la mayoría de las personas) aprender ciertas teorías matemáticas sin ver primero una interpretación geométrica o física. Por eso, en este libro, antes de introducir un concepto matemático hemos

dado con frecuencia alguna de sus interpretaciones geométricas o físicas. Sin embargo, no deben confundirse estos dos campos. Con este fin, podemos formar dos columnas, como se muestra más adelante.

Por lo que respecta al desarrollo lógico de nuestro curso, podríamos omitir completamente la segunda columna, pero no lo hacemos porque se usa para muchos fines: para motivar el aprendizaje de los conceptos de la primera columna (porque nuestro cerebro es de naturaleza tal, que necesita la segunda columna para comprender la primera); o para dar aplicaciones de la primera columna, aparte de la satisfacción puramente estética (que pueden sentir aquellos a quienes agrada la materia).

Matemáticas	Física y geometría
Números	Puntos de una recta
Derivada	Pendiente de una recta Razón de cambio
$\dfrac{df}{dx} = Kf(x)$	Decaimiento exponencial
Integral	Longitud Área Volumen Trabajo

De todos modos es importante tener en mente que la derivada, como el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

y la integral, como el número único entre la suma superior y la inferior, no se deben confundir con una pendiente o con un área, respectivamente. Es simplemente nuestra mente la que interpreta el concepto matemático en términos físicos o geométricos. Además, es frecuente que asignemos varias de dichas interpretaciones al mismo concepto matemático (por ejemplo, la integral se puede interpretar como un área o como el trabajo realizado por una fuerza.)

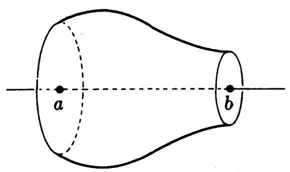
Y, a propósito, las observaciones anteriores acerca de física y matemáticas no pertenecen ni a la física ni a las matemáticas. Pertenecen a la filosofía.

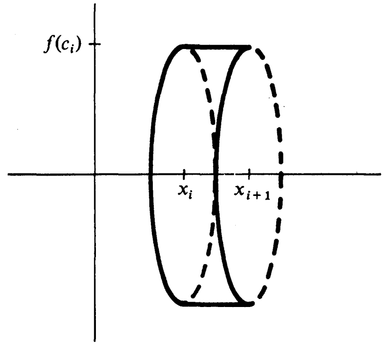
La experiencia muestra que, para un curso de un periodo sobre integración y fórmula de Taylor, falta tiempo para cubrir *todas* las aplicaciones de la integración dadas en el libro, así como los cálculos relacionados con la fórmula de Taylor y un estimado del residuo. Sin embargo, no se pueden omitir las aplicaciones básicas como la longitud de una curva, volúmenes de revolución y área en coordenadas polares. Después, cada quién debe escoger entre las demás, las que traten con conceptos geométricos (área de revolución) o conceptos físicos (trabajo). Como ya se dijo en el prefacio, tengo la impresión de que, excepto por la sección sobre trabajo, si falta tiempo es mejor omitir otras aplicaciones a fin de tener tiempo suficiente para manejar los cálculos que resultan de la fórmula de Taylor.

XII, §1. VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN

Comenzamos nuestras aplicaciones con volúmenes de revolución. La razón principal es que las integrales que deben evaluarse son más fáciles que las de otras aplicaciones. Pero al final deduciremos sistemáticamente las longitudes, áreas y volúmenes de todas las figuras geométricas usuales.

Sea $y = f(x)$ una función de x, continua en algún intervalo $a \leq x \leq b$. Supongamos que $f(x) \geq 0$ en este intervalo. Si se gira la curva $y = f(x)$ alrededor del eje x, se obtiene un sólido cuyo volumen queremos calcular.





Tomemos una partición de $[a, b]$, digamos

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b.$$

Sea c_i un mínimo de f en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ y sea d_i un máximo de f en ese intervalo. Entonces el sólido de revolución en ese pequeño intervalo está entre un cilindro pequeño y un cilindro grande. El ancho de estos cilindros es $x_{i+1} - x_i$ y el radio es $f(c_i)$ para el cilindro pequeño y $f(d_i)$ para el grande. Por lo tanto, el volumen de revolución, denotado por V, satisface las desigualdades

$$\sum_{i=0}^{n-1} \pi f(c_i)^2 (x_{i+1} - x_i) \leq V \leq \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(d_i)^2 (x_{i+1} - x_i).$$

Entonces es razonable definir este volumen como

$$\boxed{V = \int_a^b \pi f(x)^2\, dx.}$$

Ejemplo. Calcular el volumen de la esfera de radio 1.

Tomamos la función $y = \sqrt{1 - x^2}$ entre 0 y 1. Si rotamos esta curva alrededor del eje x obtendremos la semiesfera. Entonces su volumen es

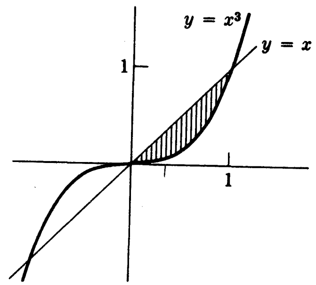
$$\int_0^1 \pi(1 - x^2)\, dx = \tfrac{2}{3}\pi.$$

Entonces el volumen de la esfera completa es $\frac{4}{3}\pi$.

Ejemplo. Hallar el volumen obtenido al rotar la región entre $y = x^3$ y $y = x$ en el primer cuadrante alrededor del eje x.

La gráfica de la región se ilustra en la figura. Tomamos sólo la parte que se encuentra en el primer cuadrante, de modo que $0 \leq x \leq 1$. El volumen requerido V es igual a la diferencia de los volúmenes obtenidos al rotar $y = x$ y $y = x^3$. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$. Entonces

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 f(x)^2\, dx - \pi \int_0^1 g(x)^2\, dx \\ &= \pi \int_0^1 x^2\, dx - \pi \int_0^1 x^6\, dx \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$



Ejemplo. Podemos hacer chimeneas sólidas infinitas y ver si tienen volumen finito. Considerar la función

$$f(x) = 1/\sqrt{x}.$$

Sea

$$0 < a < 1.$$

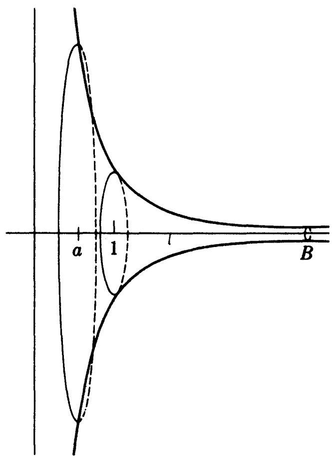
El volumen de revolución de la curva

$$y = 1/\sqrt{x}$$

entre $x = a$ y $x = 1$ está dado por la integral

$$\int_a^1 \pi \frac{1}{x}\, dx = \pi \log x \Big|_a^1$$
$$= -\pi \log a.$$

Cuando a tiende a 0, $\log a$ se vuelve negativo muy grande, de modo que $-\log a$ se vuelve positivo muy grande, y el volumen se vuelve arbitrariamente grande. Ilustramos la chimenea en la figura siguiente.



Sin embargo, si se calcula el volumen de la curva

$$y = \frac{1}{x^{1/4}}$$

entre a y 1, hallaremos que tiende a un límite cuando $a \to 0$. Resolver el ejercicio 12.

En el cálculo anterior determinamos el volumen de una chimenea cerca del eje y. Podemos también hallar el volumen de la chimenea yendo hacia la derecha, digamos entre 1 y un número $B > 1$. Suponiendo que la chimenea está definida por $y = 1/\sqrt{x}$, el volumen de revolución entre 1 y B está dado por la integral

$$\int_1^B \pi \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int_1^B \pi \frac{1}{x}\, dx = \pi \log B.$$

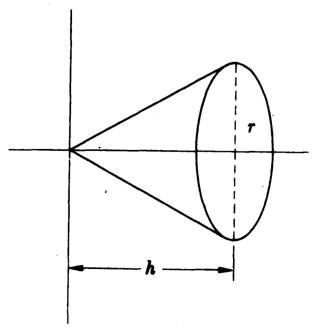
Cuando $B \to \infty$ vemos que este volumen se vuelve arbitrariamente grande. Sin embargo, usando otra función, como la del ejercicio 13, ¡se hallará un volumen finito para la chimenea infinita!

XII, §1. EJERCICIOS

1. Hallar el volumen de una esfera de radio r.

Hallar los volúmenes de revolución con los datos siguientes:

2. $y = 1/\cos x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$
3. $y = \operatorname{sen} x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$
4. $y = \cos x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$
5. La región entre $y = x^2$ y $y = 5x$
6. $y = xe^{x/2}$ entre $x = 0$ y $x = 1$
7. $y = x^{1/2}e^{x/2}$ entre $x = 1$ y $x = 2$
8. $y = \log x$ entre $x = 1$ y $x = 2$
9. $y = \sqrt{1+x}$ entre $x = 1$ y $x = 5$
10. (a) Sea B un número > 1. ¿Cuál es el volumen de revolución de la curva $y = e^{-x}$ entre 1 y B? ¿Tiende a algún límite este volumen cuando B se vuelve grande? De ser así, ¿cuál es ese límite?
    (b) La misma pregunta para la curva $y = e^{-2x}$.
    (c) La misma pregunta para la curva $y = \sqrt{x}e^{-x^2}$.
11. Hallar el volumen de un cono cuya base tiene radio r y altura h, formado al rotar un recta que pasa por el origen, alrededor del eje x. ¿Cuál es la ecuación de la recta?



12. Calcular el volumen de revolución de la curva
$$y = \frac{1}{x^{1/4}}$$
entre a y 1. Determinar el límite cuando $a \to 0$.
13. Calcular el volumen de revolución de la curva
$$y = 1/x^2$$
entre $x = 2$ y $x = B$ para cualquier número $B > 2$. ¿Tiende este volumen a un límite cuando $B \to \infty$? De ser así, ¿a qué límite?

14. ¿Para qué números $c > 0$ el volumen de revolución de la curva

$$y = 1/x^c$$

entre 1 y B tenderá a un límite cuando $B \to \infty$? Hallar este límite en términos de c.

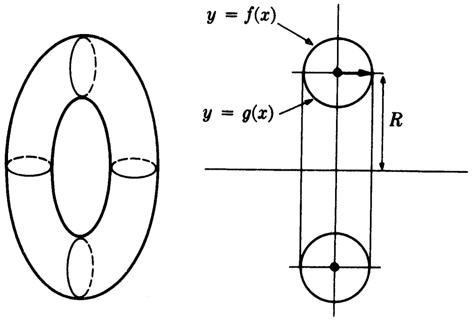
15. ¿Para qué números $c > 0$ el volumen de revolución de la curva

$$y = 1/x^c$$

entre a y 1 tenderá a un límite cuando $c \to 0$? Hallar este límite en términos de c.

XII, §1. EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

1. Hallar el volumen de una dona como la que se muestra en la figura. La dona se obtiene al rotar un círculo de radio a alrededor de una recta, digamos el eje x.



(a) La dona (b) Sección transversal de la dona

Sea R la distancia de la recta al centro del disco. Suponemos que $R > a$. Se puede reducir este problema al caso estudiado en esta sección, como sigue. Sea $y = f(x)$ la función cuya gráfica es la mitad superior del círculo y sea $y = g(x)$ la función cuya gráfica es la mitad inferior del círculo. Escribir explícitamente f y g. Entonces se tendrá que restar el volumen obtenido al rotar el semicírculo inferior del volumen obtenido al rotar el semicírculo superior.

Hallar los volúmenes de los sólidos obtenidos al rotar cada región indicada alrededor del eje x.

2. $y = x^2$, entre $y = 0$ y $x = 2$

3. $y = \dfrac{4}{x+1}$, $x = -5$, $x = -2$, $y = 0$

4. $y = \sqrt{x}$, el eje x y $x = 2$

5. $y = 1/x$, $x = 1$, $x = 3$ y el eje x

6. $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$

7. La región acotada por la recta $x + y = 1$ y los ejes coordenados

8. La elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$

9. $y = e^{-x}$, entre $x = 1$ y $x = 5$

10. $y = \log x$, entre $x = 1$ y $x = 2$

11. $y = \tan x$, $x = \pi/3$ y el eje x

En los siguientes problemas se pide hallar un volumen de revolución de una región entre ciertas cotas y determinar si el volumen tiende a un límite cuando la cota B se vuelve muy grande. De ser así, dar el límite.

12. La región acotada por $1/x$ y el eje x, entre $x = 1$ y $x = B$ para $B > 1$.

13. La región acotada por $1/x^2$ y el eje x, entre $x = 1$ y $x = B$ para $B > 1$.

14. La región acotada por $1/\sqrt{x}$ y el eje x, entre $x = 1$ y $x = B$ para $B > 1$.

En los problemas siguientes, hallar el volumen de revolución determinado por las cotas que incluyen un número $a > 0$ y determinar si este volumen tiende a un límite cuando a tiende a 0. De ser así, decir qué límite.

15. La región acotada por $y = 1/\sqrt{x}$ y el eje x, entre $x = a$ y $x = 1$, para $0 < a < 1$.

16. La región acotada por $y = 1/x$ y el eje x, entre $x = a$ y $x = 1$, con $0 < a < 1$.

17. La región acotada por $(\cos x)/\sqrt{\operatorname{sen} x}$, el eje x, entre $x = a$ y $x = \pi/4$, con $0 < a < \pi/4$.

XII, §2. ÁREA EN COORDENADAS POLARES

Supongan que nos dan una función continua

$$r = f(\theta)$$

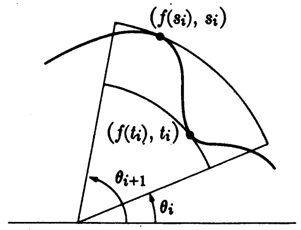
definida en algún intervalo $a \leq \theta \leq b$. Suponemos que $f(\theta) \geq 0$ y $b \leq a + 2\pi$.

Queremos hallar una expresión integral para el área abarcada por la curva $r = f(\theta)$ entre las dos cotas a y b.

Tomar una partición de $[a, b]$, digamos

$$a = \theta_0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_n = b.$$

La figura entre θ_i y θ_{i+1} podría verse como se muestra en la página siguiente.



Sea s_i un número entre θ_i y θ_{i+1} tal que $f(s_i)$ sea un máximo en ese intervalo, y sea t_i un número tal que $f(t_i)$ sea un mínimo en ese intervalo. En la figura hemos trazado los círculos (más bien los sectores) de radios $f(s_i)$ y $f(t_i)$, respectivamente. Sea

$$\begin{aligned} A_i &= \text{área entre } \theta = \theta_i, \quad \theta = \theta_{i+1}, \quad \text{y acotada por la curva} \\ &= \text{área del conjunto de puntos } (r, \theta) \text{ en coordenadas polares tales que} \end{aligned}$$

$$\theta_i \le \theta \le \theta_{i+1} \qquad \text{y} \qquad 0 \le r \le f(\theta).$$

El área de un sector que tiene ángulo $\theta_{i+1} - \theta_i$ y radio R es igual a la fracción

$$\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2\pi}$$

del área total del círculo de radio R, a saber, πR^2. Por lo tanto, tenemos la desigualdad

$$\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2\pi} \pi f(t_i)^2 \le A_i \le \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2\pi} \pi f(s_i)^2.$$

Sea $G(\theta) = \frac{1}{2} f(\theta)^2$. Vemos que la suma de las pequeñas piezas de área A_i satisface las desigualdades

$$\sum_{i=0}^{n-1} G(t_i)(\theta_{i+1} - \theta_i) \le \sum_{i=0}^{n-1} A_i \le \sum_{i=0}^{n-1} G(s_i)(\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Así, el área deseada está entre la suma superior y la suma inferior asociada con la partición, de modo que es razonable que el área en coordenadas polares esté dada por

$$\boxed{A = \int_a^b \tfrac{1}{2} f(\theta)^2 \, d\theta.}$$

Ejemplo. Hallar el área acotada por un lazo de la curva

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \qquad (a > 0).$$

Si $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, entonces $\cos 2\theta \ge 0$. Así, podemos escribir

$$r = \sqrt{2} a \sqrt{\cos 2\theta}.$$

Por lo tanto, el área es

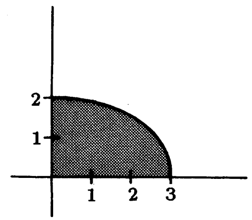
$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2} 2a^2 \cos 2\theta \, d\theta = a^2.$$

Ejemplo. Hallar el área acotada por la curva

$$r = 2 + \cos\theta,$$

en el primer cuadrante.

Primero trazamos el área en el primer cuadrante, i.e. para θ entre 0 y $\pi/2$. Se ve así:



El área está dada por la integral

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (2 + \cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta) \, d\theta.$$

Todos los términos se integran fácilmente. La respuesta final es

$$\frac{1}{2}\left(2\pi + 4 + \frac{\pi}{4}\right).$$

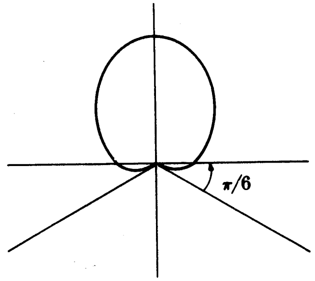
Ejemplo. Hallar el área encerrada por la curva dada en coordenadas polares por

$$r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta.$$

Notar que para $-\pi/6 \le \theta \le 7\pi/6$, y sólo para esos θ, se tiene que

$$1 + 2 \operatorname{sen} \theta \ge 0.$$

La curva se ve como en la figura de la página siguiente.



El área es, pues, igual a

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{7\pi/6} (1 + 2\operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/2} (1 + 4\operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta.$$

Usamos la identidad

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}.$$

Entonces la integral se evalúa fácilmente, y dejamos eso para el lector.

XII, §2. EJERCICIOS

Hallar el área encerrada por las curvas siguientes:

1. $r = 2(1 + \cos\theta)$
2. $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta \quad (a > 0)$
3. $r = 2a\cos\theta$
4. $r = \cos 3\theta, \quad -\pi/6 \le \theta \le \pi/6$
5. $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$
6. $r = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$
7. $r = 2 + \cos\theta$
8. $r = 2\cos 3\theta, \quad -\pi/6 \le \theta \le \pi/6$

XII, §2. EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

Hallar las áreas de las regiones siguientes acotadas por la curva dada en coordenadas polares.

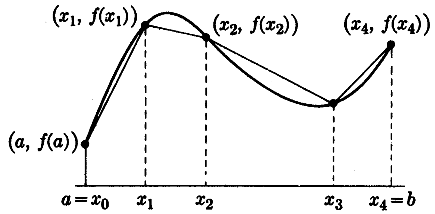
1. $r = 10\cos\theta$
2. $r = 1 - \cos\theta$
3. $r = \sqrt{1 - \cos\theta}$
4. $r = 2 + \operatorname{sen} 2\theta$
5. $r = \operatorname{sen}^2\theta$
6. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$
7. $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$
8. $r = 1 + \operatorname{sen} 2\theta$
9. $r = \cos 3\theta$
10. $r = 2 + \cos\theta$

Hallar el área entre las curvas siguientes dadas en coordenadas rectangulares.

11. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, entre $x = -2$ y $x = 2$
12. $y = 4 - x^2$, $y = 8 - 2x^2$, entre $x = -2$ y $x = 2$
13. $y = x^3 + x^2$, $y = x^3 + 1$, entre $x = -1$ y $x = 1$
14. $y = x - x^2$, $y = -x$, entre $x = 0$ y $x = 2$
15. $y = x^2$, $y = x + 1$, entre los dos puntos donde se intersecan las dos curvas.
16. $y = x^3$ y $y = x + 6$ entre $x = 0$ y el valor de $x > 0$ donde se intersecan las dos curvas.

XII, §3. LONGITUD DE CURVAS

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable sobre algún intervalo $[a, b]$ (con $a < b$) y suponer que su derivada f' es continua. Deseamos determinar la longitud de la curva descrita por la gráfica. La idea principal es aproximar la curva por pequeños segmentos de recta y sumarlos.



En consecuencia, consideramos una partición de nuestro intervalo:

$$a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n = b.$$

Para cada x_i tenemos el punto $(x_i, f(x_i))$ sobre la curva $y = f(x)$. Trazamos los segmentos de recta entre dos puntos sucesivos. La longitud de dicho segmento de recta es la longitud de la recta entre

$$(x_i, f(x_i)) \qquad \text{y} \qquad (x_{i+1}, f(x_{i+1})),$$

y es igual a

$$\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}.$$

Por el teorema del valor medio concluimos que

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = (x_{i+1} - x_i) f'(c_i)$$

para algún número c_i entre x_i y x_{i+1}. Al usar esto vemos que la longitud de nuestro segmento de recta es

$$\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2 f'(c_i)^2}.$$

Podemos factorizar $(x_{i+1} - x_i)^2$ y ver que la suma de las longitudes de estos segmentos de recta es

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'(c_i)^2}(x_{i+1} - x_i).$$

Sea $G(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$. Entonces $G(x)$ es continua y vemos que la suma recién escrita es

$$\sum_{i=0}^{n-1} G(c_i)(x_{i+1} - x_i).$$

El valor $G(c_i)$ satisface las desigualdades

$$\min_{[x_i, x_{i+1}]} G \leq G(c_i) \leq \max_{[x_i, x_{i+1}]} G$$

esto es, $G(c_i)$ está entre el mínimo y el máximo de G en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Así, la suma que hemos escrito está entre una suma inferior y una suma superior para la función G. Este tipo de sumas se conocen como sumas de Riemann. Esto es cierto para toda partición del intervalo. Sabemos de la teoría básica de la integración que hay exactamente un número que está entre toda suma superior y toda suma inferior, y que ese número es la integral definida. Por lo tanto, es razonable **definir**:

la longitud de una curva entre a y b

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Ejemplo. Deseamos formar la integral para obtener la longitud de la curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$. De la definición anterior vemos que la integral es

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Esta integral es del mismo tipo que las consideradas en el capítulo XI, sección §5. Primero hacemos

$$u = 2x, \qquad du = 2\, dx.$$

Cuando $x = 0$, entonces $u = 0$, y cuando $x = 1$, entonces $u = 2$. Por lo tanto,

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{1 + u^2}\,\tfrac{1}{2}\, du = \tfrac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1 + u^2}\, du.$$

La respuesta viene entonces del capítulo XI, sección §5.

Ejemplo. Queremos hallar la longitud de la curva $y = e^x$ entre $x = 1$ y $x = 2$. Tenemos que $dy/dx = e^x$ y $(dy/dx)^2 = e^{2x}$, de modo que, por la fórmula general, la longitud está dada por la integral

$$\int_1^2 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx.$$

Esto se puede evaluar más rápidamente, así que realizamos el cálculo. Se hace la sustitución

$$1 + e^{2x} = u^2.$$

Entonces

$$2e^{2x}\, dx = 2u\, du.$$

Como $e^2x = u^2 - 1$, obtenemos

$$\int \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx = \int u \frac{u\, du}{u^2 - 1} = \int \frac{u^2}{u^2 - 1}\, du$$
$$= \int \frac{u^2 - 1 + 1}{u^2 - 1}\, du$$
$$= \int 1\, du + \int \frac{1}{u^2 - 1}\, du.$$

Pero

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1}\right).$$

Por lo tanto,

$$\int \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx = u + \tfrac{1}{2}\left[\log \frac{u - 1}{u + 1}\right].$$

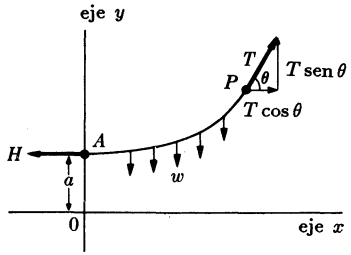
Cuando $x = 1$, $u = \sqrt{1 + e^2}$. Cuando $x = 2$, $u = \sqrt{1 + e^4}$. Por consiguiente, la longitud de la curva sobre el intervalo dado es igual a

$$\int_1^2 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx = u + \tfrac{1}{2}\left[\log \frac{u - 1}{u + 1}\right]\Bigg|_{\sqrt{1+e^2}}^{\sqrt{1+e^4}}$$
$$= \sqrt{1 + e^4} + \tfrac{1}{2} \log \frac{\sqrt{1 + e^4} - 1}{\sqrt{1 + e^4} + 1}$$
$$- \sqrt{1 + e^2} - \tfrac{1}{2} \log \frac{\sqrt{1 + e^2} - 1}{\sqrt{1 + e^2} + 1}.$$

Un poco complicada, pero ésta es la respuesta explícita.

APÉNDICE. EL CABLE COLGANTE

Queremos mostrar aquí cómo se puede determinar la ecuación de un cable colgante como el que se muestra en la figura.



Suponemos que el cable está fijo a un muro por su extremo izquierdo y está sujeto a una tensión T en una cierta dirección, en el otro extremo. Queremos hallar de manera explícita la altura del cable

$$y = f(x).$$

La respuesta es como sigue.

> *Si a es la altura en el extremo izquierdo y el cable tiene pendiente horizontal al tocar el muro, entonces*
>
> $$y = a\cosh(x/a).$$

Mostraremos esto deduciendo primero la ecuación diferencial que satisface el cable. Así, mostremos primero que

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.}$$

El cable está fijo al muro en el punto A, sujeto a una tensión horizontal constante, denotada por H. Sea w el peso por unidad de longitud y sea s la longitud. Entonces el peso W del cable de longitud s es ws.

La tensión en P tiene que balancear la tensión horizontal H y el peso W que jala hacia abajo. Esta tensión tiene una componente horizontal y una componente vertical, que están dadas por $T\cos\theta$ y $T\operatorname{sen}\theta$, respectivamente. Así, debemos tener

$$T\cos\theta = H, \qquad T\operatorname{sen}\theta = W = ws.$$

Al dividir obtenemos

$$\frac{T\operatorname{sen}\theta}{T\cos\theta} = \tan\theta = \frac{W}{H}.$$

Pero $\tan\theta$ es la pendiente del cable en el punto $P = (x, y)$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}s.$$

Por otro lado, sabemos que

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Entonces

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H}\frac{ds}{dx} = \frac{w}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ésta es la ecuación diferencial que queríamos.

Quizá ya resolvieron un ejercicio en el capítulo XI, sección §5, que mostraba que la función

$$y = a\cosh(x/a)$$

satisface la ecuación

$$(*) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Probemos ahora el recíproco.

Teorema 3.1. *Si $y = f(x)$ satisface $(*)$, y además*

$$f(0) = a, \qquad f'(0) = 0,$$

entonces $y = a\cosh(x/a)$.

La condición $f(0) = a$ significa que el cable está colgado en el extremo izquierdo a una altura a sobre el eje x. La condición $f'(0) = 0$ significa que, en este punto, el cable es horizontal.

Sea

$$\frac{dy}{dx} = u.$$

Nuestra ecuación diferencial se puede escribir entonces como

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1+u^2}.$$

Así,

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du = \frac{1}{a}\,dx$$

e integramos mediante una sustitución como en el capítulo XI, sección §5. Hacemos

$$u = \operatorname{senh} t, \qquad \text{y} \qquad du = \cosh t\,dt.$$

Tenemos

$$\sqrt{1+u^2} = \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 t} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t,$$

pues $\cosh t > 0$ para todo t. Por lo tanto,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du = \int \frac{\cosh t}{\cosh t}\,dt = t.$$

Entonces

$$t = \frac{1}{a}x + C$$

para alguna constante C. Por lo tanto,

$$u = \operatorname{senh} t = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a} + C\right).$$

Pero, por hipótesis, $u = dy/dx = f'(x)$, y $f'(0) = 0$, por lo que,

$$\operatorname{senh} C = 0,$$

lo cual significa que $C = 0$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Integrando una vez más, obtenemos

$$y = f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + K$$

para alguna constante K. Pero $f(0) = a$, y $\cosh 0 = 1$, de modo que

$$a = f(0) = a \cdot 1 + K.$$

Por lo tanto, $K = 0$ y así, finalmente,

$$y = f(x) = a\cosh(x/a)$$

como se deseaba.

XII, §3. EJERCICIOS

Hallar las longitudes de las curvas siguientes:

1. $y = x^{3/2}$, $0 \le x \le 4$
2. $y = \log x$, $\frac{1}{2} \le x \le 2$
3. $y = \log x$, $1 \le x \le e^2$
4. $y = 4 - x^2$, $-2 \le x \le 2$
5. $y = e^x$ entre $x = 0$ y $x = 1$.
6. $y = x^{3/2}$ entre $x = 1$ y $x = 3$.
7. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ entre $x = -1$ y $x = 1$.
8. $y = \log(1 - x^2)$, $0 \le x \le \frac{3}{4}$
9. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $-1 \le x \le 0$
10. $y = \log\cos x$, $0 \le x \le \pi/3$

XII, §4. CURVAS PARAMÉTRICAS

Hay otra manera en que podemos describir una curva. Suponiendo que vemos un punto que se mueve en el plano, sus coordenadas se pueden dar como función del tiempo t. Así, cuando damos dos funciones de t, digamos

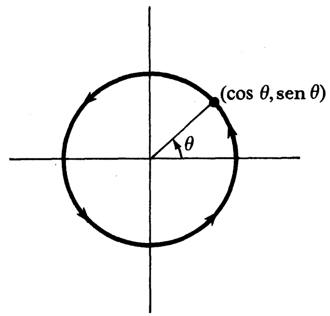
$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

podemos verlas como la descripción de un punto moviéndose a lo largo de una curva. Las funciones f y g dan las coordenadas del punto como funciones de t.

Ejemplo 1. Sea $x = \cos\theta$ y $y = \operatorname{sen}\theta$. Entonces

$$(x, y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

es un punto sobre el círculo.



Conforme θ crece, vemos el punto moviéndose a lo largo del círculo, en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj. En realidad no importa la selección de la letra θ, y pudimos haber usado t. En la práctica, el ángulo θ mismo se expresa como función del tiempo. Por ejemplo, si se mueve un insecto alrededor del círculo con velocidad angular uniforme (constante), entonces podemos escribir

$$\theta = \omega t,$$

donde ω es constante. Entonces

$$x = \cos(\omega t) \qquad \text{y} \qquad y = \operatorname{sen}(\omega t).$$

Esto describe el movimiento de un insecto alrededor del círculo con velocidad angular ω.

Cuando (x, y) se describe mediante dos funciones de t, como se acaba de hacer, decimos que tenemos una **parametrización de la curva** en términos del **parámetro** t.

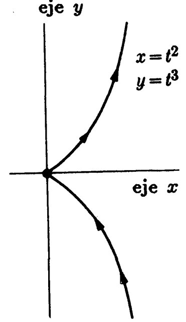
Ejemplo 2. Trazar la curva $x = t^2$, $y = t^3$.
Podemos hacer una tabla de valores de la manera acostumbrada.

t	x	y
0	0	0
1	1	1
2	4	8
−1	1	−1
−2	4	−8

Así, para cada número t podemos localizar el punto correspondiente (x, y). También investigamos en qué caso x y y son funciones de t crecientes o decrecientes. Por ejemplo, al tomar la derivada obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = 3t^2.$$

Así, x crece cuando $t > 0$ y decrece cuando $t < 0$. La ordenada es creciente, pues $t^2 > 0$ (a menos que $t = 0$). Más aún, la abscisa siempre es positiva (a menos que $t = 0$), de modo que la gráfica se ve así:



La expresión paramétrica para la abscisa y la ordenada suele ser útil para describir el movimiento de un insecto (o una partícula), cuyas coordenadas están dadas como función del tiempo t. Las flechas trazadas en la figura sugieren dicho movimiento.

A veces podemos transformar una curva dada en forma paramétrica, en una definida por una ecuación, quizá con algunas desigualdades adicionales.

Ejemplo 3. Los puntos (t^2, t^3) satisfacen una ecuación "ordinaria"

$$y^2 = x^3, \qquad \text{o} \qquad y = x^{3/2}.$$

Sin embargo, pudimos haber escrito la ecuación

$$y^4 = x^6,$$

la cual satisfacen todos los puntos de nuestra curva. Pero en este caso hay soluciones de esta ecuación que no están dadas por nuestra parametrización, y

que corresponden a valores negativos de x, por ejemplo,

$$x = -2, \qquad y = \pm 2\sqrt{2}.$$

Así, si queremos describir el conjunto de todos los puntos de la curva parametrizada con esta última relación, debemos añadir una desigualdad $x \geq 0$. Entonces es correcto decir que el conjunto de todos los puntos sobre la curva parametrizada es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación

$$y^4 = x^6$$

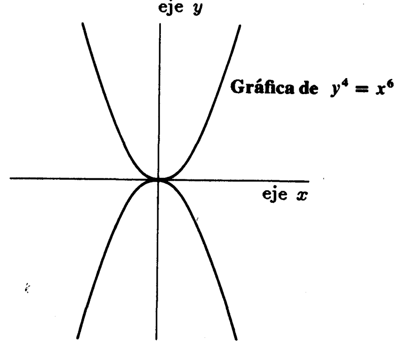
que satisfacen la desigualdad $x \geq 0$.

De igual manera, también es correcto decir que el conjunto de todos los puntos sobre la curva parametrizada es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación

$$y^8 = x^{12}$$

que satisfacen la desigualdad $x \geq 0$. Y así sucesivamente.

La gráfica de la ecuación $y^4 = x^6$ es como se muestra en la figura.



Es simétrica respecto a ambos ejes, el x y el y. Sin embargo, en la curva parametrizada,

$$x = t^2, \qquad y = t^3,$$

sólo se presenta el lado derecho de esta gráfica.

Ejemplo 4. Sea

$$x(t) = \tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \qquad \text{y} \qquad y(t) = \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

Ya sea que hayan verificado que

$$x(t)^2 - y(t)^2 = 1,$$

o que lo verifiquen ahora realizando la multiplicación y la resta, verán entonces que el punto

$$\big(x(t), y(t)\big) = \big(\tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})\big)$$

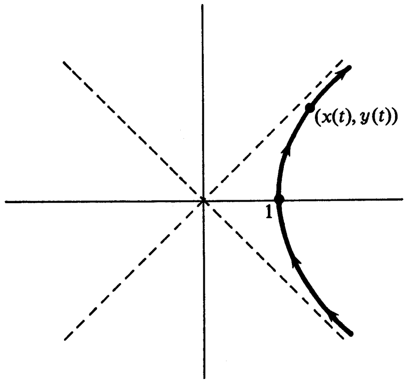
está sobre la hipérbola definida por la ecuación

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Pero nótese que $x(t) > 0$, en otras palabras, la abscisa dada por la anterior función de t, siempre es positiva. Así, nuestras funciones

$$(x(t), y(t)) = \left(\tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})\right)$$

describen un punto sobre la rama derecha de la hipérbola.



Cuando t es negativo grande, entonces $x(t)$ es positivo grande, y $y(t)$ es negativo grande. Cuando t es positivo grande, entonces $x(t)$ es positivo grande y $y(t)$ también es positivo grande.

Conforme crece t, la ordenada $y(t)$ crece de negativo grande a positivo grande, por lo que un insecto que se mueve a lo largo de la hipérbola de acuerdo con la parametrización anterior se mueve hacia arriba en la parte derecha de la hipérbola.

Longitud de curvas parametrizadas

Determinaremos ahora la longitud de una curva dada por una parametrización.

Supongamos que nuestra curva está dada por

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

con $a \leq t \leq b$, y que tanto f como g tienen derivadas continuas. Consideramos una partición del intervalo de valores t, $[a, b]$:

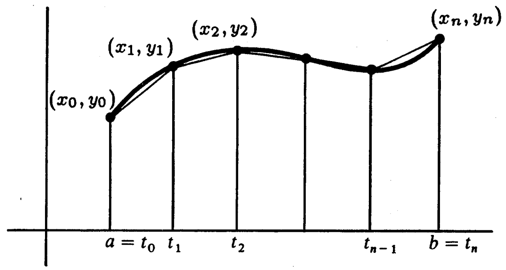
$$a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b.$$

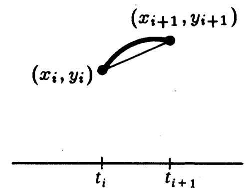
Entonces obtenemos los puntos

$$(x_i, y_i) = (f(t_i), g(t_i))$$

sobre la curva. La distancia entre dos puntos sucesivos es

$$\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2} = \sqrt{(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2}.$$





La suma de las longitudes de los segmentos de recta da una aproximación de la longitud de la curva cuando la partición es lo suficientemente fina, esto es cuando los números t_i, t_{i+1} están lo suficientemente cerca entre sí. Por lo tanto, la suma

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2}$$

da una aproximación a la longitud de la curva. Usamos el teorema del valor medio para f y g. Existen números c_i y d_i entre t_i y t_{i+1} tales que

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) = f'(c_i)(t_{i+1} - t_i),$$

$$g(t_{i+1}) - g(t_i) = g'(d_i)(t_{i+1} - t_i).$$

Al sustituir estos valores y factorizar $(t_{i+1} - t_i)$, vemos que la suma de las longitudes de nuestros segmentos de recta es igual a

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{f'(c_i)^2 + g'(d_i)^2}(t_{i+1} - t_i).$$

Sea

$$G(t) = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}.$$

Entonces nuestra suma es casi igual a

$$\sum_{i=0}^{n-1} G(c_i)(t_{i+1} - t_i),$$

que sería una suma de Riemann para G. No lo es porque no es necesariamente cierto que $c_i = d_i$. No obstante, lo que hemos hecho hace que sea bastante razonable **definir la longitud de nuestra curva (en forma paramétrica) como**

$$\boxed{\ell_a^b = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt.}$$

Una justificación completa de que esta integral es un límite, en un sentido adecuado, de nuestras sumas, requeriría algo más de teoría, lo cual es irrelevante porque sólo queremos que se vea razonable el hecho de que la integral anterior representa lo que entendemos físicamente por longitud.

Observen que, cuando se da una curva en su forma usual $y = f(x)$, podemos hacer

$$t = x = g(t) \quad \text{y} \quad y = f(t).$$

Esto muestra cómo ver la forma usual como un caso especial de la forma paramétrica. En ese caso, $g'(t) = 1$ y la fórmula para la longitud en forma paramétrica se ve igual que la fórmula que obtuvimos antes para una curva $y = f(x)$.

También es conveniente poner la fórmula en la otra notación usual para la derivada. Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = g'(t).$$

Por lo tanto, la longitud de la curva se puede escribir en la forma

$$\boxed{\ell_a^b = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.}$$

Es costumbre hacer

$$s(t) = \text{longitud de la curva como función de } t.$$

Así, podemos escribir

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Esto da lugar a

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}.$$

A veces escribimos simbólicamente

$$\boxed{(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2,}$$

para sugerir el teorema de Pitágoras.

Ejemplo. Hallar la longitud de la curva

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t$$

entre $t = 0$ y $t = \pi$.

La longitud es la integral

$$\int_0^\pi \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}\, dt.$$

En vista de la relación $(-\operatorname{sen} t)^2 = (\operatorname{sen} t)^2$ y de una fórmula básica que relaciona al seno y al coseno, obtenemos

$$\int_0^\pi dt = \pi.$$

Si integramos entre 0 y 2π, obtendremos 2π. Ésta es la longitud del círculo de radio 1.

Ejemplo. Hallar la longitud de la curva

$$x = \cos^3\theta, \qquad y = \operatorname{sen}^3\theta$$

para $0 \le \theta \le \pi/2$.

Tenemos

$$\frac{dx}{d\theta} = 3\cos^2\theta(-\operatorname{sen}\theta) \quad \text{y} \quad \frac{dy}{d\theta} = 3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \ell_0^{\pi/2} &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\cos^4\theta\operatorname{sen}^2\theta + 9\operatorname{sen}^4\theta\cos^2\theta}\, d\theta \\ &= 3\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta \qquad (\text{porque } \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1) \\ &= 3\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta \qquad (\text{porque } \operatorname{sen}\theta\cos\theta \ge 0 \text{ para } 0 \le \theta \le \pi/2). \end{aligned}$$

Integramos esto haciendo $u = \operatorname{sen}\theta$, $du = \cos\theta\, d\theta$, de modo que la integral es de la forma

$$\int u\, du = u^2/2.$$

Entonces

$$\ell_0^{\pi/2} = 3\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\bigg|_0^{\pi/2} = 3/2.$$

Ejemplo. Hallar la longitud de la misma curva como en el ejemplo anterior, pero para $0 \le \theta \le 2\pi$.

El mismo argumento que el anterior conduce a la fórmula de la longitud

$$\ell_0^\pi = 3\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta.$$

Sin embargo, si A es un número, **la fórmula**

$$\sqrt{A^2} = A$$

es válida sólo si A es positivo. Si A es negativo, entonces

$$\sqrt{A^2} = -A = |A|.$$

Así pues, al tomar la raíz cuadrada se deberá tener cuidado de los intervalos donde $\cos\theta\operatorname{sen}\theta$ es positivo o negativo. Tenemos que separar la integral en una suma:

$$\begin{aligned} \ell_0^{2\pi} = 3\int_0^{\pi/2} \cos\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta - 3\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta \\ + 3\int_\pi^{3\pi/2} \cos\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta - 3\int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos\theta\operatorname{sen}\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

Ahora éstas se pueden evaluar fácilmente, como antes, para dar la respuesta final 6. Por otro lado, observar que

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Aquí se obtiene el valor 0 porque a veces la función es positiva y a veces es negativa, sobre el intervalo más grande $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y hay cancelaciones.

Coordenadas polares

Hallemos ahora una fórmula para la longitud de las curvas dadas en coordenadas polares. Digamos que la curva es

$$r = f(\theta),$$

con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Sabemos que

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \\ y &= r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}}$$

Esto hace que la curva esté en forma paramétrica, como en las consideraciones precedentes. En consecuencia, podemos aplicar la definición como antes, y vemos que la longitud es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Se puede calcular $dx/d\theta$ y $dy/d\theta$ usando la regla para la derivada de un producto. Si se hace esto, se hallará que se cancelan varios términos y resulta que:

La longitud de una curva expresada en coordenadas polares por $r = f(\theta)$ está dada por la fórmula

$$\boxed{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta.}$$

Los lectores deberán obtener esto por sí mismos, pero para que quede constancia, lo haremos todo aquí. Traten de no verlo antes de hacerlo por sí solos.

Tenemos:

$$\frac{dx}{d\theta} = -f(\theta)\operatorname{sen}\theta + f'(\theta)\cos\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\operatorname{sen}\theta.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= f(\theta)^2\operatorname{sen}^2\theta - 2f(\theta)f'(\theta)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + f'(\theta)^2\cos^2\theta \\ &\quad + f(\theta)^2\cos^2\theta + 2f(\theta)f'(\theta)\cos\theta\operatorname{sen}\theta + f'(\theta)^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= f(\theta)^2 + f'(\theta)^2\end{aligned}$$

pues $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ y los términos de enmedio se cancelan. La fórmula se obtiene al sustituir.

Ejemplo. Hallar la longitud de la curva dada en coordenadas polares por $r = \operatorname{sen}\theta$, entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$.

Usamos la fórmula recién deducida y vemos que la longitud está dada por la integral

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi/2.$$

Ejemplo. Hallar la longitud de la curva dada en coordenadas polares por $r = 1 - \cos\theta$ para $0 \leq \theta \leq \pi/4$.

Hacemos $f(\theta) = 1 - \cos\theta$. La fórmula da la longitud como

$$\begin{aligned}\ell_0^{\pi/4} &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\, d\theta.\end{aligned}$$

Hacer $\theta = 2u$. Recordando que la fórmula $1 - \cos 2u = 2\operatorname{sen}^2 u$, entonces

$$1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2).$$

Y así, la integral es

$$\begin{aligned}\ell_0^{\pi/4} &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{4\operatorname{sen}^2(\theta/2)}\, d\theta. \\ &= 2\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \qquad (\text{ porque } \operatorname{sen}(\theta/2) \geq 0 \text{ si } 0 \leq \theta \leq \pi/4) \\ &= -4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4} = 4\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right].\end{aligned}$$

XII, §4. EJERCICIOS

1. Realizar los cálculos dando la longitud en coordenadas polares.
2. Hallar la longitud de un círculo de radio r.
3. Hallar la longitud de la curva $x = e^t\cos t$, $y = e^t\operatorname{sen} t$ entre $t = 1$ y $t = 2$.

4. Hallar la longitud de la curva $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$ (a) entre $t = 0$ y $t = \pi/4$ y (b) entre $t = 0$ y $t = \pi$.

Hallar la longitud de las curvas en el intervalo indicado.

5. $x = 2t + 1$, $y = t^2$, $0 \le t \le 2$

6. $x = 4 + 2t$, $y = \frac{1}{2}t^2 + 3$, $-2 \le t \le 2$

7. $x = 9t^2$, $y = 9t^3 - 3t$, $0 \le t \le 1/\sqrt{3}$

8. $x = 3t$, $y = 4t - 1$, $0 \le t \le 1$

9. $x = 1 - \cos t$, $y = t - \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$

10. $x = a(1 - \cos t)$, $y = a(t - \operatorname{sen} t)$, con $a > 0$, y $0 \le t \le \pi$.

11. Trazar la curva $r = e^{\theta}$ (en coordenadas polares), y también la curva $r = e^{-\theta}$.

12. Hallar la longitud de la curva $r = e^{\theta}$ entre $\theta = 1$ y $\theta = 2$.

13. En general, dar la longitud de la curva $r = e^{\theta}$ entre dos valores θ_1 y θ_2.

Hallar la longitud de las curvas siguientes dadas en coordenadas polares.

14. $r = 3\theta^2$ de $\theta = 1$ a $\theta = 2$

15. $r = e^{-4\theta}$, de $\theta = 1$ a $\theta = 2$

16. $r = 3\cos\theta$, de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/4$

17. $r = 2/\theta$ de $\theta = \frac{1}{2}$ a $\theta = 4$ [*Idea:* Usar $\theta = \operatorname{senh} t$.]

18. $r = 1 + \cos\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/4$

19. $r = 1 - \cos\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$

20. $r = \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$

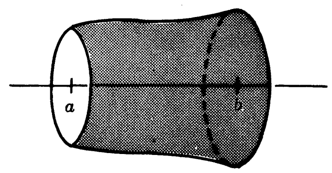
21. Hallar la longitud de un lazo de la curva $r = 1 + \cos\theta$

22. Igual, con $r = \cos\theta$, entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

23. Hallar la longitud de la curva $r = 2/\cos\theta$ entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/3$.

XII, §5. SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Sea $y = f(x)$ una funciòn continuamente diferenciable en un intervalo $[a, b]$. Queremos hallar una fórmula para el área de la superficie de revolución de la gráfica de f alrededor del eje x, según se ilustra en la figura.



Veremos que el área de la superficie está dada por la integral

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.}$$

La idea es aproximar la curva por medio de segmentos de recta, según se ilustró. Usamos una partición

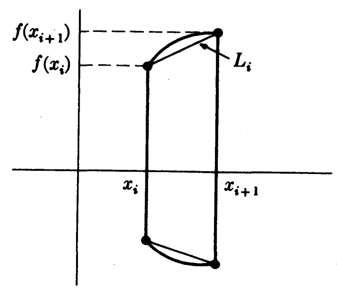
$$a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n = b.$$

En el intervalo pequeño $[x_i, x_{i+1}]$, la curva se aproxima mediante el segmento que une los puntos $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Sea L_i la longitud del segmento. Entonces

$$L_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}.$$

La longitud de un círculo de radio y es $2\pi y$. Si rotamos el segmento de recta alrededor del eje x, entonces el área de la superficie de rotación estará entre

$$2\pi f(t_i) L_i \qquad \text{y} \qquad 2\pi f(s_i) L_i,$$



donde $f(t_i)$ y $f(s_i)$ son el mínimo y máximo de f, respectivamente, en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Esto se ilustra en la figura 1.

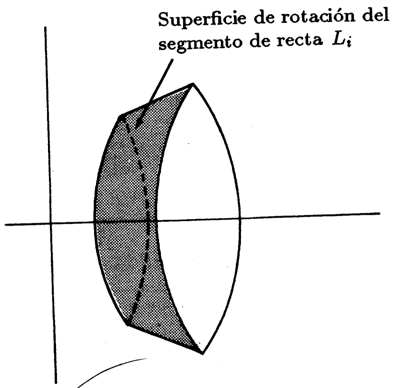


Figura 1

Por otro lado, por el teorema del valor medio, podemos escribir

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

para algún número c_i entre x_i y x_{i+1}. Por lo tanto,

$$L_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + f'(c_i)^2(x_{i+1} - x_i)^2}$$
$$= \sqrt{1 + f'(c_i)^2}(x_{i+1} - x_i).$$

Entonces la expresión

$$2\pi f(c_i)\sqrt{1 + f'(c_i)^2}(x_{i+1} - x_i)$$

es una aproximación de la superficie de revolución de la curva sobre el pequeño intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Ahora tomamos la suma:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + f'(c_i)^2}(x_{i+1} - x_i).$$

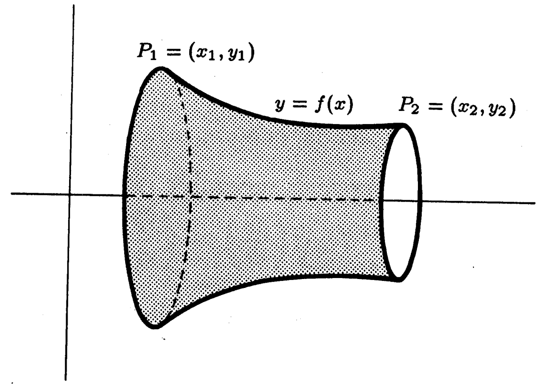
Ésta es una suma de Riemann, entre las sumas superior e inferior para la integral

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.}$$

Así, es razonable que el área de la superficie deba definirse por esta integral, como se quería mostrar.

Ejemplo físico. En la práctica sucede con frecuencia que se desea determinar un superficie de revolución minimal, obtenida al rotar una curva entre dos puntos dados $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ en el plano. A esto a veces se le llama el problema de la pompa de jabón. En efecto, dados dos anillos perpendiculares

al eje x, el problema es hallar una superficie de una pompa de jabón formada entre estos dos anillos.



La pompa de jabón será la superficie de revolución minimal. ¿Cuál es la ecuación de la curva $y = f(x)$? Resulta análoga a la del cable colgante, a saber,

$$y = b \cosh \frac{x - a}{b},$$

donde a y b son constantes que dependen de los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Aquí vemos otro uso de la función cosh.

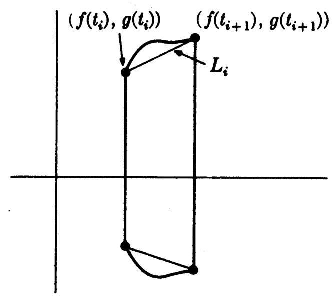
Área de revolución para curvas paramétricas

Como sucede con la longitud, también podemos tratar con curvas dadas en forma paramétrica. Supongamos que

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad a \le t \le b.$$

Tomamos una partición

$$a = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n = b.$$



Entonces la longitud L_i entre $(f(t_i), g(t_i))$ y $(f(t_{i+1}), g(t_{i+1}))$ está dada por

$$L_i = \sqrt{(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2}$$
$$= \sqrt{f'(c_i)^2 + g'(d_i)^2}(t_{i+1} - t_i),$$

donde c_i y d_i son números entre t_i y t_{i+1}. Por lo tanto,

$$2\pi g(c_i)\sqrt{f'(c_i)^2 + g'(d_i)^2}(t_{i+1} - t_i)$$

es una aproximación para la superficie de revolución de la curva en el pequeño intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. En consecuencia, es razonable que la superficie de revolución esté dada por la integral

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.}$$

Cuando $t = x$, ésta coincide con la fórmula hallada previamente. También es útil escribir esta fórmula simbólicamente

$$\boxed{S = \int 2\pi y\, ds,}$$

donde, simbólicamente, hemos usado

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Cuando se usa esta notación simbólica no se ponen límites de integración. Sólo cuando usamos el parámetro explícito t sobre un intervalo $a \le t \le b$, sí ponemos los valores a y b para t, abajo y arriba del signo de la integral. En este caso, el área de la superficie se escribe

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi y \frac{ds}{dt}\, dt.}$$

Ejemplo. Deseamos hallar el área de una esfera de radio $a > 0$. Es mejor contemplar la esfera como el área de revolución de un círculo de radio a y expresar el círculo en forma paramétrica,

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a \operatorname{sen}\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Entonces la fórmula produce:

$$S = \int_0^\pi 2\pi a \operatorname{sen}\theta \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + a^2\cos^2\theta}\, d\theta$$
$$= \int_0^\pi 2\pi a^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$
$$= 2\pi a^2(-\cos\theta)\Big|_0^\pi$$
$$= 4\pi a^2.$$

Veamos ahora las superficies de revolución en términos de límites. Sea $y = f(x)$ una función positiva como la anterior, definida para todos los números positivos x. Sea:

V_B = volumen de revolución de la gráfica de f entre $x = 1$ y $x = B$;
S_B = área de revolución de la gráfica de f entre $x = 1$ y $x = B$.

Es un hecho, que usualmente resulta asombroso, que puede haber varios casos en que V_B tienda a un límite finito cuando $B \to \infty$ ¡mientras que S_B se vuelve arbitrariamente grande cuando $B \to \infty$!

Ejemplo. Sea $f(x) = 1/x$. Entonces, usando las fórmulas para volúmenes y superficies de revolución, hallamos:

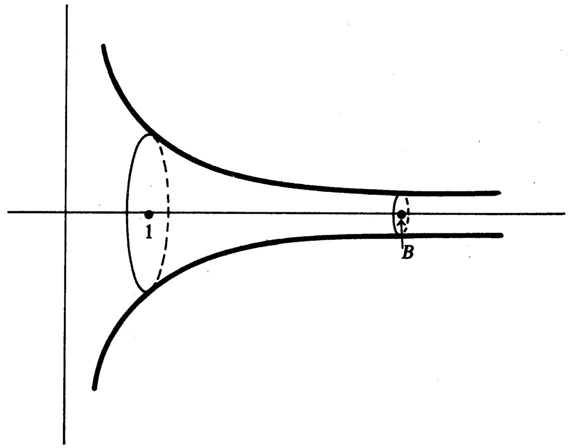
$$V_B = \int_1^B \frac{1}{x^2}\, dx = \pi\left(1 - \frac{1}{B}\right) \to \pi \qquad \text{cuando} \qquad B \to \infty.$$

$$S_B = \int_1^B 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Ahora bien, $f'(x)^2$ es un número positivo, de modo que la expresión bajo el signo de raíz cuadrada es ≥ 1. Entonces

$$S_B \ge 2\pi \int_1^B \frac{1}{x}\, dx = 2\pi \log B \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad B \to \infty.$$

Vemos aquí cómo el volumen tiende al límite finito π, mientras que la superficie de revolución se vuelve arbitrariamente grande.



En términos de una interpretación intuitiva, supongamos que se tiene una cubeta de pintura con π unidades cúbicas de pintura. Entonces es posible llenar el embudo dentro de la superficie de revolución con esta pintura. Pero, aunque parezca paradójico, no hay pintura suficiente para pintar la superficie de revolución, cuando $B \to \infty$. Esto muestra lo traicionera que puede ser la intuición.

XII, §5. EJERCICIOS

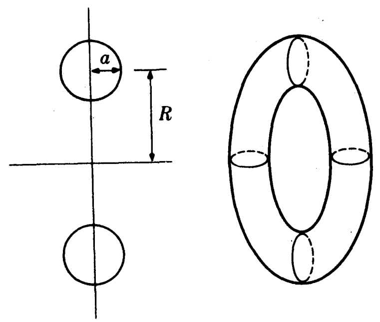
1. Hallar el área de la superficie obtenida al rotar la curva
$$x = a\cos^3\theta, \qquad y = a\,\mathrm{sen}^3\,\theta$$
alrededor del eje x. [Trazar la curva. Hay alguna simetría. Determinar el intervalo apropiado de θ.]

2. Hallar el área de la superficie obtenida al rotar la curva $y = x^3$ alrededor del eje x, entre $x = 0$ y $x = 1$.

3. Hallar el área de la superficie obtenida al rotar la curva
$$x = \tfrac{1}{2}t^2 + t, \qquad y = t + 1$$
alrededor del eje x, de $t = 0$ a $t = 4$.

4. El círculo $x^2 + y^2 = a^2$ se rota alrededor de una recta tangente al círculo. Hallar el área de la superficie de rotación. [*Idea:* Formar unos ejes coordenados y una parametrización conveniente del círculo. Recordar cómo se ve la curva $r = 2a\,\mathrm{sen}\,\theta$ en coordenadas polares. ¿Qué sucede si se rota esta curva alrededor del eje x?]

5. Un círculo como el que se muestra en la figura se rota alrededor del eje x para formar un toro (nombre elegante para la dona). ¿Cuál es el área del toro?



Sección transversal del toro El toro

6. Hallar el área de la superficie obtenida al rotar un arco de la curva $y = x^{1/2}$ entre $(0, 0)$ y $(4, 2)$ alrededor del eje x.

XII, §6. TRABAJO

Supongan que una partícula se mueve sobre una curva y que la longitud de la curva se describe por una variable u.

Sea $f(u)$ una función. Interpretamos f como una fuerza que actúa sobre la partícula, en la dirección de la curva. Queremos hallar una expresión integral para el trabajo realizado por la fuerza entre dos puntos de la curva.

Cualquiera que resulte ser nuestra expresión, es razonable esperar que el trabajo realizado satisfaga las propiedades siguientes:

Si a, b y c son tres números, con $a \le b \le c$, entonces el trabajo realizado entre a y c es igual al trabajo realizado entre a y b más el trabajo realizado entre b y c. Si denotamos el trabajo realizado entre a y b por $W_a^b(f)$, entonces deberemos tener
$$W_a^c(f) = W_a^b(f) + W_b^c(f).$$

Más aún, si tenemos una fuerza constante M actuando sobre la partícula, es razonable esperar que el trabajo realizado entre a y b sea
$$M(b - a).$$

Finalmente, si g es una fuerza más poderosa que f, digamos que $f(u) \le g(u)$ sobre el intervalo $[a, b]$, entonces realizaremos más trabajo con g que con f, lo cual significa que
$$W_a^b(f) \le W_a^b(g).$$
En particular, si hay dos fuerzas constantes m y M tales que
$$m \le f(u) \le M$$
en todo el intervalo $[a, b]$, entonces
$$m(b - a) \le W_a^b(f) \le M(b - a).$$
Veremos más adelante que el trabajo realizado por la fuerza f entre una distancia a y una distancia b está dado por la integral
$$W_a^b(f) = \int_a^b f(u)\,du.$$

Si la partícula u objeto se mueve a lo largo de una recta, digamos a lo largo del eje x, entonces f está dada como función de x y nuestra integral es simplemente
$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Más aún, si la longitud de la curva u está dada como función del tiempo t (como sucede en la práctica, ver la sección §3) vemos que la fuerza se vuelve una función de t por la regla de la cadena, a saber, $f(u(t))$. Así, entre los tiempos t_1 y t_2, el trabajo realizado es igual a
$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} f(u(t))\,\frac{du}{dt}\,dt.}$$

Ésta es la expresión más práctica para el trabajo, pues las curvas y las fuerzas se expresan con mayor frecuencia como funciones del tiempo.

Veamos ahora por qué el trabajo realizado está dado por la integral. Sea P una partición del intervalo $[a,b]$:

$$a = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n = b.$$

Sea $f(t_i)$ un mínimo para f en el pequeño intervalo $[u_i, u_{i+1}]$, y sea $f(s_i)$ un máximo para f en este mismo pequeño intervalo. Entonces, el trabajo realizado por la partícula en movimiento desde la longitud u_i a u_{i+1} satisface las desigualdades

$$f(t_i)(u_{i+1} - u_i) \leq W_{u_i}^{u_{i+1}}(f) \leq f(s_i)(u_{i+1} - u_i).$$

Al sumar esto hallamos

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(u_{i+1} - u_i) \leq W_a^b(f) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(u_{i+1} - u_i).$$

Las expresiones a la izquierda y a la derecha son las sumas inferior y superior para la integral, respectivamente. Como la integral es el único número entre las sumas inferior y superior, se sigue que

$$\boxed{W_a^b(f) = \int_a^b f(u)\,du.}$$

Ejemplo. Hallar el trabajo realizado al estirar un resorte desde su posición natural hasta una longitud de 10 cm de largo. Se puede suponer que la fuerza necesaria para estirar el resorte es proporcional al incremento en la longitud.

Visualizamos el resorte como horizontal, sobre el eje x. Así, existe una constante K tal que la fuerza está dada por

$$f(x) = Kx.$$

Entonces el trabajo realizado es

$$\int_0^{10} Kx\,dx = \tfrac{1}{2}K \cdot 100$$
$$= 50K.$$

Ejemplo. Suponer que la gravedad es una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. ¿Cuál es el trabajo realizado al levantar un peso de 2 tons desde la superficie de la Tierra hasta una altura de 161 km sobre la Tierra? Suponer que el radio de la Tierra es de 6437 km.

Por hipótesis, existe una constante C tal que la fuerza de gravedad está dada por $f(x) = C/(x + 6437)^2$, donde x denota la altura sobre la Tierra. Cuando $x = 0$, nuestra hipótesis es que

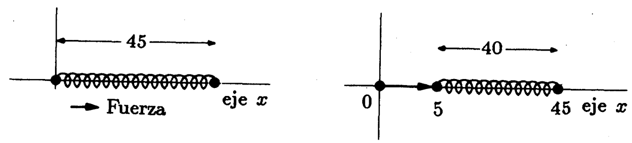
$$f(0) = 2\,\text{tons} = \frac{C}{(6450)^2}.$$

Por lo tanto, $C = 82.87 \times 10^6$ tons. El trabajo realizado es igual a la integral

$$\int_0^{100} f(x)\,dx = 32 \times 10^6 \left(-\frac{1}{(x + 6450)}\right)\Bigg|_0^{100}$$
$$= 32 \times 10^6 \left[\frac{1}{6450} - \frac{1}{6550}\right] \text{ ton/km}.$$

XII, §6. EJERCICIOS

1. Un resorte tiene 45 cm de largo y se necesita una fuerza de 5 kg para mantener al resorte a una longitud de 40 cm. Si la fuerza está dada como $f(x) = kx$, donde k es una constante y x es el decrecimiento en la longitud, ¿cuál es la constante k? ¿Cuánto trabajo se realiza al comprimir el resorte de 40 cm a 30 cm?



(a) (b)

2. Suponiendo que la fuerza está dada como $k \operatorname{sen}(\pi x/45)$, en el problema de la compresión del resorte, responder las dos preguntas del problema anterior para esta fuerza.
3. Una partícula atrae a otra partícula con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Sea C la constante de proporcionalidad. ¿Cuál es el trabajo realizado al mover la segunda partícula a lo largo de una recta, alejándola del origen, de una distancia r_1 a una distancia $r > r_1$ del origen?
4. En el ejercicio anterior, determinar si el trabajo tiende a un límite cuando r se vuelve muy grande, y hallar este límite si existe.
5. Dos partículas se repelen una a la otra con una fuerza inversamente proporcional al cubo de su distancia. Si una partícula está fija en el origen, ¿qué trabajo se realiza al mover la otra a lo largo del eje x de una distancia de 10 cm a una distancia de 1 cm hacia el origen?
6. Suponiendo, como es usual, que la gravedad es una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra, ¿cuál es el trabajo realizado al levantar un peso de 453.5 kg desde la superficie de la Tierra a una altura de 6437 km sobre la superficie? (Suponer que el radio de la Tierra es de 6437 km.)

7. Una barra de metal tiene longitud L y sección transversal S. Si se estira en x unidades, entonces la fuerza $f(x)$ requerida está dada por

$$f(x) = \frac{ES}{L}x$$

donde E es una constante. Si una barra de 30 cm de sección transversal uniforme de $10\,\text{cm}^2$ se estira en 25 cm, hallar el trabajo realizado (en términos de E).

8. Una partícula de masa M gramos en el origen atrae una partícula de masa m gramos en un punto a x cm del eje x con una fuerza de CmM/x^2 dinas, donde C es una constante. Hallar el trabajo realizado por la fuerza
(a) cuando m se mueve de $x = 1/100$ a $x = 1/10$;
(b) cuando m se mueve de $x = 1$ a $x = 1/10$.

9. Una unidad de carga positiva de electricidad en 0 repele a una carga positiva de cantidad c con una fuerza de c/r^2, donde r es la distancia entre las partículas. Hallar el trabajo realizado por esta fuerza cuando la carga c se mueve a lo largo de una recta que pasa por 0 desde una distancia r_1 hasta una distancia r_2 de 0.

10. Hay aire confinado en una cámara cilíndrica ajustada con un pistón. Si el volumen del aire a una presión de $20\,\text{lib/pulg}^2$ es de $75\,\text{pulg}^3$, hallar el trabajo realizado sobre el pistón cuando el aire se expande al doble de su volumen original. Usar la ley

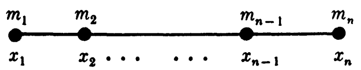
Presión · Volumen = Constante.

XII, §7. MOMENTOS Y CENTRO DE GRAVEDAD

Suponer que tenemos masas $m_1, \ldots, m_n$ y puntos $x_1, \ldots, x_n$ sobre el eje x. El **momento** total de estas masa se define como

$$m_1x_1 + \cdots + m_nx_n = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i.$$

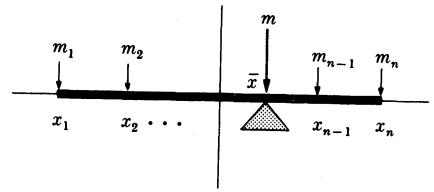
Podemos considerar que estas masas están distribuidas en alguna varilla de densidad uniforme, como se muestra en la figura.



La masa total es

$$m = m_1 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Deseamos hallar el punto de la varilla tal que, si balanceamos la varilla en ese punto, no se moverá hacia arriba ni hacia abajo. Llamar a este punto $\bar{x}$.



Entonces $\bar{x}$ es un punto tal que, si la masa total m se coloca en $\bar{x}$, tendrá el mismo efecto de balanceo que las otras masas m_i en x_i. La ecuación para esta condición es que

$$m\bar{x} = m_1x_1 + \cdots + m_nx_n = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i.$$

Así, podemos despejar $\bar{x}$ y obtener

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_ix_i.}$$

Este punto $\bar{x}$ se llama **centro de gravedad,** o **centro de masa** de las masas $m_1, \ldots, m_n$.

Ejemplo. Sea $m_1 = 4$ en el punto $x_1 = -3$ y sea $m_2 = 7$ en el punto $x_2 = 2$. Entonces la masa total es

$$m = 4 + 7 = 11$$

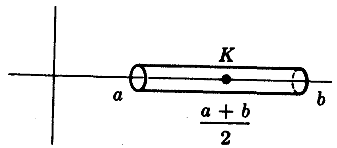
y el momento es

$$4 \cdot (-3) + 7 \cdot 2 = 2.$$

Por lo tanto, el centro de gravedad está en el punto

$$\bar{x} = 2/11.$$

Supongamos ahora que tenemos una varilla delgada, colocada a lo largo del eje x en un intervalo $[a, b]$, como en la figura. Considerar que la varilla tiene densidad constante (uniforme) K.



La longitud de la varilla es $(b - a)$. La masa total de la varilla es entonces la densidad por la longitud, a saber

$$\text{masa} = K(b - a).$$

Es razonable definir el momento de la varilla como igual al de la masa total colocada en el centro de la varilla. Este centro tiene coordenadas en el punto medio del intervalo, a saber

$$\frac{a+b}{2}.$$

Por lo tanto, el **momento** de la varilla es

$$M_a^b = K\frac{(a+b)}{2}(b-a).$$

A continuación, suponer que la densidad de la varilla no es constante, pero varía continuamente, de manera que puede representarse mediante una función $f(x)$. Tratamos de hallar una aproximación de lo que entendemos por el momento de la varilla. Así tomamos una partición del intervalo $[a,b]$,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b.$$

En cada intervalo pequeño $[x_i, x_{i+1}]$ la densidad no variará mucho, y entonces una aproximación para el momento de la pieza de varilla a lo largo de este intervalo está dada por

$$f(c_i)c_i(x_{i+1} + x_i)$$

donde

$$c_i = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

es el punto medio de este pequeño intervalo. Sea

$$G(x) = xf(x).$$

Al tomar la suma de las aproximaciones anteriores se tiene

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)c_i(x_{i+1} - x_i)$$

que es una suma de Riemann para la integral

$$\int_a^b G(x)\,dx = \int_a^b xf(x)\,dx.$$

En consecuencia, es natural definir el **momento** de la varilla con densidad variable como la integral

$$\boxed{M_a^b(f) = \int_a^b xf(x)\,dx.}$$

Sea $\overline{x}$ la coordenada del centro de gravedad de la varilla. Esto significa que, si la masa de la varilla se coloca en $\overline{x}$, entonces tiene el mismo momento que la varilla misma y equivale a la ecuación

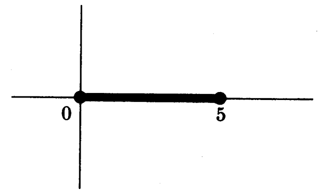
$$\overline{x}\cdot \text{masa total de la varilla} = \int_a^b xf(x)\,dx.$$

Por lo tanto, obtenemos una expresión para el centro de gravedad, a saber,

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.}$$

Ejemplo. Suponer que una varilla de 5 cm de longitud tiene densidad proporcional a la distancia desde un extremo. Hallar el centro de gravedad de la varilla.

Suponemos que la varilla está tendida de manera que un extremo está en el origen, como se muestra en la figura.



La hipótesis acerca de la densidad significa que existe una constante C tal que la densidad está dada por la función

$$f(x) = Cx.$$

(i) La masa total es

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^5 Cx\,dx = \frac{25C}{2}.$$

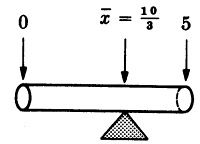
(ii) El momento es

$$\int_0^5 xf(x)\,dx = \int_0^5 Cx^2\,dx = \frac{125C}{3}.$$

Entonces

$$\overline{x} = \frac{125C/3}{25C/2} = \frac{10}{3}.$$

Este centro de gravedad es tal que, si balanceamos la varilla en una punta aguda en el punto $\overline{x}$, entonces la varilla no se inclinará hacia ningún lado.



Se puede realizar un análisis similar en espacios de dimensión superior para áreas planas y volúmenes sólidos. Para esto es mejor esperar hasta que hallamos estudiado integrales dobles y triples en dos o tres variables, en el curso siguiente.

XII, §7. EJERCICIOS

1. Suponer que la densidad de una varilla es proporcional al cuadrado de la distancia desde el origen; la varilla mide 10 cm de largo, y está tendida a lo largo del eje x entre 5 y 15 cm del origen. Hallar su centro de gravedad.
2. Igual que en el ejercicio 1, pero suponer que la varilla tiene densidad constante C.
3. Igual que en el ejercicio 1, pero suponer que la densidad de la varilla es inversamente proporcional a la distancia al origen.

Parte cuatro

Fórmula de Taylor y series

En esta parte estudiamos la aproximación de funciones mediante ciertas sumas llamadas series. El capítulo sobre la fórmula de Taylor muestra cómo aproximar funciones mediante polinomios y cómo estimar el término de error para ver la calidad de la aproximación que podemos obtener.

Nótese que la deducción de la fórmula de Taylor es una aplicación de la integración por partes.

CAPÍTULO XIII

Fórmula de Taylor

Finalmente llegamos al punto donde se desarrollará un método que nos permita calcular los valores de funciones elementales como seno, exp y log. El método es aproximar estas funciones mediante polinomios, con un término de error que se estima fácilmente. Este término de error se dará mediante una integral, y nuestra primera tarea será estimar integrales. Después recorreremos sistemáticamente las funciones elementales y deduciremos los polinomios de aproximación.

Es conveniente revisar los estimados del capítulo X, sección §3, que se usarán para estimar nuestros términos de error.

XIII, §1. FÓRMULA DE TAYLOR

Sea f una función diferenciable en algún intervalo. Podemos entonces tomar su derivada f' en ese intervalo y suponer que esta derivada también es diferenciable. Necesitamos una notación para su derivada. La denotaremos por $f^{(2)}$. De manera análoga, si existe la derivada de la función $f^{(2)}$, la denotamos por $f^{(3)}$, y así sucesivamente. En este sistema, la primera derivada se denota por $f^{(1)}$. (Es evidente que también podemos escribir $f^{(2)} = f''$.)

En la notación d/dx podemos escribir también:

$$f^{(2)}(x) = \frac{d^2f}{dx^2},$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^3f}{dx^3},$$

y así sucesivamente.

La fórmula de Taylor nos da un polinomio que aproxima la función en términos de las derivadas de la función. Como estas derivadas usualmente son fáciles de calcular, no hay dificultad alguna para calcular estos polinomios.

Por ejemplo, si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f^{(1)}(x) = \cos x$, $f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$ y $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$. Y de aquí comenzamos otra vez.

El caso de e^x es aún más fácil, a saber, $f^{(n)}(x) = e^x$ para todos los enteros positivos n.

También se acostumbra denotar la misma función f como $f^{(0)}$. Así, $f(x) = f^{(0)}(x)$.

Necesitamos una notación más, antes de enunciar la fórmula de Taylor. Cuando tomamos derivadas sucesivas de funciones, se presentan con frecuencia los números siguientes:

$$1, \quad 2\cdot 1, \quad 3\cdot 2\cdot 1, \quad 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1, \quad 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1, \quad \text{etc.}$$

Estos números se denotan por

$$1! \quad 2! \quad 3! \quad 4! \quad 5! \quad \text{etc.}$$

Así,

$$1! = 1, \qquad 4! = 24,$$
$$2! = 2, \qquad 5! = 120,$$
$$3! = 6, \qquad 6! = 720.$$

Cuando n es un entero positivo, el símbolo $n!$ se lee n **factorial**. Así, en general,

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

es el producto de los n primeros enteros de 1 a n.

Además es conveniente acordar que $0! = 1$. Esta convención hace que ciertas fórmulas sean más fáciles de escribir.

Veamos el caso de un polinomio

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n.$$

Los números $c_0, \ldots, c_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio. Veremos ahora que estos coeficientes se pueden expresar en términos de las derivadas de $P(x)$ en $x = 0$. Deberán recordar lo que se hizo en el capítulo III, sección §7, cuando se calcularon derivadas de orden superior. Sea k un entero ≥ 0. Entonces la k-ésima derivada de $P(x)$ está dada por

$$P^{(k)}(x) = c_k k! + \text{una expresión que contiene a } x \text{ como factor.}$$

La razón es: si diferenciamos k veces los términos

$$c_0, c_1x, \ldots, c_{k-1}x^{k-1},$$

obtenemos 0. Y si diferenciamos k veces una potencia x^j con $j > k$, entonces quedará alguna potencia positiva de x. Entonces, si evaluamos la k-ésima derivada en 0, obtenemos

$$P^{(k)}(0) = c_k k!$$

pues, cuando sustituimos x por 0, todos los otros términos dan 0. Por consiguiente, hallamos la expresión deseada de c_k en términos de la k-ésima derivada:

$$\boxed{c_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.}$$

A continuación, sea f una función que tiene derivadas hasta de orden n en un intervalo. Estamos buscando un polinomio

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$$

cuyas derivadas en 0 (hasta de orden n) sean iguales a las derivadas de f en 0; en otras palabras,

$$P^{(k)}(0) = f^{(k)}(0).$$

¿Cuáles deben ser los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ para lograr esto? La respuesta es inmediata a partir de los cálculos de los coeficientes de un polinomio, a saber, debemos tener

$$k!\, c_k = f^{(k)}(0)$$

para cada entero $k = 0, 1, \ldots, n$. Por lo tanto, tenemos la expresión deseada para c_k, a saber

$$\boxed{c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.}$$

Definición. El **polinomio de Taylor** de grado $\leq n$ para la función f es el polinomio

$$\boxed{P_n(x) = f(0) + f^{(1)}(o)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.}$$

Ejemplo. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Es fácil obtener las derivadas (vean la sección §3), hallarán que los polinomios de Taylor tienen la forma

$$P_{2m+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Sólo se presentan valores impares de n, de modo que escribimos

$$n = 2m+1 \qquad \text{con} \qquad m \geq 0.$$

Ejemplo. Sea $f(x) = e^x$. Entonces $f^{(k)}(x) = e^x$ para todos los enteros positivos k. Por lo tanto, $f^{(k)}(0) = 1$ para todo k, de modo que el polinomio de Taylor tiene la forma

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Queremos ahora saber la calidad de la aproximación $P_n(x)$ de $f(x)$. Escribimos

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x),$$

donde R_{n+1} se llama **residuo.**

Tendremos que estimar el término residuo $R_{n+1}(x)$. Finalmente probaremos que existe un número c entre 0 y x tal que

$$\boxed{R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.}$$

Así, el término residuo se verá como los términos principales, excepto que el coeficiente

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

se toma en algún punto intermedio c en lugar de tomarse en 0.

Como es fácil estimar las derivadas de las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y e^x, podremos ver que los polinomios de Taylor dan buenas aproximaciones a la función. Si aceptan como válida la expresión

$$\boxed{f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x),}$$

donde

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n}$$

para algún número c entre 0 y x, entonces pueden leer inmediatamente las secciones posteriores, §3 y sucesivas, para entrar a las aplicaciones de las funciones elementales.

Observamos que no hay ninguna diferencia entre escribir

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x) \qquad \text{y} \qquad f(x) = P_{n-1}(x) + R_n(x).$$

Esto equivale a un simple cambio de índices. Usaremos la fórmula que nos parezca más conveniente.

Por supuesto, la afirmación anterior no dice nada preciso acerca del número c sino que c está entre 0 y x. Pero el meollo de la fórmula y de su término residuo es que no necesitamos más precisión para *estimar* el término residuo. El polinomio que precede al término residuo da un valor en x. Sólo queremos saber lo cerca que está este valor de $f(x)$. Para ello basta dar una cota

$$\frac{|f^{(n)}(c)|}{n!}|x|^n \leq \text{algo},$$

de modo que basta dar una cota para la n-ésima derivada $|f^{(n)}(c)|$. Se puede dar dicha cota sin saber el valor exacto de la n-ésima derivada en el número c.

Se puede ver cómo hacerlo en las secciones §3 y subsecuentes, cuando tratemos de manera sistemática todas las funciones elementales.

Desarrollaremos ahora teóricamente la fórmula de Taylor y probaremos que el término residuo tiene la forma mencionada. También será conveniente trabajar con números arbitrarios a y b en lugar de los números 0 y x. Además se enunciará la fórmula de Taylor de una manera un tanto diferente para el término residuo, pero que es como surge naturalmente en la demostración. Después probaremos que la forma integral es igual a la expresión enunciada antes.

Teorema 1.1. *Sea f una función definida en un intervalo cerrado entre dos números a y b. Suponiendo que la función tiene n derivadas en este intervalo y que todas ellas son funciones continuas, entonces*

$$\boxed{\begin{aligned} f(b) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) &+ \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n, \end{aligned}}$$

donde R_n (llamado término residuo) es la integral

$$\boxed{R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt.}$$

El término residuo parece ser un poco complicado. En el teorema 2.1 probaremos que R_n se puede expresar en forma muy parecida a los otros términos, a saber,

$$\boxed{R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n}$$

para algún número c entre a y b. La fórmula de Taylor con esta forma del residuo ya es muy fácil de memorizar.

El caso más importante del teorema 1.1 ocurre cuando $a = 0$. En ese caso, la fórmula se lee

$$f(b) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}b + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}b^{n-1} + R_n.$$

Más aún, si x es cualquier número entre a y b, la misma fórmula sigue siendo válida para este número x en lugar de b, simplemente al considerar el intervalo entre a y x en lugar del intervalo entre a y b. Así, si $a = 0$, la fórmula se ve:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x),}$$

donde

$$\boxed{R_n(x) = f^{(n)}(c)\frac{x^n}{n!}}$$

y c es un número entre 0 y x. Cada derivada $f(0)$, $f'(0), \dots$, $f^{(n-1)}(0)$ es un número, y vemos que los términos que preceden a R_n forman un polinomio en x. Éste es el polinomio de aproximación.

Probaremos ahora el teorema. La demostración es una aplicación de la integración por partes. Primero, para tener la idea de la demostración, veremos dos casos particulares.

Casos particulares. Procederemos por pasos. Sabemos que una función es la integral de su derivada. Así, cuando $n = 1$, tenemos

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt.$$

Sea $u = f'(t)$ y $dv = dt$. Entonces $du = f''(t)\,dt$. Estamos tentados a poner $v = t$. Éste es un caso en que escogemos otra integral indefinida, a saber, $v = -(b-t)$, que difiere de t en una constante. Tenemos aún que $dv = dt$ (¡se cancelan los signos menos!). Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b u\,dv &= uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\\ &= -f'(t)(b-t)\Big|_a^b - \int_a^b -(b-t)f^{(2)}(t)\,dt\\ &= f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-t)f^{(2)}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Ésta es precisamente la fórmula de Taylor cuando $n = 2$.

Vamos un paso más adelante, de 2 a 3. Reescribimos la integral recién obtenida como

$$\int_a^b f^{(2)}(t)(b-t)\,dt.$$

Sean $u = f^{(2)}(t)$ y $dv = (b-t)\,dt$. Entonces

$$du = f^{(3)}(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad v = \frac{-(b-t)^2}{2} = \int (b-t)\,dt.$$

Así, al integrar por partes hallamos que nuestra integral, que tiene la forma $\int_a^b u\,dv$, es igual a

$$\begin{aligned}uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du &= -f^{(2)}(t)\frac{(b-t)^2}{2}\Big|_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt\\ &= f^{(2)}(a)\frac{(b-a)^2}{2} + R_3.\end{aligned}$$

Aquí, R_3 es el residuo deseado y el término precedente es el término propio de la fórmula de Taylor.

Si lo necesitan, pueden hacer el paso siguiente, de 3 a 4. Veremos ahora cómo va el paso general, de n a $n+1$.

Caso general. Suponer que ya obtuvimos los primeros $n-1$ términos de la fórmula de Taylor, con el término residuo

$$R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt,$$

que reescribimos

$$R_n = \int_a^b f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$$

Sea

$$u = f^{(n)}(t) \qquad \text{y} \qquad dv = \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$$

Entonces

$$du = f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad v = \frac{-(b-t)^n}{n!}.$$

Aquí usamos el hecho de que b es constante, y

$$\int (b-t)^{n-1}\,dt = -\frac{(b-t)^n}{n}.$$

Nótese la aparición del signo menos debido a la regla de la cadena. Usamos también

$$n(n-1)! = n!$$

para dar el valor enunciado de v. Así, el denominador va de $(n-1)!$ a $n!$.

Integrando por partes hallamos:

$$\begin{aligned}R_n = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du &= -f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\Big|_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt\\ &= f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Hemos separado, pues, un término más de la fórmula de Taylor y el nuevo residuo es el R_{n+1} deseado. Esto concluye la demostración.

XIII, §1. EJERCICIOS

1. Sea $f(x) = \log(1+x)$.
   (a) Hallar una fórmula para las derivadas de $f(x)$. Comenzar con $f^{(1)}(x) = (x+1)^{-1}$, $f^{(2)}(x) = -(x+1)^{-2}$. Obtener $f^{(k)}(x)$ para $k = 3, 4, 5$ y depués escribir la fórmula para k arbitrario.
   (b) Hallar $f^{(k)}(0)$ para $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Después mostrar en general que
   $$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!.$$

(c) Concluir que el polinomio de Taylor $P_n(x)$ para $\log(1+x)$ es

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

2. Hallar los polinomios $P_n(x)$ para la función $f(x) = \cos x$ y los valores $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

XIII, §2. ESTIMADO PARA EL RESIDUO

Teorema 2.1. *En la fórmula de Taylor del teorema 1.1, existe un número c entre a y b tal que el residuo R_n está dado por*

$$\boxed{R_n = \frac{f^{(n)}(c)(b-a)^n}{n!}.}$$

Si M_n es un número tal que $|f^{(n)}(x)| \le M_n$ para todo x en el intervalo, i.e. si M_n es una cota superior para $|f^{(n)}(x)|$, entonces

$$|R_n| \le \frac{M_n|b-a|^n}{n!}.$$

Demostración. La segunda afirmación se sigue inmediatamente de la primera, formando el estimado

$$|R_n| \le \frac{|f^{(n)}(c)||b-a|^n}{n!} \le M_n\frac{|b-a|^n}{n!}.$$

Probemos la primera afirmación. Como $f^{(n)}$ es continua en el intervalo, existe un punto u en el intervalo tal que $f^{(n)}(u)$ es un máximo y un punto v tal que $f^{(n)}(v)$ es un mínimo para todos los valores de $f^{(n)}$ en nuestro intervalo.

Supongamos que $a < b$. Entonces, para cualquier t en el intervalo, $b - t$ es ≥ 0, y, por lo tanto,

$$\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(v) \le \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t) \le \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(u).$$

Usando el teorema 3.1 del capítulo X, sección §3, concluimos que se cumplen desigualdades parecidas cuando tomamos la integral. Sin embargo, $f^{(n)}(v)$ y $f^{(n)}(u)$ son números fijos que se pueden sacar del signo de integral. En consecuencia, obtenemos

$$f^{(n)}(v)\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt \le R_n \le f^{(n)}(u)\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt.$$

Ahora efectuamos la integración, que es muy fácil, y obtenemos

$$\int_a^b (b-t)^{n-1}\,dt = -\frac{(b-t)^n}{n}\bigg|_a^b = \frac{(b-a)^n}{n}.$$

[*Observación:* ésta es la misma integral que surgió en la integración por partes, en la demostración del teorema 1.1.] Por lo tanto,

$$f^{(n)}(v)\frac{(b-a)^n}{n!} \le R_n \le f^{(n)}(u)\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Por el teorema del valor intermedio, la n-ésima derivada $f^{(n)}(t)$ toma todos los valores entre su mínimo y su máximo en el intervalo, por lo cual

$$f^{(n)}(t)\frac{(b-a)^n}{n!}$$

toma todos los valores entre *su* mínimo y su máximo en el intervalo. De este modo, existe algún punto c en el intervalo tal que

$$R_n = f^{(n)}(c)\frac{(b-a)^n}{n!},$$

que es lo que queremos.

La demostración en el caso $b < a$ es parecida, excepto que se invierte el sentido de ciertas desigualdades. La omitimos.

El estimado del residuo es particularmente útil cuando b está cerca de a. En ese caso reescribimos la fórmula de Taylor haciendo $b - a = h$. Obtenemos:

Teorema 2.2. *Con las mismas hipótesis del teorema 1.1, tenemos*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + R_n$$

con el estimado

$$|R_n| \le M_n\frac{|h|^n}{n!},$$

donde M_n es una cota para el valor absoluto de la n-ésima derivada de f entre a y $a+h$.

En las secciones siguientes damos varios ejemplos. A menudo tomamos $a = 0$, de modo que tenemos

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)}$$

con el estimado

$$|R_n(x)| \le M_n\frac{|x|^n}{n!}$$

si M_n es una cota para la n-ésima derivada de f entre 0 y x.

Esto significa que hemos expresado $f(x)$ en términos de un polinomio y un término residuo. Como ya dijimos, el polinomio

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n,$$

donde

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

se llama **polinomio de Taylor de grado** $\leq n$ de $f(x)$. Llamamos a c_k el k-ésimo **coeficiente de Taylor** de f. Estos polinomios se calcularán explícitamente para todas las funciones elementales en las secciones siguientes.

En esencia, un polinomio es la función que se maneja con mayor facilidad. Así, es útil que podamos probar que los polinomios de Taylor dan aproximaciones a la función dada. Para que así suceda, tenemos que estimar el residuo, y ver si es cierto en el caso de las funciones elementales que el residuo R_n tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Esto significa que el polinomio de Taylor $P_n(x)$ tiende a $f(x)$ cuando $n \to \infty$, y obtenemos entonces la aproximación polinomial deseada.

XIII, §3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ y tomemos $a = 0$ en la fórmula de Taylor. Ya mencionamos cuáles son las derivadas de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Así,

$$f(0) = 0, \qquad f^{(2)}(0) = 0,$$
$$f'(0) = 1, \qquad f^{(3)}(0) = -1.$$

La fórmula de Taylor para $\operatorname{sen} x$ es entonces como sigue:

$$\boxed{\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m+1}(x).}$$

Vemos que todos los términos pares son 0 porque $\operatorname{sen} 0 = 0$.

Podemos estimar $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ de manera muy sencilla, pues

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 \qquad \text{y} \qquad |\cos x| \leq 1$$

para todo x. En el teorema 2.2 tomamos la cota $M_n = 1$, esto es

$$|f^{(n)}(c)| \leq 1$$

para todo n, y

$$\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!}.}$$

Así, si observamos todos los valores de x tales que $|x| \leq 1$, vemos que $R_n(x)$ tiende a 0 cuando n se vuelve muy grande.

Ejemplo 1. Calcular sen(0.1) con 3 decimales.

Aquí tenemos $x = 0.1$. Queremos hallar n tal que

$$\frac{|x|^n}{n!} \leq 10^{-3}.$$

Por inspección vemos que funcionará $n = 3$. En efecto, tenemos que

$$|R_3(0.1)| \leq \frac{(0.1)^3}{3!} = \frac{10^{-3}}{6}.$$

Dicho término de error nos colocaría en el margen de precisión requerido, por lo que basta usar la fórmula de Taylor

$$\operatorname{sen} x = x + R_3(x).$$

Hallamos

$$\operatorname{sen}(0.1) = 0.100 + E,$$

con el término de error $E = R_3(0.1)$, tal que $|E| \leq \frac{1}{6}10^{-3}$. Con esto vemos cuán eficiente es la fórmula para calcular el seno de valores pequeños de x.

Definición. Diremos que una expresión tiene el **valor** A **con una precisión de** 10^{-n} si la expresión es igual a $A + E$ con un término de error E tal que

$$|E| \leq 10^{-n}.$$

En el ejemplo precedente podemos decir que sen(0.1) tiene el valor 0.1 con una precisión de 10^{-3}.

Advertencia. No debe escribirse $\operatorname{sen}(0.1) = 0.1$. **Esto es falso**. Es necesario escribir siempre el error, esto es, escribir

$$\operatorname{sen}(0.1) = 0.1 + E,$$

y dar un estimado para $|E|$.

Ejemplo 2. Calculemos el seno de $10°$ con una precisión de 10^{-3}. Primero debemos convertir grados en radianes, y tenemos

$$10° = 10\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18}\text{radianes}.$$

Ahora tenemos que calcular $\operatorname{sen}(\pi/18)$. Suponemos que π es aproximadamente 3.14159... y, en particular, $\pi < 3.2$. Esto se mostrará después. Entonces

$$\frac{\pi}{18} < \frac{1}{5}.$$

Tenemos que expresar $\operatorname{sen}(\pi/18)$ con el polinomio de Taylor de algún grado y un residuo que deberá estimarse. Esto requiere ir corrigiendo repetidos intentos. Se deberá experimentar con varias posibilidades. Aquí damos en seguida una que funciona. Tenemos

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18}\right) = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + R_5\left(\frac{\pi}{18}\right).$$

Si conocemos π con la precisión adecuada, podremos calcular los dos primeros términos con cualquier precisión deseada, mediante sencillas operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división. Tenemos entonces que estimar $R_5(\pi/18)$ para saber si está dentro de la precisión deseada. Tenemos

$$\left|R_5\left(\frac{\pi}{18}\right)\right| \le \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < \frac{1}{120}\left(\frac{1}{5}\right)^5 < \frac{1}{3}\times 10^{-5}$$

mediante aritmética sencilla. Por lo tanto, los dos primeros términos

$$\frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3$$

dan una **aproximación de** seno de $10°$ **con una precisión** de 10^{-5}, que es mejor que la que queríamos originalmente. Tratemos ahora de ver la calidad de la aproximación que se obtendría usando un solo término:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18}\right) = \frac{\pi}{18} + R_3\left(\frac{\pi}{18}\right).$$

Ejemplo 3. Calcular $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+0.2\right)$ con una precisión de 10^{-4}.

En este caso usamos la fórmula de Taylor para $f(a+h)$. Tomamos

$$a = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad h = 0.2.$$

Corrigiendo repetidos intentos, y adivinando, lo intentamos con el residuo R_4. Así,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+h) &= \operatorname{sen} a + \cos(a)\frac{h}{1} - \operatorname{sen}(a)\frac{h^2}{2!} - \cos(a)\frac{h^3}{3!} + R_4\\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(0.2) - \frac{1}{2}\frac{(0.2)^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(0.2)^3}{6} + R_4.\end{aligned}$$

Para R_4 tenemos el estimado

$$|R_4| \le \frac{(0.2)^4}{4!} = \frac{16\cdot 10^{-4}}{24} \le 10^{-4}$$

que está dentro de las cotas requeridas de precisión.

Convención. En los ejemplos 2 y 3 dejamos la respuesta como una suma de unos cuantos términos más un error que estimamos. *No se necesita realizar la expansión decimal de los primeros cuatro términos.* Sin embargo, quien tenga una calculadora de bolsillo podrá efectuar los cálculos y obtener una respuesta decimal. Para esto la máquina viene siendo mejor que el cerebro, pero el cerebro fue mejor para estimar el residuo.

Es cierto aún que el término residuo de la fórmula de Taylor para $\operatorname{sen} x$ tiende a 0 cuando n se vuelve grande, aun cuando x sea > 1. Para esto necesitamos investigar $x^n/n!$ cuando x es > 1. La dificultad es que, cuando $x > 1$, entonces x^n se vuelve grande cuando $n \to \infty$, y también $n! \to \infty$ cuando $n \to \infty$. En estas condiciones, el numerador y el denominador pelean entre ellos y debemos determinar quién gana. Trabajemos con un ejemplo, para tener una idea de lo que sucede. Tomemos $x = 2$. ¿Qué sucede con la fracción $2^n/n!$ cuando $n \to \infty$? Primero se hace una tabla:

n	1	2	3	4	5
$\frac{2^n}{n!}$	2	2	$\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$	$\frac{16}{24}=\frac{1}{2}$	$\frac{32}{120}=\frac{4}{15}$

De donde deberá deducirse experimentalmente que

$$\frac{2^n}{n!} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Así, *adivinamos* la respuesta experimentando numéricamente. A continuación, nuestra tarea es *probar* el resultado general.

Teorema 3.1. *Sea c cualquier número. Entonces $c^n/n!$ tiende a 0 cuando n se vuelve muy grande.*

Demostración. Podemos suponer que $c > 0$. Sea n_0 un entero tal que $n_0 > 2c$. Así, $c < n_0/2$, y $c/n_0 < \frac{1}{2}$. Escribimos

$$\begin{aligned}\frac{c^n}{n!} &= \frac{c\cdot c\cdots c}{1\cdot 2\cdots n_0}\frac{c}{(n_0+1)}\frac{c}{(n_0+2)}\cdots\frac{c}{n}\\ &\le \frac{c^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{c^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.\end{aligned}$$

Cuando n se vuelve grande, $(1/2)^{n-n_0}$ se vuelve pequeño y nuestra fracción tiende a 0. Tomando, por ejemplo, $c = 10$, escribimos

$$\frac{10^n}{n!} = \frac{10\cdots 10}{1\cdot 2\cdots 20}\frac{(10)\cdots(10)}{(21)\cdots(n)} < \frac{10^{20}}{20!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-20}$$

y $(1/2)^{n-20}$ tiende a 0 cuando n se vuelve grande.

Del teorema vemos que el residuo

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^n}{n!}$$

tiende a 0 cuando n se vuelve grande.

A veces una integral definida no se puede evaluar a partir de una integral indefinida, pero podemos hallar aproximaciones sencillas usando la expansión de Taylor.

En el ejemplo siguiente, y en ejercicios, usaremos con frecuencia el estimado para una integral dada en los teoremas 3.2 y 3.3 del capítulo X, esto es: Sea $a < b$ y sea f continua en $[a,b]$. Sea M un número tal que $|f(x)| \leq M$ para todo x en el intervalo. Entonces

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq M(b-a).$$

Ron Infante me dice que los cálculos numéricos de integrales como la del ejemplo siguiente ocurren con frecuencia en el estudio de redes de comunicación, en relación con ondas cuadradas.

Ejemplo 4. Calcular hasta dos decimales la integral

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$$

Tenemos

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + R_5(x) \qquad \text{y} \qquad |R_5(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{R_5(x)}{x} \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{R_5(x)}{x}\right| \leq \frac{|x|^4}{5!}.$$

Por lo cual

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!}\Big|_0^1 + E, \qquad \text{donde} \qquad E = \int_0^1 \frac{R_5(x)}{x}\,dx.$$

El término de error E satisface

$$|E| \leq \int_0^1 \left|\frac{R_5(x)}{x}\right| dx \leq \int_0^1 \frac{x^4}{5!}\,dx = \frac{x^5}{5\cdot 5!}\Big|_0^1 = \frac{1}{600}.$$

Más aún,

$$x - \frac{x^3}{3\cdot 3!}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{17}{18} + E, \qquad \text{donde} \qquad |E| \leq \frac{1}{600}.$$

Ejemplo 5. Calculemos

$$I = \int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx.$$

Hacemos $u = x^2$. Entonces

$$\operatorname{sen} u = u - \frac{u^3}{3!} + R_5(u).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!}\right) dx + \int_0^1 R_5(x^2)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 6}\right]_0^1 + E \\ &= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{42} + E, \end{aligned}$$

donde

$$E = \int_0^1 R_5(x^2)\,dx.$$

Sabemos que

$$|R_5(u)| \leq \frac{|u|^5}{5!}.$$

Como $u = x^2$, hallamos

$$|E| \leq \int_0^1 \frac{x^{10}}{5!}\,dx = \frac{1}{11\cdot 120} < 10^{-3}.$$

Por consiguiente,

$$I = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{42} + E, \qquad \text{con} \qquad |E| < 10^{-3}.$$

Observación. Aunque la *notación* del ejemplo anterior es *parecida* a la integración por sustitución, se deberá insistir en que el procedimiento que se siguió *no* es lo que previamente llamamos integración por sustitución.

Hemos estudiado el seno. El coseno se puede estudiar de la misma manera. Tenemos la fórmula de Taylor

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+2}(x)}$$

y

$$|R_{2m+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

Observen que sólo los términos pares aparecen con coeficientes distintos de cero. En la fórmula del seno aparecen únicamente los términos impares porque las derivadas de orden impar del coseno son iguales a 0 en 0, y las derivadas de orden par del seno son iguales a 0 en 0.

Ejemplo 6. Suponer que queremos hallar el valor de

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x}\,dx,$$

hasta 2 decimales. Escribimos

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_4(x).$$

Entonces

$$\frac{\cos x - 1}{x} = -\frac{x}{2} + \frac{R_4(x)}{x},$$

y para $0 \le x \le 1$,

$$\left|\frac{R_4(x)}{x}\right| \le \frac{x^4}{4!x} = \frac{x^3}{4!}.$$

Obtenemos

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x}\,dx = -\int_0^1 \frac{x}{2}\,dx + E, \qquad \text{donde} \qquad E = \int_0^1 \frac{R_4(x)}{x}\,dx.$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + E$$

$$= -\tfrac{1}{4} + E.$$

Estimamos E:

$$|E| \le \int_0^1 \frac{x^3}{4!}\,dx = \frac{1}{24}\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{96}.$$

Fallamos con el estimado deseado por sólo unos cuantos puntos de porcentaje. Esto significa que, para obtener la precisión deseada, se debe usar un término más del polinomio de Taylor de $\cos x$, de modo que se escribe

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_6(x)$$

y

$$\frac{\cos x - 1}{x} = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{4!} + \frac{R_6(x)}{x}.$$

Entonces

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x}\,dx = \int_0^1 \left[-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{4!}\right] dx + E,$$

donde

$$E = \int_0^1 \frac{R_6(x)}{x}\,dx.$$

Ahora usamos el estimado

$$\left|\frac{R_6(x)}{x}\right| \le \frac{x^6}{6!x} = \frac{x^5}{6!},$$

y

$$|E| \le \int_0^1 \frac{x^5}{6!}\,dx = \frac{1}{720}\frac{1}{6}.$$

Así, el error satisface $|E| < 10^{-3}$, y

$$\int_0^1 \left[-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{4!}\right] dx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{96}.$$

Esto da el valor deseado con una precisión de tres decimales.

Advertencia. La integral definida del ejemplo anterior **no puede escribirse como una suma**

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\cos x}{x}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx.$$

Aunque es cierto que la integral de una suma es la suma de las integrales, esto es cierto sólo cuando las integrales tienen sentido. La integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

no tiene sentido. Primero, la función $1/x$ no es continua en el intervalo $0 \le x \le 1$ y colapsa cuando x tiende a cero. Aun si queremos interpretar esto como un valor límite,

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{h\to 0}\int_h^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{h\to 0}(\log 1 - \log h),$$

el límite no existe porque $\log h$ se vuelve negativo grande cuando h tiende a 0. De modo que no podemos separar la integral deseada en una suma.

Además, se puede mostrar que **no existe una expresión sencilla que dé una integral indefinida**

$$\int \frac{\cos x - 1}{x}\,dx = F(x),$$

con una función $F(x)$ expresable en términos de funciones elementales. Por otro lado, como hemos visto, podemos evaluar perfectamente bien la integral definida, con cualquier precisión.

XIII, §3. EJERCICIOS

A menos que se especifique otra cosa, tomar la fórmula de Taylor con $a = 0$ y $b = x$.

En todos los cálculos, *incluir* un estimado del término residuo (error), que muestre que la respuesta dada está dentro de la precisión deseada.

1. Escribir el polinomio de Taylor de grado 4 para $\cos x$. Probar la fórmula de Taylor enunciada en el texto para $\cos x$.
2. Dar los detalles para el estimado $|R_{2m+2}(x)| \le |x|^{2m+2}/(2m+2)!$ para la función $f(x) = \cos x$.
3. Calcular $\cos(0.1)$ hasta 3 decimales.
4. Estimar el residuo R_3 en la fórmula de Taylor para $\cos x$, para el valor $x = 0.1$.
5. Estimar el residuo R_4 en la fórmula de Taylor para $\operatorname{sen} x$, para el valor $x = 0.2$.
6. Escribir el polinomio de Taylor de grado 4 para $\tan x$.
7. Estimar el residuo R_5 en la fórmula de Taylor para $\tan x$, para $0 \le x \le 0.2$.

En los ejercicios 8, 9, 10 y 11, la fórmula de Taylor se usa con $a \neq 0$.

8. Calcular los siguientes valores hasta 3 lugares decimales.
(a) sen 31° (b) cos 31° (c) sen 47°
(d) cos 47° (e) sen 32° (f) cos 32°
9. Calcular el coseno de 31 grados hasta 3 decimales.
10. Calcular el seno de 61 grados hasta 3 decimales.
11. Calcular el coseno de 61 grados hasta 3 decimales.
12. Calcular las integrales siguientes hasta tres decimales.

(a) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ (b) $\int_0^{0.1} \frac{\cos x - 1}{x}\,dx$

(c) $\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$ (d) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}\,dx$

(e) $\int_0^1 \cos x^2\,dx$ (f) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\,dx$

13. Calcular
$$\int_0^{1/2} \frac{\cos x - 1}{x}\,dx$$
hasta 5 decimales.

XIII, §4. FUNCIÓN EXPONENCIAL

Todas las derivadas de e^x son iguales a e^x y $e^0 = 1$. Por lo tanto, la fórmula de Taylor para e^x es

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x).}$$

El término residuo satisface

$$\boxed{R_n(x) = e^c\frac{x^n}{n!},}$$

donde c es un número entre 0 y x. Por lo tanto,

$$\boxed{|R_n(x)| \le e^c\frac{|x|^n}{n!}.}$$

Nótese que e^c siempre es positivo, y

$$\text{si } x < 0, \quad \text{entonces} \quad c < 0 \quad \text{y} \quad 0 < e^c < 1.$$

Como con la función seno, el teorema 3.1 muestra que el término residuo tiende a 0 cuando n se vuelve grande.

Ejemplo 1. Calcular e con 3 decimales.

Tenemos $e = e^1$. Del capítulo VIII, sección §6, sabemos que $e < 4$. Estimamos R_7:

$$|R_7| \le e\frac{1}{7!} \le 4\frac{1}{5040} < 10^{-3}.$$

Así

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6!} + R_7$$
$$= 2.718\ldots$$

Claro que, mientras más pequeño sea x, se necesitarán menos términos de la serie de Taylor para aproximar e^x.

Observación. En el capítulo VIII obtuvimos el estimado ingenuo $e < 4$. Ahora tenemos una evaluación mucho más fina, que muestra en particular que $e < 3$. Así, usando un estimado burdo y la fórmula de Taylor podemos obtener una determinación precisa de e. Incluso si hubiéramos comenzado sabiendo que $e < 3$ (podríamos haberlo obtenido mediante un estimado similar al del capítulo VIII), no hubiera ayudado gran cosa para obtener un valor más preciso.

Ejemplo 2. ¿Cuántos términos de la fórmula de Taylor se necesitan para calcular $e^{1/10}$ con una precisión de 10^{-3}?

Ciertamente tenemos $e^{1/10} < 2$. Así

$$|R_3(1/10)| \le 2\frac{(1/10)^3}{3!} < \frac{1}{2}10^{-3}.$$

Por lo tanto, necesitamos sólo 3 términos (incluido el término 0-ésimo).

XIII, §4. EJERCICIOS

En los ejercicios, cuando se pida calcular una cantidad con cierto grado de precisión, mostrar siempre el estimado obtenido del término de error para probar que se logra la precisión deseada.

1. Escribir el polinomio de Taylor de grado 5 para e^{-x}.
2. Estimar el residuo R_3 en la fórmula de Taylor para e^x si $x = 1/2$.
3. Estimar el residuo R_4 para $x = 10^{-2}$.
4. Estimar el residuo R_3 para $x = 10^{-2}$.
5. Calcular e hasta cuatro decimales, después hasta cinco decimales y después hasta seis decimales. En cada caso, escribir e como una suma de fracciones más un término residuo y estimar el término residuo.[Este ejercicio trata de dar una idea práctica del tamaño de los términos residuo, y de cuántos se necesitan para obtener la precisión deseada. Se puede calcular la suma de las fracciones con una calculadora de bolsillo.]

6. Calcular $1/e$ hasta 3 decimales, y mostrar el residuo que daría una precisión de 10^{-3}.
7. Estimar el residuo R_4 en la fórmula de Taylor para e^x cuando
   (a) $x = 2$. (b) $x = 3$.
8. Estimar el residuo R_5 en la fórmula de Taylor para e^x cuando
   (a) $x = 2$. (b) $x = 3$.
9. ¿Cuántos términos de la fórmula de Taylor para e^x se necesitarían para calcular e^2 hasta
   (a) 4 decimales? (b) 6 decimales?
10. Calcular e hasta 10 decimales. Primero darlo como suma de números racionales. Después usar alguna máquina calculadora para obtener los decimales. Mostrar el estimado del término de error.
11. Calcular $1/e^2$ hasta 4 decimales.
12. Calcular las integrales siguientes hasta 3 o 4 decimales, dependiendo de cuánto se quieran esforzar.
   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx$
   (d) $\displaystyle\int_0^{0.1} e^{x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{0.1} e^{-x^2}\,dx$

XIII, §5. EL LOGARITMO

Queremos obtener una fórmula de Taylor para el log. No podemos manejar el log escribiendo simplemente

$$\log x = \log 0 + \log'(0)x + \cdots$$

porque no está definido $\log 0$. Así, para el log, es mejor obtener una fórmula con $a = 1$, de modo que

$$\log b = \log 1 + \log'(1)(b-1) + \log''(1)\frac{(b-1)^2}{2!} + \cdots.$$

La experiencia muestra que entonces es más conveniente hacer

$$b = 1 + x$$

de modo que $b - 1 = x$. De esa manera obtenemos una fórmula de Taylor

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots.$$

Dejamos como ejercicio (vean el ejercicio de la sección §1) deducir esta fórmula de la manera usual, calculando las derivadas $f^{(k)}(0)$, donde $f(x) = \log(1+x)$.

Aquí obtendremos el resultado por otro método, que también será aplicable en la siguiente sección y que, en algunos aspectos, es más eficiente y hace que la serie para el log sea fácil de recordar.

Deberían conocer desde el bachillerato la serie geométrica

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots.$$

Más adelante la deduciremos de nuevo, pero por el momento trabajaremos formalmente y no nos preocuparemos acerca del significado de la suma infinita. Al reemplazar u por $-x$ obtenemos

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots.$$

Al integrar el lado izquierdo y el lado derecho término a término, de nuevo sin preocuparnos lo que significa la suma infinita, obtenemos

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Vemos que en el lado derecho los signos se alternan y que tenemos sólo n en el denominador de x^n/n en lugar de $n!$, como sucede para $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y e^x.

Ahora debemos empezar de nuevo para deducir la fórmula con un término residuo que nos permita estimar valores para el log. Además, como $\log 0$ no está definido, tendremos que tomar x en algún intervalo de números > -1. Resulta que la fórmula de Taylor dará valores para la función sólo en el intervalo

$$-1 < x \leq 1.$$

Esto contrasta con $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y e^x, donde obtuvimos valores para todo x.

Sea u cualquier número $\neq 1$. Deseamos justificar la serie

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots.$$

No se preocupen por ahora acerca del significado de la suma infinita de la derecha: se usará formalmente. Si se multiplican los términos cruzados se obtiene

$$\begin{aligned}(1-u)(1+u+u^2+u^3+\cdots) &= 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots \\ &\qquad - u - u^2 - u^3 - \cdots \\ &= 1.\end{aligned}$$

De modo que hemos justificado formalmente la serie geométrica.

A continuación nos ocupamos de la suma infinita. No sabemos cómo sumar una infinidad de números, de modo que enunciaremos una relación análoga a la anterior pero con un número finito de términos. Esto se basa en la fórmula

$$\frac{1-u^n}{1-u} = 1 + u + \cdots + u^{n-1}$$

para cualquier entero $n > 1$. La demostración se obtiene de nuevo multiplicando términos cruzados:

$$\begin{aligned}(1-u)(1+u+u^2+\cdots+u^{n-1}) &= 1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1} \\ &\qquad - u - u^2 - \cdots - u^{n-1} - u^n \\ &= 1 - u^n.\end{aligned}$$

Como

$$\frac{1-u^n}{1-u} = \frac{1}{1-u} - \frac{u^n}{1-u},$$

hallamos finalmente

$$\boxed{\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1} + \frac{u^n}{1-u}.}$$

Queremos aplicar esta fórmula con el fin de obtener una expresión para $1/(1+t)$, porque por último queremos obtener una expresión para

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt.$$

Sustituimos $u = -t$ y hallamos

$$\boxed{\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n\frac{t^n}{1+t}.}$$

Consideremos el intervalo $-1 < x \le 1$, y tomemos la integral de 0 a x (en este intervalo). Son bien conocidas las integrales de las potencias de t. La integral

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \log(1+x)$$

se calcula mediante la sustitución $u = 1+t$, $du = dt$. Así obtenemos:

Teorema 5.1. *Para $-1 < x \le 1$, tenemos*

$$\boxed{\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)}$$

donde el residuo $R_{n+1}(x)$ es la integral

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt.$$

Observen que fue esencial que $x > -1$ porque la expresión $1/(1+t)$ no tiene significado cuando $t = -1$. La fórmula anterior también vale para $x > 1$. Sin embargo, veremos que el término residuo tiende a 0 sólo cuando x está en el intervalo mencionado.

Caso 1. $0 < x \le 1$.

En ese caso, $1+t \ge 1$. Así,

$$\frac{t^n}{1+t} \le t^n,$$

y nuestra integral está acotada por $\int_0^x t^n\,dt$. Así, en ese caso,

$$\boxed{|R_{n+1}(x)| \le \int_0^x t^n\,dt \le \frac{x^{n+1}}{n+1}.}$$

En particular, el residuo tiende a 0 cuando n se vuelve grande.

Observación. En las aplicaciones usaremos un recurso que nos permita tratar sólo con el caso 1. *Así que, si lo desean, pueden omitir el caso 2.*

Caso 2. $-1 < x < 0$.

En este caso t está entre 0 y x y es negativo, pero aún tenemos

$$x \le t \le 0,$$

y $0 < 1+x < 1+t$. Por lo tanto,

$$\left|\frac{t^n}{1+t}\right| = \frac{|t|^n}{1+t} \le \frac{(-t)^n}{1+x}.$$

Para estimar el valor absoluto de la integral podemos invertir los límites (hacemos esto porque $x \le 0$), y así

$$|R_{n+1}(x)| \le \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+x}\,dt$$

de modo que

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1+x)} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)}.$$

Por lo tanto, el residuo también tiende a 0 en ese caso. Pero cuando x es negativo y $-1 < x < 0$, entonces $1+x < 1$ y no podemos estimar $1/(1+x)$ de la misma manera que en el caso 1, porque **no tenemos** $1/(1+x) \le 1$. Como se ve, el caso 2 es desagradable y ésa es la razón por la cual lo evitamos.

Ejemplo. Calculemos $\log 2$ hasta 3 decimales. Sabemos que $\log(1+x)$ se puede calcular de manera eficiente sólo cuando x está cerca de 0. Pero $2 = 1+1$. Tenemos que usar algún recurso auxiliar que nos evite sustituir $x = 1$ en la fórmula. Para ello escribimos

$$2 = \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{3}{2}.$$

Entonces

$$\tfrac{4}{3} = 1 + \tfrac{1}{3} \quad \text{y} \quad \tfrac{3}{2} = 1 + \tfrac{1}{2}.$$

Al usar $x = \frac{1}{3}$ y $x = \frac{1}{2}$ lograremos lo que queremos. En efecto,

$$\log 2 = \log(\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{3}{2}) = \log(1+\tfrac{1}{3}) + \log(1+\tfrac{1}{2}).$$

Para hallar $\log(1+\frac{1}{3})$ usamos $x = \frac{1}{3}$ y

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + R_6(x).$$

Por el estimado del caso 1, obtenemos

$$|R_6(\tfrac{1}{3})| \le \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{3})^6 \le \tfrac{1}{4}\times 10^{-3}.$$

Por lo tanto,

$$\log\frac{4}{3} = \log\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{(1/3)^2}{2} + \frac{(1/3)^3}{3} - \frac{(1/3)^4}{4} + \frac{(1/3)^5}{5} + E_1$$
$$= A_1 + E_1$$

con
$$E_1 = R_6(\tfrac{1}{3}) \quad \text{y} \quad |E_1| \le \tfrac{1}{4} \times 10^{-3}.$$
Del mismo modo obtenemos $\log \frac{3}{2}$:
$$\log \frac{3}{2} = \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^2}{2} + \cdots + \frac{(1/2)^7}{7} + E_2$$
$$= A_2 + E_2$$
con el término de error $E_2 = R_8(1/2)$. Tenemos el estimado
$$|E_2| = |R_8(\tfrac{1}{2})| \le \tfrac{1}{2} \times 10^{-3}.$$
Por lo tanto,
$$\log 2 = \log(1 + \tfrac{1}{2}) + \log(1 + \tfrac{1}{3})$$
$$= A_1 + A_2 + E_1 + E_2,$$
donde A_1 y A_2 son expresiones sencillas que se pueden calcular a partir de las fracciones usando suma, multiplicación y resta, y el término de error es $E = E_1 + E_2$. Podemos ahora estimar E, a saber
$$|E| \le |E_1| + |E_2| \le \tfrac{1}{4} \times 10^{-3} + \tfrac{1}{2} \times 10^{-3} < 10^{-3}.$$
Esto está dentro de la precisión deseada. Si tienen una pequeña calculadora de bolsillo, pueden evaluar fácilmente un decimal numérico para $\log 2$.

En el cálculo anterior, aún necesitamos seis u ocho términos en la expresión polinomial que aproxima el logaritmo para obtener los tres decimales de precisión. En el ejercicio 2, siguiendo la misma idea general, verán cómo obtener respuestas precisas usando menos términos.

Ejemplo. Suponer que queremos calcular $\log \frac{3}{4}$ hasta 3 decimales. Nótese que $\frac{3}{4} < 1$, y, si tratamos de evaluar
$$\log \tfrac{3}{4} = \log(1 - \tfrac{1}{4}),$$
entonces tendríamos que usar el caso 2. Esto se puede evitar usando la regla general
$$\log \frac{1}{a} = -\log a$$
para cualquier número positivo a. En particular,
$$\log \tfrac{3}{4} = -\log \tfrac{4}{3}$$
$$= -\frac{1}{3} + \frac{(1/3)^2}{2} + \frac{(1/3)^3}{3} - \frac{(1/3)^4}{4} + \frac{(1/3)^5}{5} - E,$$
y
$$|-E| = |E| \le \tfrac{1}{4} \times 10^{-3}.$$

Ejemplo. Calcular $\log 1.1$ hasta tres decimales.

Para hacerlo, i.e. para calcular $\log(1 + 0.1)$, tomamos $n = 2$ y $x = 0.1$ en el caso 1. Hallamos que
$$|R_3(x)| \le \tfrac{1}{3} \times 10^{-3}.$$
Por lo tanto,
$$\log(1.1) = 0.1 - 0.005 + E$$
con un error E tal que $|E| \le \frac{1}{3} \times 10^{-3}$.

XIII, §5. EJERCICIOS

1. Calcular los valores siguientes hasta una precisión de 10^{-3}, estimando el residuo cada vez.
   (a) $\log 1.2$ (b) $\log 0.9$ (c) $\log 1.05$
   (d) $\log \frac{9}{10}$ (e) $\log \frac{24}{25}$ (f) $\log \frac{26}{25}$
2. (a) Verificar las fórmulas siguientes:
$$\log 2 = 7\log \tfrac{10}{9} - 2\log \tfrac{25}{24} + 3\log \tfrac{81}{80},$$
$$\log 3 = 11\log \tfrac{10}{9} - 3\log \tfrac{25}{24} + 5\log \tfrac{81}{80}.$$
   (b) Calcular $\log 2$ y $\log 3$ hasta cinco decimales, usando estas fórmulas.

Quizá se pregunten de dónde salieron estas fórmulas. La respuesta es que alguien inteligente, probablemente hace más de 200 años, las halló experimentando con números, y después todo el mundo las copió.

XIII, §6. EL ARCOTANGENTE

Procedemos como con el logaritmo, excepto que ponemos $u = -t^2$ en la serie geométrica, y obtenemos
$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^{m-1}t^{2m-2} + (-1)^m \frac{t^m}{1+t^2}.$$
Después de la integración de 0 a cualquier número x, obtenemos:

Teorema 6.1. *El* arctan *tiene una expansión*
$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + R_{2m+1}(x),}$$
donde
$$R_{2m+1}(x) = (-1)^m \int_0^x \frac{t^{2m}}{1+t^2}\,dt,$$
y
$$\boxed{|R_{2m+1}(x)| \le \int_0^{|x|} t^{2m}\,dt \le \frac{|x|^{2m+1}}{2m+1}.}$$

Cuando $-1 \leq x \leq 1$, *el residuo tiende a* 0 *cuando* n *se vuelve grande.*

Obsérvese cómo sólo aparecen potencias impares de x en la fórmula de Taylor para $\arctan x$. Ésta es la razón para escribir $2m+1$, o R_{2m+1}. Si ponemos $n = 2m+1$, entonces podemos escribir el estimado para el residuo en la forma

$$\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n}.}$$

Este estimado es el mismo que para el log, excepto que para el arctan tomamos sólo enteros impares n.

Observación. Si x no está en el intervalo prescrito, i.e. si $|x| > 1$, entonces el término residuo no tiende a 0 cuando n se vuelve grande. Por ejemplo, si $x = 2$, entonces el término residuo está acotado por

$$\frac{2^{2m+1}}{2m+1}.$$

Al calcular unos cuantos valores con $m = 1, 2, 3, \ldots$ verán que esta expresión se hace grande muy rápido. Quizá sepan esto de su estudio de la función exponencial.

A partir de nuestro teorema, obtenemos una bella expresión para $\pi/4$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

de la fórmula de Taylor para $\arctan 1$. Sin embargo, se necesitan muchos términos para obtener una buena aproximación para $\pi/4$ usando esta expresión. Hablando burdamente, con 1000 términos se puede obtener apenas una precisión de 10^3, lo cual es muy ineficiente. Si usamos un enfoque más inteligente podemos hallar π con mucho mayor rapidez, como sigue. Primero tenemos:

Fórmula de la suma para la tangente:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

Demostración. Usando las fórmulas de la suma para el seno y el coseno demostradas en el capítulo 4, teorema 3.1, tenemos

$$\tan(x+y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}.$$

Ahora dividimos el numerador y el denominador de la derecha entre $\cos x \cos y$. La fórmula deseada cae por su propio peso.

En la fórmula de la suma para la tangente, poner $u = \tan x$ y $v = \tan y$, de modo que $x = \arctan u$ y $y = \arctan v$. Como

$$\arctan(\tan(x+y)) = x + y = \arctan u + \arctan v,$$

obtenemos la **fórmula de la suma para el arcotangente:**

$$\boxed{\arctan u + \arctan v = \arctan \frac{u+v}{1-uv}.}$$

Ejemplo. Considerar los valores especiales $u = 1/2$ y $v = 1/3$. Mediante aritmética sencilla obtenemos, para estos valores,

$$\frac{u+v}{1-uv} = \frac{1/2+1/3}{1-1/6} = 1.$$

Como $\arctan 1 = \pi/4$, obtenemos la fórmula:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}.}$$

A continuación usamos la fórmula de Taylor para el arctan,

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + R_5(x)$$

con

$$|R_5(x)| \leq \frac{|x|^5}{5}.$$

Entonces obtenemos

(1) $$\arctan \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + R_5\left(\frac{1}{2}\right)$$

y

$$|R_5(\tfrac{1}{2})| \leq \tfrac{1}{160}.$$

Esto no es excepcionalmente bueno, pero muestra que con sólo dos términos del polinomio que aproxima $\arctan x$ obtenemos alrededor de 2 decimales de precisión. Al usar un par más de términos deberán obtenerse 4 decimales.

De manera análoga obtenemos

(2) $$\arctan \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{(1/3)^3}{3} + R_5\left(\frac{1}{3}\right)$$

y

$$\left|R_5\left(\frac{1}{3}\right)\right| \leq \frac{(1/3)^5}{5} \leq \frac{1}{2025} < \frac{1}{2} \times 10^{-3}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^4} + E = A + E,$$

donde $E = R_5(\frac{1}{2}) + R_5(\frac{1}{3})$, y

$$|E| \leq |R_5(\tfrac{1}{2})| + |R_5(\tfrac{1}{3})| < 10^{-2}.$$

La expresión A es una suma de fracciones que se puede calcular fácilmente con una calculadora de bolsillo. Entonces

$$\pi = 4(\arctan \tfrac{1}{2} + \arctan \tfrac{1}{3}) = 4A + 4E,$$

donde

$$|4E| < 4 \times 10^{-2}.$$

Nótese que este factor final de 4 hace que el estimado del término de error sea algo más complicado. Por ello, al determinar los residuos que se deben tomar, hay que asegurarse de que en el paso final, al multiplicar por 4, la precisión esté dentro de las cotas deseadas. Conviene experimentar con R_7 y R_9 para tener buena idea del tamaño de estos residuos.

XIII, §6. EJERCICIOS

1. Probar las fórmulas:

$$2\arctan u = \arctan \frac{2u}{1-u^2} \quad \text{y} \quad 3\arctan u = \arctan \frac{3u-u^3}{1-3u^2}.$$

2. Probar:
   (a) $\arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$
   (b) $\arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$
   (c) $\pi/4 = 2\arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{7} + 2\arctan \frac{1}{8}$

3. Hallar varias aproximaciones decimales para π estimando $R_3(x)$, $R_5(x)$, $R_7(x)$ y $R_9(x)$ en la fórmula de Taylor para el arcotangente y usando la expresión

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3},$$

así como la expresión (c) del ejercicio 2. Por último, verificar que

$$\pi = 3.14159\ldots$$

con una precisión de 5 decimales.

4. Probar la fórmula $\pi/4 = 4\arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$. ¿Cuántos términos de la fórmula de Taylor se necesitan para obtener la precisión anterior para una aproximación decimal de π?

XIII, §7. LA EXPANSIÓN BINOMIAL

En la secundaria debieron haber aprendido el desarrollo de $(a+b)^n$ o $(1+x)^n$. Por ejemplo,

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2,$$
$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3,$$
$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Usando sólo álgebra se pueden determinar los coeficientes para la expansión de $(1+x)^n$ cuando n es un entero positivo. Sin embargo, aquí estaremos interesados

además en potencias $(1+x)^s$ cuando s no es un entero positivo. Para esto usaremos el método general de la fórmula de Taylor que dice:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Aplicamos esta fórmula a la función

$$f(x) = (1+x)^s.$$

Teorema 7.1. *Sea n un entero positivo y $x \neq -1$. Entonces*

$$\boxed{\begin{aligned} (1+x)^s &= 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2!}x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x). \end{aligned}}$$

Demostración. Sea $f(x) = (1+x)^s$. Entonces calculamos las derivadas:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= s(1+x)^{s-1}, & f^{(1)}(0) &= s, \\ f^{(2)}(x) &= s(s-1)(1+x)^{s-2}, & f^{(2)}(0) &= s(s-1), \\ f^{(3)}(x) &= s(s-1)(s-2)(1+x)^{s-3}, & f^{(3)}(0) &= s(s-1)(s-2), \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= s(s-1)\cdots(s-k+1)(1+x)^{s-k}, & f^{(k)}(0) &= s(s-1)\cdots \\ & & &\quad (s-k+1). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}.$$

Por la fórmula general de Taylor, esto prueba la expansión deseada para $(1+x)^s$.

La fórmula general para el término residuo es

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)x^n}{n!}$$

con algún número c entre 0 y x; entonces, en este caso hallamos:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}(1+c)^{s-n}x^n.}$$

Se puede mostrar que, si $-1 < x < 1$, entonces $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Estimaremos el residuo cuando $n = 2$ y $n = 3$. No damos la demostración en general de que $R_n(x)$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

En estos estimados, usamos repetidamente el hecho de que

$$|ab| = |a||b|.$$

Por ejemplo, productos como $s(s-1)(s-2)$ se presentan a menudo en estos estimados. Entonces

$$|s(s-1)(s-2)| = |s||s-1||s-2|.$$

Si $s = \frac{1}{3}$, hallamos que

$$\left|\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{3}-1\right|\left|\frac{1}{3}-2\right| = \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{5}{3} = \frac{10}{27}.$$

Ejemplos que incluyen R_2

Veamos ahora R_2. Sea

$$f(x) = (1+x)^s,$$

donde s no es un entero. Tenemos

$$f^{(2)}(x) = s(s-1)(1+x)^{s-2}.$$

La fórmula de Taylor da

$$\boxed{(1+x)^s = 1 + sx + R_2(x),}$$

donde

$$R_2(x) = f^{(2)}(c)\frac{x^2}{2!}$$

$$= s(s-1)(1+c)^{s-2}\frac{x^2}{2},$$

para algún número c entre 0 y x.

Para x pequeño, esto significa que $1+sx$ deberá ser una buena aproximación para la potencia s de $1+x$ si se puede probar que $R_2(x)$ es pequeño, y esto se puede hacer fácilmente. Vemos que

$$\boxed{|R_2(x)| = \frac{|s(s-1)|}{2}(1+c)^{s-2}|x|^2,}$$

donde c está entre 0 y x. Mediante un estimado fácil se ve, por ejemplo, que $(1+x)^{1/2}$ es aproximadamente igual a $1+\frac{1}{2}x$, y $(1+x)^{1/3}$ es aproximadamente igual a $1+\frac{1}{3}x$, para x pequeño.

Ejemplo 1. Hallar $\sqrt{1.2}$ hasta 2 decimales.
Hacemos $x = 0.2 = 2\times 10^{-1}$ y $s = 1/2$. Entonces

$$1.2 = (1+0.2)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}0.2 + R_2(0.2)$$

$$= 1 + 0.1 + R_2(\tfrac{1}{5}).$$

Debemos estimar $R_2(1/5)$. Como $0 \le c \le 1/5$ y $s - 2 = -3/2$, hallamos

$$(1+c)^{s-2} = \frac{1}{(1+c)^{3/2}} \le 1,$$

pues, cuanto más pequeño sea el denominador, más grande será la fracción. La única información que tenemos sobre c es que $0 \le c \le 1/5$, y el valor más pequeño posible del denominador es cuando $c = 0$. En consecuencia,

$$\left|R_2\left(\frac{1}{5}\right)\right| \le \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}-1\right|\frac{1}{2}(0.2)^2$$

$$\le \frac{1}{8}4\times 10^{-2} = \frac{1}{2}\times 10^{-2}.$$

Entonces el estimado para el término de error está dentro de la precisión adecuada.

Ejemplo 2. Calculemos $\sqrt{0.8}$ hasta 2 decimales.
Usamos $s = 1/2$ y $x = -0.2$. Entonces

$$0.8 = (1-0.2)^{1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}0.2 + R_2(-0.2) = 0.9 + R_2(-0.2).$$

Aquí tenemos $-0.2 \le c \le 0$. Por lo tanto, $1/(1+c)^{3/2} \le 1/(0.8)^{3/2}$, y

$$|R_2(-0.2)| \le \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}-1\right|\frac{1}{2!}\frac{1}{(0.8)^{3/2}}(0.2)^2$$

$$\le \frac{1}{8}\frac{1}{(0.8)^{3/2}}4\times 10^{-2}.$$

La presencia del término $(0.8)^{3/2}$, que es < 1, en el denominador lo hace un poco más complicado de estimar que en el ejemplo anterior, pero aun así no es tan difícil. Sin esforzarnos gran cosa para hacer sencillo el estimado, reemplazamos $3/2$ por 2. Entonces

$$\frac{1}{(0.8)^{3/2}} < \frac{1}{(0.8)^2} = \frac{1}{0.64} < \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Por lo tanto,

$$|R_2(-0.2)| < \frac{1}{8}\frac{5}{3}4\times 10^{-2} < 10^{-2}.$$

Observación. En el ejemplo 1 y el 2 encontramos los casos en que $x > 0$ y $x < 0$. En el estimado para R_2, esto da lugar a dos casos diferentes:

$$\frac{1}{(1+c)^{3/2}} \le 1 \qquad \text{cuando} \quad x > 0 \quad \text{y} \quad 0 \le c \le x;$$

$$\frac{1}{(1+c)^{3/2}} \le \frac{1}{(1+x)^{3/2}} \qquad \text{cuando} \quad x < 0 \quad \text{y} \quad x \le c \le 0.$$

El segundo caso es más molesto de tratar.

En los ejemplos anteriores calculamos raíces de $1+x$ cuando x es pequeño. Para hallar las raíces de un número arbitrario, a menudo podemos usar un truco como en el ejemplo siguiente, a fin de reducir el problema a una raíz $(1+x)^s$ con x pequeño.

Ejemplo 3. Hallar el valor de $\sqrt{26}$ hasta dos decimales.
Para ello escribimos

$$26 = 25 + 1 = 25(1 + \tfrac{1}{25}).$$

Entonces

$$\sqrt{26} = 5(1 + \tfrac{1}{25})^{1/2},$$

y podemos aplicar la fórmula binomial de Taylor para hallar

$$\left(1 + \frac{1}{25}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{50} + R_2(x),$$

con $x = \frac{1}{25}$ y $s = \frac{1}{2}$. Estamos en el caso $c \geq 0$, de modo que obtenemos

$$\left|R_2\left(\frac{1}{25}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25}\right)^2 \leq \frac{1}{8}\frac{1}{625} = \frac{1}{5000}.$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{26} = 5(1 + \tfrac{1}{50}) + 5R_2(\tfrac{1}{25}) = 5.1 + E$$

donde

$$|E| = 5|R_2(\tfrac{1}{25})| \leq 10^{-3}.$$

Observen el factor 5 que aparece en el último paso, y que multiplica el estimado para $R_2(1/25)$. Para obtener la precisión final hasta 10^{-3}, se necesita una precisión de $(1/5) \times 10^{-3}$ para $R_2(1/25)$ debido a este factor 5.

Un ejemplo que incluye R_3

Ejemplo 4. Hallar el valor de $\sqrt{26}$ hasta cuatro decimales.
Para esto escribimos $26 = 25(1+1/25)$, como antes. Por la fórmula binomial de Taylor hallamos

$$\left(1 + \frac{1}{25}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{25} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{25}\right)^2 + R_3\left(\frac{1}{25}\right).$$

Al estimar el residuo estamos en el caso $c \geq 0$, de modo que

$$\begin{aligned}
\left|R_3\left(\frac{1}{25}\right)\right| &\leq \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2} - 1\right|\left|\frac{1}{2} - 2\right|\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{25}\right)^3 \\
&\leq \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{25}\right)^3 \\
&< \frac{1}{16}\frac{1}{1.5} \times 10^{-4} \\
&\leq \frac{1}{24} \times 10^{-4}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
26^{1/2} &= 5(1 + 1/25)^{1/2} \\
&= 5\left(1 + \frac{1}{50} - \frac{1}{4}\frac{1}{625}\right) + E,
\end{aligned}$$

donde $E = 5R_3(1/25)$, y así,

$$|E| \leq \frac{5}{24} \times 10^{-4} < 10^{-4}.$$

Esto está dentro de la precisión deseada. Nótese de nuevo el factor de 5 en el último paso.

El método del ejemplo anterior fue hallar un cuadrado perfecto cerca de 26 y después usar la fórmula de Taylor para $(1+x)^{1/2}$ con un x pequeño. En general, podemos usar un método parecido para hallar la raíz cuadrada de un número. Hallar un cuadrado perfecto lo más cerca que sea posible del número y después usar la fórmula de Taylor. Una técnica similar funciona para raíces cúbicas u otras raíces.

La expansión binomial $(1 + x)^n$ y $(a + b)^n$

Concluimos esta sección mostrando cómo el desarrollo binomial para $(1 + x)^s$ mediante la fórmula de Taylor se vuelve más sencillo cuando s es un entero positivo n. Sea n, entonces, un entero positivo, y sea

$$f(x) = (1 + x)^n.$$

No tenemos dificultad alguna para calcular las derivadas:

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= n(1 + x)^{n-1}, & f^{(1)}(0) &= n, \\
f^{(2)}(x) &= n(n-1)(1 + x)^{n-2}, & f^{(2)}(0) &= n(n-1), \\
f^{(3)}(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3}, & f^{(3)}(0) &= n(n-1)(n-2), \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n!, & f^{(n}(0) &= n! \\
f^{(n+1)}(x) &= 0. & f^{(n+1)}(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Aquí la nueva característica es que $f^{(n+1)}(x) = 0$. Por lo tanto, $f^{(k)}(x) = 0$ para todo $k \geq n + 1$, y el residuo después del término n-ésimo es igual a 0, de ahí que obtengamos la expresión exacta:

Teorema 7.2. *Sea n un entero positivo. Para cualquier número x tenemos*

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + x^n.$$

El coeficiente de x^k en el lado derecho se denota usualmente por el símbolo

$$\binom{n}{k}$$

y se llama **coeficiente binomial**. Así, de las derivadas que hallamos antes obtenemos

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.}$$

El numerador está formado por el producto de enteros en orden descendente de n a $n-k+1$. Difiere de $n!$ en que falta el producto desde $(n-k)$ hasta 1. Para tener una expresión más simétrica para el coeficiente binomial, multiplicamos el numerador y el denominador por $(n-k)!$. Observamos que

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)! = n!$$

y, en consecuencia, podemos escribir el coeficiente binomial en la forma

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

En esta fórmula, hacemos $0 \leq k \leq n$, y, **por convención, hacemos**

$$0! = 1.$$

Por ejemplo:

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!3!} = 1, \qquad \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!2!} = 3,$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3, \qquad \binom{3}{3} = \frac{3!}{3!0!} = 1.$$

Los enteros 1, 3, 3 y 1 son exactamente los coeficientes del desarrollo para

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

Al efectuar los ejercicios se pueden hallar los coeficientes para potencias más altas.

Si queremos el desarrollo de $(a+b)^n$ con números arbitrarios a y b, y $a \neq 0$, entonces hacemos $x = b/a$, de modo que:

$$\begin{aligned}(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n &= a^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.\end{aligned}$$

Así, podemos escribir el desarrollo binomial en la forma

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.}$$

Podemos hallar este desarrollo de manera sofisticada, usando la fórmula de Taylor en el caso en que el residuo es 0. En el bachillerato habrán deducido el desarrollo de manera mucho más elemental. El punto es que aquí necesitamos esta técnica más general para calcular valores $(1+x)^s$ con un exponente s más general que puede no ser entero. Por ejemplo, necesitamos calcular

$$(1+x)^{1/2} \quad \text{o} \quad (1+x)^{1/3}.$$

Tenemos que usar entonces el método de la fórmula de Taylor.

Definición. Sea s cualquier número real. Definimos el **coeficiente binomial**

$$\boxed{\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1)}{k!}.}$$

Ejemplo. Supongamos que $s = 1/3$. Entonces

$$\binom{1/3}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{1}{2!},$$

$$\binom{1/3}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{1}{3!},$$

$$\binom{1/3}{4} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)\frac{1}{4!},$$

y así sucesivamente.

Observen que, cuando s no es un entero, no podemos multiplicar el numerador y el denominador por $(s-k)!$ lo cual no tiene sentido. Tenemos que dejar el coeficiente binomial como en la definición.

Usando el signo de sumatoria, podemos escribir también

$$\boxed{(1+x)^s = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} x^k + R_{n+1}(x).}$$

XIII, §7. EJERCICIOS

En cada uno de los casos siguientes, cuando se pida calcular un número, incluir el estimado para el término de error para mostrar que está dentro de la precisión deseada.

1. Estimar el residuo R_2 en la serie de Taylor para $(1+x)^{1/4}$:
   (a) cuando $x = 0.01$, (b) cuando $x = 0.2$, (c) cuando $x = 0.1$.
2. Estimar el residuo R_3 en la serie de Taylor para $(1+x)^{1/2}$:
   (a) cuando $x = 0.2$, (b) cuando $x = -0.2$, (c) cuando $x = 0.1$.
3. Estimar R_2 en el residuo de $(1+x)^{1/3}$ para x en el intervalo
$$-0.1 \leq x \leq 0.1.$$
4. Estimar el residuo R_2 en la serie de Taylor de $(1+x)^{1/2}$:
   (a) cuando $x = -0.2$, (b) cuando $x = 0.1$.
5. Calcular las raíces cúbicas hasta 4 decimales:
   (a) $\sqrt[3]{126}$, (b) $\sqrt[3]{130}$, (c) $\sqrt[3]{131}$ (d) $\sqrt[3]{220}$.
6. Calcular las raíces cuadradas hasta 4 decimales:
   (a) $\sqrt{97}$, (b) $\sqrt{102}$, (c) $\sqrt{105}$, (d) $\sqrt{28}$.

XIII, §8. ALGUNOS LÍMITES

Los límites de cocientes de funciones se pueden reducir a límites de cocientes de polinomios usando unos cuantos términos del desarrollo de Taylor.

Veamos primero los polinomios.

Ejemplo 1. Hallar el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x - 2x^2 + 5x^4}{7x}.$$

$\frac{3 - 2x + 5x^3}{7}$

Dividimos el numerador y el denominador entre la *menor* potencia de x que ocurra en cada uno, de modo que hallamos:

$$\frac{3x - 2x^2 + 5x^4}{7x} = \frac{x(3 - 2x + 5x^3)}{x \cdot 7}$$

$$= \frac{3 - 2x + 5x^3}{7}.$$

Ahora es fácil hallar el límite cuando x tiende a 0; a saber, el límite es $\frac{3}{7}$.

Ejemplo 2. Hallar el límite

$R_4(x) \le \frac{x^4}{4!}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

Reemplazamos $\cos x$ por $1 - x^2/2 + R_4(x)$, de modo que

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + R_4(x)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{R_4(x)}{x^2}.$$

Como $|R_4(x)| \le |x|^4$, se sigue que el límite cuando $x \to 0$ es igual a $-\frac{1}{2}$.

Ejemplo 3. Hallar el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/3!}{x^4}.$$

Tenemos

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + R_5(x).$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} x - x + \frac{x^3}{3!} = R_5(x) \quad \text{y} \quad |R_5(x)| \le \frac{|x|^5}{5!}.$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x - x + x^3/3!}{x^4}\right| \le \frac{|R_5(x)|}{|x|^4} \le \frac{|x|}{5!}.$$

El límite deseado es entonces igual a 0.

Ejemplo 4. Hallar el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x \tan x}.$$

Para esto se aplica el hecho de que

$$\boxed{\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1,}$$

y se hace $u = x^2$. Además

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cos x = 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x \tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} \frac{x}{\tan x} = 1.$$

Ejemplo 5. Queremos hallar el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{\operatorname{sen} x}.$$

Por la fórmula de Taylor,

$$\log(1+x) = x + R_2(x),$$

$$\operatorname{sen} x = x + S_3(x).$$

(Escribimos S_3 en lugar de R_3 porque es un residuo diferente que para el log.) Para ellos tenemos los estimados

$$|R_2(x)| \le C|x|^2 \quad \text{y} \quad |S_3(x) \le C'|x|^3$$

para algunas constantes C, C' y x suficientemente cercanas a 0. Por lo tanto,

$$\frac{\log(1+x)}{\operatorname{sen} x} = \frac{x + R_2(x)}{x + S_3(x)}.$$

Al dividir el numerador y el denominador entre x resulta

$$= \frac{1 + R_2(x)/x}{1 + S_3(x)/x}.$$

Cuando x tiende a 0, cada cociente $R_2(x)/x$ y $S_3(x)/x$ tiende a 0, por lo que el límite es 1, como se quería.

Ejemplo 6. Hallar el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - e^x + 1}{x}.$$

De nuevo se escribe la fórmula de Taylor con pocos términos:

$$\operatorname{sen} x = x + R_3(x),$$

$$e^x = 1 + x + S_2(x).$$

Entonces

$$\frac{\operatorname{sen} x - e^x + 1}{x} = \frac{x - 1 - x + 1 + R_3(x) - S_2(x)}{x}$$
$$= \frac{R_3(x) - S_2(x)}{x}.$$

El lado derecho tiende a 0, de modo que el límite deseado es 0.

XIII, §8. EJERCICIOS

Hallar los límites siguientes cuando x tiende a 0.

1. $\dfrac{\cos x - 1 + x^2/2!}{x^3}$ 2. $\dfrac{\cos x - 1 + x^2/2!}{x^4}$

3. $\dfrac{\operatorname{sen} x + e^x - 1}{x}$ 4. $\dfrac{\operatorname{sen} x - e^x + 1}{x}$

5. $\dfrac{e^x - 1}{x}$ 6. $\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{(\operatorname{sen} x)^2}$ 7. $\dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} x}$

8. $\dfrac{\arctan x}{x}$ 9. $\dfrac{\log(1+x)}{x}$ 10. $\dfrac{\log(1+2x)}{x}$

11. $\dfrac{e^x - (1+x)}{x^2}$ 12. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^2}$ 13. $\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

14. $\dfrac{\log(1+x^2)}{\operatorname{sen}(x^2)}$ 15. $\dfrac{\tan(x^2)}{(\operatorname{sen} x)^2}$ 16. $\dfrac{\log(1+x^2)}{(\operatorname{sen} x)^2}$

17. $\dfrac{\operatorname{sen} x - e^x + 1}{x^2}$ 18. $\dfrac{\cos x - e^x}{x}$

19. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ 20. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x - e^{-x}}$ 21. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2}$

22. $\dfrac{\tan x^2}{\operatorname{sen}^2 x}$ 23. $\dfrac{\log(1-x)}{\operatorname{sen} x}$ 24. $\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$

25. $\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x \operatorname{sen} x}$ 26. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^2}$ 27. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

28. $\dfrac{e^x - 1 - x}{x}$ 29. $\dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ 30. $\dfrac{\log(1+x^2)}{x^2}$

31. $\dfrac{(1+x)^{1/2} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2}$ 32. $\dfrac{(1+x)^{1/3} - 1 - \frac{1}{3}x}{x^2}$

33. Sea $f(x)$ una función que tenga $n+1$ derivadas continuas en un intervalo abierto que contiene al origen, y suponer que la $(n+1)$-ésima derivada está acotada por una constante M en este intervalo. Sea $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de grado n para $f(x)$. ¿Cuáles son los límites siguientes?

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - P_n(x)}{x^2}$ (suponiendo que $n \geq 3$)

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - P_n(x)}{x^n}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - P_n(x)}{x^{n-1}}$ (suponiendo que $n \geq 2$)

Determinar los límites siguientes cuando x tiende a 0.

34. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x - 1}{x}$ 35. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x - 1 - x}{x^2}$

36. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x + x^3/3!}{x^4}$ 37. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x + x^3/3!}{x^5}$

38. $\dfrac{\cos x - 1 - x^2/2!}{x}$ 39. $\dfrac{\cos x - 1 - x^2/2!}{x^2}$

CAPÍTULO XIV

Series

Las series son la continuación natural de nuestro estudio de las funciones. En el capítulo anterior hallamos cómo aproximar nuestras funciones elementales por medio de polinomios, con cierto término de error. Recíprocamente, podemos definir funciones arbitrarias por medio de su serie. Veremos cómo se hace esto en las secciones que siguen.

En la práctica se usan pocos criterios para determinar la convergencia de las series. Esencialmente, el más frecuente es el criterio de la comparación. Más aún, las series más importantes son aquellas que convergen absolutamente, así que pondremos mucho énfasis en ellas.

XIV, §1. SERIES CONVERGENTES

Supongan que tenemos dada una sucesión de números

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

i.e. nos dan un número a_n para cada entero $n \geq 1$. (Preferimos comenzar con 1, pero lo pudimos hacer con cualquier entero.) Se forman las sumas

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Parece no tener sentido formar una suma infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

porque no sabemos sumar una infinidad de números. Sin embargo, si nuestras sumas s_n tienden un límite cuando n se vuelve grande, entonces decimos que la suma de nuestra sucesión **converge**, y definimos ahora su **suma** como ese límite.

El símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

se llamará **serie**. Diremos que la **serie converge** si las sumas s_n tienden a un límite cuando n se vuelve grande. De no ser así, decimos que no converge, o que **diverge**. Si la serie converge, el valor de la serie será

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + \cdots + a_n).$$

El símbolo $\lim_{n\to\infty}$ se lee: "El límite cuando n se vuelve grande."

Ejemplo. Considerar la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots,$$

y formar las sumas

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Probablemente ya sepan que estas sumas tienden a un límite y que este límite es 2. Para probarlo, sea $r = \frac{1}{2}$. Entonces

$$(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r}.$$

Cuando n se hace grande, r^{n+1} tiende a 0, de donde nuestra suma tiende a

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

En realidad, el mismo argumento funciona si tomamos como r a cualquier número tal que

$$-1 < r < 1.$$

En ese caso, r^{n+1} tiende a 0 cuando n se vuelve grande, y, en consecuencia, podemos escribir

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}.$$

Por supuesto, si $|r| > 1$, entonces la serie $\sum r^n$ no converge. Por ejemplo, las sumas parciales de la serie con $r = -3$ son

$$1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \cdots + (-1)^n 3^n.$$

Observen que el término n-ésimo $(-1)^n 3^n$ ni siquiera tiende a 0 cuando n se vuelve grande.

En vista de que el límite de una suma es la suma de los límites, y de otras propiedades usuales de los límites, obtenemos el teorema siguiente.

Teorema 1.1. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ dos sucesiones y suponer que las series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

convergen. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ también converge y es igual a la suma de las dos series. Si c es un número, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Finalmente, si

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$

y

$$t_n = b_1 + \cdots + b_n,$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} s_n t_n.$$

En particular, las series se pueden sumar término a término, pero ¡es obvio que no pueden multiplicarse término a término!

También observamos que se cumple un teorema análogo para la diferencia de dos series.

Si una serie $\sum a_n$ converge, entonces los números a_n deben tender a 0 cuando n se vuelve grande. Sin embargo, hay ejemplos de sucesiones $\{a_n\}$ para las cuales la serie no converge, aunque

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Consideren, por ejemplo,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

Insistimos en que las sumas parciales s_n se vuelven muy grandes cuando n se vuelve grande. Para ver esto, visualicemos las sumas parciales como sigue:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}} + \cdots.$$

En cada montón de los términos indicados reemplazamos cada término por el que está en el extremo derecho. Esto hace que nuestra suma sea más pequeña. Así, nuestra expresión es

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}} + \cdots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \cdots$$

y, por lo tanto, se vuelve arbitrariamente grande cuando n se vuelve grande.

XIV, §2. SERIES CON TÉRMINOS POSITIVOS

En esta sección supondremos que nuestros números a_n son ≥ 0. Entonces, las sumas parciales

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$

son crecientes, i.e.

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \cdots.$$

Si no tienden a un límite, no se podrán volver arbitrariamente grandes. Así, en este caso existe un número B tal que

$$s_n \leq B$$

para todo n. Dicho número B se llama **cota superior**. Por **mínima cota superior** entendemos un número S que es una cota superior, y tal que cada cota superior B es $\geq S$. Suponemos que existen las mínimas cotas superiores. La colección de números $\{s_n\}$ tiene entonces una mínima cota superior, i.e. existe un número más pequeño S tal que

$$s_n \leq S$$

para todo n. En ese caso, la suma parcial s_n tiende a S como límite. En otras palabras, dado cualquier número positivo $\varepsilon > 0$, tenemos

$$S - \varepsilon \leq s_n \leq S$$

para todo n suficientemente grande.

Esto expresa simplemente el hecho de que S es la menor de todas las cotas superiores para nuestra colección de números s_n. Expresemos esto como un teorema.

Teorema 2.1. *Sea $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ una sucesión de números ≥ 0 y sea*

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Si la sucesión de números $\{s_n\}$ está acotada, entonces tiende a un límite S, que es su mínima cota superior.

Ejemplo 1. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge.

Veamos la serie:

$$\underbrace{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \underbrace{\frac{1}{4^2} + \cdots} + \underbrace{\frac{1}{8^2} + \cdots} + \underbrace{\frac{1}{16^2} + \cdots} + \cdots.$$

Distinguimos los grupos de términos según se indica. En cada grupo de términos, si disminuimos el denominador en cada término, entonces crece la fracción. Reemplazamos 3 por 2, después 4, 5, 6 y 7 por 4, luego reemplazamos los números del 8 al 15 por 8, y así sucesivamente. Nuestras sumas parciales son entonces menores o iguales que

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots+\frac{1}{8^2}+\cdots,$$

y notamos que el 2 se presenta dos veces, que el 4 se presenta cuatro veces, el 8 se presenta ocho veces, y así sucesivamente. Por lo tanto, las sumas parciales son menores o iguales que

$$1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{4^2}+\frac{8}{8^2}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots.$$

Así, nuestras sumas parciales son menores o iguales a las de la serie geométrica y están acotadas. Por lo tanto, nuestra serie converge.

El teorema 2.1 nos da un criterio muy útil para determinar cuándo una serie de términos positivos converge:

Teorema 2.2. *Sean*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

dos series, con $a_n \geq 0$ para todo n y $b_n \geq 0$ para todo n. Suponiendo que existe un número $C > 0$ tal que

$$a_n \leq C b_n$$

para todo n, y que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq C \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Demostración. Tenemos

$$a_1+\cdots+a_n \leq Cb_1+\cdots+Cb_n = C(b_1+\cdots+b_n) \leq C\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Esto significa que $C\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una cota para las sumas parciales

$$a_1+\cdots+a_n.$$

La mínima cota superior de estas sumas es entonces $\leq C\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, lo cual prueba nuestro teorema.

El teorema 2.2 tiene un análogo para mostrar que una serie no converge.

Teorema 2.2'. *Sean*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

dos series, con a_n y $b_n \geq 0$ para todo n. Suponiendo que existe un número $C > 0$ tal que

$$a_n \geq C b_n$$

para todo n suficientemente pequeño, y que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ no converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración. Suponer que $a_n \geq Cb_n$ para $n \geq n_0$. Como $\sum b_n$ diverge, podemos hacer arbitrariamente grandes las sumas parciales

$$\sum_{n=n_0}^{N} b_n = b_{n_0}+\cdots+b_N$$

cuando N se vuelve arbitrariamente grande. Pero

$$\sum_{n=n_0}^{N} a_n \geq \sum_{n=n_0}^{N} Cb_n = C\sum_{n=n_0}^{N} b_n.$$

Por lo tanto, las sumas parciales

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1+\cdots+a_N$$

son arbitrariamente grandes cuando N se vuelve arbitrariamente grande, y por ello, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, como había que demostrar.

Ejemplo 2. Determinar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

converge.

Escribimos

$$\frac{n^2}{n^3+1}=\frac{1}{n+1/n^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+1/n^3}\right).$$

Vemos entonces que

$$\frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{1}{2n}.$$

Como $\sum 1/n$ no converge, se sigue que la serie del ejemplo 2 tampoco converge.

Ejemplo 3. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+7}{2n^4-n+3}$$

converge. En efecto, podemos escribir

$$\frac{n^2+7}{2n^4-n+3}=\frac{n^2(1+7/n^2)}{n^4(2-(1/n)^3+3/n^4)}=\frac{1}{n^2}\frac{1+7/n^2}{2-(1/n)^3+3/n^4}.$$

Para n grande, el factor

$$\frac{1+7/n^2}{2-(1/n)^3+3/n^4}$$

ciertamente es acotado y de hecho está cerca de $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, podemos comparar nuestra serie con $1/n^2$ para ver que converge, pues $\sum 1/n^2$ converge y el factor está acotado.

XIV, §2. EJERCICIOS

1. Mostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ converge.
2. (a) Mostrar que la serie $\sum(\log n)/n^3$ converge. [*Idea:* Estimar $(\log n)/n$.]
   (b) Mostrar que la serie $\sum(\log n)^2/n^3$ converge.

Verificar si las series siguientes convergen:

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ 4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+n}$ 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$ 7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+n+2}$ 8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2+1}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2+n}$

XIV, §3. EL CRITERIO DE LA RAZÓN

Continuamos considerando sólo series con términos ≥ 0. Para comparar dichas series con una serie geométrica, el criterio más simple está dado por el criterio de la razón.

Criterio de la razón. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie con $a_n > 0$ para todo n. Suponiendo que existe un número c con $0 < c < 1$ tal que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq c$$

para todo n suficientemente grande, entonces la serie converge.

Demostración. Suponer que existe algún entero N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq c$$

si $n \geq N$. Entonces

$$a_{N+1} \leq ca_N,$$

$$a_{N+2} \leq ca_{N+1} \leq c^2 a_N$$

y en general, por inducción,

$$a_{N+k} \leq c^k a_N.$$

Así,

$$\sum_{n=N}^{N+k} a_n \leq a_N + ca_N + c^2 a_N + \cdots + c^k a_N$$

$$\leq a_N(1 + c + \cdots + c^k) \leq a_N \frac{1}{1-c}.$$

En efecto, de esta manera hemos comparado nuestra serie con una serie geométrica y sabemos que las sumas parciales están acotadas. Esto implica que nuestra serie converge.

Es costumbre usar el criterio de la razón en el caso de una serie con términos positivos a_n tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1.$$

Ejemplo. Mostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

converge.

Hacemos $a_n = n/3^n$. Entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{n}\frac{1}{3}.$$

Esta razón tiende a $\frac{1}{3}$ cuando $n \to \infty$, y, por lo tanto, el criterio de la razón es aplicable: la serie converge.

XIV, §3. EJERCICIOS

Determinar si las series siguientes convergen:

1. $\sum n2^{-n}$ 2. $\sum n^2 2^{-n}$ 3. $\sum \frac{1}{\log n}$

4. $\sum \frac{\log n}{2^n}$ 5. $\sum \frac{\log n}{n}$ 6. $\sum \frac{n^{10}}{3^n}$

7. $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 8. $\sum \frac{\sqrt{n^3+1}}{e^n}$ 9. $\sum \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n+1}}$

10. $\sum \frac{n+1}{2^n}$ 11. $\sum \frac{n}{(4n-1)(n+15)}$ 12. $\sum \frac{1+\cos(\pi n/2)}{e^n}$

13. $\sum \frac{1}{(\log n)^{10}}$ 14. $\sum n^2 e^{-n^2}$ 15. $\sum n^2 e^{-n^3}$

16. $\sum n^5 e^{-n^2}$ 17. $\sum n^4 e^{-n}$ 18. $\sum \frac{n^n}{n!3^n}$

19. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos, y suponer que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$$

para todo n. Mostrar que la serie $\sum a_n$ diverge.

20. Se puede aplicar un criterio de la razón en el sentido opuesto para determinar cuándo una serie diverge. Probar el siguiente enunciado: Sea a_n una sucesión de números positivos, y sea $c \geq 1$. Si $a_{n+1}/a_n \geq c$ para todo n suficientemente grande, entonces la serie $\sum a_n$ diverge.

XIV, §4. EL CRITERIO DE LA INTEGRAL

Deben intuir ya que hay una analogía entre la convergencia de una integral impropia y la convergencia de una serie. Precisamos esto ahora.

Teorema 4.1. *Sea f una función que está definida y es positiva para todo $x \geq 1$, y es decreciente. La serie*

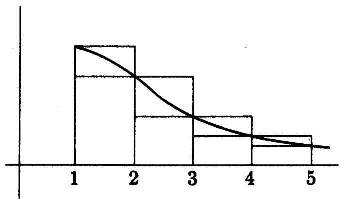
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

converge si, y sólo si, la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

converge.

Visualizamos la situación en el diagrama siguiente.



Consideren las sumas parciales

$$f(2) + \cdots + f(n)$$

y supongan que nuestra integral impropia converge. El área bajo la curva entre 1 y 2 es mayor o igual que el área del rectángulo cuya altura es $f(2)$ y cuya base es el intervalo entre 1 y 2. Esta base tiene longitud 1. Así,

$$f(2) \leq \int_1^2 f(x)\,dx.$$

De nuevo, como la función es decreciente, tenemos un estimado similar entre 2 y 3:

$$f(3) \leq \int_2^3 f(x)\,dx.$$

Podemos continuar hasta n y obtener

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x)\,dx.$$

Supusimos que, cuando n se vuelve grande, la integral tiende a un límite. Esto significa que

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Por lo tanto, las sumas parciales están acotadas y luego, por el teorema 2.1, tienden a un límite, de modo que nuestra serie converge.

Recíprocamente, supongan que las sumas parciales

$$f(1) + \cdots + f(n)$$

tienden a un límite cuando n se vuelve grande.

El área bajo la gráfica de f entre 1 y n es menor o igual que la suma de las áreas de los rectángulos grandes. Así,

$$\int_1^2 f(x)\,dx \leq f(1)(2-1) = f(1)$$

y

$$\int_2^3 f(x)\,dx \leq f(2)(3-2) = f(2).$$

Procediendo por pasos, y tomando la suma, vemos que

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq f(1) + \cdots + f(n-1).$$

Las sumas parciales de la derecha son menores o iguales a su límite. Llamemos L a este límite. Entonces, para todos los enteros positivos n, tenemos

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq L.$$

Dado cualquier número B, podemos hallar un entero n tal que $B \leq n$. Entonces

$$\int_1^B f(x)\,dx \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq L.$$

Por lo tanto, la integral de 1 a B tiende a un límite cuando B se vuelve grande, y este límite es menor o igual a L. Esto prueba nuestro teorema.

Ejemplo. Probar que la serie

$$\sum \frac{1}{n^2+1}$$

converge.

Sea

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Entonces f es decreciente y

$$\int_1^B f(x)\,dx = \arctan B - \arctan 1 = \arctan B - \frac{\pi}{4}.$$

Cuando B se vuelve grande, $\arctan B$ tiende a $\pi/2$ y por lo tanto, tiene un límite. Entonces la integral converge, y, por el teorema, la serie converge.

XIV, §4. EJERCICIOS

1. Mostrar que la siguiente serie diverge: $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n\log n)$.
2. Mostrar que la siguiente serie converge: $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)/((n+2)n!)$.

Averiguar si convergen:

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ 4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^3}$ 5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$ 8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+2}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-1}$ 10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3-n+5}$
11. Sea ε un número >0. Mostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+\varepsilon}$ converge.
12. Mostrar que las series siguientes convergen.
 (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^{3/2}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^{1+\varepsilon}}$ y $\varepsilon > 0$.
 (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^2}{n^{3/2}}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^3}{n^2}$
13. Si $\varepsilon > 0$, mostrar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n(\log n)^{1+\varepsilon}$ converge.

XIV, §5. CONVERGENCIA ABSOLUTA Y ALTERNANTE

Consideramos una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ donde no suponemos que los términos a_n son ≥ 0. Diremos que las series **convergen absolutamente** si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

formada con los valores absolutos de los términos a_n, converge. Ésta es ahora una serie con términos ≥ 0, a la cual podemos aplicar los criterios de convergencia dados en las dos secciones anteriores. Esto es importante, pues tenemos:

Teorema 5.1. *Sea $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ una sucesión, y supongamos que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

converge. Entonces también converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demostración. Sea a_n^+ igual a 0 si $a_n < 0$, e igual a a_n si $a_n \geq 0$. Sea a_n^- igual a 0 si $a_n > 0$, e igual a $-a_n$ si $a_n \leq 0$. Entonces, tanto a_n^+ como a_n^- son ≥ 0. Por hipótesis y comparación con $\sum |a_n|$, vemos que cada una de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

converge. Por lo tanto, sucede lo mismo con su diferencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-,$$

que es igual a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-),$$

que no es más que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esto prueba nuestro teorema.

Usaremos otro criterio más para la convergencia de una serie que puede tener términos positivos y negativos.

Teorema 5.2. *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie tal que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

con los términos a_n alternadamente positivos y negativos, y tales que $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ para $n \geq 1$. Entonces la serie es convergente.

Demostración. Escribamos la serie en la forma

$$b_1 - c_1 + b_2 - c_2 + b_3 - c_3 + \cdots,$$

con b_n, $c_n \geq 0$. Sea

$$s_n = b_1 - c_1 + b_2 - c_2 + \cdots + b_n,$$
$$t_n = b_1 - c_1 + b_2 - c_2 + \cdots + b_n - c_n.$$

Como los valores absolutos de los términos decrecen, se sigue que

$$s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \cdots \quad \text{y} \quad t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \cdots,$$

i.e. que los s_n son decrecientes y los t_n son crecientes. En efecto,

$$s_{n+1} = s_n - c_n + b_{n+1} \quad \text{y} \quad 0 \leq b_{n+1} \leq c_n.$$

Así restamos más de s_n mediante c_n de lo que sumamos después mediante b_{n+1}. Por lo tanto, $s_n \geq s_{n+1}$. Más aún, $s_n \geq t_n$, por lo que podemos visualizar nuestras sucesiones como sigue:

$$s_n \geq s_{n+1} \geq \cdots \geq t_{n+1} \geq t_n.$$

Nótese que $s_n - t_n = c_n$, y que c_n tiende a 0 cuando n se vuelve grande. Si L es la máxima cota inferior para la sucesión $\{s_n\}$, y M la mínima cota superior para la sucesión $\{t_n\}$, entonces

$$s_n \geq L \geq M \geq t_n$$

para todo n. Como la diferencia $s_n - t_n$ se vuelve arbitrariamente pequeña, se sigue que $L - M$ es arbitrariamente pequeño y, por lo tanto, igual a 0. Así, $L = M$, y esto prueba que s_n y t_n tienden a L como límite, de donde nuestra serie $\sum a_n$ converge a L.

Ejemplo. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

es convergente, pero no absolutamente convergente.

Observación. No todas las series que son convergentes son absolutamente convergentes o son del tipo alternante anterior. Sin embargo, estos dos tipos de series son los que surgen con más frecuencia en la práctica, por lo que hemos insistido en ellos.

XIV, §5. EJERCICIOS

Determinar si las series siguientes convergen absolutamente:

1. $\sum \frac{\operatorname{sen} n}{n^3}$
2. $\sum \frac{1 + \cos \pi n}{n!}$
3. $\sum \frac{\operatorname{sen} \pi n + \cos 2\pi n}{n^{3/2}}$
4. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$
5. $\sum \frac{(-1)^n + \cos 3n}{n^2 + n}$

¿Cuáles de las series siguientes convergen y cuáles no?

6. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$
7. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$
8. $\sum (-1)^n \frac{1}{n+1}$
9. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\log(n+2)}$
10. Para cada número x, mostrar que la serie $\sum(\operatorname{sen} n^2 x)/n^2$ converge absolutamente. Sea f la función cuyo valor en x es la serie anterior. Mostrar que f es continua. Determinar si f es diferenciable o no. (¡Es asombroso que esto no se supiera durante largo tiempo! Véase. J. P. Kahane, Bulletin of the American Mathematical Society, Marzo de 1964, pag. 199. J. Gerver, estudiante de segundo año en el *Columbia College*, mostró que la serie es diferenciable en todos los puntos $m\pi/n$, donde m y n son enteros impares, que la derivada es $-\frac{1}{2}$ y que éstos son los únicos puntos donde la función es diferenciable. Véanse sus artículos en *Am. J. Math.*, 1970 y 1971.)

Determinar si las siguientes series convergen y si convergen absolutamente.

11. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$
12. $\sum \frac{(-1)^{n+2}}{\log n}$
13. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$
14. $\sum (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$
15. $\sum (-1)^n \frac{n^2}{n^3+2}$
16. $\sum (-1)^{n+1} \frac{n^2+2}{n^3+n-1}$
17. $\sum (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+2}$
18. $\sum \frac{(-1)^n}{n^{5/2}+n}$
19. $\sum (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$
20. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}$

XIV, §6. SERIES DE POTENCIAS

Quizá las series más importantes son las series de potencias. Sea x cualquier número y sea $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ una sucesión de números. Entonces podemos formar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Las sumas parciales son

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Ya encontramos estas sumas cuando estudiamos la fórmula de Taylor.

Ejemplo. La serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge absolutamente para todo x. En efecto, bastará probar que, para cualquier número $R > 0$, la serie anterior converge para $0 < x \leq R$. Usemos el criterio de la razón. Sea

$$b_n = \frac{x^n}{n!}.$$

Entonces

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \leq \frac{R}{n+1}.$$

Cuando n es suficientemente grande, se sigue que $R/(n+1)$ es pequeño, y en particular es $< \frac{1}{2}$, de modo que podemos aplicar el criterio de la razón para probar nuestra afirmación.

Del mismo modo, podemos probar que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

convergen absolutamente para todo x, haciendo, por ejemplo,

$$b_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

para la primera. Entonces, $b_{n+1}/b_n = x^2/[(2n+3)(2n+2)]$, y podemos proceder como antes.

Teorema 6.1. *Suponer que existe un número $r \geq 0$ tal que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|r^n$$

converge. Entonces, para todo x tal que $|x| \leq r$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$$

converge absolutamente.

Demostración. El valor absoluto de cada término es

$$|a_n|\,|x|^n \leq |a_n|r^n.$$

Nuestra afirmación se sigue de la comparación del teorema 2.2.

La mínima cota superior de todos los números r para los cuales tenemos la convergencia enunciada en el teorema, se llama **radio de convergencia** de la serie. Si no hay cota superior para los números r tales que la anterior serie de potencias converja, entonces decimos que el radio de convergencia es **infinito**.

Supongan que existe una cota superior para los números r anteriores, y sea s el radio de convergencia de la serie. Entonces, si $x > s$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|x^n$$

no converge. Así, el radio de convergencia s es el número tal que la serie converge absolutamente si $0 < x < s$, pero no converge absolutamente si $x > s$.

El teorema 6.1 nos permite definir una función f; a saber, para todos los números x tales que $|x| < r$, definimos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n).$$

Nuestras demostraciones de que el término residuo en la fórmula de Taylor tiende a 0 para varias funciones, nos permite ahora decir que estas funciones están dadas por su serie de Taylor. Así,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

para todo x. Aún más,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots$$

es válido para $-1 < x < 1$.

(En este caso vimos que la serie converge para $x = 1$, pero no converge absolutamente; vean la sección §1.)

Sin embargo, podemos ahora definir funciones al azar por medio de series de potencias, siempre que sepamos que las series de potencias convergen absolutamente para $|x| < r$.

El criterio de la razón suele dar una manera fácil de determinar cuándo una serie de potencias converge o cuándo diverge.

Ejemplo. Probar que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}x^n$$

converge absolutamente para $|x| < 1$, y diverge para $|x| > 1$.

Sea $0 < c < 1$ y considerar x tal que $0 < x \leq c$. Sea

$$b_n = \frac{\log n}{n^2}x^n.$$

Entonces

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\log(n+1)}{(n+1)^2}x^{n+1}\frac{n^2}{\log n}\frac{1}{x^n} = \frac{\log(n+1)}{\log n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 x.$$

Como $\log(n+1)/\log n$ y $\left(n/(n+1)\right)^2$ tienden a 1 cuando n se vuelve muy grande, se sigue que si $c < c_1 < 1$, entonces para todo n suficientemente grande

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq c_1$$

y, por lo tanto, nuestra serie converge. Esto es cierto para todo c tal que $0 < c < 1$, por lo cual, la serie converge absolutamente para $|x| < 1$.

Sea $c > 1$. Si $x \geq c$, entonces para todo n suficientemente grande, se sigue que $b_{n+1}/b_n \geq 1$, de donde resulta que la serie no converge. Esto es así para todo $c > 1$, y entonces la serie no converge si $x > 1$. Por lo tanto, 1 es el radio de convergencia.

Si una serie de potencias converge absolutamente sólo para $x = 0$, entonces estamos de acuerdo en decir que su radio de convergencia es 0. Por ejemplo, el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$$

es igual a 0, como se ve al usar el criterio de la razón en el caso divergente.

Criterio de la raíz. *Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencias, y suponer que*

$$\text{lím}\, |a_n|^{1/n} = s,$$

donde s es un número. Si $s \neq 0$, entonces el radio de convergencia de la serie es igual a $1/s$. Si $s = 0$, entonces el radio de convergencia es infinito. Si $|a_n|^{1/n}$ se vuelve arbitrariamente grande cuando n se vuelve grande, entonces el radio de convergencia es 0.

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a_n \geq 0$ para todo n. Suponemos primero que s es un número $\neq 0$, y sea $0 \leq r < 1/s$. Entonces $sr < 1$. Los números $a_n^{1/n} r$ tienden a sr y, por lo tanto, existe algún número $\varepsilon > 0$ tal que

$$a_n^{1/n} r < 1 - \varepsilon$$

para todo n suficientemente grande. Por lo tanto, la serie $\sum a_n r^n$ converge por comparación con la serie geométrica. Si, por otro lado, $r > 1/s$, entonces $a_n^{1/n} r$ tiende a $sr > 1$ y, en consecuencia, tenemos

$$a_n^{1/n} r \geq 1 + \varepsilon$$

para todo n suficientemente grande. La comparación por abajo muestra que la serie $\sum a_n r^n$ diverge. Dejamos al lector los casos $s = 0$ o $s = \infty$.

Ejemplo. La serie $\sum x^n/n^2$ tiene un radio de convergencia igual a 1, pues

$$\text{lím} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} = \text{lím} \frac{1}{n^{2/n}} = 1,$$

por el corolario 5.5 del capítulo VIII.

Para dar otros ejemplos, podemos recordar una desigualdad que debieron deducir en el capítulo X, sección §1, a saber,

$$\boxed{(n-1)! \leq n^n e^{-n} e \leq n!.}$$

De aquí probamos:

Cuando n se hace grande, la expresión

$$\frac{(n!)^{1/n}}{n} = \left[\frac{n!}{n^n}\right]^{1/n}$$

tiende a $1/e$.

Demostración. Tomar la raíz n-ésima de la desigualdad $n^n e^{-n} e \leq n!$. Obtenemos

$$n e^{-1} e^{1/n} \leq (n!)^{1/n}.$$

Al dividir entre n se obtiene

$$\frac{1}{e} e^{1/n} \leq \frac{(n!)^{1/n}}{n}.$$

Por otro lado, multiplicando ambos lados de la desigualdad

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n} e$$

por n, obtenemos $n! \leq n^n e^{-n} e n$. Tomamos una raíz n-ésima:

$$(n!)^{1/n} \leq n e^{-1} e^{1/n} n^{1/n}.$$

Al dividir entre n se obtiene

$$\frac{(n!)^{1/n}}{n} \leq \frac{1}{e} e^{1/n} n^{1/n}.$$

Pero sabemos que tanto $n^{1/n}$ como $e^{1/n}$ tienden a 1 cuando n se vuelve grande. Así, nuestro cociente se comprime entre dos números que tienden a $1/e$, y, por lo tanto, debe tender a $1/e$.

Ejemplo. Tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(3n)!}{n^{3n}}\right]^{1/n} = \frac{27}{e^3}.$$

Demostración. Escribimos

$$\frac{(3n)!}{n^{3n}} = \frac{(3n)!}{(3n)^{3n}} 3^{3n}.$$

La $3n$-ésima raíz de esta expresión es

$$\left[\frac{(3n)!}{(3n)^{3n}}\right]^{1/3n} 3.$$

Hemos visto que

$$\left(\frac{m!}{m^m}\right)^{1/m} \quad \text{tiende a} \quad \frac{1}{e}$$

cuando m se vuelve grande. Usamos $m = 3n$. Concluimos que

$$\left(\frac{(3n)!}{n^{3n}}\right)^{1/3n} \quad \text{tiende a} \quad \frac{3}{e}.$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{(3n)!}{n^{3n}}\right)^{1/n} \quad \text{tiende a} \quad \frac{27}{e^3},$$

según se deseaba.

XIV, §6. EJERCICIOS

1. Usar la abreviación $\lim\limits_{n\to\infty}$ para indicar: límite cuando n se vuelve muy grande. Probar que

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{(3n)!}{n^{3n}}\right]^{1/n} = \frac{27}{e^3}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{(3n)!}{n!\, n^{2n}}\right]^{1/n} = \frac{27}{e^2}$

2. Hallar el límite:

(a) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!}{n^{2n}}\right]^{1/n}$ (b) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!\,(5n)!}{n^{4n}(3n)!}\right]^{1/n}$

Hallar el radio de convergencia de las siguientes series:

3. (a) $\sum n^n x^n$ (b) $\sum \frac{x^n}{n^n}$

4. $\sum \frac{n}{n+5}x^n$ 5. $\sum (\log n)x^n$ 6. $\sum \frac{1}{\log n}x^n$

7. $\sum (\log n)^2 x^n$ 8. $\sum 2^n x^n$ 9. $\sum 2^{-n}x^n$

10. $\sum (1+n)^n x^n$ 11. $\sum \frac{x^n}{n}$ 12. $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

13. $\sum (1+(-2)^n)x^n$ 14. $\sum (1+(-1)^n)x^n$ 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}x^n$ 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n$ 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{5n}}{(2n)!n^{3n}}x^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^2}x^n$ 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi/2}{2^n}x^n$ 21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n}$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+\cos 2\pi n}{3n}x^n$ 23. $\sum_{n=2}^{\infty} nx^n$ 24 . $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2\pi n}{n!}x^n$

25. $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^n$ 26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2}{n^n}x^n$ 27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\log n}x^n$

28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!-1}x^n$ 29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}x^n$ 30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+1}{n!}x^n$

Nota: Para algunos de los radios de convergencia anteriores, recordar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^n = e.$$

XIV, §7. DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

Si tenemos un polinomio

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

con números a_0, $a_1, \ldots$, a_n como coeficientes, entonces sabemos cómo hallar su derivada: es $a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$. Quisiéramos decir que la derivada de una serie se puede tomar de la misma manera, y que la derivada converge si la serie converge.

Teorema 7.1. *Sea r un número > 0 y sea $\sum a_nx^n$ una serie que converge absolutamente para $|x| < r$. Entonces la serie $\sum na_nx^{n-1}$ también converge absolutamente para $|x| < r$.*

Demostración. Como estamos interesados en la convergencia absoluta, podemos suponer que $a_n \geq 0$ para todo n. Sea $0 < x < r$, y sea c un número tal que $x < c < r$. Recordar que

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1.$$

Podemos escribir

$$na_nx^n = a_n(n^{1/n}x)^n.$$

Entonces, para todo n suficientemente grande, concluimos que

$$n^{1/n}x < c$$

pues $n^{1/n}x$ está arbitrariamente cerca de x. Por lo tanto, para todo n suficientemente grande tenemos

$$na_nx^n < a_nc^n.$$

Podemos entonces comparar la serie $\sum na_nx^n$ con $\sum a_nc^n$ para concluir que $\sum na_nx^n$ converge. Como

$$\sum na_nx^{n-1} = \frac{1}{x}\sum a_nx^n,$$

hemos probado el teorema 7.1.

Un resultado similar se cumple para la integración, pero de manera trivial. En efecto, si tenemos una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$ que converge absolutamente para $|x| < r$, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^n$$

tiene términos cuyo valor absoluto es más pequeño que en la serie original.

Los resultados anteriores se pueden expresar diciendo que una serie de potencias absolutamente convergente se puede integrar y diferenciar término a término y producir así una serie de potencias absolutamente convergente.

Es natural esperar que, si

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n,$$

entonces f es diferenciable y su derivada está dada al diferenciar la serie término a término. El teorema siguiente prueba esto.

Teorema 7.2. *Sea*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n$$

una serie de potencias que converge absolutamente para $|x| < r$. *Entonces es diferenciable para* $|x| < r$, *y*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}.$$

Demostración. Sea $0 < b < r$. Sea $\delta > 0$ tal que $b + \delta < r$. Consideramos valores de x tales que $|x| < b$ y valores de h tales que $|h| < \delta$. Tenemos el numerador del cociente de Newton:

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+h)^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n[(x+h)^n - x^n].$$

Por el teorema del valor medio, existe un número x_n entre x y $x+h$ tal que

$$(x+h)^n - x^n = nx_n^{n-1}h$$

y, en consecuencia,

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x_n^{n-1} h.$$

Por lo tanto,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x_n^{n-1}.$$

Tenemos que mostrar que el cociente de Newton anterior tiende al valor de la serie obtenida al tomar la derivada término a término. Tenemos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x_n^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} na_n[x_n^{n-1} - x^{n-1}].$$

Usando de nuevo el teorema del valor medio, existe y_n entre x_n y x tal que la expresión precedente es

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)na_n y_n^{n-2}(x_n - x).$$

Tenemos que $|y_n| \leq b + \delta < r$, y $|x_n - x| \leq |h|$. En consecuencia,

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n|a_n||y_n|^{n-2}|h|$$
$$\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n|a_n|(b+\delta)^{n-2}.$$

Al aplicar dos veces el teorema 7.1 vemos que la serie de la derecha converge. Es igual a una constante fija. Como h tiende a 0, se sigue que la expresión de la derecha tiende a 0, de modo que la expresión de la izquierda también tiende a 0. Esto prueba que f es diferenciable en x y que su derivada es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$, para todo x tal que $|x| < b$. Esto se cumple para todo b, con $0 < b < r$, y, por lo tanto, se concluye la demostración de nuestro teorema.

Teorema 7.3. *Sea* $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *una serie de potencias que converge absolutamente para* $|x| < r$. *Entonces la relación*

$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

es válida en el intervalo $|x| < r$.

Demostración. Sabemos que la serie para f integrada término a término converge absolutamente en el intervalo. Por el teorema precedente, su derivada término a término es la serie para la derivada de la función, lo cual prueba nuestra afirmación.

Ejemplo. Si nunca hubiéramos oído hablar de la función exponencial, podríamos definir una función

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Al tomar la derivada término a término vemos que

$$f'(x) = f(x).$$

Entonces, por lo que sabemos del capítulo VIII, sección §1, ejercicio 8, concluimos que

$$f(x) = Ke^x$$

para alguna constante K. Al hacer $x = 0$ se muestra que

$$1 = f(0) = K.$$

Así, $K = 1$ y $f(x) = e^x$.

De manera análoga, si nunca hubiéramos oído hablar del seno ni del coseno, podríamos **definir** funciones

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \qquad C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots.$$

Al diferenciar término a término se muestra que

$$S'(x) = C(x), \qquad C'(x) = -S(x).$$

Más aún, $S(0) = 0$ y $C(0) = 1$. Se puede mostrar fácilmente que cualquier par de funciones $S(x)$ y $C(x)$ que satisfagan estas propiedades deben ser el seno y el coseno.

XIV, §7. EJERCICIOS

1. Verificar en detalle que, al diferenciar término a término la serie para el seno y el coseno dadas al final de la sección, se obtiene
$$S'(x) = C(x) \quad \text{y} \quad C'(x) = -S(x).$$

2. Sea
$$f(x) = \sum_{n=0}^{x} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$
Probar que $f''(x) = f(x)$.

3. Sea
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$
Probar que
$$x^2 f''(x) + x f'(x) = 4x^2 f(x).$$

4. Sea
$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$
Probar que $f'(x) = 1/(1+x^2)$.

5. Sea
$$J(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$
Probar que
$$x^2 J''(x) + x J'(x) + x^2 J(x) = 0.$$

6. Para cualquier entero positivo k, sea
$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}.$$
Probar que
$$x^2 J_k''(x) + x J_k'(x) + (x^2 - k^2) J_k(x) = 0.$$

APÉNDICE
a las primeras cuatro partes

Epsilon y delta

Este apéndice tiene como propósito mostrar que los conceptos y propiedades de los límites se pueden explicar y probar en términos de los conceptos y propiedades de los números. Para ello daremos por supuestos estos últimos, y en ellos basaremos nuestras demostraciones.

Queda el problema de mostrar cómo se pueden definir los números reales en términos de los números racionales, y los números racionales en términos de enteros. Eso es demasiado para incluirse en este libro.

Además de las reglas ordinarias de suma, multiplicación, resta y división (entre números diferentes de cero), orden, positividad y desigualdades, hay una propiedad fundamental que satisfacen los números reales. Esta propiedad está enunciada en la sección §1. Nuestras demostraciones usan, pues, sólo estas propiedades.

Advertencia. El nivel de comprensión abstracta y de uso del lenguaje necesario para dominar este apéndice es considerablemente más elevado que para el resto del libro. Estamos comprometidos en "demostrar" propiedades que son intuitivamente muy claras. Por lo tanto, no hay que tomar demasiado en serio este apéndice, a menos que se tengan inclinaciones teóricas, o se desee una introducción a algunas de las herramientas esenciales del análisis, i.e. una primera visión que pondrá algunas ideas en la cabeza para uso futuro en cursos más elevados, donde las técnicas descritas aquí se vuelven esenciales debido a que se necesitan estimados más complicados cuando se trata con dicho análisis superior. Es útil haber visto antes estas cosas, aunque no se dominen desde la primera vez. Es parte de nuestra psicología el que aprendamos por aproximación. Aún más, el conocimiento en un nivel se domina por completo sólo cuando se usa en el siguiente nivel de profundidad. Por lo tanto, estudiar cosas más difíciles, aunque se tenga un conocimiento limitado de ellas, hace posible entender por completo las cosas más fáciles.

No obstante, este apéndice deberá omitirse en circunstancias normales.

AP., §1. MÍNIMA COTA SUPERIOR

Encontramos de nuevo el problema de cuándo conviene entrar a la teoría. Resultaría muy largo y tedioso entrar demasiado pronto, por lo cual, supondremos conocido el contenido del capítulo I, secciones §1 y §2. Ahí se incluyen las operaciones ordinarias de suma y multiplicación, y los conceptos de orden, positividad, números negativos y desigualdades. Aquellos interesados en el desarrollo lógico de estos conceptos pueden consultar libros de análisis.

Una colección de números se llamará simplemente **conjunto** de números. Ésta es la terminología usual. Si un conjunto tiene al menos un número, decimos que es **no vacío**. Un conjunto S' se llama **subconjunto** de S si todo elemento de S' es un elemento de S, en otras palabras, si S' es parte de S.

Sea S un conjunto no vacío de números. Diremos que S está **acotado superiormente** si existe un número B tal que

$$x \leq B$$

para todo x en nuestro conjunto S. Llamamos entonces a B **cota superior** para S.

Una **mínima cota superior** para S es una cota superior L tal que cualquier cota superior B para S satisface la desigualdad $B \geq L$. Si M es otra cota superior, tenemos entonces que $M \geq L$ y $L \geq M$, de donde $L = M$. En consecuencia, una mínima cota superior es única.

Los conceptos de acotado inferiormente y de máxima cota inferior se definen del mismo modo, y queda como tarea para el lector.

Ahora daremos ejemplos que suponen que el lector tiene una noción intuitiva de los números reales. Servirán para aclarar nuestras ideas, pero no daremos demostraciones. Aunque esto es lo inverso al orden lógico, es el orden psicológico apropiado.

Ejemplo. El conjunto de los enteros positivos $\{1, 2, 3, \ldots\}$ no está acotado superiormente. Está acotado inferiormente. El número 1 es la máxima cota inferior.

Ejemplo. Sea S el conjunto de números x tales que $0 \leq x$ y $x^2 < 2$. Este conjunto está acotado inferiormente, por ejemplo por 0; también está acotado superiormente, y está claro que 2 es una cota superior. De hecho, $\sqrt{2}$ es la mínima cota superior. Nótese que la mínima cota superior no está en el conjunto S, esto es, no es un elemento de S.

Ejemplo. Sea T el conjunto de números x tales que $0 \leq x$ y $x^2 \leq 2$. De nuevo, $\sqrt{2}$ es la mínima cota superior de T, y es un elemento de T. Deberá ser intuitivamente claro que T difiere de S sólo en que contiene al elemento adicional $\sqrt{2}$.

Ejemplo. Sea U el conjunto de todos los números $1/n$ donde n varía sobre los números positivos. Así, U está formado por $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. Entonces U está acotado. El número 1 es su mínima cota superior y está en U. El número 0 es la máxima cota inferior y no está en U.

Los números reales satisfacen una propiedad que no satisface el conjunto de los números racionales, a saber:

Propiedad fundamental. *Todo conjunto no vacío S de números que esté acotado superiormente tiene mínima cota superior. Todo conjunto no vacío de números S que esté acotado inferiormente tiene máxima cota inferior.*

Proposición 1.1. *Sea a un número tal que*

$$0 \leq a < \frac{1}{n}$$

para todo entero positivo n. Entonces $a = 0$. No existe número b tal que $b \geq n$ para todo entero positivo n.

Demostración. Suponer que existe un número $a \neq 0$ tal que $a < 1/n$ para todo entero positivo n. Entonces $n < 1/a$ para todo entero positivo n. Así, para probar ambas afirmaciones, bastará probar la segunda.

Suponer que existe un número b tal que $b \geq n$ para todo entero positivo n. Sea S el conjunto de enteros positivos. Entonces S está acotado, y, por lo tanto, tiene una mínima cota superior. Sea C esta mínima cota superior. Ningún número estrictamente menor que C puede ser cota superior. Como $0 < 1$, tenemos que $C < C + 1$, de donde $C - 1 < C$. Por lo tanto, existe un entero positivo n tal que

$$C - 1 < n.$$

Esto implica que $C < n + 1$ y $n + 1$ es un entero positivo. Esto contradice nuestra hipótesis de que C es una cota superior para el conjunto de los enteros positivos, de modo que no puede existir dicha cota superior.

Se puede observar que la proposición 1.1 prueba que el conjunto de los enteros positivos no está acotado superiormente. Es razonable preguntar si esta clase de propiedades obvias realmente necesita del axioma de la mínima cota superior para probarse, y la respuesta es *sí*. Es posible construir sistemas que satisfagan todas las reglas ordinarias para la suma, multiplicación, división (entre elementos distintos de cero), desigualdades, y tal que no satisfaga el axioma de la mínima cota superior, y tal que exista un elemento t en el sistema con la propiedad de que $n < t$ para todos los enteros positivos n. No queremos hacer muy largo este apéndice y no construiremos dichos sistemas, pero quizá resulte esclarecedor confirmar que la propiedad de la mínima cota superior fue necesaria para la demostración de la Proposición 1.1.

AP., §1. EJERCICIOS

Determinar en cada caso si el conjunto está acotado superior o inferiormente, y describir la mínima cota superior y la máxima cota inferior, si existen, sin dar demostraciones, usando sólo su intuición acerca de los números.

1. (a) El conjunto de todos los enteros positivos pares.
   (b) El conjunto de todos los enteros positivos impares.
   (c) El conjunto de todos los números racionales.
2. (a) El conjunto de todos los números x tales que $0 \leq x$ y $x^3 < 5$.
   (b) El conjunto de todos los números x tales que $0 \leq x$ y $x^3 \leq 5$.
   (c) El conjunto de todos los números x tales que $x^2 \leq 4$.
   (d) El conjunto de todos los números x tales que $2x - 7 < 4$.
3. Probar que existe un entero positivo N tal que, si n es un entero $\geq N$, entonces $3n > 150$.
4. Sea B un número positivo. Probar que existe un entero positivo N tal que, si n es un entero $\geq N$, entonces $5n > B$.
5. Sea S el conjunto de números x tal que $0 \leq x$ y $x^2 \leq 2$. Probar que la mínima cota superior de S es un número b tal que $b^2 = 2$. [*Idea:* Probar que $b^2 > 2$ y $b^2 < 2$ es imposible.]

AP., §2. LÍMITES

Sea S un conjunto de números y sea f una función definida para todos los números en S. Sea x_0 un número. Supondremos que S está **arbitrariamente cerca de** x_0, i.e. dado $\varepsilon > 0$ existe un elemento x de S tal que $|x - x_0| < \varepsilon$. Sea L un número. Diremos que $f(x)$ **tiende al límite** L **cuando** x **tiende a** x_0 si se satisface la siguiente condición:

Dado un número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todo x en S que satisfaga

$$|x - x_0| < \delta$$

tenemos

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Si ése es el caso, escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Podemos reescribir esto como sigue:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = L$$

y decimos que **el límite de** $f(x_0 + h)$ **es** L **cuando** h **tiende a** 0, si se satisface la siguiente condición:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, cada vez que h sea un número con $|h| < \delta$ y $x_0 + h$ en S, entonces

$$|f(x_0 + h) - L| < \varepsilon.$$

Nótese que nuestra definición de límite depende del conjunto S donde está definida f. Así, deberíamos decir "el límite con respecto a S." La proposición siguiente muestra que realmente esto es innecesario.

Proposición 2.1. *Sea S un conjunto de números arbitrariamente cerca de x_0 y sea S' un subconjunto de S, también arbitrariamente cerca de x_0. Sea f una función definida en S. Si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{(respecto a } S\text{)},$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = M \quad \text{(respecto a } S'\text{)},$$

entonces $L = M$. En particular, el límite es único.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que, cuando x está en S' y $|x - x_0| < \delta_1$, tenemos

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y existe $\delta_2 > 0$ tal que, si $|x - x_0| < \delta_2$, entonces

$$|f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$. Si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$|L - M| \leq |L - f(x) + f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, $|L - M|$ es menor que cualquier $\varepsilon > 0$ y, por la proposición 1.1, debemos tener $|L - M| = 0$, de donde

$$L - M = 0$$

y

$$L = M.$$

En la práctica, de ahora en adelante, omitiremos decir que x es un elemento de S. El contexto lo hará claro en cada caso.

Más aún, en muchas demostraciones subsecuentes necesitaremos que se satisfagan de manera simultánea varias desigualdades, al igual que en la demostración anterior tuvimos desigualdades con δ_1 y δ_2. En cada caso usamos un truco similar, hacemos δ igual al mínimo de δ_1, δ_2, δ_3, ...necesario para que sea válida cada desigualdad deseada. Así, al escribir las demostraciones omitimos las δ_1, δ_2, δ_3, ...intermedias.

Observación. Suponiendo que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, entonces existe $\delta > 0$ tal que, si $|x - x_0| < \delta$, tenemos

$$|f(x) < |L| + 1.$$

En efecto, dado $1 > 0$ existe δ tal que, si $|x - x_0| < \delta$, tenemos

$$|f(x) - L| < 1,$$

de modo que nuestra afirmación se sigue de las propiedades usuales de las desigualdades.

Nótese además que tenemos, de manera trivial,

$$\lim_{x \to x_0} C = C$$

para cualquier número C, visto como una función constante en S. En efecto, dado $\varepsilon > 0$,

$$|C - C| < \varepsilon.$$

Observación. Digamos una palabra acerca de límites **"cuando x se vuelve grande."** Sea a un número y f una función definida para todos los números $x \geq a$. Sea L un número. Diremos que **$f(x)$ tiende a L cuando x se vuelve grande**, y lo escribimos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

si se satisface la siguiente condición. Dado $\varepsilon > 0$, existe un número A tal que, si $x > A$, tenemos

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

En la práctica, en lugar de decir "cuando x se vuelve grande," decimos a veces "cuando x tiende a ∞." Dejamos al lector definir los conceptos análogos "cuando x se vuelve negativo grande," o "x tiende a $-\infty$."

En la definición de $\lim\limits_{x \to \infty}$ tomamos una función f definida para $x \geq a$. Si $a_1 > a$, y restringimos la función a todos los números $\geq a_1$, entonces el límite cuando x se vuelve muy grande será el mismo.

Supongamos que $a \geq 1$. Definir una función g para valores de x tales que

$$0 < x \leq 1/a$$

por la condición

$$g(x) = f(1/x).$$

Entonces, un momento de concentración permitirá probar que

$$\lim_{x \to 0} g(x)$$

existe si, y sólo si,

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

existe, y que son iguales.

En consecuencia, todas las propiedades que probamos respecto a límites cuando x tiende a 0 (o a un número) inmediatamente dan lugar a propiedades similares respecto a límites cuando x se vuelve muy grande. Dejamos al lector su formulación.

Se presenta un caso importante cuando la función se define para los enteros positivos, lo cual se llama **sucesión**. Una sucesión de números se denota usualmente por

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

o simplemente $\{a_n\}$.

Ejemplo. Sea $a_n = f(n) = (-1)^n$. Entonces

$$a_1 = -1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_3 = -1, \qquad a_4 = 1,$$

y así sucesivamente. Observar que los números de la sucesión con índice diferente, por ejemplo a_2 y a_4, pueden ser iguales.

Ejemplo. Sea $a_n = 2n$. Esto define la sucesión de enteros pares positivos.

Ejemplo. Sea $a_n = 2n + 1$. Esto define la sucesión de enteros impares positivos ≥ 3.

Ejemplo. Tenemos $\lim\limits_{n \to \infty} 1/nx = 0$ para cualquier número $x \neq 0$. Para probar esto, digamos que $x > 0$. Dado ε, sea N un entero positivo tal que $1/N < \varepsilon x$. Si $n \geq N$, entonces

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon x,$$

por lo que $1/nx < \varepsilon$. Esto prueba nuestra afirmación cuando $x > 0$. La demostración cuando $x < 0$ es análoga. Realizarla completamente.

Los teoremas siguientes, que se refieren a las propiedades básicas de los límites, describen límites de sumas, productos, cocientes, desigualdades y funciones compuestas.

Teorema 2.2. *Sean S un conjunto de números y f y g dos funciones definidas para todos los números en S. Sea x_0 un número. Si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

y

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = M,$$

entonces $\lim\limits_{x \to x_0} (f + g)(x)$ existe y es igual a $L + M$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, cuando $|x - x_0| < \delta$ (y x esté en S), tenemos

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Observamos que

$$|f(x) + g(x) - L - M| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \varepsilon.$$

Esto prueba que $L + M$ es el límite de $(f + g)(x)$ cuando x tiende a x_0.

Teorema 2.3. *Sean S un conjunto de números y f y g dos funciones definidas para todos los números en S. Sea x_0 un número. Si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

y

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = M,$$

entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ existe y es igual a LM.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, cuando $|x - x_0| < \delta$, tenemos

$$|f(x) - L| < \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{|M|+1},$$

$$|g(x) - M| < \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{|L|+1},$$

$$|f(x)| < |L| + 1.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \\
&\le |f(x)g(x) - f(x)M| + |f(x)M - LM| \\
&\le |f(x)|\,|g(x) - M| + |f(x) - L|\,|M| \\
&< (|L|+1)\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{|L|+1} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{|M|+1}|M| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Corolario 2.4. *Sea C un número y sean las mismas hipótesis del teorema. Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} Cf(x) = CL.$$

Demostración. Clara.

Corolario 2.5. *Sea la notación como en el teorema 2.3. Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M.$$

Demostración. Clara.

Teorema 2.6. *Sean S un conjunto de números y f una función definida para todos los números en S. Sea x_0 un número. Si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

y $L \neq 0$, entonces el límite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}$$

existe y es igual a $1/L$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, cuando $|x - x_0| < \delta$, tenemos

$$|f(x) - L| < \frac{|L|}{2}$$

y también

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon|L|^2}{2}.$$

De la primera desigualdad obtenemos

$$|f(x)| \ge |L| - \frac{|L|}{2} = \frac{|L|}{2}.$$

En particular, $f(x) \neq 0$ cuando $|x - x_0| < \delta$. Para dichos x tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| &= \frac{|L - f(x)|}{|f(x)L|} \\
&\le \frac{2}{|L|}\frac{|L - f(x)|}{|L|} \\
&< \frac{2}{|L|^2}\frac{\varepsilon|L|^2}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Corolario 2.7. *Sean las mismas hipótesis que en el teorema 2.3 y supongamos que $L \neq 0$. Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$$

existe y es igual a M/L.

Demostración. Usar el teorema 2.3 y el teorema 2.6.

Teorema 2.8. *Sea S un conjunto de números y f una función en S. Sea x_0 un número. Sea g una función en S tal que $g(x) \le f(x)$ para todo x en S. Suponer que*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = M.$$

Entonces $M \le L$.

Demostración. Sea $\phi(x) = f(x) - g(x)$. Entonces $\phi(x) \ge 0$ para todo x en S. Además,

$$\lim_{x\to x_0} \phi(x) = L - M$$

por el corolario 2.5. Sea K este límite. Debemos mostrar que $K \ge 0$. Suponer que $K < 0$. Entonces $-K > 0$ y $|K| = -K$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, cuando $|x - x_0| < \delta$, tenemos

$$|\phi(x) - K| < \varepsilon,$$

de donde

$$\phi(x) - K < \varepsilon.$$

Como $\phi(x) \ge 0$, obtenemos $-K < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. En particular, para todos los enteros positivos n tenemos $-K < 1/n$. Pero $-K > 0$. Esto contradice la proposición 1.1.

Teorema 2.9. *Sea la notación como en el teorema 2.8 y supongamos que $M = L$. Sea ψ una función en S tal que*

$$g(x) \leq \psi(x) \leq f(x)$$

para todo x en S. Entonces

$$\lim_{x\to x_0} \psi(x)$$

existe y es igual a L (o M).

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, cuando $|x - x_0| < \delta$, tenemos

$$|g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{4},$$
$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

También tenemos

$$\begin{aligned}|f(x) - \psi(x)| &\leq |f(x) - g(x)| \\ &\leq |f(x) - L + L - g(x)| \\ &\leq |f(x) - L| + |L - g(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}|L - \psi(x)| &\leq |L - f(x)| + |f(x) - \psi(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Teorema 2.10. *Sean S y T conjuntos de números y sean f y g funciones definidas en S y T, respectivamente. Sea x_0 arbitrariamente cerca de S. Suponer que para todo x en S tenemos $f(x)$ en T, de modo que está definida $g \circ f$. Suponer que*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

existe y es igual a un número y_0 arbitrariamente cerca de T. Suponer que

$$\lim_{y\to y_0} g(y)$$

existe y es igual a L. Entonces

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = L.$$

Demostración. Dado ε, existe δ tal que, cuando y está en T y

$$|y - y_0| < \delta,$$

tenemos

$$|g(y) - L| < \varepsilon.$$

Para la δ anterior dada, existe δ_1 tal que, cuando x está en S y $|x - x_0| < \delta_1$, tenemos $|f(x) - y_0| < \delta$. De aquí se sigue que

$$|g(f(x)) - L| < \varepsilon$$

lo cual prueba nuestra afirmación.

[*Nota:* El teorema 2.10 justifica el procedimiento de límite usado para probar la regla de la cadena.]

Esto prueba completamente todas las afirmaciones acerca de límites que hicimos en el capítulo III.

AP., §2. EJERCICIOS

1. Sea g una función acotada en un conjunto de números S. Sea f una función en S tal que
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$
Probar que $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

2. Para un número arbitrario x, sea
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + nx}.$$
Hallar el límite explícitamente; probar todas las afirmaciones que se hagan.

3. (a) Sea $b > 1$, y escribir $b = 1 + c$ con $c > 0$. Probar: Dado un número positivo B, existe un entero positivo N tal que, si $n \geq N$, entonces $b^n > B$.
   (b) Sea $0 < x < 1$. Probar que
   $$\lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$
   (c) Si $-1 < x < 0$, ¿el límite en (b) sigue siendo 0? De ser así, dar una demostración. Ver lo que sucede con un ejemplo, i.e. escribir los valores x^n cuando $x = -1/2$ y $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y 7.

4. ¿Para qué números x existe el límite siguiente:
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}?$$
Dar explícitamente los valores $f(x)$ para varios x para los cuales exista el límite.

5. Para $x \neq -1$, probar que el siguiente límite existe:
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1}.$$
   (a) ¿Cuáles son $f(1)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(2)$?
   (b) ¿Cuál es $\lim_{x\to 1} f(x)$?
   (c) ¿Cuál es $\lim_{x\to -1} f(x)$?

6. Responder las mismas preguntas que en el ejercicio 5 si
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^n - 1}{x^n + 1}\right)^2,$$
y $x \neq -1$.

7. Hallar los límites siguientes cuando $n \to \infty$.
(a) $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (b) $\frac{3}{n^2}$ (c) $\frac{5}{n^{1/4}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{n}+1}$
8. Hallar los límites siguientes.
(a) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ (b) $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ (c) $\sqrt{n-5}-\sqrt{n}$
[*Idea:* Racionalizar el "numerador."]

AP., §3. PUNTOS DE ACUMULACIÓN

Una **sucesión** es una función definida en un conjunto de enteros ≥ 0. Usualmente, este conjunto está formado por todos los enteros positivos. En ese caso, una sucesión equivale a dar números

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

para cada entero positivo, y denotamos la sucesión por

$$\{a_n\}, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si el conjunto está formado por todos los enteros ≥ 0, entonces denotamos la sucesión por $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Sea $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ una sucesión. Sea C un número. Decimos que C es un **punto de acumulación** de la sucesión si, dado $\varepsilon > 0$, existen infinidad de enteros n tales que

$$|a_n - C| < \varepsilon.$$

Sea $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ una sucesión y L un número. Diremos que L es un **límite de la sucesión** si, dado $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que, para todo $n > N$, tengamos

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Entonces el límite es único (la demostración es del mismo tipo que la que dimos para límites de funciones).

Diremos que la sucesión $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es **creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para todos los enteros positivos n.

Teorema 3.1. *Sea $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ una sucesión creciente, y suponer que está acotada superiormente. Entonces la mínima cota superior L es un límite de la sucesión.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, el número $L - (\varepsilon/2)$ no es una cota superior para la sucesión. Por lo tanto, existe algún número a_N tal que

$$L - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_N.$$

Esta desigualdad también se satisface para todo $n > N$, pues la sucesión es creciente. Pero

$$a_n \leq L$$

pues L es una cota superior. Así

$$|L - a_n| = L - a_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

para todo $n > N$, probando así nuestra afirmación.

Corolario 3.2. *Sea $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ una sucesión, y sean A y B dos números tales que $A \leq a_n \leq B$ para todos los enteros positivos n. Entonces existe un punto de acumulación C de la sucesión entre A y B.*

Demostración. Para cada entero n sea b_n la máxima cota inferior del conjunto de números $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. Entonces $b_n \leq b_{n+1} \leq \cdots$, i.e. $\{b_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es una sucesión creciente y B es una cota superior. Sea L su límite, como en el teorema 3.1. Dejamos como ejercicio probar que este límite es un punto de acumulación.

Podemos reducir el concepto de límite de una sucesión al de los límites definidos previamente.

Sea S el conjunto de números

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots,$$

i.e. el conjunto de números que pueden escribirse como $1/n$ donde n es un entero positivo.

Si $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es una sucesión, sea f una función definida por S mediante la regla

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = a_n.$$

Entonces se verificará inmediatamente que

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

existe si, y sólo si,

$$\lim_{h\to 0} f(h)$$

existe, y en ese caso los dos límites son iguales. Decimos que una sucesión $\{a_n\}$ **tiende a un número L cuando n se vuelve grande si**

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Así, las propiedades respecto a los límites según se trataron en la sección §2 inmediatamente dan lugar a propiedades respecto a los límites de sucesiones (por ejemplo, límites de sumas, productos y cocientes). Dejamos la traducción al lector.

AP., §3. EJERCICIOS

1. Sea $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos cerrados, digamos que $I_n = [a_n, b_n]$, donde $[a, b]$ significa el conjunto de números x tales que $a \leq x \leq b$. Supongamos que los extremos izquierdos de esta sucesión de intervalos crece, esto es

$$a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$$

y que los extremos derechos decrecen (esto es $b_{n+1} \leq b_n$ para todos los enteros positivos n). Sea $L(I_n)$ la longitud del intervalo I_n, esto es

$$L(I_n) = b_n - a_n.$$

Si

$$\lim_{n\to\infty} L(I_n) = 0,$$

probar que existe un punto c en cada intervalo I_n tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$= c.$$

2. Sea c_n un elemento de I_n del ejercicio 1. Con la misma hipótesis que en el ejercicio 1, probar que

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

AP., §4. FUNCIONES CONTINUAS

Sea f una función definida en un conjunto de números S. Sea x_0 un número en S. Entonces S está arbitrariamente cerca de x_0. Decimos que f es **continua** en x_0 si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nótese que puede haber dos números a y b, con $a < x_0 < b$, tal que x_0 es el único punto que está en el intervalo y está también en S. (En este caso se podría decir que x_0 es un punto **aislado** de S.)

Se sigue inmediatamente de nuestra definición que, si $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es una sucesión de números en S tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$$

y f es continua en x_0, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Se obtiene de manera inmediata que la suma, el producto y el cociente de funciones continuas también son funciones continuas. (En el cociente suponemos, por supuesto, que $f(x_0) \neq 0$.) Toda función constante es continua. La función $f(x) = x$ es continua para todo x. Esto se verifica con la mayor facilidad. Del teorema del cociente vemos que la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

(definida para $x \neq 0$) es continua.

Teorema 4.1. *Sean f y g funciones continuas tales que los valores de f están contenidos en el dominio de definición de g. Entonces $g \circ f$ es continua.*

Demostración. Sea x_0 un número en el cual f está definida, y sea

$$y_0 = f(x_0).$$

Dado $\varepsilon > 0$, como g es continua en y_0, existe $\delta_1 > 0$ tal que, si $|y - y_0| < \delta_1$, entonces

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon.$$

Ahora, para δ_1 dada, existe $\delta > 0$ tal que, si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta_1.$$

Por lo tanto,

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon,$$

probando así nuestro teorema.

Teorema 4.2. *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$. Entonces existe un punto c en el intervalo tal que $f(c)$ es un máximo, y existe un punto d en el intervalo tal que $f(d)$ es un mínimo.*

Demostración. Probaremos primero que f está acotada, i.e. que existe un número M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo x en el intervalo.

Si f no está acotada, entonces, para todo entero positivo n, podemos hallar un número x_n en el intervalo tal que $|f(x_n)| > n$. La sucesión de dichos x_n tiene un punto de acumulación C en el intervalo. Tenemos

$$|f(x_n) - f(C)| \geq |f(x_n)| - |f(C)|$$
$$\geq n - f(C).$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, cuando

$$|x_n - C| < \delta,$$

tenemos $|f(x_n) - f(C)| < \varepsilon$. Esto tiene que suceder para infinidad de n, ya que C es un punto de acumulación. Nuestras afirmaciones son contradictorias y, por lo tanto, concluimos que la función está acotada.

Sea β la mínima cota superior del conjunto de valores $f(x)$ para todo x en el intervalo. Entonces, dado un entero positivo n, podemos hallar un número z_n en el intervalo tal que

$$|f(z_n) - \beta| < \frac{1}{n}.$$

Sea c un punto de acumulación de la sucesión de números

$$\{z_n\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Entonces $f(c) \leq \beta$. Afirmamos que

$$f(c) = \beta$$

(esto probará el teorema).

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, cuando $|z_n - c| < \delta$, tenemos

$$|f(z_n) - f(c)| < \varepsilon.$$

Esto sucede para infinidad de n, pues c es un punto de acumulación de la sucesión $\{z_n\}$. Pero

$$\begin{aligned} |f(c) - \beta| &\leq |f(c) - f(z_n)| + |f(z_n) - \beta| \\ &< \varepsilon + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Esto es cierto para todo ε e infinidad de enteros positivos n. Por lo tanto, $|f(c) - \beta| = 0$ y $f(c) = \beta$.

La demostración para el mínimo es parecida y se dejará como ejercicio.

Teorema 4.3. *Sea f una función continua en un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$. Sean $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$. Sea γ un número tal que $\alpha < \gamma < \beta$. Entonces existe un número c entre a y b tal que $f(c) = \gamma$.*

Demostración. Sea S el conjunto de números x en el intervalo, tal que $f(x) \leq \gamma$. Entonces S es no vacío porque a está ahí, y b es una cota superior de S. Sea c su mínima cota superior. Entonces c está en nuestro intervalo. Afirmamos que $f(c) = \gamma$. Si $f(c) < \gamma$, entonces $c \neq b$ y $f(x) < \gamma$ para todo $x > c$ suficientemente cerca de c, pues f es continua en c. Esto contradice el hecho de que c es una cota superior para S. Si $f(c) > \gamma$, entonces $c \neq a$ y $f(x) > \gamma$ para todo $x < c$ suficientemente cerca de c, de nuevo porque f es continua en c. Esto contradice el hecho de que c es una mínima cota superior para S. Concluimos que $f(c) = \gamma$, como había que demostrar.

Parte cinco

Funciones de varias variables

En el primer capítulo de esta parte consideraremos los vectores, que constituyen la herramienta algebraica básica para investigar funciones de varias variables. Los aspectos que veremos de la diferenciación de vectores son los que se puedan manejar mediante los métodos de "una variable". La razón para esto es que, en espacios de dimensión superior, podemos unir dos puntos mediante una curva y estudiar una función al ver sus valores sólo sobre esa curva. Esto reduce muchos problemas de dimensiones superiores a problemas de tipo unidimensional.

CAPÍTULO XV

Vectores

El concepto de vector es básico para el estudio de funciones de varias variables y proporciona una motivación geométrica para todo lo que sigue. Por lo tanto, se estudiarán por completo las propiedades tanto algebraicas como geométricas de los vectores.

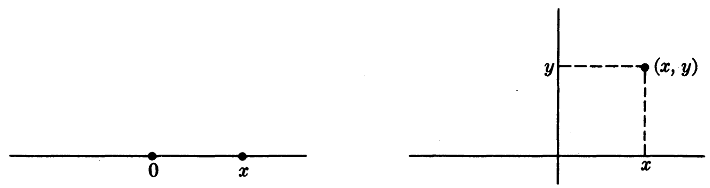
Una característica principal de todos los enunciados y demostraciones de esta parte es que no es más fácil ni más difícil probarlos en el 3-espacio que en el 2-espacio.

XV, §1. DEFINICIÓN DE PUNTOS EN EL ESPACIO

Sabemos que se puede usar un número para representar un punto en una recta, una vez seleccionada una unidad de longitud.

Se puede usar un par de números (i.e. una pareja de números) (x, y) para representar un punto en el plano.

Éstos se pueden ilustrar como sigue:



(a) Punto sobre una recta (b) Punto en un plano

Figura 1

Observamos ahora que se puede usar una terna de números (x, y, z) para representar un punto en el espacio, esto es, en el espacio tridimensional, o 3-espacio. Simplemente introducimos más ejes. La figura 2 ilustra esto.

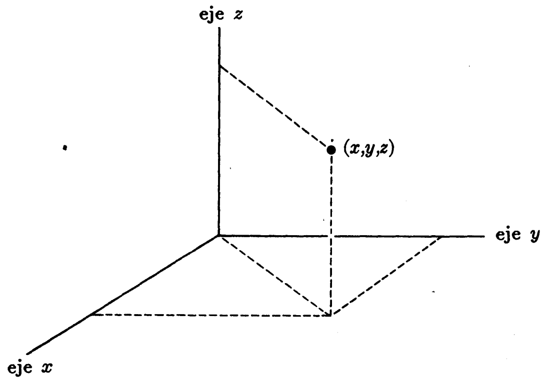


Figura 2

En lugar de usar x, y y z, podríamos usar (x_1, x_2, x_3). La recta se podría llamar 1-espacio y el plano 2-espacio.

Así, podemos decir que un solo número representa un punto en el 1espacio. Una pareja representa un punto en el 2-espacio. Una terna representa un punto en el 3-espacio.

Aunque no podemos dibujar una cuarteta de números, nada nos impide considerarla,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

y decretar que éste es un punto en el 4-espacio. Una quinteta sería un punto en el 5-espacio, después continuaríamos con una sexteta, septeta, octeta,....

Nos dejamos llevar y **definimos un punto en el n-espacio** como una n-tupla de números

$$(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

si n es un entero positivo. Denotaremos dicha n-tupla por una letra mayúscula X, y trataremos de guardar las letras minúsculas para números y las letras mayúsculas para puntos. Los números $x_1, \dots, x_n$ se llaman **coordenadas** del punto X. Por ejemplo, en el 3-espacio, 2 es la primera coordenada del punto $(2, 3, -4)$, y -4 es su tercera coordenada. Denotamos el n-espacio por $\mathbf{R}^n$.

La mayoría de nuestros ejemplos ocurrirán cuando $n = 2$ o $n = 3$. Así, el lector puede visualizar cualquiera de estos dos casos a lo largo de todo el libro. Sin embargo, se deben hacer tres comentarios.

Primero, tenemos que manejar $n = 2$ y $n = 3$, así que, para evitar multitud de repeticiones, es útil tener una notación que cubra simultáneamente ambos casos, aun cuando repitamos a veces la formulación de ciertos resultados de manera separada para cada uno.

Segundo, ningún teorema o fórmula es más sencillo al hacer la hipótesis de que $n = 2$ o 3.

Tercero, el caso $n = 4$ se presenta en física.

Ejemplo 1. Un ejemplo clásico del 3-espacio es, por supuesto, el espacio en el que vivimos. Después de seleccionar un origen y un sistema coordenado, podemos describir la posición de un punto (cuerpo, partícula, etc.) mediante 3 coordenadas. Más aún, como ya se sabe desde hace mucho, es conveniente extender este espacio a un espacio de 4 dimensiones (o tetradimensional), donde el tiempo es la cuarta coordenada, y como origen para el tiempo se puede seleccionar el nacimiento de Cristo (aunque esto es completamente arbitrario. Quizá fuera más conveniente seleccionar como origen el nacimiento del sistema solar o de la Tierra, si pudiéramos determinarlo con precisión). Entonces, un punto con coordenada de tiempo negativa es un punto A.C. y un punto con coordenada de tiempo positiva es un punto D.C.

Pero no se queden con la idea de que "el tiempo es *la* cuarta dimensión." El espacio tetradimensional anterior es sólo un ejemplo posible. En economía, por ejemplo, se usa un espacio muy diferente, tomando como coordenadas, digamos, el número de dólares gastados en una industria. Por ejemplo, podríamos tratar con un espacio 7-dimensional con coordenadas correspondientes a las siguientes industrias:

1. Acero	2. Automotriz	3. Productos de granja	4. Pesca
5. Químicos	6. Vestido	7. Transporte	

Acordemos que un megadólar por año es una unidad de medición. Entonces un punto

$$(1000, 800, 550, 300, 700, 200, 900)$$

en este 7-espacio significará que la industria del acero gastó mil millones de dólares en el año dado y que la industria química gastó 700 millones de dólares en ese año.

La idea de considerar el tiempo como una cuarta dimensión es antigua. Ya en la *Encyclopédie* de Diderot, que data del siglo dieciocho, d'Alembert escribe en su artículo sobre "dimensión":

> Cette manière de considérer les quantités de plus de trois dimensions est aussi exacte que l'autre, car les lettres peuvent toujours être regardées comme représentant des nombres rationnels ou non. J'ai dit plus haut qu'il n'était pas possible de concevoir plus de trois dimensions. Un homme d'esprit de ma connaissance croit qu'on pourrait cependant regarder la durée comme une quatrième dimension, et que le produit temps par la solidité serait en quelque manière un produit de quatre dimensions; cette idée peut être contestée, mais elle a, ce me semble, quelque mérite, quand ce ne serait que celui de la nouveauté.
>
> *Encyclopédie,* Vol. 4 (1754), p. 1010

Traducido, esto significa:

> **Esta manera de considerar las cantidades de más de tres dimensiones es igual de correcta que la otra, pues siempre se puede considerar que las letras representan números, ya sean racionales o no. Ya he dicho que no es posible concebir más de tres dimensiones. Un hombre inteligente que conozco piensa que, no obstante, podemos contemplar la duración como una cuarta dimensión, y que el producto del tiempo por la solidez sería, de alguna manera, un producto de cuatro dimensiones. Esta idea podrá discutirse, pero tiene, a mi parecer, algún mérito, aunque no sea sino el de la novedad.**

Observen cómo d'Alembert se refiere a un "hombre inteligente" siendo que se trata de él mismo. Es un tanto cuidadoso al proponer lo que en su tiempo ha de haber sido una idea extraordinaria, y que logró presencia hasta el siglo XX.

D'Alambert también visualizó claramente los espacios de dimensión superior como "productos" de espacios de dimensión menor. Por ejemplo, podemos ver el 3-espacio como si colocáramos lado a lado las primeras dos coordenadas (x_1, x_2) y después la tercera, x_3. Así escribimos

$$\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^1.$$

Usamos el signo de producto, que no deberá confundirse con otros "productos", como el producto de números. La palabra "producto" se usa en dos contextos. De manera análoga, podemos escribir

$$\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^1.$$

Hay otras manera de expresar $\mathbf{R}^4$ como un producto, a saber,

$$\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2.$$

Esto significa que vemos por separado las primeras dos coordenadas (x_1, x_2) y las dos últimas coordenadas (x_3, x_4). Más adelante volveremos con estos productos.

Ahora definiremos cómo sumar puntos. Si A y B son dos puntos, digamos en el 3-espacio,

$$A = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{y} \quad B = (b_1, b_2, b_3)$$

entonces **definimos** $A + B$ como el punto cuyas coordenadas son

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

Ejemplo 2. En el plano, si $A = (1, 2)$ y $B = (-3, 5)$, entonces

$$A + B = (-2, 7).$$

En el 3-espacio, si $A = (-1, \pi, 3)$ y $B = (\sqrt{2}, 7, -2)$, entonces

$$A + B = (\sqrt{2} - 1, \pi + 7, 1).$$

Al usar un n neutral para cubrir ambos casos (del 2-espacio y el 3-espacio), los puntos se podrían escribir

$$A = (a_1, \ldots, a_n), \qquad B = (b_1, \ldots, b_n),$$

y **definimos** $A + B$ como el punto cuyas coordenadas son

$$(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n).$$

Observamos que se satisfacen las reglas siguientes:

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
2. $A + B = B + A$.
3. Si hacemos
$$O = (0, 0, \ldots, 0)$$
el punto tal que todas sus coordenadas son 0, entonces
$$O + A = A + O = A$$
para todo A.
4. Sea $A = (a_1, \ldots, a_n)$ y sea $-A = (-a_1, \ldots, -a_n)$. Entonces
$$A + (-A) = O.$$

Todas estas propiedades son muy simples, y son ciertas porque son ciertas para los números, y la suma de n-tuplas se define en términos de la suma de sus componentes, que son números.

Nota. No confundir el número 0 y la n-tupla $(0, \ldots, 0)$. Usualmente denotaremos esta n-tupla por O y también la llamaremos cero, pues en la práctica no puede presentarse ninguna dificultad.

Ahora daremos una interpretación geométrica de la suma y la multiplicación por números, en el plano (se puede visualizar de manera simultánea lo que sucede en el 3-espacio).

Ejemplo 3. Sea $A = (2, 3)$ y $B = (-1, 1)$. Entonces

$$A + B = (1, 4).$$

La figura se ve como un **paralelogramo** (Fig. 3).

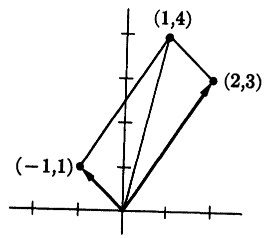


Figura 3

Ejemplo 4. Sea $A = (3,1)$ y $B = (1,2)$. Entonces

$$A + B = (4,3).$$

Vemos de nuevo que la representación geométrica de nuestra suma se ve como un **paralelogramo** (Fig. 4).

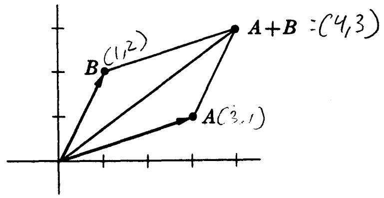


Figura 4

La razón de que la figura se vea como un **paralelogramo** se puede dar en términos de geometría plana como sigue. Obtenemos $B = (1,2)$ al comenzar desde el origen $O = (0,0)$ y movernos 1 unidad a la derecha y 2 hacia arriba. Para obtener $A + B$, partimos de A y de nuevo nos movemos 1 unidad a la derecha y 2 hacia arriba. Así los segmentos de recta entre O y B, y entre A y $A+B$ son las hipotenusas de los triángulos rectángulos cuyos catetos correspondientes son de la misma longitud y paralelos. Los segmentos son, por lo tanto, paralelos y de la misma longitud, según se ilustra en la figura 5.

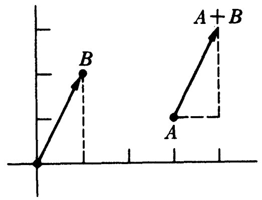


Figura 5

Ejemplo 5. Si de nuevo $A = (3,1)$, entonces $-A = (-3,-1)$. Si localizamos este punto, vemos que $-A$ tiene dirección opuesta a A. Podemos ver $-A$ como la reflexión de A respecto al origen.

Consideremos ahora la multiplicación de A por un número. Si c es cualquier número, **definimos** cA como el punto cuyas coordenadas son

$$(ca_1, \ldots, ca_n).$$

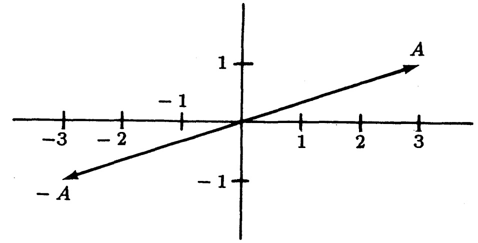


Figura 6

Ejemplo 6. Si $A = (2,-1,5)$ y $c = 7$, entonces $cA = (14,-7,35)$.

Es fácil verificar las reglas:

5. $c(A + B) = cA + cB$.
6. Si c_1 y c_2 son números, entonces

$$(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A \quad \text{y} \quad (c_1c_2)A = c_1(c_2A).$$

Nótese además que

$$(-1)A = -A.$$

¿Cuál es la representación geométrica de la multiplicación por un número?

Ejemplo 7. Sean $A = (1,2)$ y $c = 3$. Entonces

$$cA = (3,6)$$

como en la figura 7(a).

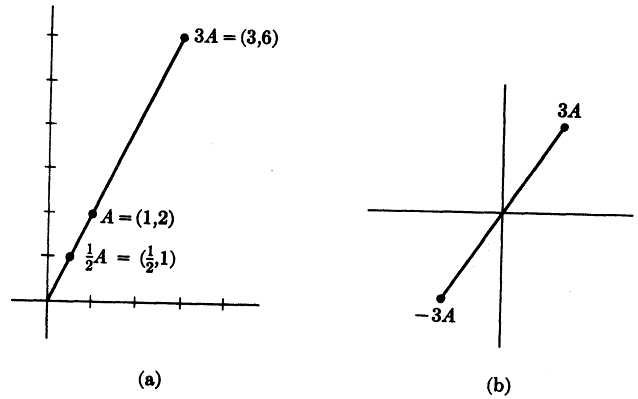


Figura 7

La multiplicación por 3 equivale a estirar A por 3. De manera análoga,

$\frac{1}{2}A$ equivale a estirar A por $\frac{1}{2}$, i.e. a encoger A a la mitad de su tamaño. En general, si t es un número, $t > 0$, interpretamos tA como un punto en la misma dirección que A a partir del origen, pero t veces la distancia. De hecho, definimos que A y B tienen la **misma dirección** si existe un número $c > 0$ tal que $A = cB$. Insistimos en que esto significa que A y B tienen la misma dirección **respecto al origen**. Para simplificar el lenguaje, omitimos las palabras "respecto al origen".

La multiplicación por un número negativo invierte la dirección. Así, $-3A$ se representaría como en la figura 7(b).

Definimos que dos vectores A, B (ninguno de los cuales es cero) tienen **direcciones opuestas** si existe un número $c < 0$ tal que $cA = B$. Así, cuando $B = -A$, entonces A y B tienen direcciones opuestas.

XV, §1. EJERCICIOS

Hallar $A+B$, $A-B$, $3A, -2B$ en cada uno de los casos siguientes. Trazar los puntos de los ejercicios 1 y 2 en una hoja de papel cuadriculado.

1. $A = (2,-1)$, $B = (-1,1)$
2. $A = (-1,3)$, $B = (0,4)$
3. $A = (2,-1,5)$, $B = (-1,1,1)$
4. $A = (-1,-2,3)$, $B = (-1,3,-4)$
5. $A = (\pi,3,-1)$, $B = (2\pi,-3,7)$
6. $A = (15,-2,4)$, $B = (\pi,3,-1)$

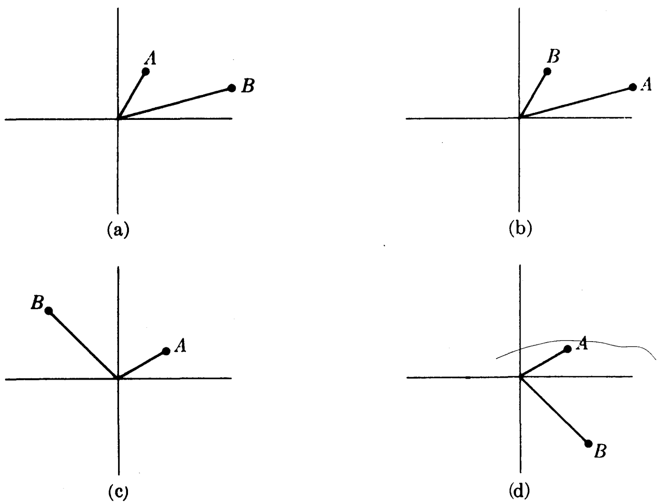


Figura 8

7. Sean $A = (1,2)$ y $B = (3,1)$. Trazar $A+B$, $A+2B$, $A+3B$, $A-B$, $A-2B$ y $A-3B$ en una hoja de papel cuadriculado.
8. Sean A y B como en el ejercicio 1. Trazar los puntos $A+2B$, $A+3B$, $A-2B$, $A-3B$ y $A+\frac{1}{2}B$ en una hoja de papel cuadriculado.
9. Sean A y B según están dibujados en la figura 8. Trazar el punto $A-B$.

XV, §2. VECTORES FIJOS

Definimos un **vector fijo** como un par ordenado de puntos que escribimos $\overrightarrow{AB}$. (Esto *no* es un producto.) Visualizamos esto como una flecha que va de A a B. A se llama **punto inicial** y B, **punto final** del vector fijo (Fig. 9).

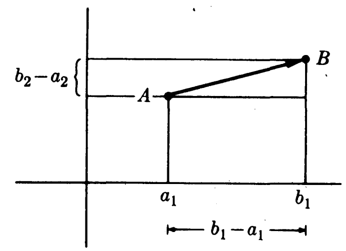


Figura 9

Observamos que, en el plano,

$$b_1 = a_1 + (b_1 - a_1).$$

De igual manera,

$$b_2 = a_2 + (b_2 - a_2).$$

Esto significa que

$$B = A + (B - A)$$

Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ dos vectores fijos. Diremos que son **equivalentes** si $B-A = D-C$. Todo vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es equivalente a uno cuyo punto inicial sea el origen, pues $\overrightarrow{AB}$ es equivalente a $\overrightarrow{O(B-A)}$. Claramente éste es el único vector fijo cuyo punto inicial es el origen y que es equivalente a $\overrightarrow{AB}$. Visualizando la ley del paralelogramo en el plano, resulta claro que la equivalencia de dos vectores fijos se puede interpretar geométricamente diciendo que las longitudes de los segmentos de recta determinados por el par de puntos son iguales, y que las "direcciones" en las que apuntan son la misma.

En las figuras siguientes hemos trazado los vectores fijos $\overrightarrow{O(B-A)}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{O(A-B)}$, $\overrightarrow{BA}$.

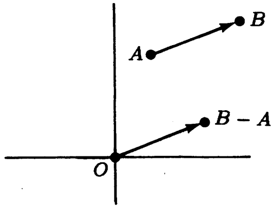


Figura 10

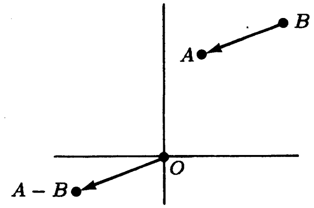


Figura 11

Ejemplo 1. Sea $P = (1, -1, 3)$ y $Q = (2, 4, 1)$. Entonces $\overrightarrow{PQ}$ es equivalente a $\overrightarrow{OC}$, donde $C = Q - P = (1, 5, -2)$. Si

$$A = (4, -2, 5) \quad \text{y} \quad B = (5, 3, 3),$$

entonces $\overrightarrow{PQ}$ es equivalente a $\overrightarrow{AB}$, pues

$$Q - P = B - A = (1, 5, -2).$$

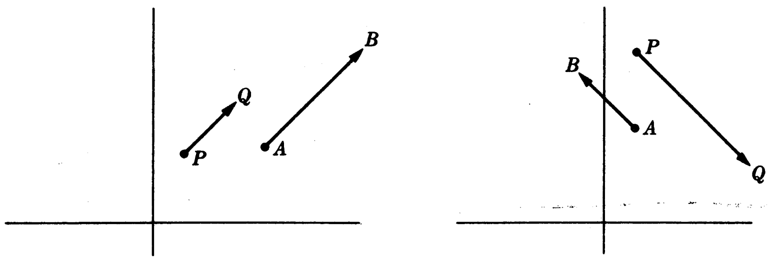
Dado un vector fijo $\overrightarrow{OC}$ cuyo punto inicial es el origen, diremos que es un **vector fijo en el origen.** Dado cualquier vector fijo $\overrightarrow{AB}$, diremos que está **fijo en** A.

Un vector fijo en el origen está completamente determinado por su punto inicial. En vista de esto, llamaremos a una n-tupla indistintamente punto o **vector**, dependiendo de la interpretación que tengamos en mente.

Se dice que dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son **paralelos** si existe un número $c \neq 0$ tal que $B - A = c(Q - P)$. Se dice que tienen la **misma dirección** si existe un número $c > 0$ tal que $B - A = c(Q - P)$, y tienen **dirección opuesta** si existe un número $c < 0$ tal que

$$B - A = c(Q - P).$$

En las figuras siguientes mostramos vectores fijos paralelos.



(a) Direcciones iguales (b) Direcciones opuestas

Figura 12

Ejemplo 2. Sea

$$P = (3, 7) \quad \text{y} \quad Q = (-4, 2).$$

Sea

$$A = (5, 1) \quad \text{y} \quad B = (-16, -14).$$

Entonces

$$Q - P = (-7, -5) \quad \text{y} \quad B - A = (-21, -15).$$

Por lo tanto, $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo a $\overrightarrow{AB}$, porque $B - A = 3(Q - P)$. Como $3 > 0$, vemos también que $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{AB}$ tienen la misma dirección.

De manera análoga, cualquier definición acerca de n-tuplas se puede extender a vectores fijos. Por ejemplo, en la sección siguiente definiremos en qué consiste que n-tuplas sean perpendiculares.

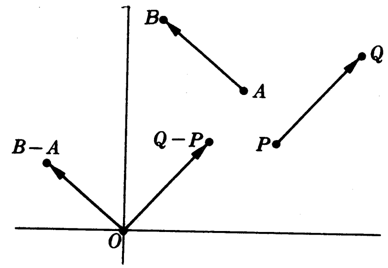


Figura 13

Entonces podemos decir que dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son **perpendiculares** si $B-A$ es perpendicular a $Q-P$. En la figura 13 hemos dibujado dichos vectores en el plano.

XV, §2. EJERCICIOS

En cada caso, determinar cuáles son los vectores fijos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{AB}$ equivalentes.

1. $P = (1, -1)$, $Q = (4, 3)$, $A = (-1, 5)$, $B = (5, 2)$.
2. $P = (1, 4)$, $Q = (-3, 5)$, $A = (5, 7)$, $B = (1, 8)$.
3. $P = (1, -1, 5)$, $Q = (-2, 3, -4)$, $A = (3, 1, 1)$, $B = (0, 5, 10)$.
4. $P = (2, 3, -4)$, $Q = (-1, 3, 5)$, $A = (-2, 3, -1)$, $B = (-5, 3, 8)$.

En cada caso, determinar cuáles vectores fijos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{AB}$ son paralelos.

5. $P = (1, -1)$, $Q = (4, 3)$, $A = (-1, 5)$, $B = (7, 1)$.
6. $P = (1, 4)$, $Q = (-3, 5)$, $A = (5, 7)$, $B = (9, 6)$.

7. $P=(1,-1,5)$, $Q=(-2,3,-4)$, $A=(3,1,1)$, $B=(-3,9,-17)$.
8. $P=(2,3,-4)$, $Q=(-1,3,5)$, $A=(-2,3,-1)$, $B=(-11,3,-28)$.
9. Trazar los vectores fijos de los ejercicios 1, 2, 5 y 6 en una hoja de papel cuadriculado para ilustrar estos ejercicios. Trazar también los vectores fijos $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{BA}$. Localizar los puntos $Q-P$, $B-A$, $P-Q$ y $A-B$.

XV, §3. PRODUCTO ESCALAR

Se sobreentiende que a lo largo de un análisis siempre se escogen vectores en el mismo espacio n-dimensional. Basta pensar en los casos $n=2$ y $n=3$.

Sean $A=(a_1,a_2)$ y $B=(b_1,b_2)$ en el 2-espacio. Definimos su **producto escalar** como

$$A\cdot B=a_1b_1+a_2b_2.$$

Sean $A=(a_1,a_2,a_3)$ y $B=(b_1,b_2,b_3)$ en el 3-espacio. Definimos su **producto escalar** como

$$A\cdot B=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Sean $A=(a_1,\dots,a_n)$ y $B=(b_1,\dots,b_n)$ dos vectores en el n-espacio, cubriendo así los dos casos con una notación. Definimos su **producto escalar** o **producto punto** $A\cdot B$ como

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n.$$

Este producto es un **número**. Por ejemplo, si

$$A=(1,3,-2) \quad \text{y} \quad B=(-1,4,-3),$$

entonces

$$A\cdot B=-1+12+6=17.$$

Por el momento no damos una interpretación geométrica para este producto escalar, pero lo haremos después. Primero deducimos algunas propiedades importantes. Las básicas son:

PE 1. *Tenemos* $A\cdot B=B\cdot A$.

PE 2. *Si* A, B *y* C *son tres vectores, entonces*

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C=(B+C)\cdot A.$$

PE 3. *Si* x *es un número, entonces*

$$(xA)\cdot B=\underset{3}{x}(\underset{5}{A}\cdot \underset{4}{B}) \quad \text{y} \quad A\cdot(xB)=x(A\cdot B).$$

PE 4. *Si* $A=O$ *es el vector cero, entonces* $A\cdot A=0$; *de no ser así,*

$$A\cdot A>0.$$

Probaremos ahora estas propiedades.

Respecto a la primera, tenemos

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n=b_1a_1+\cdots+b_na_n,$$

puesto que para dos números a y b cualesquiera tenemos $ab=ba$. Esto prueba la primera propiedad.

Para **PE 2**, sea $C=(c_1,\dots,c_n)$. Entonces

$$B+C=(b_1+c_1,\dots,b_n+c_n)$$

y

$$A\cdot(B+C)=a_1(b_1+c_1)+\cdots+a_n(b_n+c_n)$$
$$=a_1b_1+a_1c_1+\cdots+a_nb_n+a_nc_n.$$

Al reordenar los términos se tiene

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n+a_1c_1+\cdots+a_nc_n.$$

lo cual no es más que $A\cdot B+A\cdot C$. Esto prueba lo que queremos. Dejamos la propiedad **PE 3** como ejercicio.

Finalmente, para **PE 4**, observamos que si una coordenada a_i de A no es igual a 0, entonces existe un término $a_i^2\neq 0$ y $a_i^2>0$ en el producto escalar

$$A\cdot A=a_1^2+\cdots+a_n^2.$$

Como todo término es ≥ 0, se sigue que la suma es >0,como se quería demostrar.

En la mayor parte del trabajo que realizaremos con vectores, sólo vamos a usar las propiedades ordinarias de suma y multiplicación por números y las cuatro propiedades del producto escalar. Más adelante haremos un estudio formal de éstas. Por el momento, observen que hay otros objetos conocidos que se pueden sumar, restar y multiplicar por números, por ejemplo las funciones continuas en un intervalo $[a,b]$ (ver el ejercicio 6).

Además de escribir $A\cdot A$ para el producto escalar de un vector consigo mismo, será conveniente escribir A^2. (Éste es el único caso en que permitiremos esta notación. Así, A^3 no tiene sentido.) Queda como ejercicio verificar las identidades siguientes:

$$(A+B)^2=A^2+2A\cdot B+B^2,$$
$$(A-B)^2=A^2-2A\cdot B+B^2.$$

Un producto punto $A\cdot B$ bien puede ser igual a 0 sin que A o B sean el vector cero. Por ejemplo, sean

$$A=(1,2,3) \quad \text{y} \quad B=(2,1,-\tfrac{4}{3}).$$

Entonces

$$A\cdot B=0$$

Definimos que dos vectores A y B son **perpendiculares** (o, como también decimos, **ortogonales**), si $A\cdot B=0$. Por el momento no está claro que, en el plano, esta definición coincida con nuestro concepto geométrico intuitivo de perpendicularidad, pero los convenceremos en la sección siguiente. Aquí sólo veremos un ejemplo. Sean, digamos en $\mathbf{R}^3$,

$$E_1=(1,0,0), \qquad E_2=(0,1,0), \qquad E_3=(0,0,1)$$

los tres vectores unitarios según se muestran en la figura 14.

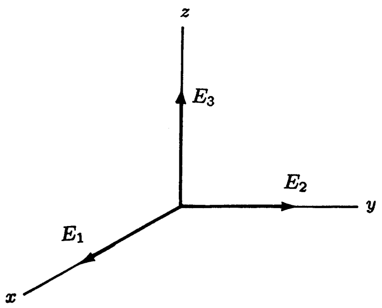


Figura 14

Vemos entonces que $E_1 \cdot E_2 = 0$, y, de manera análoga, $E_i \cdot E_j = 0$ si $i \neq j$. Estos vectores, en efecto, se ven perpendiculares. Si $A = (a_1, a_2, a_3)$, entonces observamos que la i-ésima componente de A, a saber,

$$a_i = A \cdot E_i$$

es el producto punto de A con el i-ésimo vector unitario. Vemos que A es perpendicular a E_i (de acuerdo con nuestra definición de perpendicularidad con el producto punto) si, y sólo si, su i-ésima componente es igual a 0.

XV, §3. EJERCICIOS

1. Hallar $A \cdot A$ para cada una de las siguientes n-tuplas.
   (a) $A = (2, -1)$, $B = (-1, 1)$ (b) $A(-1, 3)$, $B = (0, 4)$
   (c) $A = (2, -1, 5)$, $B = (-1, 1, 1)$ (d) $A = (-1, -2, 3)$, $B = (-1, 3, -4)$
   (e) $A = (\pi, 3, -1)$, $B = (2\pi, -3, 7)$ (f) $A = (15, -2, 4)$, $B = (\pi, 3, -1)$
2. Hallar $A \cdot B$ para cada una de las n-tuplas anteriores.
3. Usando sólo las cuatro propiedades del producto escalar, verificar en detalle las identidades dadas en el texto para $(A + B)^2$ y $(A - B)^2$.
4. ¿Cuáles de los pares siguientes son perpendiculares?
   (a) $(1, -1, 1)$ y $(2, 1, 5)$ (b) $(1, -1, 1)$ y $(2, 3, 1)$
   (c) $(-5, 2, 7)$ y $(3, -1, 2)$ (d) $(\pi, 2, 1)$ y $(2, -\pi, 0)$
5. Sea A un vector perpendicular a todo vector X. Mostrar que $A = O$.

XV, §4. LA NORMA DE UN VECTOR

Definimos como **norma** de un vector A, y la denotamos por $\|A\|$, el número

$$\|A\| = \sqrt{A \cdot A}.$$

Como $A \cdot A \geq 0$, podemos tomar la raíz cuadrada. También se suele llamar a la norma **magnitud** de A.

Cuando $n = 2$ y $A = (a, b)$, entonces

$$\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

como en la figura 15.

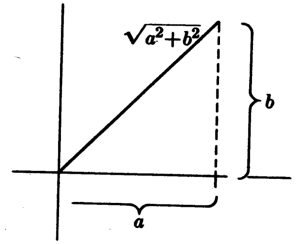


Figura 15

Ejemplo 1. Si $A = (1, 2)$, entonces

$$\|A\| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

Cuando $n = 3$ y $A = (a_1, a_2, a_3)$, entonces

$$\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Ejemplo 2. Si $A = (-1, 2, 3)$, entonces

$$\|A\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}.$$

Si $n = 3$, entonces la ilustración se ve como en la figura 16, con $A = (x, y, z)$.

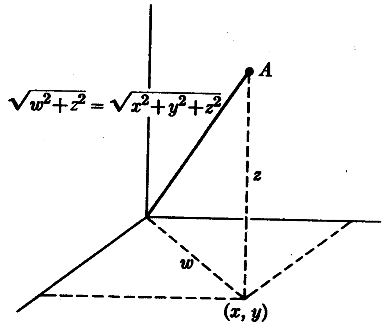


Figura 16

Si vemos primero las dos componentes (x, y), entonces la longitud del segmento entre $(0, 0)$ y (x, y) es igual a $w = \sqrt{x^2 + y^2}$, según se indica.

Entonces la norma de A, de nuevo por el teorema de Pitágoras, sería

$$\sqrt{w^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Así, cuando $n=3$ nuestra definición de norma es compatible con la geometría del teorema de Pitágoras.

En términos de coordenadas, $A=(a_1,\ldots,a_n)$, vemos que

$$\|A\|=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}.$$

Si $A\neq O$, entonces $\|A\|\neq 0$ pues alguna coordenada $a_i\neq 0$, de modo que $a_i^2>0$, y, por lo tanto, $a_1^2+\cdots+a_n^2>0$, de modo que $\|A\|\neq 0$.

Observamos que, para cualquier vector A, tenemos

$$\boxed{\|A\|=\|-A\|.}$$

$A^2 = A \cdot A \qquad A = \sqrt{A^2}$

Esto se debe al hecho de que

$$(-a_1)^2+\cdots+(-a_n)^2=a_1^2+\cdots+a_n^2,$$

porque $(-1)^2=1$. Esto es, por supuesto, lo que se debe desprender de la figura:

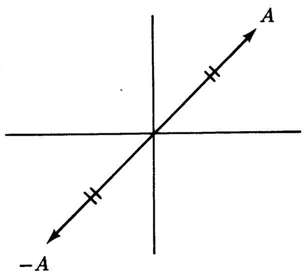


Figura 17

Recuerden que se dice que A y $-A$ tienen **dirección opuesta** y sin embargo, tienen la misma norma (magnitud, como suele decirse cuando se habla de vectores).

Sean A y B dos puntos. Definimos la **distancia** entre A y B como

$$\|A-B\|=\sqrt{(A-B)\cdot(A-B)}.$$

Esta definición coincide con nuestra intuición geométrica cuando A y B son puntos en el plano (Fig. 18). Es lo mismo la longitud del vector fijo $\overrightarrow{AB}$ que la del vector fijo $\overrightarrow{BA}$.

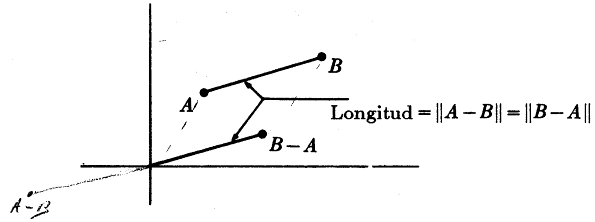


Figura 18

Ejemplo 3. Sean $A=(-1,2)$ y $B=(3,4)$. Entonces la longitud del vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es $\|B-A\|$. Pero $B-A=(4,2)$. Así,

$$\|B-A\|=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}.$$

En la figura vemos que el lado horizontal tiene longitud 4 y el lado vertical tiene longitud 2, de modo que estas definiciones reflejan nuestra intuición geométrica debida a Pitágoras.

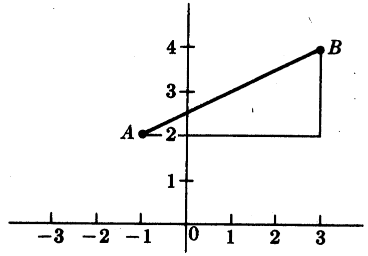


Figura 19

Sea P un punto en el plano, y sea a un número >0. El conjunto de puntos X tales que

$$\|X-P\|<a$$

se llamará **disco abierto** de radio a con centro en P. El conjunto de puntos X tales que

$$\|X-P\|\leq a$$

se llamará **disco cerrado** de radio a y centro en P. El conjunto de puntos X tales que

$$\|X-P\|=a$$

se conoce como círculo de radio a y centro en P; los dos se ilustran en la figura 20.

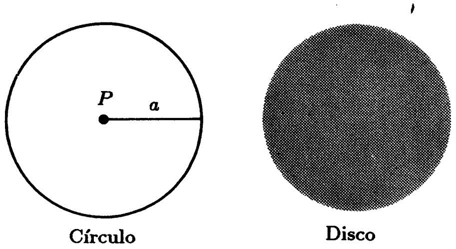


Figura 20

En el espacio tridimensional, el conjunto de puntos X tales que

$$\|X - P\| < a$$

se llamará **bola abierta** de radio a y centro en P. El conjunto de puntos X tales que

$$\|X - P\| \leq a$$

se llamará **bola cerrada** de radio a y centro en P. El conjunto de puntos X tales que

$$\|X - P\| = a$$

se conoce como **esfera** de radio a y centro en P. En espacios de dimensión superior se usará esta misma terminología de bola y esfera.

La figura 21 ilustra una esfera y una bola en el 3-espacio.

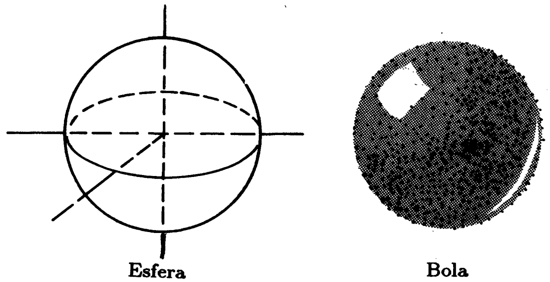


Figura 21

La esfera es la cubierta exterior y la bola está formada por la región que se encuentra dentro de la cubierta. La bola abierta es aquella en la que no se incluye la cubierta, y la bola cerrada es aquella que comprende *tanto* la región dentro de la cubierta *como* la cubierta misma.

De la geometría de la situación, es razonable esperar que si $c > 0$, entonces $\|cA\| = c\|A\|$, i.e. si estiramos un vector A al multiplicarlo por un número positivo c, entonces la longitud también se estira en esa cantidad. Verificamos esto formalmente usando nuestra definición de longitud.

Teorema 4.1. *Sea x un número. Entonces*

$$\|xA\| = |x|\,\|A\|$$

(valor absoluto de x por la norma de A).

Demostración. Por definición tenemos que

$$\|xA\|^2 = (xA) \cdot (xA),$$

que es igual a

$$x^2(A \cdot A)$$

por las propiedades del producto escalar. Al tomar la raíz cuadrada obtenemos lo que queremos.

Sea S_1 la esfera de radio 1, con centro en el origen. Sea a un número > 0. Si X es un punto de la esfera S_1, entonces aX es un punto de la esfera de radio a, pues

$$\|aX\| = a\|X\| = a.$$

De esta manera obtenemos todos los puntos de la esfera de radio a. (¿Demostración?) Así, la esfera de radio a se obtiene al estirar la esfera de radio 1 al multiplicar por a.

Se aplica una observación similar para las bolas abierta y cerrada de radio a, obtenidas a partir de las bolas abierta y cerrada, de radio 1, al multiplicar por a.

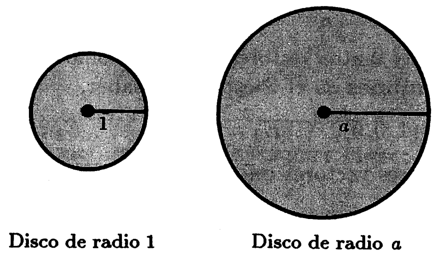


Figura 22

Diremos que un vector E es un vector **unitario** si $\|E\| = 1$. Dado cualquier vector A, sea $a = \|A\|$. Si $a \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{a}A$$

es un vector unitario, puesto que

$$\left\|\frac{1}{a}A\right\| = \frac{1}{a}a = 1.$$

Decimos que dos vectores A y B (donde ninguno es O) tienen la **misma dirección** si existe un número $c > 0$ tal que $cA = B$. En vista de esta definición, vemos que el vector

$$\frac{1}{\|A\|}A$$

es un vector unitario en la dirección de A (siempre que $A \neq O$).

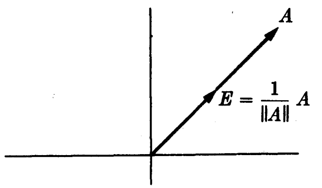


Figura 23

Si E es el vector unitario en la dirección de A y $\|A\| = a$, entonces

$$A = aE.$$

Ejemplo 4. Sea $A = (1, 2, -3)$. Entonces $\|A\| = \sqrt{14}$. Por lo tanto, el vector unitario en la dirección de A es el vector

$$E = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right).$$

Advertencia. Hay tantos vectores unitarios como direcciones. Los tres **vectores unitarios comunes** en el 3-espacio, a saber,

$$E_1 = (1, 0, 0), \qquad E_2 = (0, 1, 0), \qquad E_3 = (0, 0, 1)$$

son simplemente los tres vectores unitarios en las direcciones de los ejes coordenados.

También estamos en posición de justificar nuestra definición de perpendicularidad. Dados A y B en el plano, la condición de que

$$\|A + B\| = \|A - B\|$$

(ilustrada en la Fig. 24(b)) coincide con la propiedad geométrica de que A debe ser perpendicular a B.

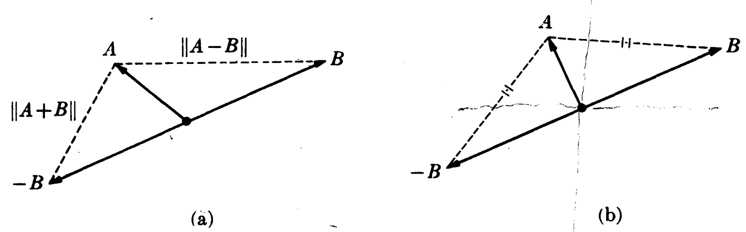


Figura 24

Probaremos que:

$$\boxed{\|A + B\| = \|A - B\| \quad \text{si, y sólo si,} \quad A \cdot B = 0.}$$

Denotemos por $\iff$ a "si, y sólo si,". Entonces,

$$\begin{aligned} \|A + B\| = \|A - B\| \quad &\iff \quad \|A + B\|^2 = \|A - B\|^2 \\ &\iff \quad A^2 + 2A \cdot B + B^2 = A^2 - 2A \cdot B + B^2 \\ &\iff \quad 4A \cdot B = 0 \\ &\iff \quad A \cdot B = 0. \end{aligned}$$

Esto prueba lo que queremos.

Teorema general de Pitágoras. *Si A y B son perpendiculares, entonces*

$$\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2.$$

En la figura 25 se ilustra el teorema.

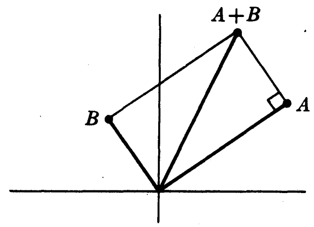


Figura 25

Para probar esto usamos las definiciones, a saber,

$$\begin{aligned} \|A + B\|^2 &= (A + B) \cdot (A + B) = A^2 + 2A \cdot B + B^2 \\ &= \|A\|^2 + \|B\|^2, \end{aligned}$$

pues $A \cdot B = 0$, y, por definición, $A \cdot A = \|A\|^2$, $B \cdot B = \|B\|^2$.

Observación. Si A es perpendicular a B y x es cualquier número, entonces A también es perpendicular a xB, ya que

$$A \cdot xB = xA \cdot B = 0.$$

Usaremos ahora el concepto de perpendicularidad para deducir el concepto de **proyección**. Sean A y B dos vectores y $B \neq 0$. Sea P el punto sobre la recta que pasa por $\overrightarrow{OB}$ tal que $\overrightarrow{PA}$ es perpendicular a $\overrightarrow{OB}$, como se muestra en la figura 26(a).

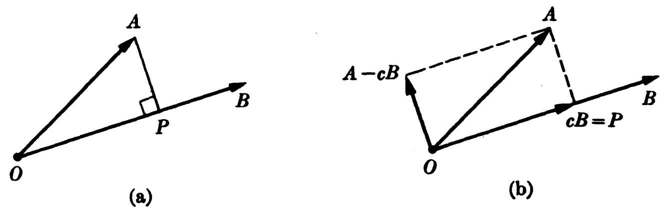


Figura 26

Podemos escribir

$$P = cB$$

para algún número c. Queremos hallar explícitamente este número c en términos de A y B. La condición $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{OB}$ significa que

$$A - P \quad \text{es perpendicular a} \quad B,$$

y como $P = cB$, esto significa que

$$(A - cB) \cdot B = 0,$$

en otras palabras,

$$A \cdot B - cB \cdot B = 0.$$

Podemos despejar c y hallamos que $A \cdot B = cB \cdot B$, de modo que

$$\boxed{c = \frac{A \cdot B}{B \cdot B}.}$$

Recíprocamente, si tomamos este valor para c y después usamos la distributividad, multiplicando escalarmente $A - cB$ por B, se obtiene 0, de modo que $A - cB$ es perpendicular a B. Por lo tanto, hemos visto que existe un número único c tal que $A - cB$ es perpendicular a B, y que c está dado por la fórmula anterior.

Definición. . La **componente** de A sobre B es el número $c = \dfrac{A \cdot B}{B \cdot B}$.

La **proyección** de A sobre B es el vector $cB = \dfrac{A \cdot B}{B \cdot B} B$.

Ejemplo 5. Suponer que

$$B = E_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

es el i-ésimo vector unitario, con 1 en la i-ésima componente y 0 en todas las otras componentes.

$$\textit{Si} \quad A = (a_1, \ldots, a_n), \quad \textit{entonces} \quad A \cdot E_i = a_i.$$

Así, $A \cdot E_i$ es la i-ésima componente ordinaria de A.

De manera más general, si B es un vector unitario, no necesariamente uno de los E_i, entonces tenemos simplemente

$$c = A \cdot B$$

pues $B \cdot B = 1$, por la definición de vector unitario.

Ejemplo 6. Sean $A = (1, 2, -3)$ y $B = (1, 1, 2)$. Entonces la componente de A sobre B es el **número**

$$c = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, la proyección de A sobre B es el **vector**

$$cB = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1).$$

Nuestra construcción da inmediatamente la interpretación geométrica para el producto escalar. A saber, supongamos que $A \neq O$, y que θ es el ángulo entre A y B (Fig. 27). Entonces, por geometría plana, vemos que

$$\cos\theta = \frac{c\|B\|}{\|A\|},$$

o, sustituyendo el valor para c obtenido antes,

$$\boxed{A \cdot B = \|A\|\,\|B\| \cos\theta} \quad \text{y} \quad \boxed{\cos\theta = \frac{A \cdot B}{\|A\|\,\|B\|}.}$$

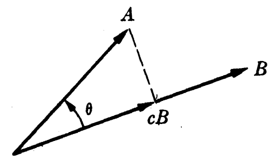


Figura 27

En algunos tratamientos de vectores se toma la relación

$$A \cdot B = \|A\|\,\|B\| \cos\theta$$

como definición de producto escalar. Esto está sujeto a las siguientes desventajas, por no decir objeciones:

(a) Las cuatro propiedades del producto escalar **PE 1** a **PE 4** de ninguna manera son obvias.
(b) Aun en el 3-espacio, tenemos que basarnos en la intuición geométrica para obtener el coseno del ángulo entre A y B, y esta intuición es menos clara que en el plano. En espacios de dimensión superior falla todavía más.
(c) Es extremadamente difícil trabajar con dicha definición para obtener las subsecuentes propiedades del producto escalar.

Así que preferimos basarnos en los fundamentos algebraicos obvios y de ahí recuperar de manera sencillla todas las propiedades. Usamos geometría plana para ver la expresión

$$A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \cos\theta.$$

Después de trabajar varios ejemplos, probaremos la desigualdad que nos permite justificar esto en el n-espacio.

Ejemplo 7. Sean $A = (1,2,-3)$ y $B = (2,1,5)$. Hallar el coseno del ángulo θ entre A y B.

Por definición,

$$\cos\theta = \frac{A \cdot B}{\|A\| \, \|B\|} = \frac{2+2-15}{\sqrt{14}\sqrt{30}} = \frac{-11}{\sqrt{420}}.$$

Ejemplo 8. Hallar el coseno del ángulo entre los dos vectores fijos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, donde

$$P = (1,2,-3), \qquad Q = (-2,1,5), \qquad R = (1,1,-4).$$

La ilustración se ve así:

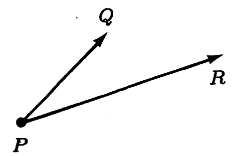


Figura 28

Hacemos

$$A = Q - P = (-3,-1,8) \quad \text{y} \quad B = R - P = (0,-1,-1).$$

Entonces el ángulo entre $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ es el mismo que entre A y B. Por lo tanto, el coseno es igual a

$$\cos\theta = \frac{A \cdot B}{\|A\| \, \|B\|} = \frac{0+1-8}{\sqrt{74}\sqrt{2}} = \frac{-7}{\sqrt{74}\sqrt{2}}.$$

Probaremos otras propiedades de la norma y el producto escalar usando nuestros resultados sobre perpendicularidad. Nótese primero un caso particular. Si

$$E_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$$

es el i-ésimo vector unitario de $\mathbf{R}^n$, y

$$A = (a_1,\dots,a_n),$$

entonces

$$A \cdot E_i = a_i$$

es la i-ésima componente de A, i.e. la componente de A sobre E_i. Tenemos

$$|a_i| = \sqrt{a_i^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} = \|A\|,$$

de modo que el valor absoluto de cada componente de A es, a lo más, igual a la longitud de A.

No tenemos que tratar sólo con el vector unitario particular, como recién sucedió. Sea E cualquier vector unitario, es decir, un vector de norma 1. Sea c la componente de A sobre E. Vimos que

$$c = A \cdot E.$$

Entonces $A - cE$ es perpendicular a E y

$$A = A - cE + cE.$$

Entonces $A - cE$ también es perpendicular a cE y, por el teorema de Pitágoras, hallamos

$$\|A\|^2 = \|A - cE\|^2 + \|cE\|^2 = \|A - cE\|^2 + c^2.$$

Así tenemos la desigualdad $c^2 \leq \|A\|^2$, y $|c| \leq \|A\|$.

En el teorema siguiente generalizamos esta desigualdad a un producto punto $A \cdot B$ cuando B no es necesariamente un vector unitario.

Teorema 4.2. *Sean A y B los dos vectores en $\mathbf{R}^n$. Entonces*

$$|A \cdot B| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

Demostración. Si $B = O$, entonces ambos lados de la desigualdad son iguales a 0, de modo que nuestra afirmación es obvia. Supongamos que $B \neq O$. Sea c la componente de A sobre B, de modo que $c = (A \cdot B)/(B \cdot B)$. Escribimos

$$A = A - cB + cB.$$

Por Pitágoras,

$$\|A\|^2 = \|A - cB\|^2 + \|cB\|^2 = \|A - cB\|^2 + c^2\|B\|^2.$$

Por lo tanto, $c^2\|B\|^2 \leq \|A\|^2$. Pero

$$c^2\|B\|^2 = \frac{(A \cdot B)^2}{(B \cdot B)^2}\|B\|^2 = \frac{|A \cdot B|^2}{\|B\|^4}\|B\|^2 = \frac{|A \cdot B|^2}{\|B\|^2}.$$

Entonces

$$\frac{|A \cdot B|^2}{\|B\|^2} \leq \|A\|^2.$$

La demostración concluye al multiplicar por $\|B\|^2$ y tomar la raíz cuadrada.

A partir del teorema 4.2, vemos que para los vectores A y B en el n-espacio, el número

$$\frac{A \cdot B}{\|A\| \, \|B\|}$$

tiene valor absoluto ≤ 1. En consecuencia,

$$-1 \leq \frac{A \cdot B}{\|A\|\,\|B\|} \leq 1,$$

y existe un ángulo único θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$, y tal que

$$\cos\theta = \frac{A \cdot B}{\|A\|\,\|B\|}.$$

Definimos este ángulo como el **ángulo entre A y B**.

La desigualdad del teorema 4.2 se conoce como **desigualdad de Schwarz**.

Teorema 4.3. *Sean A y B vectores. Entonces*

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

Demostración. Ambos lados de esta desigualdad son positivos o 0. Por lo tanto, bastará probar que sus cuadrados satisfacen la desigualdad deseada; en otras palabras,

$$(A + B) \cdot (A + B) \leq (\|A\| + \|B\|)^2.$$

Para esto consideramos

$$(A + B) \cdot (A + B) = A \cdot A + 2A \cdot B + B \cdot B.$$

En vista de nuestro resultado anterior, esto satisface la desigualdad

$$\leq \|A\|^2 + 2\|A\|\,\|B\| + \|B\|^2,$$

y el lado derecho no es más que

$$(\|A\| + \|B\|)^2.$$

Nuestro teorema está probado.

El teorema 4.3. se conoce como **desigualdad del triángulo**. La razón es que, si trazamos un triángulo como en la figura 29, entonces el teorema 4.3 expresa el hecho de que la longitud de un lado es $\leq$ que la suma de las longitudes de los otros dos lados (ver el ejercicio 11).

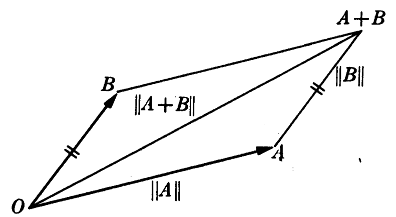


Figura 29

Observación. Las demostraciones no usan coordenadas, sólo las propiedades **PE 1 a PE 4** del producto punto. En el n-espacio nos dan desigualdades que

de ninguna manera son obvias cuando se expresan en términos de coordenadas. Por ejemplo, la desigualdad de Schwarz en términos de coordenadas es:

$$|a_1b_1 + \cdots + a_nb_n| \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)^{1/2}(b_1^2 + \cdots + b_n^2)^{1/2}.$$

Traten de probar esto de manera directa, sin la intuición "geométrica" de Pitágoras, para ver hasta dónde llegan.

XV, §4. EJERCICIOS

1. Hallar la norma del vector A en los casos siguientes.
   (a) $A = (2, -1)$, $B = (-1, 1)$
   (b) $A = (-1, 3)$, $B = (0, 4)$
   (c) $A = (2, -1, 5)$, $B = (-1, 1, 1)$
   (d) $A = (-1, -2, 3)$, $B = (-1, 3, -4)$
   (e) $A = (\pi, 3, -1)$, $B = (2\pi, -3, 7)$
   (f) $A = (15, -2, 4)$, $B = (\pi, 3, -1)$
2. Hallar la norma del vector B en los casos anteriores.
3. Hallar la proyección de A sobre B en los casos anteriores.
4. Hallar la proyección de B sobre A en los casos anteriores.
5. Hallar el coseno entre los siguientes vectores A y B.
   (a) $A = (1, -2)$ y $B = (5, 3)$
   (b) $A = (-3, 4)$ y $B = (2, -1)$
   (c) $A = (1, -2, 3)$ y $B = (-3, 1, 5)$
   (d) $A = (-2, 1, 4)$ y $B = (-1, -1, 3)$
   (e) $A = (-1, 1, 0)$ y $B = (2, 1, -1)$
6. Determinar el coseno de los ángulos del triángulo cuyos vértices son
   (a) $(2, -1, 1)$, $(1, -3, -5)$, $(3, -4, -4)$.
   (b) $(3, 1, 1)$, $(-1, 2, 1)$, $(2, -2, 5)$.
7. Sean $A_1, \ldots, A_r$ vectores distintos de cero que son perpendiculares entre sí; en otras palabras, $A_i \cdot A_j = 0$ si $i \neq j$. Sean $c_1, \ldots, c_r$ números tales que
   $$c_1A_1 + \cdots + c_rA_r = O.$$
   Mostrar que todo $c_i = 0$
8. Para cualesquiera vectores A y B, probar las relaciones siguientes:
   (a) $\|A + B\|^2 + \|A - B\|^2 = 2\|A\|^2 + 2\|B\|^2$.
   (b) $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2A \cdot B$.
   (c) $\|A + B\|^2 - \|A - B\|^2 = 4A \cdot B$.
   Interpretar (a) como una "ley del paralelogramo".
9. Mostrar que si θ es el ángulo entre A y B, entonces
   $$\|A - B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\|A\|\,\|B\| \cos\theta.$$
10. Sean A, B y C tres vectores distintos de cero. Si $A \cdot B = A \cdot C$, mostrar con un ejemplo que no necesariamente $B = C$.

XV, §5. RECTAS PARAMÉTRICAS

Definimos la **ecuación paramétrica** o la **representación paramétrica** de una recta que pasa por un punto P en la dirección de un vector $A \neq O$ como

$$X = P + tA,$$

donde t varía sobre todos los números (Fig. 30).

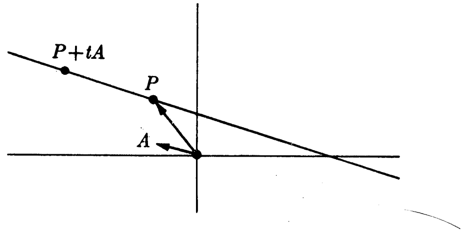


Figura 30

Al dar dicha representación paramétrica podemos pensar en un insecto que parte de un punto P en el tiempo $t = 0$, y que se mueve en la dirección de A. En el tiempo t, el insecto está en la posición $P + tA$. Así, podemos interpretar físicamente la representación paramétrica como una descripción de movimiento, en la cual A se interpreta como la velocidad del insecto. En un tiempo dado t, el insecto está en el punto

$$X(t) = P + tA,$$

que se llama **posición** del insecto en el tiempo t.

Esta representación paramétrica también es útil para describir el conjunto de puntos que están sobre el segmento de recta entre dos puntos dados. Sean P y Q dos puntos. Entonces el **segmento** entre P y Q está formado por todos los puntos

$$S(t) = P + t(Q - P) \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

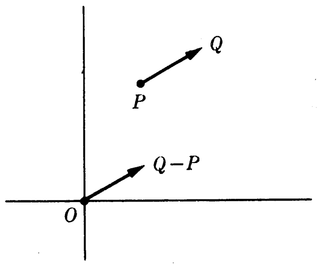


Figura 31

En efecto, $\overrightarrow{O(Q-P)}$ es un vector que tiene la misma dirección que $\overrightarrow{PQ}$, como se muestra en la figura 31.

Cuando $t = 0$, tenemos $S(0) = P$, de modo que en el tiempo $t = 0$ el insecto está en P. Cuando $t = 1$, tenemos

$$S(1) = P + (Q - P) = Q,$$

de modo que, cuando $t = 1$, el insecto está en Q. Conforme t va de 0 a 1, el insecto va de P a Q.

Ejemplo 1. Sean $P = (1, -3, 4)$ y $Q = (5, 1, -2)$. Hallar las coordenadas del punto que está a un tercio de la distancia de P a Q.

Sea, como antes, $S(t)$ la representación paramétrica del segmento de P a Q. El punto deseado es $S(1/3)$, esto es:

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = P + \frac{1}{3}(Q - P) = (1, -3, 4) + \frac{1}{3}(4, 4, -6)$$
$$= \left(\frac{7}{3}, \frac{-5}{3}, 2\right).$$

Advertencia. El punto deseado en el ejemplo anterior *no* está dado por

$$\frac{P+Q}{3}.$$

Ejemplo 2. Hallar una representación paramétrica para la recta que pasa por los dos puntos $P = (1, -3, 1)$ y $Q = (-2, 4, 5)$.

Primero tenemos que hallar un vector en la dirección de la recta. Hacemos

$$A = P - Q,$$

de modo que

$$A = (3, -7, -4).$$

La representación paramétrica de esta recta es entonces

$$X(t) = P + tA = (1, -3, 1) + t(3, -7, -4).$$

Observación. Sería igualmente correcto dar una representación paramétrica de la recta como

$$Y(t) = P + tB \quad \text{donde} \quad B = Q - P.$$

Sin embargo, interpretada en términos del insecto en movimiento, una parametrización da la posición de un insecto moviéndose en una dirección a lo largo de la recta, comenzando en P en el tiempo $t = 0$, mientras que la otra parametrización da la posición de otro insecto moviéndose en dirección **opuesta** a lo largo de la recta, también comenzando en P en el tiempo $t = 0$.

Estudiaremos ahora la relación entre una representación paramétrica y la ecuación ordinaria de una recta en el plano.

Supongan que trabajamos en el plano y escribimos las coordenadas de un punto X como (x, y). Sean $P = (p, q)$ y $A = (a, b)$. Entonces, en términos de las coordenadas, podemos escribir

$$x = p + ta, \qquad y = q + tb,$$

y podemos eliminar t para obtener la ecuación usual que relaciona a x y y.

Ejemplo 3. Sean $P = (2, 1)$ y $A = (-1, 5)$. La representación paramétrica de la recta que pasa por P en la dirección de A nos da

$$(*) \qquad x = 2 - t, \qquad y = 1 + 5t.$$

Al multiplicar por 5 la primera ecuación y sumar se tiene

$$(**) \qquad 5x + y = 11,$$

que es la conocida ecuación de una recta.

Esta eliminación de t muestra que todo par (x, y) que satisface la representación paramétrica $(*)$ para algún valor de t también satisface la ecuación $(**)$. Recíprocamente, supongan que tenemos un par de números (x, y) que satisfacen $(**)$. Sea $t = 2 - x$. Entonces

$$y = 11 - 5x = 11 - 5(2 - t) = 1 + 5t.$$

Por lo tanto, existe algún valor de t que satisface la ecuación $(*)$. Hemos probado así que los pares (x, y) que son soluciones de $(**)$ son exactamente los mismos pares de números que los obtenidos al dar valores arbitrarios de t en $(*)$. Así pues, la recta se puede describir paramétricamente como en $(*)$, o en términos de su ecuación usual $(**)$. Al comenzar con la ecuación ordinaria

$$5x + y = 11,$$

hacemos $t = 2 - x$ para recuperar la parametrización específica de $(*)$.

Cuando parametrizamos una recta en la forma

$$X = P + tA,$$

es evidente que tenemos infinidad de posibilidades para P sobre la recta, y también infinidad de posibilidades para A, que difieren en un múltiplo escalar. Siempre podemos seleccionar al menos una. A saber, dada una ecuación

$$ax + by = c$$

con números a, b y c, supongan que $a \neq 0$. Usamos y como parámetro y hacemos

$$y = t.$$

Entonces podemos despejar x, a saber,

$$x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}t.$$

Sean $P = (c/a, 0)$ y $A = (-b/a, 1)$. Vemos que un punto arbitrario (x, y) que satisfaga la ecuación

$$ax + by = c$$

se puede expresar paramétricamente, a saber,

$$(x, y) = P + tA..$$

En dimensiones superiores, al comenzar con una representación paramétrica

$$X = P + tA,$$

no podemos eliminar t, y así la representación paramétrica es la única disponible para describir una recta.

XV, §5. EJERCICIOS

1. Hallar una representación paramétrica para la recta que pasa por los siguientes pares de puntos.
   (a) $P_1 = (1, 3, -1)$ y $P_2 = (-4, 1, 2)$
   (b) $P_1 = (-1, 5, 3)$ y $P_2 = (-2, 4, 7)$

Hallar una representación paramétrica para la recta que pasa por los puntos siguientes.

2. $(1, 1, -1)$ y $(-2, 1, 3)$

3. $(-1, 5, 2)$ y $(3, -4, 1)$

4. Sean $P = (1, 3, -1)$ y $Q = (-4, 5, 2)$. Determinar las coordenadas de los puntos siguientes:

   (a) El punto medio del segmento entre P y Q.

   (b) Los dos puntos sobre este segmento de recta que están a un tercio y a dos tercios del camino de P a Q.

   (c) El punto que está a un quinto del camino recto de P a Q.

   (d) El punto que está a dos quintos del camino recto de P a Q.

5. Si P y Q son dos puntos arbitrarios en el n-espacio, dar la fórmula general para el punto medio del segmento entre P y Q.

XV, §6. PLANOS

Podemos describir planos en el 3-espacio mediante una ecuación análoga a la ecuación de la recta. Procedemos como sigue.

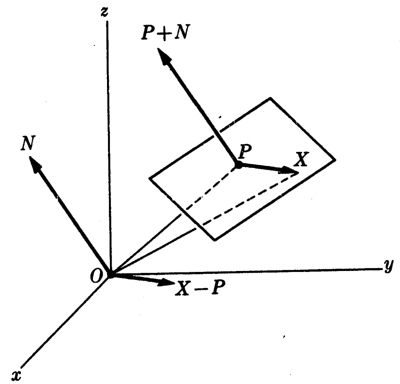


Figura 32

Sea P un punto en el 3-espacio y consideren un vector fijo $\overrightarrow{ON}$. Definimos el **plano que pasa por** P **perpendicular a** $\overrightarrow{ON}$ como la colección de todos los puntos X tales que el vector fijo $\overrightarrow{PX}$ es perpendicular a $\overrightarrow{ON}$. De acuerdo con nuestras definiciones, esto equivale a la condición

$$(X-P)\cdot N = 0$$

que también se puede escribir como

$$\boxed{X \cdot N = P \cdot N.}$$

También diremos que este plano es el perpendicular a N, y está formado por todos los vectores X tales que $X-P$ es perpendicular a N. Hemos dibujado una situación típica del 3-espacio en la figura 32.

Además de decir que N es **perpendicular** al plano, también se dice que N es **normal** al plano.

Sea t un número $\neq 0$. Entonces el conjunto de puntos X tales que

$$(X-P)\cdot N = 0$$

coincide con el conjunto de puntos X tales que

$$(X-P)\cdot tN = 0.$$

Así podemos decir que nuestro plano es el plano que pasa por P y es perpendicular a la **recta** en la dirección de N. Para hallar la ecuación del plano pudimos usar cualquier vector tN (con $t \neq 0$) en lugar de N.

Ejemplo 1. Sean

$$P = (2, 1, -1) \quad \text{y} \quad N = (-1, 1, 3).$$

Sea $X = (x, y, z)$. Entonces

$$X \cdot N = (-1)x + y + 3z.$$

En consecuencia, la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a N es

$$-x + y + 3z = -2 + 1 - 3$$

o

$$-x + y + 3z = -4.$$

Observen que en el 2-espacio, con $X = (x, y)$, las fórmulas conducen a la ecuación de la recta en el sentido ordinario

Ejemplo 2. La ecuación de la recta en el plano xy que pasa por $(4, -3)$ y es perpendicular a $(-5, 2)$ es

$$-5x + 2y = -20 - 6 = -26.$$

Ahora estamos en posición de interpretar los coeficientes $(-5, 2)$ de x y y en esta ecuación, y se ve que dan lugar a un vector perpendicular a la recta. **En cualquier ecuación**

$$ax + by = c$$

el vector (a, b) **es perpendicular a la recta determinada por la ecuación.** De manera análoga, en el 3-espacio, el vector (a, b, c) es perpendicular al plano determinado por la ecuación

$$ax + by + cz = d.$$

Ejemplo 3. El plano determinado por la ecuación

$$2x - y + 3z = 5$$

es perpendicular al vector $(2, -1, 3)$. Si queremos hallar un punto en ese plano es obvio que tenemos muchas posibilidades. Podemos dar valores arbitrarios a x y y, y después despejar z. Para obtener un punto concreto, sean $x = 1$ y $y = 1$. Entonces despejamos z, a saber,

$$3z = 5 - 2 + 1 = 4,$$

de modo que $z = \frac{4}{3}$. Así,

$$(1, 1, \tfrac{4}{3})$$

es un punto en el plano.

Se dice que la ecuación $X \cdot N = P \cdot N$ en el n-espacio es la ecuación de un **hiperplano**. Por ejemplo,

$$3x - y + z + 2w = 5$$

es la ecuación de un hiperplano en el 4-espacio, perpendicular a $(3, -1, 1, 2)$.

Se dice que dos vectores A y B son paralelos si existe un número $c \neq 0$ tal que $cA = B$. Se dice que dos rectas son **paralelas** si, dados dos puntos distintos P_1 y Q_1 sobre la primera recta y P_2 y Q_2 sobre la segunda, los vectores

$$P_1 - Q_1$$

y

$$P_2 - Q_2$$

son paralelos.

Se dice que dos planos son **paralelos** (en el 3-espacio) si sus vectores normales son paralelos. Se dice que son **perpendiculares** si sus vectores normales son perpendiculares. El **ángulo** entre dos planos se define como el ángulo entre sus vectores normales.

Ejemplo 4. Hallar el coseno del ángulo θ entre los planos

$$2x - y + z = 0,$$
$$x + 2y - z = 1.$$

Este coseno es el coseno del ángulo entre los vectores

$$A = (2, -1, 1) \quad \text{y} \quad B = (1, 2, -1).$$

Entonces

$$\cos\theta = \frac{A \cdot B}{\|A\|\,\|B\|} = -\frac{1}{6}.$$

Ejemplo 5. Sean

$$Q = (1, 1, 1) \quad \text{y} \quad P = (1, -1, 2).$$

Sea

$$N = (1, 2, 3).$$

Hallar el punto de intersección de la recta que pasa por P en la dirección de N, y el plano que pasa por Q perpendicular a N.

La representación paramétrica de la recta que pasa por P en la dirección de N es

(1) $$X = P + tN.$$

La ecuación del plano que pasa por Q perpendicular a N es

(2) $$(X - Q) \cdot N = 0.$$

Visualizamos la recta y el plano como sigue:

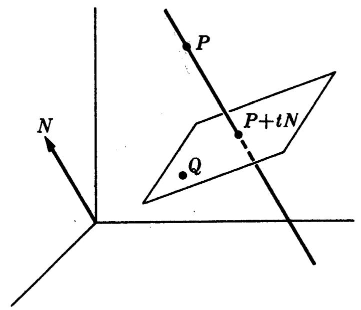


Figura 33

Debemos hallar el valor de t tal que el vector X en (1) también satisfaga (2),

esto es,

$$(P + tN - Q) \cdot N = 0,$$

o, después de usar las reglas del producto punto,

$$(P - Q) \cdot N + tN \cdot N = 0.$$

Despejando t se obtiene

$$t = \frac{(Q - P) \cdot N}{N \cdot N} = \frac{1}{14}.$$

Así, el punto de intersección deseado es

$$P + tN = (1, -1, 2) + \tfrac{1}{14}(1, 2, 3) = \left(\tfrac{15}{14}, -\tfrac{12}{14}, \tfrac{31}{14}\right).$$

Ejemplo 6. Hallar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos

$$P_1 = (1, 2, -1), \qquad P_2 = (-1, 1, 4), \qquad P_3 = (1, 3, -2).$$

Visualizamos esquemáticamente los tres puntos así:

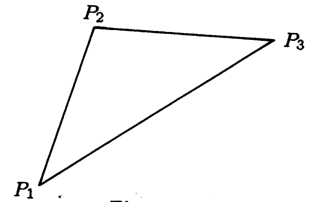


Figura 34

Entonces hallamos un vector N perpendicular a $\overrightarrow{P_1P_2}$ y a $\overrightarrow{P_1P_3}$, o, en otras palabras, perpendicular a $P_2 - P_1$ y a $P_3 - P_1$. Tenemos

$$P_2 - P_1 = (-2, -1, +5),$$
$$P_3 - P_1 = (0, 1, -1).$$

Sea $N = (a, b, c)$. Debemos resolver

$$N \cdot (P_2 - P_1) = 0 \quad \text{y} \quad N \cdot (P_3 - P_1) = 0,$$

en otras palabras,

$$-2a - b + 5c = 0,$$
$$b - c = 0.$$

Tomamos $b = c = 1$ y resolvemos para $a = 2$. Entonces

$$N = (2, 1, 1)$$

satisface nuestros requerimientos. El plano perpendicular a N que pasa por P_1 es el plano deseado. Su ecuación es entonces $X \cdot N = P_1 \cdot N$, esto es,

$$2x + y + z = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Distancia entre un punto y un plano. Consideren un plano definido por la ecuación

$$(X - P) \cdot N = 0,$$

y sea Q un punto arbitrario. Deseamos hallar una fórmula para la distancia entre Q y el plano. Con esto nos referimos al segmento que va desde Q hasta el punto de intersección de la recta perpendicular al plano que pasa por Q, como en la figura. Sea Q' este punto de intersección.

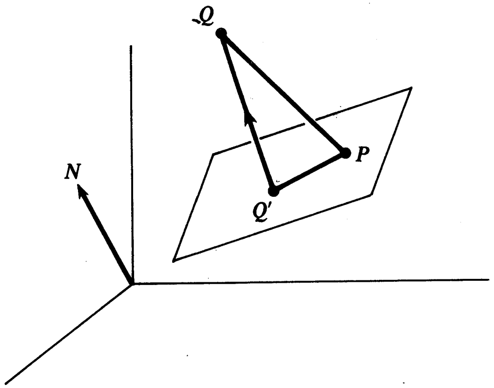


Figura 35

Por geometría tenemos:

longitud del segmento $\overline{QQ'}$ = longitud de la proyeccción de $\overline{QP}$ sobre $\overline{QQ'}$.

Podemos expresar la longitud de esta proyección en términos del producto punto, como sigue. Un vector unitario en la dirección de N, que es perpendicular al plano, está dado por $N/\|N\|$. Entonces

longitud de la proyección de $\overline{QP}$ sobre $\overline{QQ'}$

= norma de la proyección de $Q - P$ sobre $N/\|N\|$

$$= \left|(Q - P) \cdot \frac{N}{\|N\|}\right|.$$

Esto también se puede escribir en la forma:

$$\boxed{\text{distancia entre } Q \text{ y el plano} = \frac{|(Q - P) \cdot N|}{\|N\|}.}$$

Ejemplo 7. Sean

$$Q = (1, 3, 5), \qquad P = (-1, 1, 7) \qquad \text{y} \qquad N = (-1, 1, -1).$$

La ecuación del plano es

$$-x + y - z = -5.$$

Hallamos $\|N\| = \sqrt{3}$,

$$Q - P = (2, 2, -2) \qquad \text{y} \qquad (Q - P) \cdot N = -2 + 2 + 2 = 2.$$

Por lo tanto, la distancia entre Q y el plano es $2/\sqrt{3}$.

XV, §6. EJERCICIOS

1. Mostrar que las rectas $2x + 3y = 1$ y $5x - 5y = 7$ no son perpendiculares.
2. Sean $y = mx + b$ y $y = m'x + c$ las ecuaciones de dos rectas en el plano. Escribir los vectores perpendiculares a estas rectas. Mostrar que estos vectores son perpendiculares a todos los otros si, y sólo si, $mm' = -1$.

Hallar la ecuación de la recta en el 2-espacio, perpendicular a N y que pasa por P, para los valores siguientes de N y P.

3. $N = (1, -1)$, $P = (-5, 3)$ 4. $N = (-5, 4)$, $P = (3, 2)$

5. Mostrar que las rectas

$$3x - 5y = 1, \qquad 2x + 3y = 5$$

no son perpendiculares.

6. ¿Cuáles de los siguientes pares de rectas son perpendiculares?
(a) $3x - 5y = 1$ y $2x + y = 2$
(b) $2x + 7y = 1$ y $x - y = 5$
(c) $3x - 5y = 1$ y $5x + 3y = 7$
(d) $-x + y = 2$ y $x + y = 9$

7. Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector dado N y que pasa por el punto dado P.
(a) $N = (1, -1, 3)$, $P = (4, 2, -1)$
(b) $N = (-3, -2, 4)$, $P = (2, \pi, -5)$
(c) $N = (-1, 0, 5)$, $P = (2, 3, 7)$

8. Hallar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos siguientes.
(a) $(2, 1, 1)$, $(3, -1, 1)$, $(4, 1, -1)$
(b) $(-2, 3, -1)$, $(2, 2, 3)$, $(-4, -1, 1)$
(c) $(-5, -1, 2)$, $(1, 2, -1)$, $(3, -1, 2)$

9. Hallar un vector perpendicular a $(1, 2, -3)$ y $(2, -1, 3)$ y otro vector perpendicular a $(-1, 3, 2)$ y $(2, 1, 1)$.

10. Hallar un vector paralelo a la recta de intersección de los dos planos

$$2x - y + z = 1, \qquad 3x + y + z = 2.$$

11. La misma cuestión para los planos

$$2x + y + 5z = 2, \qquad 3x - 2y + z = 3.$$

12. Hallar una representación paramétrica para la recta de intersección de los planos de los ejercicios 10 y 11.

13. Hallar el coseno del ángulo entre los planos siguientes:

(a) $x + y + z = 1$, $x - y - z = 5$

(b) $2x + 3y - z = 2$, $x - y + z = 1$

(c) $x + 2y - z = 1$, $-x + 3y + z = 2$

(d) $2x + y + z = 3$, $-x - y + z = \pi$

14. (a) Sean $P = (1,3,5)$ y $A = (-2,1,1)$. Hallar la intersección de la recta que pasa por P en la dirección de A con el plano $2x + 3y - z = 1$.
(b) Sea $P = (1,2,-1)$. Hallar el punto de intersección del plano

$$3x - 4y + z = 2,$$

con la recta que pasa por P, perpendicular a ese plano.

15. Sean $Q = (1,-1,2)$, $P = (1,3,-2)$ y $N = (1,2,2)$. Hallar el punto de la intersección de la recta que pasa por P en la dirección de N con el plano que pasa por Q, perpendicular a N.

16. Hallar la distancia entre el punto indicado y el plano.
(a) $(1,1,2)$ y $3x + y - 5z = 2$
(b) $(-1,3,2)$ y $2x - 4y + z = 1$
(c) $(3,-2,1)$ y el plano yz
(d) $(-3,-2,1)$ y el plano yz

17. Trazar el triángulo con vértices $A = (1,1)$, $B = (2,3)$ y $C = (3,-1)$. Trazar el punto P tal que $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$ y P pertenece a la recta que pasa por los puntos B y C.
(a) Hallar el coseno del ángulo del triángulo cuyo vértice está en A.
(b) ¿Cuáles son las coordenadas de P?

18. (a) Hallar la ecuación del plano M que pasa por el punto $P = (1,1,1)$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{ON}$, donde $N = (1,2,0)$.
(b) Hallar una representación paramétrica de la recta L que pasa por

$$Q = (1,4,0)$$

y es perpendicular al plano M.
(c) ¿Cuál es la distancia de Q al plano M?

19. Hallar el coseno del ángulo entre los planos

$$2x + 4y - z = 5 \quad \text{y} \quad x - 3y + 2z = 0.$$

CAPÍTULO XVI

Diferenciación de vectores

XVI, §1. LA DERIVADA

Consideren un insecto que se mueve a lo largo de una curva en el espacio tridimensional. La posición del insecto en el tiempo t está dada por las tres coordenadas

$$(x(t), y(t), z(t)),$$

que dependen de t. Las abreviamos como $X(t)$. Por ejemplo, en el capítulo anterior se vio que la posición de un insecto que se mueve a lo largo de una recta está dada por

$$X(t) = P + tA,$$

donde P es el punto inicial y A da la dirección del insecto. Sin embargo, podemos dar ejemplos de cuando el insecto no se mueve sobre un recta. Primero veamos un ejemplo en el plano.

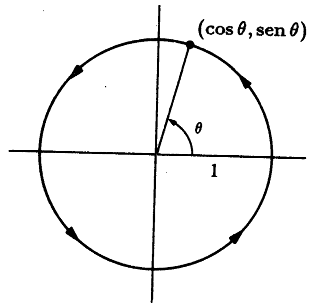


Figura 1

Ejemplo 1. Sea $X(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Entonces el insecto se mueve a lo largo de un círculo de radio 1 en el sentido contrario al que giran las manecillas del reloj. Aquí usamos θ como la variable correspondiente al ángulo mostrado en la figura. Sea ω la velocidad angular del insecto y supongamos que ω es constante. Así, $d\theta/dt = \omega$ y

$$\theta = \omega t + \text{ una constante.}$$

Por sencillez suponemos que la constante es 0. Entonces podemos escribir la posición del insecto como

$$X(\theta) = X(\omega t) = (\cos\omega t, \operatorname{sen}\omega t).$$

Si su velocidad angular es 1, tenemos entonces la representación más sencilla,

$$X(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Ejemplo 2. Si el insecto se mueve alrededor de un círculo de radio 2 con velocidad angular igual a 1, entonces su posición en el tiempo t está dada por

$$X(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t).$$

De manera más general, si el insecto se mueve alrededor de un círculo de radio r, entonces la posición está dada por

$$X(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t).$$

En estos ejemplos, obviamente suponemos que, en el tiempo $t = 0$, el insecto comienza en el punto $(r, 0)$, esto es

$$X(0) = (r, 0),$$

donde r es el radio del círculo.

Ejemplo 3. Suponer que la posición del insecto está dada en el 3-espacio por

$$X(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Entonces el insecto se mueve a lo largo de una espiral. Sus coordenadas están dadas como funciones de t por

$$x(t) = \cos t,$$

$$y(t) = \operatorname{sen} t,$$

$$z(t) = t.$$

La posición en el tiempo t se obtiene al sustituir un valor particular de t. Así:

$$X(\pi) = (\cos\pi, \operatorname{sen}\pi, \pi) = (-1, 0, \pi)$$

$$X(1) = (\cos 1, \operatorname{sen} 1, 1).$$

Podemos ahora dar la definición de una curva en general.

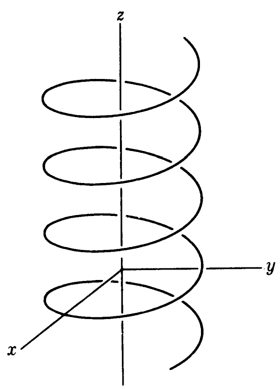


Figura 2

Definición. Sea I un intervalo. Una **curva parametrizada** (definida en este intervalo) es una asociación que a cada punto de I asocia un vector. Si X denota una curva definida en I y t es un punto de I, entonces $X(t)$ denota el vector asociado a t mediante X. A menudo escribimos la asociación $t \mapsto X(t)$ mediante una flecha

$$X : I \to \mathbf{R}^n.$$

También llamamos a esta asociación la **parametrización** de una curva. $X(t)$ se llama **vector de posición** en el tiempo t, y se puede escribir en términos de coordenadas,

$$X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

donde cada $x_i(t)$ es una función de t. Decimos que esta curva es **diferenciable** si cada función $x_i(t)$ es una función diferenciable de t.

Observación. Los intervalos de definición de nuestras curvas serán abiertos, cerrados, semiabiertos o semicerrados. Cuando definimos la derivada de una curva, se sobreentiende que el intervalo de definición contiene más de un punto. En ese caso, en un extremo se toma el límite usual de

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

para aquellos h tales que tenga sentido el cociente, i.e. $a + h$ esté en el intervalo. Si a es un extremo izquierdo, se considera el cociente sólo para $h > 0$. Si a es un extremo derecho, el cociente se considera sólo para $h < 0$. Entonces las reglas usuales para la diferenciación de funciones son verdaderas en su mayor generalidad, y así también serán verdaderas las reglas 1 a 4 que se verán a continuación, así como la regla de la cadena de la sección §2. [En el ejercicio 11(b) se da un ejemplo de una afirmación que no siempre es verdadera para curvas definidas en intervalos cerrados.]

Tratemos de diferenciar curvas. Consideramos el cociente de Newton

$$\frac{X(t+h) - X(t)}{h}.$$

Su numerador se ilustra en la figura 3.

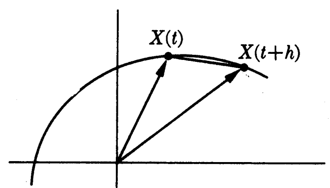


Figura 3

Cuando h tiende a 0, vemos geométricamente que

$$\frac{X(t+h)-X(t)}{h}$$

deberá tender a un vector que apunte en la dirección de la curva. Podemos escribir el cociente de Newton en términos de coordenadas,

$$\frac{X(t+h)-X(t)}{h}=\left(\frac{x_1(t+h)-x_1(t)}{h},\dots,\frac{x_n(t+h)-x_n(t)}{h}\right)$$

y ver que cada componente es un cociente de Newton para la coordenada correspondiente. Suponemos que cada $x_i(t)$ es diferenciable, y entonces todo cociente

$$\frac{x_i(t+h)-x_i(t)}{h}$$

tiende a la derivada dx_i/dt. Por esta razón definimos la **derivada** dX/dt como

$$\frac{dX}{dt}=\left(\frac{dx_1}{dt},\dots,\frac{dx_n}{dt}\right).$$

De hecho, también pudimos decir que el vector

$$\left(\frac{dx_1}{dt},\dots,\frac{dx_n}{dt}\right)$$

es el límite del cociente de Newton

$$\frac{X(t+h)-X(t)}{h}$$

cuando h tiende a 0. En efecto, cuando h tiende a 0, cada componente

$$\frac{x_i(t+h)-x_i(t)}{h}$$

tiende a dx_i/dt. Por lo tanto, el cociente de Newton tiende al vector

$$\left(\frac{dx_1}{dt},\dots,\frac{dx_n}{dt}\right).$$

Ejemplo 4. Si $X(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,t)$ entonces

$$\frac{dX}{dt}=(-\operatorname{sen} t,\cos t,1).$$

Los físicos denotan a menudo dX/dt por $\dot{X}$; y en el ejemplo anterior también pudimos escribir

$$\dot{X}(t)=-\operatorname{sen} t,\cos t,1)=X'(t).$$

Definimos el **vector velocidad** de la curva en el tiempo t como el vector $X'(t)$.

Ejemplo 5. Cuando $X(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,t)$, entonces

$$X'(t)=(-\operatorname{sen} t,\cos t,1);$$

el vector velocidad en $t=\pi$ es

$$X'(\pi)=(0,-1,1),$$

y para $t=\pi/4$ obtenemos

$$X'(\pi/4)=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},1).$$

El vector velocidad está fijo en el origen, pero cuando lo trasladamos al punto $X(t)$ lo visualizamos como tangente a la curva, como en la figura siguiente.

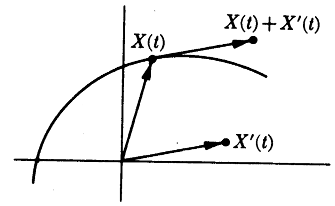


Figura 4

Definimos la **recta tangente** a una curva X en el tiempo t como la recta que pasa por $X(t)$ en la dirección de $X'(t)$, siempre que $X'(t)\neq O$. De lo contrario no definimos ninguna recta tangente. Tenemos entonces dadas dos interpretaciones para $X'(t)$:

> $X'(t)$ *es la velocidad en el tiempo* t;
> $X'(t)$ *es paralelo al vector tangente en el tiempo* t.

A veces, por abuso de lenguaje, llamamos a $X'(t)$ vector tangente, aunque hablando estrictamente, nos deberíamos referir al vector fijo $\overrightarrow{X(t)(X(t)+X'(t))}$ como el vector tangente. Sin embargo, es complicado escribir cada vez este vector fijo.

Ejemplo 6. Hallar una ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva $X(t)=(\operatorname{sen} t,\cos t)$ en $t=\pi/3$.

Tenemos que $X'(t)=(\cos t,-\operatorname{sen} t)$, de modo que en $t=\frac{\pi}{3}$ obtenemos

$$X'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\quad \text{y}\quad X\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Sean $P=X(\pi/3)$ y $A=X'(\pi/3)$. Entonces una ecuación paramétrica de la recta tangente en el punto requerido es

$$L(t)=P+tA=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)t.$$

(Usamos la letra L porque ya está ocupada X.) En términos de las coordenadas $L(t) = (x(t), y(t))$, podemos escribir la recta tangente como

$$x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}t,$$
$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Ejemplo 7. Hallar la ecuación del plano perpendicular a la espiral

$$X(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$$

cuando $t = \pi/3$.

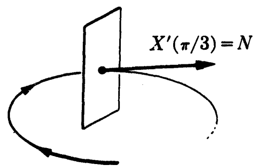


Figura 5

Sea el punto dado:

$$P = X\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right),$$

y, de manera más sencilla,

$$P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3}\right).$$

Debemos entonces hallar un vector N perpendicular al plano en el punto dado P.

Tenemos $X'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$, de modo que

$$X'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = N.$$

La ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a N es

$$X \cdot N = P \cdot N,$$

de modo que la ecuación del plano deseado es

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + z = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}$$
$$= \frac{\pi}{3}.$$

Definimos la **rapidez** de la curva $X(t)$ como la norma del vector velocidad. Si denotamos la rapidez por $v(t)$, entonces, por definición, tenemos

$$\boxed{v(t) = \|X'(t)\|,}$$

y así,

$$\boxed{v(t)^2 = X'(t)^2 = X'(t) \cdot X'(t).}$$

También podemos omitir la t de la notación y escribir

$$v^2 = X' \cdot X' = X'^2.$$

Ejemplo 8. La rapidez del insecto que se mueve sobre el círculo

$$X(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

es la norma de la velocidad $X'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$, y es

$$v(t) = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos^2 t)} = 1.$$

Ejemplo 9. La rapidez del insecto que se mueve sobre la espiral

$$X(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$$

es la norma de la velocidad $X'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$, y es

$$v(t) = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos^2 t) + 1}$$
$$= \sqrt{2}.$$

Definimos el **vector aceleración** como la derivada

$$\frac{dX'(t)}{dt} = X''(t),$$

siempre, claro está, que X' sea diferenciable. También denotaremos el vector aceleración por $X''(t)$, como antes.

Ahora estudiaremos la aceleración. Hay dos definiciones posibles para una **aceleración escalar**:

La primera es la *razón de cambio de la rapidez*, esto es

$$\frac{dv}{dt} = v'(t).$$

La segunda es la *norma del vector aceleración*, esto es

$$\|X''(t)\|.$$

Advertencia. Usualmente éstas dos no son iguales. Casi cualquier ejemplo lo mostrará.

Ejemplo 10. Sea
$$X(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$
Entonces:
$$v(t) = \|X'(t)\| = 1, \qquad \text{de modo que} \qquad dv/dt = 0.$$
$$X''(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t), \qquad \text{de modo que} \qquad \|X''(t)\| = 1.$$
Así, cuando nos refiramos a una aceleración escalar, siempre deberemos decir a cuál. Podríamos usar la notación $a(t)$ para la aceleración escalar, pero debemos especificar cuál de estas dos posibilidades es la que denota $a(t)$.

El hecho de que las dos cantidades anteriores no sean iguales refleja la interpretación física. Un insecto que se mueve alrededor de un círculo con rapidez uniforme tiene $dv/dt = 0$. Sin embargo, el vector aceleración no es O, pues el vector velocidad está cambiando constantemente. Por lo tanto, la norma del vector aceleración no es igual a 0.

Listaremos las reglas para la diferenciación. Éstas serán sobre sumas, productos, y la regla de la cadena que diferimos para la sección siguiente.

La derivada de una curva se define por medio componentes. Así, las reglas para la derivada serán parecidas a las reglas para diferenciar funciones.

Regla 1. *Sean $X(t)$ y $Y(t)$ dos curvas diferenciables (definidas para los mismos valores de t). Entonces la suma $X(t) + Y(t)$ es diferenciable, y*
$$\frac{d(X(t)+Y(t))}{dt} = \frac{dX}{dt} + \frac{dY}{dt}.$$
Regla 2. *Sea c un número y sea $X(t)$ diferenciable. Entonces $cX(t)$ es diferenciable, y*
$$\frac{d(cX(t))}{dt} = c\frac{dX}{dt}.$$
Regla 3. *Sean $X(t)$ y $Y(t)$ dos curvas diferenciables (definidas para los mismos valores de t). Entonces $X(t) \cdot Y(t)$ es una función diferenciable cuya derivada es*
$$\frac{d}{dt}[X(t) \cdot Y(t)] = X(t) \cdot Y'(t) + X'(t) \cdot Y(t).$$
(Esto es formalmente análogo a la derivada de un producto de funciones, a saber, **la primera por la derivada de la segunda más la segunda por la derivada de la primera,** excepto que ahora el producto es un producto escalar.)

Como ejemplo de las demostraciones, daremos la tercera en detalle y dejamos las otras como ejercicios.

Por simplicidad, sean
$$X(t) = (x_1(t), x_2(t)) \qquad \text{y} \qquad Y(t) = (y_1(t), y_2(t)).$$

Entonces
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X(t) \cdot Y(t) &= \frac{d}{dt}[x_1(t)y_1(t) + x_2(t)y_2(t)]\\ &= x_1(t)\frac{dy_1}{dt} + \frac{dx_1}{dt}y_1(t) + x_2(t)\frac{dy_2}{dt} + \frac{dx_2}{dt}y_2(t)\\ &= X(t) \cdot Y'(t) + X'(t) \cdot Y(t),\end{aligned}$$
combinando los términos apropiados.

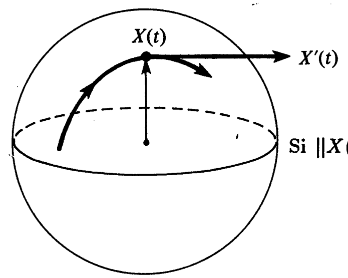
La demostración para el 3-espacio o el n-espacio se obtiene al reemplazar 2 por 3 o n e insertando ... enmedio para tomar en cuenta las otras coordenadas.

Ejemplo 11. El cuadrado $X(t)^2 = X(t) \cdot X(t)$ se presenta con frecuencia en las aplicaciones, pues, por ejemplo, puede interpretarse como el cuadrado de la distancia de $X(t)$ al origen. Al usar la regla de la derivada de un producto, hallamos la fórmula
$$\boxed{\frac{d}{dt}X(t)^2 = 2X(t) \cdot X'(t).}$$

Deberán memorizar esta fórmula repitiéndola en voz alta.

Supongan que $\|X(t)\|$ es constante. Esto significa que $X(t)$ está sobre la esfera de radio constante k. Al tomar el cuadrado se obtiene
$$X(t)^2 = k^2$$
esto es, $X(t)^2$ también es constante. Al diferenciar ambos lados respecto a t se obtiene
$$2X(t) \cdot X'(t) = 0, \qquad \text{y entonces,} \qquad X(t) \cdot X'(t) = 0.$$

Interpretación. *Suponer que un insecto se mueve a lo largo de una curva $X(t)$ que permanece a distancia constante del origen, i.e. $\|X(t)\| = k$ es constante. Entonces el vector de posición $X(t)$ es perpendicular a la velocidad $X'(t)$.*



Si $\|X(t)\|^2 = 1$ entonces $X(t) \perp X'(t)$.

Curva sobre una esfera

Si $X(t)$ es una curva y $f(t)$ es una función, definida para los mismos valores de t, entonces también podemos formar el producto $f(t)X(t)$ del número $f(t)$ por el vector $X(t)$.

Ejemplo 12. Sean $X(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ y $f(t) = e^t$; entonces

$$f(t)X(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t t),$$

y

$$f(\pi)X(\pi) = (e^\pi(-1), e^\pi(0), e^\pi \pi) = (\bar{e}^\pi, 0, e^\pi \pi).$$

Si $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces

$$f(t)X(t) = (f(t)x(t), f(t)y(t), f(t)z(t)).$$

Tenemos una regla para dicha diferenciación análoga a la regla 3.

Regla 4. *Si tanto $f(t)$ como $X(t)$ están definidas sobre el mismo intervalo y son diferenciables, entonces lo mismo sucede con $f(t)X(t)$, y*

$$\frac{d}{dt}f(t)X(t) = f(t)X'(t) + f'(t)X(t).$$

La demostración es la misma que para la regla 3.

Ejemplo 13. Sea A un vector constante y sea f una función diferenciable ordinaria, de una variable. Sea $F(t) = f(t)A$. Entonces $F'(t) = f'(t)A$. Por ejemplo, si $F(t) = (\cos t)A$ y $A = (a, b)$ donde a y b son números fijos, entonces

$$F(t) = (a \cos t, b \cos t)$$

y así

$$F'(t) = (-a \operatorname{sen} t, -b \operatorname{sen} t) = (-\operatorname{sen} t)A.$$

De manera análoga, si A y B son vectores constantes y

$$G(t) = (\cos t)A + (\operatorname{sen} t)B,$$

entonces

$$G'(t) = (-\operatorname{sen} t)A + (\cos t)B.$$

XVI, §1. EJERCICIOS

Hallar la velocidad de las curvas siguientes.

1. $(e^t, \cos t, \operatorname{sen} t)$
2. $(\operatorname{sen} 2t, \log(1+t), t)$
3. $(\cos t, \operatorname{sen} t)$
4. $(\cos 3t, \operatorname{sen} 3t)$
5. (a) En los ejercicios 3 y 4, mostrar que el vector velocidad es perpendicular al vector de posición. ¿Sucede lo mismo en los ejercicios 1 y 2?
(b) En los ejercicios 3 y 4, mostrar que el vector aceleración está en dirección opuesta al vector de posición.

6. Sean A y B dos vectores constantes. ¿Cuál es el vector velocidad de la curva
$$X = A + tB?$$
7. Sea $X(t)$ una curva diferenciable. A un plano o recta que sea perpendicular al vector velocidad $X'(t)$ en el punto $X(t)$ se le llama **normal** a la curva en el punto t o también en el punto $X(t)$. Hallar la ecuación de una recta normal a las curvas de los ejercicios 3 y 4 en el punto $\pi/3$.
8. (a) Hallar la ecuación de un plano normal a la curva
$$(e^t, t, t^2)$$
en el punto $t = 1$.
(b) La misma pregunta en el punto $t = 0$.

? 9. Sean P el punto $(1, 2, 3, 4)$ y Q el punto $(4, 3, 2, 1)$. Sea A el vector $(1, 1, 1, 1)$. Sea L la recta que pasa por P y es paralela a A.
(a) Dado un punto X sobre la recta L, calcular la distancia entre Q y X (como función del parámetro t).
(b) Mostrar que existe precisamente un punto X_0 sobre la recta de manera tal que esta distancia alcanza un mínimo, y que este mínimo es $2\sqrt{5}$.
(c) Mostrar que $X_0 - Q$ es perpendicular a la recta.

? 10. Sean P el punto $(1, -1, 3, 1)$ y Q el punto $(1, 1, -1, 2)$. Sea A el vector $(1, -3, 2, 1)$. Resolver las mismas preguntas que en el problema anterior, excepto que en este caso la distancia mínima es $\sqrt{146/15}$.

11. Sea $X(t)$ una curva diferenciable definida sobre un intervalo abierto. Sea Q un punto que no esté sobre la curva.
(a) Escribir la fórmula para la distancia entre Q y un punto arbitrario sobre la curva.
(b) Si t_0 es un valor de t tal que la distancia entre Q y $X(t_0)$ es un mínimo, mostrar que el vector $Q - X(t_0)$ es normal a la curva en el punto $X(t_0)$. [*Idea:* Investigar el mínimo del cuadrado de la distancia.]
(c) Si $X(t)$ es la representación paramétrica de una recta, mostrar que existe un valor único t_0 tal que la distancia entre Q y $X(t_0)$ es un mínimo.
12. Sean N un vector distinto de cero, c un número y Q un punto. Sea P_0 el punto de intersección de la recta que pasa por Q en la dirección de N y el plano $X \cdot N = c$. Mostrar que para todos los puntos P del plano tenemos
$$\|Q - P_0\| \leq \|Q - P\|.$$

* 13. Probar que, si la rapidez es constante, entonces la aceleración es perpendicular a la velocidad.

14. Probar que, si la aceleración de una curva es siempre perpendicular a su velocidad, entonces su rapidez es constante.
15. Sea B un vector distinto de cero y sea $X(t)$ tal que $X(t) \cdot B = t$ para todo t. Supongamos además que el ángulo entre $X'(t)$ y B es constante. Mostrar que $X''(t)$ es perpendicular a $X'(t)$.

16. Escribir una representación paramétrica para la recta tangente a la curva dada en el punto dado en cada uno de los casos siguientes.
(a) $(\cos 4t, \operatorname{sen} 4t, t)$ en el punto $t = \pi/8$
(b) $(t, 2t, t^2)$ en el punto $(1, 2, 1)$
(c) $(e^{3t}, e^{-3t}, 3\sqrt{2}t)$ en $t = 1$
(d) (t, t^3, t^4) en el punto $(1, 1, 1)$

17. Sean A y B dos vectores constantes distintos de cero. Sea
$$X(t) = e^{2t}A + e^{-2t}B.$$
Mostrar que $X''(t)$ tiene la misma dirección que $X(t)$.

18. Mostrar que las dos curvas $(e^t, e^{2t}, 1 - e^{-t})$ y $(1 - \theta, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ se intersecan en el punto $(1, 1, 0)$. ¿Cuál es el ángulo entre sus tangentes en ese punto?

19. ¿En qué puntos interseca la curva $(2t^2, 1 - t, 3 + t^2)$ al plano
$$3x - 14y + z - 10 = 0?$$

20. Sea $X(t)$ una curva diferenciable.
(a) Suponer que $X'(t) = O$ para todo t en su intervalo de definición I. ¿Qué se puede decir acerca de la curva?
(b) Suponer que $X'(t) \neq O$ pero $X''(t) = O$ para todo t en el intervalo. ¿Qué se puede decir acerca de la curva?

21. Sea $X(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, donde a y b son constantes. Sea $\theta(t)$ el ángulo que forma la recta tangente en un punto dado de la curva con el eje z. Mostrar que $\cos\theta(t)$ es la constante $b/\sqrt{a^2 + b^2}$.

22. Mostrar que los vectores velocidad y aceleración de la curva en el ejercicio 21 tienen normas (magnitudes) constantes.

23. Sea B un vector unitario constante, y sea $X(t)$ una curva tal que $X(t) \cdot B = e^{2t}$ para todo t. Suponer también que el vector velocidad de la curva forma un ángulo constante θ con el vector B, con $0 < \theta < \pi/2$.
(a) Mostrar que la rapidez es $2e^{2t}/\cos\theta$.
(b) Determinar el producto punto $X'(t) \cdot X''(t)$ en términos de t y θ.

24. Sea
$$X(t) = \left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, 1\right).$$
Mostrar que el coseno del ángulo entre $X(t)$ y $X'(t)$ es constante.

25. Suponer que un insecto se mueve a lo largo de una curva diferenciable $B(t) = (x(t), y(t), z(t))$, que está sobre la superficie $z^2 = 1 + x^2 + y^2$. (Esto significa que las coordenadas (x, y, z) de la curva satisfacen esta ecuación.)
(a) Mostrar que
$$2z(t)z'(t) = B(t) \cdot B'(t).$$
(b) Suponer que el coseno del ángulo entre el vector $B(t)$ y el vector velocidad $B'(t)$ siempre es positivo. Mostrar que la distancia del insecto al plano yz crece cuando su abscisa es positiva.

26. Un insecto se mueve en el espacio sobre una curva dada por
$$X(t) = (t, t^2, \tfrac{2}{3}t^3),$$
(a) Hallar una representación paramétrica de la recta tangente en $t = 1$.
(b) Escribir la ecuación del plano normal a la curva en $t = 1$.

27. Sea una partícula moviéndose en el plano de modo que su posición en el tiempo t es
$$C(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t).$$
Mostrar que el vector tangente a la curva forma un ángulo constante de $\pi/4$ con el vector de posición.

XVI, §2. LONGITUD DE CURVAS

Suponer que un insecto viaja a lo largo de una curva $X(t)$; la razón de cambio de la distancia recorrida es igual a la rapidez, de modo que podemos escribir la ecuación
$$\frac{ds(t)}{dt} = v(t).$$
En consecuencia, es razonable dar la siguiente definición.

Definimos la **longitud** de la curva X entre dos valores a y b de t $(a \leq b)$ en el intervalo de definición de la curva, como la integral de la rapidez:
$$\int_b^a v(t)\,dt = \int_a^b \|X'(t)\|\,dt.$$
Por definición, podemos reescribir esta integral en la forma
$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \qquad \text{cuando} \qquad X(t) = (x(t), y(t)),$$
$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \qquad \text{cuando} \qquad X(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$
$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2}\,dt \qquad \text{cuando} \qquad X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Ejemplo 1. Sea la curva definida por
$$X(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t).$$
Entonces $X'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)$ y $v(t) = \sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} = 1$. Por lo tanto, la longitud de la curva entre $t = 0$ y $t = 1$ es
$$\int_0^1 v(t)\,dt = t\Big|_0^1 = 1.$$
En este caso, obviamente, es fácil evaluar la integral, pero no hay razón para que esto siempre sea así.

Ejemplo 2. Formar la integral para obtener la longitud de la curva

$$X(t) = (e^t, \operatorname{sen} t, t)$$

entre $t = 1$ y $t = \pi$.

Tenemos $X'(t) = (e^t, \cos t, 1)$. Por lo tanto, la integral deseada es

$$\int_1^{\pi} \sqrt{e^{2t} + \cos^2 t + 1}\, dt.$$

En este caso no hay una fórmula fácil para la integral. Sin embargo, en los ejercicios, las funciones están ajustadas de manera que la integral se pueda evaluar mediante técnicas elementales de integracion. Pero no esperen que éste sea el caso en la vida real. La presencia del signo de raíz cuadrada frecuentemente hace imposible evaluar la integral de longitud mediante funciones elementales.

XVI, §2. EJERCICIOS

1. Hallar la longitud de la espiral $(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ entre $t = 0$ y $t = 1$.

2. Hallar la longitud de las espirales
   (a.) $(\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, 3t)$ entre $t = 1$ y $t = 3$.
   (b.) $(\cos 4t, \operatorname{sen} 4t, t)$ entre $t = 0$ y $t = \pi/8$.

3. Hallar la longitud de la curva indicada para la integral dada:
   (a) $(t, 2t, t^2)$ entre $t = 1$ y $t = 3$. [*Idea:* En algún momento llegarán a la integral $\int \sqrt{1 + u^2}\, du$. La manera más fácil de manejar esto es hacer

$$u = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{senh} t, \qquad \text{de modo que} \qquad 1 + \operatorname{senh}^2 t = \cosh^2 t,$$

donde

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Esto hace que la expresión bajo el signo de raíz cuadrada sea un cuadrado perfecto. Este método probará, de hecho, la fórmula general

$$\boxed{\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \log(x + \sqrt{a^2 + x^2})].}$$

Por supuesto, se puede verificar la fórmula al diferenciar el lado derecho, y se usará sólo para el ejercicio.
   (b) $(e^{3t}, e^{-3t}, 3\sqrt{2}\, t)$ entre $t = 0$ y $t = \frac{1}{3}$.
   [*Idea:* En algún momento se llegará a la raíz cuadrada

$$\sqrt{e^{6t} + e^{-6t} + 2}.$$

La expresión bajo la raíz cuadrada es un cuadrado perfecto. ¿Qué se obtiene al elevar al cuadrado $(e^{3t} + e^{-3t})$?]

4. Hallar la longitud de la curva definida por

$$X(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$$

entre (a) $t = 0$ y $t = 2\pi$, (b) $t = 0$ y $t = \pi/2$.
[*Idea:* Recordar la identidad

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}.$$

Entonces, al hacer $t = 2\theta$, se obtiene

$$1 - \cos t = 2 \operatorname{sen}^2(t/2).$$

La expresión bajo el signo de raíz cuadrada será entonces un cuadrado perfecto.]

5. Hallar la longitud de la curva $X(t) = (t, \log t)$ entre:
   (a) $t = 1$ y $t = 2$, (b) $t = 3$ y $t = 5$. [*Idea:* Sustituir $u^2 = 1 + t^2$ para evaluar la integral. Usar fracciones parciales.]

6. Hallar la longitud de la curva definida por $X(t) = (t, \log \cos t)$ entre $t = 0$ y $t = \pi/4$.

7. Sea $X(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)$.
   (a) Hallar la rapidez de la curva.
   (b) Hallar la longitud de la curva entre $t = 0$ y $t = 1$.

8. Sea $X(t) = (6t, 2t^3, 3\sqrt{2}\, t^2)$. Hallar la longitud de la curva entre $t = 0$ y $t = 1$.

CAPÍTULO XVII

Funciones de varias variables

Consideramos las funciones de varias variables como funciones de puntos en el espacio. Esto requiere nuestra intuición geométrica y además relaciona con mayor facilidad dichas funciones con la teoría de los vectores. El gradiente aparecerá como una generalización natural de la derivada. En este capítulo estudiaremos principalmente las definiciones y conceptos básicos. En el siguiente trataremos los teoremas importantes.

XVII, §1. GRÁFICAS Y CURVAS DE NIVEL

Para ajustarnos a la terminología usual y en aras de la brevedad, una colección de objetos se llamará simplemente **conjunto**. En este capítulo tratamos principalmente con conjuntos de puntos en el espacio.

Sea S un conjunto de puntos en el n-espacio. Una **función** (definida en S) es una asociación que a cada elemento de S asocia un **número**. Por ejemplo, si a cada punto asociamos el valor numérico de la temperatura en ese punto, tenemos la función de temperatura.

Observación. En el capítulo anterior consideramos curvas parametrizadas, que asociaban un vector a un punto. **No** les llamamos funciones. Usamos la palabra **función** sólo cuando los valores de la asociación son **números**. Nos parece que para este curso ésta es la convención más útil.

En la práctica, a veces omitimos la mención explícita del conjunto S, pues usualmente el contexto aclara cuáles son los puntos en que está definida la función.

Ejemplo 1. En el 2-espacio (el plano) podemos definir una función f mediante la regla

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$

la cual está definida para todos los puntos (x,y) y se puede interpretar geométricamente como el cuadrado de la distancia entre el origen y el punto.

Ejemplo 2. De nuevo en el 2-espacio, podemos definir una función f mediante la fórmula

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{para todo} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

No definimos f en $(0,0)$ (que también se escribe O).

Ejemplo 3. En el 3-espacio podemos definir una función f mediante la regla

$$f(x,y,z) = x^2 - \operatorname{sen}(xyz) + yz^3.$$

Dado que un punto y un vector se representan por lo mismo (a saber, una n-tupla), podemos imaginar una función como las anteriores también como una función de vectores. Cuando no queramos escribir las coordenadas, escribiremos $f(X)$ en lugar de $f(x_1, \ldots, x_n)$. Al igual que con los números, llamamos a $f(X)$ **valor** de f en el punto (o vector) X.

Del mismo modo que con las funciones de una variable, definimos la **gráfica** de una función f de n variables $x_1, \ldots, x_n$ como el conjunto de puntos en el $(n+1)$-espacio de la forma

$$(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)),$$

donde $(x_1, \ldots, x_n)$ está en el dominio de definición de f.

Cuando $n = 1$, la gráfica de una función f es el conjunto de puntos $(x, f(x))$. Así, la gráfica está en el 2-espacio.

Cuando $n = 2$, la gráfica de una función f es el conjunto de puntos

$$(x, y, f(x,y)).$$

Cuando $n = 2$, ya es difícil trazar la gráfica, pues se trata de una figura en el 3-espacio. La gráfica de una función de dos variables se puede ver así:

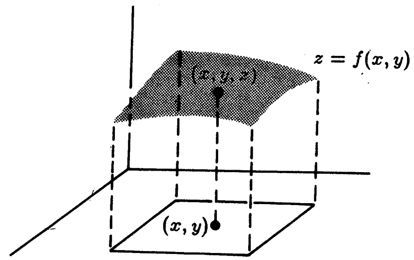


Figura 1

Para cada número c, la ecuación $f(x,y) = c$ es la ecuación de una curva en el plano. Tenemos bastante experiencia en dibujar las gráficas de dichas curvas, por lo que podemos suponer que sabemos, en principio, trazar esta gráfica. Esta curva se llama **curva de nivel** de f en c. Nos da el conjunto de puntos (x, y) donde f toma el valor c. Al trazar cierto número de dichas curvas de nivel podemos tener una buena descripción de la función.

Ejemplo 4. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$. Las curvas de nivel se describen por las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = c.$$

Éstas tienen solución sólo cuando $c \geq 0$. En ese caso son círculos (excepto cuando $c = 0$, en cuyo caso el círculo de radio 0 es simplemente el origen). En la figura 2 hemos trazado las curvas de nivel para $c = 1$ y 4.

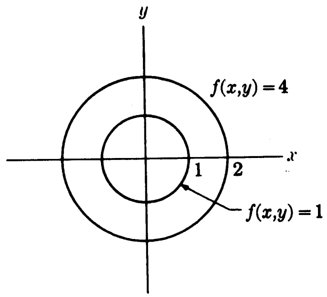


Figura 2

La gráfica de la función $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ es entonces una figura en el 3-espacio, que podemos representar como sigue.

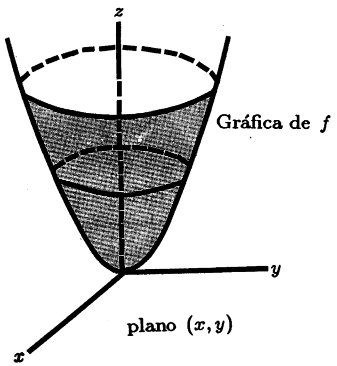


Figura 3

Ejemplo 5. Sea la elevación de una montaña, en metros, dada por la fórmula

$$f(x,y) = 4000 - 2x^2 - 3y^4.$$

Vemos que $f(0,0) = 4000$ es el punto más alto de la montaña. Conforme x y y crecen, la altitud decrece. La montaña y sus curvas de nivel se pueden ver así.

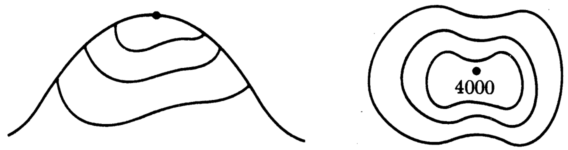


Figura 4

En este caso, el punto más alto está en el origen y las curvas de nivel indican que la altitud decrece conforme nos movemos alejándonos del origen.

Si tratamos con una función de tres variables, digamos $f(x,y,z)$, entonces $(x,y,z) = X$ es un punto en el 3-espacio. En ese caso, el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación

$$f(x,y,z) = c$$

para alguna constante c es una superficie. El concepto análogo a una curva de nivel es una **superficie de nivel**.

Ejemplo 6. Sea $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Entonces f es el cuadrado de la distancia al origen. La ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = c$$

es la ecuación de una esfera para $c > 0$, y el radio es, obviamente, $\sqrt{c}$. Si $c = 0$, ésta es la ecuación de un punto, a saber, el origen mismo. Si $c < 0$, no hay solución. Así, las superficies de nivel para la función f son esferas.

Ejemplo 7. Sea $f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2$. Entonces las superficies de nivel para f están definidas por las ecuaciones

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = c.$$

Éstas tienen forma de elipses y se llaman elipsoides, para $c > 0$.

Es más difícil hacer figuras en 3 dimensiones que en 2 dimensiones, de modo que nos restringimos a trazar curvas de nivel.

La gráfica de una función de tres variables es el conjunto de puntos

$$(x, y, z, f(x,y,z))$$

en el espacio tetradimensional. Esta gráfica no sólo es difícil de dibujar, es imposible. Sin embargo, es posible definirla, como lo hemos hecho, escribiendo coordenadas de puntos.

En física, una función f puede ser una función potencial, que da el valor de la energía potencial en cada punto del espacio. Las superficies de nivel se llaman a veces superficies de **equipotencial**. La función f puede dar una distribución de temperatura (i.e. su valor en un punto X es la temperatura en X). En ese caso, las superficies de nivel se llaman superficies **isotermas**.

XVII, §1. EJERCICIOS

Trazar las curvas de nivel para las funciones $z = f(x,y)$, donde $f(x,y)$ está dada por las expresiones siguientes.

1. $x^2 + 2y^2$	2. $y - x^2$	3. $y - 3x^2$
4. $x - y^2$	5. $3x^2 + 3y^2$	6. xy
7. $(x-1)(y-2)$	8. $(x+1)(y+3)$	9. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$
10. $2x - 3y$	11. $\sqrt{x^2+y^2}$	12. $x^2 - y^2$
13. $y^2 - x^2$	14. $(x-1)^2 + (y+3)^2$	15. $(x+1)^2 + y^2$

XVII, §2. DERIVADAS PARCIALES

En esta sección y en la siguiente estudiaremos el concepto de diferenciabilidad para funciones de varias variables. Cuando estudiamos la derivada de funciones de una variable, supusimos que dicha función estaba definida en un intervalo. Tendremos que hacer una hipótesis parecida en el caso de varias variables, y para ello necesitamos introducir un nuevo concepto.

Sea U un conjunto en el plano. Diremos que U es un **conjunto abierto** si se satisface la siguiente condición. Dado un punto P en U, existe un disco abierto D de radio $a > 0$, con centro en P y tal que D está contenido en U.

Sea U un conjunto en el espacio. Diremos que U es un **conjunto abierto** en el espacio si, dado un punto P en U, existe una bola abierta B de radio $a > 0$, con centro en P y tal que B está contenido en U.

Demos una definición análoga de conjunto abierto en el n-espacio.

Dado un punto P en un conjunto abierto, podemos ir en todas las direcciones desde P y avanzar una distancia pequeña, y estar aún dentro del conjunto abierto.

Ejemplo 1. En el plano, el conjunto formado por el primer cuadrante, excluyendo al eje x y al eje y, es un conjunto abierto.

El eje x no es abierto en el plano (i.e. en el 2-espacio). Dado un punto sobre el eje x, no podemos hallar un disco abierto con centro en ese punto y contenido en el eje x.

Ejemplo 2. Sea U la bola abierta de radio $a > 0$ con centro en el origen. Entonces U es un conjunto abierto. Esto se ilustra en la figura 5

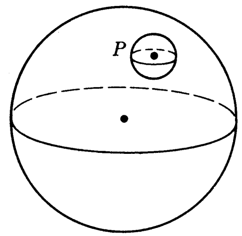


Figura 5

En la siguiente figura hemos dibujado un conjunto abierto en el plano formado por la región dentro de la curva, pero que no contiene ningún punto de la frontera. También hemos localizado un punto P en U y una bola (disco) alrededor de P contenido en U.

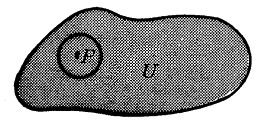


Figura 6

Cuando definimos la derivada como el límite de

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

necesitamos que la función f estuviera definida en algún intervalo abierto alrededor del punto x.

Ahora sea f una función de n variables, definida en un conjunto abierto U. Entonces, para cualquier punto X en U, la función f también está definida en todos los puntos cercanos a X, a saber, en todos los puntos que están contenidos en una bola abierta con centro en X y contenida en U. Obtendremos la derivada parcial de f manteniendo todas las variables fijas excepto una, y tomando la derivada ordinaria respecto a esa variable.

Comencemos con dos variables. Dada una función $f(x,y)$ de dos variables (x,y), mantengamos y constante y diferenciemos respecto a x. Hemos de considerar entonces el límite, cuando h tiende a 0, de

$$\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}.$$

Definición. Si existe este límite, le llamamos **derivada de f respecto a la primera variable**, o también la **primera derivada parcial** de f, y la denotamos por

$$(D_1 f)(x, y).$$

Esta notación nos permite usar cualesquiera letras para denotar las variables. Por ejemplo,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(u+h, v) - f(u, v)}{h} = D_1 f(u, v).$$

Nótese que $D_1 f$ es una sola función. Con frecuencia omitimos el paréntesis y escribimos

$$D_1 f(u, v) = (D_1 f)(u, v)$$

por simplicidad.

Además, si convenimos en las variables x y y, escribimos

$$\boxed{D_1 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}.}$$

De manera análoga, definimos

$$\boxed{D_2 f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{h}}$$

y también escribimos

$$\boxed{D_2 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.}$$

Ejemplo 3. Sea $f(x, y) = x^2 y^3$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2.$$

Observamos que las derivadas parciales son a su vez funciones. Ésta es la razón por la cual la notación $D_i f$ es a veces más útil que la notación $\partial f / \partial x_i$. Nos permite escribir $D_i f(P)$ para cualquier punto P en el conjunto donde está definida la parcial. No puede haber ambigüedad o confusión con un símbolo (sin sentido) $D_i(f(P))$, pues $f(P)$ es un número. Así, $D_i f(P)$ significa $(D_i f)(P)$, y es el valor de la función $D_i f$ en P.

Ejemplo 4. Sea $f(x, y) = \operatorname{sen} xy$. Para hallar $D_2 f(1, \pi)$, hallamos primero $\partial f / \partial y$, o $D_2 f(x, y)$, que es simplemente

$$D_2 f(x, y) = (\cos xy)x.$$

Por lo tanto,

$$D_2 f(1, \pi) = (\cos \pi) \cdot 1 = -1.$$

También,

$$D_2 f\left(3, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos \frac{3\pi}{4}\right) \cdot 3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 = -\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

En el 3-espacio se da una definición semejante de la derivada parcial. Sea f una función de tres variables (x, y, z), definida en un conjunto abierto U en el 3-espacio. Definimos, por ejemplo,

$$(D_3 f)(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h},$$

y del mismo modo para las otras variables.

Ejemplo 5. Sea $f(x, y, z) = x^2 y \operatorname{sen}(yz)$. Entonces

$$D_3 f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 y \cos(yz) y = x^2 y^2 \cos(yz).$$

Sea $X = (x, y, z)$ para abreviar. Sean

$$E_1 = (1, 0, 0), \qquad E_2 = (0, 1, 0), \qquad E_3 = (0, 0, 1)$$

los tres vectores unitarios usuales en las direcciones de los ejes coordenados. Entonces podemos abreviar el cociente de Newton para las derivadas parciales si escribimos

$$D_i f(X) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(X + hE_i) - f(X)}{h}.$$

En efecto, observamos que

$$hE_1 = (h, 0, 0) \qquad \text{de modo que} \qquad f(X + hE_1) = f(x+h, y, z),$$

y de igual modo para las otras dos variables.

De manera similar, podemos definir las derivadas parciales en el n-espacio mediante una definición que se aplique simultáneamente al 2-espacio y al 3-espacio. Sea f una función definida en un conjunto abierto U en el n-espacio. Sean las variables $(x_1, \ldots, x_n)$.

Para valores pequeños de h, el punto

$$(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n)$$

está contenido en U. Por lo tanto, la función está definida en ese punto y podemos formar el cociente

$$\frac{f(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}.$$

Si existe el límite cuando h tiende a 0, entonces le llamamos **primera derivada parcial** de f y la denotamos por

$$\boxed{D_1 f(x_1, \ldots, x_n), \quad \text{o} \quad D_1 f(X), \quad \text{o también por} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}.}$$

Asimismo, sea

$$D_i f(X) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_i+h,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)}{h}$$

si existe, y le llamamos i-ésima **derivada parcial.**

Sea

$$E_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$$

el i-ésimo vector en la dirección del i-ésimo eje coordenado, que tiene todas las componentes iguales a 0, excepto la i-ésima componente, que es 1. Tenemos entonces

$$(D_i f)(X) = \lim_{h\to 0} \frac{f(X+hE_i) - f(X)}{h}.$$

Ésta es una notación abreviada muy útil, que se aplica igualmente al 2-espacio, al 3-espacio, o al n-espacio.

Definición. Sea f una función de dos variables (x,y). Definimos el **gradiente** de f, que se escribe **grad f**, como el vector

$$\boxed{\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).}$$

Ejemplo 6. Sea $f(x,y) = x^2y^3$. Entonces

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2),$$

de modo que, en este caso,

$$\operatorname{grad} f(1,2) = (16,12).$$

Así, el gradiente de una función f asocia un **vector** a un punto X.

Si f es una función de tres variables (x,y,z), entonces definimos el gradiente como

$$\boxed{\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).}$$

Ejemplo 7. Sea $f(x,y,z) = x^2y\operatorname{sen}(yz)$. Hallar $\operatorname{grad} f(1,1,\pi)$. Primero hallamos las tres derivadas parciales, que son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\operatorname{sen}(yz),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2[y\cos(yz)z + \operatorname{sen}(yz)],$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y\cos(yz)y = x^2y^2\cos(yz).$$

Después sustituimos (x,y,z) por $(1,1,\pi)$ en estas parciales, y obtenemos

$$\operatorname{grad} f(1,1,\pi) = (0,-\pi,-1).$$

Sea f definida en un conjunto abierto U en el n-espacio y supongamos que las derivadas parciales de f existen en cada punto X de U. Definimos el **gradiente de f en X** como el vector

$$\operatorname{grad} f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = (D_1f(X),\ldots,D_nf(X)),$$

cuyas componentes son las derivadas parciales. Esto se debe leer

$$(\operatorname{grad} f)(X),$$

pero usualmente omitiremos el paréntesis alrededor de $\operatorname{grad} f$. A veces escribimos ∇f en lugar de $\operatorname{grad} f$. Así, en el 2-espacio escribimos también

$$\nabla f(x,y) = (\nabla f)(x,y) = \big(D_1f(x,y), D_2f(x,y)\big),$$

y, de manera análoga en el 3-espacio,

$$\nabla f(x,y,z) = (\nabla f)(x,y,z) = \big(D_1f(x,y,z), D_2f(x,y,z), D_3f(x,y,z)\big).$$

Hasta ahora hemos definido el gradiente sólo mediante una fórmula con derivadas parciales. En el capítulo XVIII, sección §3, daremos una interpretación geométrica del gradiente. Ahí veremos que da la dirección de máximo crecimiento de la función, y que su magnitud es la razón de crecimiento en esa dirección.

Al usar la fórmula de la derivada de una suma de dos funciones y la derivada de una constante por una función, concluimos de inmediato que el gradiente satisface las propiedades siguientes:

Teorema 2.1. *Sean f y g dos funciones definidas en un conjunto abierto U, y supongamos que sus derivadas parciales existen en todo punto de U. Sea c un número. Entonces,*

$$\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g,$$

$$\operatorname{grad}(cf) = c\operatorname{grad} f.$$

Más adelante daremos varias interpretaciones geométricas y físicas del gradiente.

XVII, §2. EJERCICIOS

Hallar las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}\quad \text{y}\quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

para las siguientes funciones $f(x,y)$ o $f(x,y,z)$.

1. $xy+z$	2. x^2y^5+1	3. $\operatorname{sen}(xy)+\cos z$
4. $\cos(xy)$	5. $\operatorname{sen}(xyz)$	6. e^{xyz}
7. $x^2\operatorname{sen}(yz)$	8. xyz	9. $xz+yz+xy$

10 $x\cos(y-3z)+\operatorname{arcsen}(xy)$

11. Hallar el $\operatorname{grad} f(P)$ si P es el punto $(1,2,3)$ en los ejercicios 1, 2, 6, 8 y 9.

12. Hallar el $\operatorname{grad} f(P)$ si P es el punto $(1,\pi,\pi)$ en los ejercicios 4, 5 y 7.

13. Hallar el $\operatorname{grad} f(P)$ si

$$f(x,y,z)=\log\bigl(z+\operatorname{sen}(y^2-x)\bigr)$$

y

$$P=(1,-1,1).$$

14. Hallar las derivadas parciales de x^y. [*Idea:* $x^y=e^{y\log x}$.]

Hallar el gradiente de las siguientes funciones en el punto dado.

15. $f(x,y,z)=e^{-2x}\cos(yz)$ en $(1,\pi,\pi)$

16. $f(x,y,z)=e^{3x+y}\operatorname{sen}(5z)$ en $(0,0,\pi/6)$

XVII, §3. DIFERENCIABILIDAD Y GRADIENTE

Sea f una función definida en un conjunto abierto U. Sea X un punto de U. Para todos los vectores H tales que $\|H\|$ es pequeño (y $H\neq O$), el punto $X+H$ también está en el conjunto abierto. Sin embargo **no podemos** formar un cociente

$$\frac{f(X+H)-f(X)}{H}$$

porque **no tiene sentido dividir entre un vector**. Para definir lo que entendemos por que una función f sea diferenciable, debemos hallar una manera que no incluya la división entre H.

Reconsideremos el caso de las funciones de una variable y fijemos un número x. Hemos definido la derivada como

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Sea

$$\varphi(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x).$$

Entonces $\varphi(h)$ no está definida cuando $h=0$, pero

$$\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0.$$

Podemos escribir

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+h\varphi(h).$$

Esta relación tiene sentido en tanto $h\neq 0$. Sin embargo, observamos que, si definimos $\varphi(0)$ como 0, entonces la relación anterior es obviamente cierta cuando $h=0$ (porque obtenemos $0=0$).

Sea

$$g(h)=\varphi(h) \qquad \text{si} \quad h>0,$$
$$g(h)=-\varphi(h) \qquad \text{si} \quad h<0.$$

Entonces hemos mostrado que, si f es diferenciable, existe una función g tal que

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+|h|g(h), \tag{1}$$

y

$$\lim_{h\to 0}g(h)=0.$$

Recíprocamente, supongamos que existen un número a y una función $g(h)$ tal que

$$f(x+h)-f(x)=ah+|h|g(h). \tag{1a}$$

y

$$\lim_{h\to 0}g(h)=0.$$

Hallamos, para $h\neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a+\frac{|h|}{h}g(h).$$

Al tomar el límite cuando h tiende a 0, observamos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}g(h)=0.$$

Por lo tanto, el límite del cociente de Newton existe y es igual a a. Por ello, f es diferenciable y su derivada $f'(x)$ es igual a a.

Entonces, la existencia de un número a y una función g que satisfaga (1a) podría usarse como la definición de diferenciabilidad en el caso de las funciones de una variable. La gran ventaja de (1) es que no aparece h en el denominador. Es esta relación la que nos sugiere cómo definir la diferenciabilidad para funciones de varias variables, y cómo probar para ellas la regla de la cadena.

Comencemos con dos variables. Hacemos

$$X=(x,y) \qquad \text{y} \qquad H=(h,k).$$

Entonces, la noción correspondiente a $x+h$ en una variable es aquí

$$X+H=(x+h,y+k).$$

Deseamos comparar los valores de una función f en X y $X+H$, i.e. queremos investigar la diferencia

$$f(X+K)-f(X)=f(x+h,y+k)-f(x,y).$$

Definición. Decimos que f es **diferenciable** en X si existen las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

y si existe una función g (definida para H pequeño) tal que

$$\lim_{H\to 0} g(H) = 0$$

y

$$(2) \qquad \boxed{f(x+h, y+k) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \|H\|g(H).}$$

Vemos el término

$$\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k$$

como una aproximación a $f(X+H) - f(X)$, dependiendo, de manera particularmente sencilla, de h y k.

Si usamos la abreviación

$$\operatorname{grad} f = \nabla f,$$

entonces la fórmula (2) se puede escribir

$$\boxed{f(X+H) - f(X) = \nabla f(x) \cdot H + \|H\|g(H).}$$

Como con el grad f, se debe leer $(\nabla f)(X)$ y no $\nabla(f(X))$, que carece de sentido, pues $f(X)$ es un número para cada valor de X, y entonces no tiene sentido aplicar ∇ a un número. El símbolo ∇ se aplica a la función f, y $(\nabla f)(X)$ es el valor de ∇f en X.

Consideremos ahora una función de n variables.

Sea f una función definida en un conjunto abierto U. Sea X un punto de U. Si $H = (h_1, \ldots, h_n)$ es un vector tal que $\|H\|$ sea suficientemente pequeño, entonces $X + H$ será también un punto de U, de modo que $f(X+H)$ está definida. Nótese que

$$X + H = (x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n).$$

Ésta es la generalización de $x+h$ que tratamos antes, en el caso de una variable, o $(x+h, y+k)$ en dos variables. Ya nos quedamos sin letras apropiadas para tres variables, así que podemos escribir n en lugar de 3.

Definición. Decimos que f es **diferenciable** en X si existen las derivadas parciales $D_1 f(X), \ldots, D_n f(X)$, y si existe una función g (definida para H pequeño) tal que

$$\lim_{H\to 0} g(H) = 0 \qquad \left(\text{también se escribe } \lim_{\|H\|\to 0} g(H) = 0\right)$$

y

$$f(X+H) - f(X) = D_1 f(X)h_1 + \cdots + D_n f(x)h_n + \|H\|g(H).$$

Con la otra notación para derivadas parciales, esta última relación se lee:

$$f(X+H) - f(X) = \frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}h_n + \|H\|g(H).$$

Decimos que f es **diferenciable** en el conjunto abierto U si es diferenciable en todo punto de U, de modo que la relación anterior se cumple para todo punto X en U.

En vista de la definición de gradiente de la sección §2, podemos reescribir nuestra relación fundamental en la forma

$$(3) \qquad \boxed{f(X+H) - f(X) = (\operatorname{grad} f(X)) \cdot H + \|H\|g(H).}$$

El término $\|H\|g(H)$ tiene un orden de magnitud menor que el término anterior que incluye al producto punto. Ésta es una ventaja de la presente notación. Sabemos cómo manejar el formalismo de los productos punto y estamos acostumbrados a él, y a su interpretación geométrica. Esto nos ayudará más adelante para interpretar geométricamente el gradiente.

Ejemplo 1. Supongamos que sólo se consideran los valores para H que apuntan en la dirección de los vectores unitarios usuales. En el caso de dos variables, considerar, por ejemplo, $H = (h, 0)$. Entonces, para dicho H, la condición de diferenciabilidad dice:

$$f(X+H) = f(x+h, y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}h + |h|g(H).$$

En espacios de dimensión superior, sea $E_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$ el i-ésimo vector unitario. Sea $H = hE_i$ para algún número h, de modo que

$$H = (0, \ldots, 0, h, 0, \ldots, 0).$$

Entonces, para dicho H,

$$f(X+H) = f(X + hE_i) = f(X) + \frac{\partial f}{\partial x_i}h + |h|g(H),$$

y con ello, si $h \neq 0$, obtenemos

$$\frac{f(X+H) - f(X)}{h} = D_i f(X) + \frac{|h|}{h}g(H).$$

Debido a la selección particular de H, podemos dividir entre el *número* h, pero *no* estamos dividiendo entre el vector H.

Las funciones que se encuentran en la práctica son diferenciables. El teorema siguiente da un criterio que muestra que esto es cierto. Se dice que una función $\varphi(X)$ es **continua** si

$$\lim_{H\to 0} \varphi(X+H) = \varphi(X),$$

para todo X en el dominio de definición de la función.

Teorema 3.1. *Sea f una función definida en algún conjunto abierto U. Suponer que existen sus derivadas parciales para todo punto en este conjunto abierto, y que son continuas. Entonces f es diferenciable.*

Omitiremos la demostración. Observar que, en la práctica, las derivadas parciales de una función están dadas por fórmulas que evidentemente son continuas.

XVII, §3. EJERCICIOS

1. Sea $f(x,y) = 2x - 3y$. ¿Cuál es la $\partial f/\partial x$ y la $\partial f/\partial y$?
2. Sea $A = (a,b)$ y sea f la función en $\mathbf{R}^2$ tal que $f(X) = A \cdot X$. Sea $X = (x,y)$. Determinar $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en términos de las coordenadas de A.
3. Sea $A = (a,b,c)$ y sea f la función en $\mathbf{R}^3$ tal que $f(X) = A \cdot X$. Sea $X = (x,y,z)$. Determinar $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$ en términos de las coordenadas de A.
4. Generalizar los dos ejercicios anteriores al n-espacio.
5. Sea f definida en un conjunto abierto U. Sea X un punto de U. Sea A un vector y sea g una función definida para H pequeño, tal que
$$\lim_{H \to 0} g(H) = 0.$$
Suponer que
$$f(X+H) - f(X) = A \cdot H + \|H\| g(H).$$
Probar que $A = \operatorname{grad} f(X)$. Se puede hacer primero este ejercicio en 2 variables y después en 3 variables, y dejarlo ahí. Usar coordenadas, como $A = (a,b)$ y $X = (x,y)$. Usar valores particulares de H, como en el ejemplo 1.

CAPÍTULO XVIII

La regla de la cadena y el gradiente

En este capítulo probaremos la regla de la cadena para funciones de varias variables y daremos algunas aplicaciones, entre las cuales tendremos varias interpretaciones del gradiente. Éstas constituyen uno de los puntos centrales de nuestra teoría y muestran lo poderosas que resultan ser las herramientas acumuladas.

XVIII, §1. LA REGLA DE LA CADENA

Sea f una función definida en algún conjunto abierto U. Sea $C(t)$ una curva tal que los valores $C(t)$ estén contenidos en U. Entonces podemos formar la función compuesta $f \circ C$, que es una función de t, dada por
$$(f \circ C)(t) = f(C(t)).$$

Ejemplo 1. Tomar $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(xy)$. Sea $C(t) = (t^2, t^3)$. Entonces
$$f(C(t)) = e^{t^2} \operatorname{sen}(t^5).$$
La expresión de la derecha se obtiene al sustituir x por t^2 y y por t^3 en $f(x,y)$. Ésta es una función de t en el sentido antiguo de las funciones de una variable. Si interpretamos f como la temperatura, entonces $f(C(t))$ es la temperatura de un insecto que viaja a lo largo de la curva $C(t)$ en el tiempo t.

La regla de la cadena nos indica cómo hallar la derivada de esta función, siempre que conozcamos el gradiente de f y la derivada C'. Su enunciado es como sigue.

Regla de la cadena. *Sea f una función definida y diferenciable en un conjunto abierto U. Sea C una curva diferenciable (definida para algún intervalo de números t) tal que los valores $C(t)$ estén en el intervalo abierto U. Entonces la función*

$$f(C(t))$$

es diferenciable (como función de t), y

$$\boxed{\frac{df(C(t))}{dt} = (\operatorname{grad} f(C(t))) \cdot C'(t).}$$

Memorizar esta fórmula repitiéndola en voz alta.

En la notación dC/dt, esto se lee también como

$$\frac{df(C(t))}{dt} = (\operatorname{grad} f)(C(t)) \cdot \frac{dC}{dt}.$$

Demostración de la Regla de la cadena. Por definición, debemos investigar el cociente

$$\frac{f(C(t+h)) - f(C(t))}{h}.$$

Sea

$$K = K(t,h) = C(t+h) - C(t).$$

Entonces nuestro cociente se puede reescribir en la forma

$$\frac{f(C(t)+K) - f(C(t))}{h}$$

Usando la definición de diferenciabilidad para f, tenemos

$$f(X+K) - f(X) = (\operatorname{grad} f)(X) \cdot K + \|K\| g(K)$$

y

$$\lim_{\|K\| \to 0} g(K) = 0.$$

Al reemplazar el valor de K, a saber, $C(t+h) - C(t)$, y dividiendo entre h, obtenemos:

$$\frac{f(C(t+h)) - f(C(t))}{h} = (\operatorname{grad} f)(C(t)) \cdot \frac{C(t+h) - C(t)}{h} \pm \left\| \frac{C(t+h) - C(t)}{h} \right\| g(K).$$

Cuando h tiende a 0, el primer término de la suma tiende a lo que queremos, a saber,

$$(\operatorname{grad} f)(C(t)) \cdot C'(t).$$

El segundo término tiende a

$$\pm \|C'(t)\| \lim_{h \to 0} g(K),$$

y cuando h tiende a 0, lo mismo sucede con $K = C(t+h) - C(t)$. Por lo tanto, el segundo término de la suma tiende a 0. Esto prueba nuestra regla de la cadena.

Con el fin de usar la regla de la cadena para ciertos cálculos, es conveniente reformularla en términos de componentes, y en términos de las dos notaciones que hemos usado para las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_1 f(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = D_2 f(x,y)$$

cuando las variables son x y y.

Supongan que $C(t)$ está dado en términos de coordenadas por

$$C(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

entonces

$$\boxed{\frac{d(f(C(t)))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.}$$

Si f es una función de dos variables (x,y), entonces

$$\boxed{\frac{df(C(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.}$$

En la notación D_1, D_2, podemos escribir esta fórmula en la forma

$$\boxed{\frac{d}{dt}(f(x(t),y(t))) = (D_1 f)(x,y)\frac{dx}{dt} + (D_2 f)(x,y)\frac{dy}{dt},}$$

y de manera análoga para varias variables. Por simplicidad, es común que omitamos los paréntesis alrededor de $D_1 f$ y $D_2 f$. Además, del lado derecho hemos abreviado $x(t)$ y $y(t)$ como x y y, respectivamente. Sin abreviar, la fórmula se ve:

$$\frac{d}{dt}(f(x(t),y(t))) = D_1 f(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + D_2 f(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}.$$

Ejemplo 2. Sea $C(t) = (e^t, t, t^2)$ y sea $f(x,y,z) = x^2yz$. Entonces, al poner

$$x = e^t, \qquad y = t, \qquad z = t^2$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(C(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= 2xyze^t + x^2z + x^2y2t. \end{aligned}$$

Si queremos esta función expresada totalmente en términos de t, sustituimos de nuevo los valores para x, y y z en términos de t y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(C(t)) &= 2e^t t t^2 e^t + e^{2t}t^2 + e^{2t}t2t \\ &= 2t^3e^{2t} + t^2e^{2t} + 2t^2e^{2t}. \end{aligned}$$

En algunos casos, como en el ejemplo siguiente, no se usa la regla de la cadena en varias variables, sino en la forma antigua del cálculo de una variable.

Ejemplo 3. Sea
$$f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x^2 - 3zy + xz).$$
Entonces, al mantener y y z constantes y diferenciar con respecto a x, hallamos
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x^2 - 3zy + xz) \cdot (2x + z).$$
De manera más general, sea
$$f(x,y,z) = g(x^2 - 3zy + xz),$$
donde g es una función diferenciable de una variable. [En el caso especial anterior, tenemos $g(u) = \operatorname{sen} u$.] Entonces la regla de la cadena da
$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(x^2 - 3zy + xz)(2x + z).$$
Denotamos la derivada de g por g', como es usual. *No* la escribimos como dg/dx porque x es una letra que ya está ocupada para otros propósitos. Podríamos hacer
$$u = x^2 - 3zy + xz,$$
en cuyo caso sería correcto escribir
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dg}{du}\frac{\partial u}{\partial x},}$$
y obtendríamos la misma respuesta que antes.

XVIII, §1. EJERCICIOS

1. Sean P y A vectores constantes. Si $g(t) = f(P + tA)$, mostrar que
$$g'(t) = (\operatorname{grad} f)(P + tA) \cdot A.$$
2. Suponer que f es una función tal que
$$\operatorname{grad} f(1,1,1) = (5,2,1),$$
Sea $C(t) = (t^2, t^{-3}, t)$. Hallar
$$\frac{d}{dt}(f(C(t))) \quad \text{en} \quad t = 1.$$
3. Sean $f(x,y) = e^{9x+2y}$ y $g(x,y) = \operatorname{sen}(4x + y)$. Sea C una curva tal que $C(0) = (0,0)$. Dado:
$$\left.\frac{d}{dt}f(C(t))\right|_{t=0} = 2 \quad \text{y} \quad \left.\frac{d}{dt}g(C(t))\right|_{t=0} = 1,$$
hallar $C'(0)$.
4. (a) Sea P un vector constante. Sea $g(t) = f(tP)$, donde f es alguna función diferenciable. ¿Cuál es $g'(t)$?
   (b) Sea f una función diferenciable definida en todo el espacio. Suponer que $f(tP) = tf(P)$ para todos los números t y todos los puntos P. Mostrar que para todo P tenemos
$$f(P) = \operatorname{grad} f(O) \cdot P.$$

5. Sea f una función diferenciable de dos variables y suponer que existe un entero $m \geq 1$ tal que
$$f(tx, ty) = t^m f(x,y)$$
para todos los números t y todo x y y. Probar la **relación de Euler**
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = mf(x,y).$$
[*Idea:* Sea $C(t) = (tx, ty)$. Diferenciar ambos lados de la ecuación dada con respecto a t, manteniendo x y y constantes. Después hacer $t = 1$.]
6. Generalizar el ejercicio 5 a n variables, a saber, sea f una función diferenciable de n variables y suponer que existe un entero $m \geq 1$ tal que $f(tX) = t^m f(X)$ para todos los números t y todos los puntos X en $\mathbf{R}^n$. Mostrar que
$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = mf(X),$$
que también se puede escribir $X \cdot \operatorname{grad} f(X) = mf(X)$.
7. (a) Sea $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Hallar $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.
   (b) Sea $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Hallar $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$.
8. Sea $r = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$. ¿Cuál es $\partial r/\partial x_i$?
9. Hallar las derivadas con respecto a x y y de las funciones siguientes.
   (a) $\operatorname{sen}(x^3 y + 2x^2)$ (b) $\cos(3x^2 y - 4x)$
   (c) $\log(x^2 y + 5y)$ (d) $(x^2 y + 4x)^{1/2}$

XVIII, §2. EL PLANO TANGENTE

Comenzaremos con un ejemplo que analiza una función a lo largo de una curva donde los valores de la función son constante. Esto da lugar a un principio de perpendicularidad de suma importancia.

Ejemplo 1. Sea f una función en $\mathbf{R}^3$. Interpretemos f como una función que da la temperatura, de modo que, en cualquier punto X en $\mathbf{R}^3$, el valor de la función $f(X)$ es la temperatura en X. Supongamos que un insecto se mueve en el espacio a lo largo de una curva diferenciable, que podemos denotar en forma paramétrica como
$$B(t).$$
Así, $B(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es la posición del insecto en el tiempo t. Supongamos que el insecto parte de un punto donde siente que la temperatura es agradable, y por lo tanto, la temperatura es constante a lo largo de la trayectoria por donde se mueve. En otras palabras, f es constante a lo largo de la curva $B(t)$. Esto significa que, para todos los valores de t, tenemos
$$f(B(t)) = k,$$
donde k es constante. Al diferenciar respecto a t, y usando la regla de la cadena, hallamos que
$$\operatorname{grad} f(B(t)) \cdot B'(t) = 0.$$

Esto significa que el gradiente de f es perpendicular al vector velocidad en todo punto de la curva.

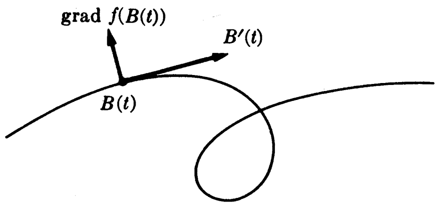


Figura 1

Sea f una función diferenciable definida en un conjunto abierto U en el 3-espacio, y sea k un número. El conjunto de puntos X tales que

$$f(X) = k \quad \text{y} \quad \operatorname{grad} f(X) \neq O$$

se llama **superficie**. Ésta es la superficie de nivel, de nivel k, para la función f. Para las aplicaciones que tenemos en mente, imponemos la condición adicional de que $\operatorname{grad} f(X) \neq O$. Se puede mostrar que esto elimina los puntos donde la superficie no es suave.

Sea $C(t)$ una curva diferenciable. Diremos que la curva **está sobre la superficie** si para todo t tenemos

$$f(C(t)) = k.$$

Esto simplemente significa que todos los puntos de la curva satisfacen la ecuación de la superficie. Por ejemplo, sea la superficie definida por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

La superficie es la esfera de radio 1, con centro en el origen, y aquí tenemos $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Sea

$$C(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

una curva, definida para t en algún intervalo. Entonces, que $C(t)$ esté sobre la superficie significa que

$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 1 \quad \text{para todo } t \text{ en el intervalo.}$$

En otras palabras,

$$f(C(t)) = 1, \quad \text{o también} \quad C(t)^2 = 1.$$

Para propósitos teóricos, es mejor escribir $f(C(t)) = 1$. Para propósitos de cálculos, tenemos que regresar a las coordenadas si queremos los valores numéricos específicos en un problema dado.

Supongamos ahora que una curva $C(t)$ está sobre la superficie $f(X) = k$. Así tenemos

$$f(C(t)) = k \quad \text{para todo } t.$$

Si diferenciamos esta relación, obtenemos, de la regla de la cadena,

$$\operatorname{grad} f(C(t)) \cdot C'(t) = 0.$$

Sea P un punto de la superficie, y sea $C(t)$ una curva sobre la superficie que pasa por el punto P. Esto significa que existe un número t_0 tal que $C(t_0) = P$. Para este valor t_0, obtenemos

$$\operatorname{grad} f(P) \cdot C'(t_0) = 0.$$

Así, el gradiente de f en P es perpendicular al vector tangente de la curva en P. [Suponemos que $C'(t_0) \neq O$.] Esto es cierto para **toda** curva diferenciable sobre la superficie que pasa por P. Por lo tanto, es razonable dar la siguiente

Definición. El **plano tangente** a la superficie $f(X) = k$ en el punto P es el plano que pasa por P, perpendicular al $\operatorname{grad} f(P)$.

Sabemos, por el capítulo XV, cómo hallar dicho plano. La definición se aplica sólo cuando $\operatorname{grad} f(P) \neq O$. Si

$$\operatorname{grad} f(P) = O,$$

entonces no definimos el concepto de plano tangente.

El hecho de que $\operatorname{grad} f(P)$ sea perpendicular a toda curva que pase por P sobre la superficie, también nos da una interpretación del gradiente como perpendicular a la superficie

$$f(X) = k,$$

que es una de las superficies de nivel para la función f (Fig. 2).

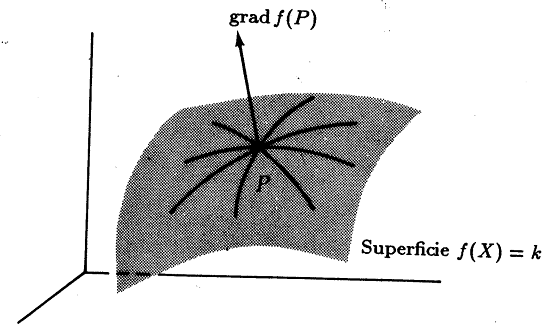


Figura 2

Ejemplo 2. Hallar el plano tangente a la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

en el punto $(1, 1, 1)$.

Sea $f(X) = x^2 + y^2 + z^2$. Entonces, en el punto $P = (1, 1, 1)$,

$$\operatorname{grad} f(P) = (2, 2, 2).$$

La ecuación de un plano que pasa por P y es perpendicular a un vector N es

$$X \cdot N = P \cdot N.$$

En el caso presente, esto produce

$$2x + 2y + 2z = 2 + 2 + 2 = 6.$$

Observen que nuestros argumentos también dan un medio de hallar un vector perpendicular a una curva en el 2-espacio en un punto dado, simplemente aplicando el análisis anterior al plano en lugar de al 3-espacio. Una curva se define por una ecuación $f(x, y) = k$ y, en este caso, $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva en el punto (x_0, y_0).

Ejemplo 3. Hallar la recta tangente a la curva

$$x^2y + y^3 = 10$$

en el punto $P = (1, 2)$, y hallar un vector perpendicular a la curva en ese punto.

Sea $f(x, y) = x^2y + y^3$. Entonces

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (2xy, x^2 + 3y^2),$$

de modo que

$$\operatorname{grad} f(P) = \operatorname{grad} f(1, 2) = (4, 13).$$

Sea $N = (4, 13)$. Entonces N es perpendicular a la curva en el punto dado. La recta tangente está dada por $X \cdot N = P \cdot N$, y así, su ecuación es

$$4x + 13y = 4 + 26 = 30.$$

Ejemplo 4. También puede darse una superficie en la forma $z = g(x, y)$, donde g es alguna función de dos variables. En este caso, el plano tangente está determinado al considerar que la superficie está expresada por la ecuación

$$g(x, y) - z = 0.$$

Por ejemplo, supongamos que la superficie está dada por $z = x^2 + y^2$. Queremos determinar el plano tangente en $(1, 2, 5)$. Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Entonces

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = (2x, 2y, -1) \quad \text{y} \quad \operatorname{grad} f(1, 2, 5) = (2, 4, -1).$$

La ecuación del plano tangente en $P = (1, 2, 5)$ perpendicular a

$$N = (2, 4, -1)$$

es

$$2x + 4y - z = P \cdot N = 5,$$

que es la ecuación deseada.

Ejemplo 5. Hallar una ecuación paramétrica para la recta tangente a la curva de intersección de las dos superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \quad \text{y} \quad x^3 - y^2 + z = 2,$$

en el punto $P = (1, 1, 2)$.

La recta tangente a la superficie es la recta común a los planos tangentes de las dos superficies en el punto P. Sabemos cómo hallar estos planos tangentes, y en el capítulo XV aprendimos cómo hallar la representación paramétrica de la recta común a los dos planos, de modo que sabemos resolver este problema. Realizamos por completo los cálculos numéricos.

La primera superficie está definida por la ecuación $f(x, y, z) = 6$. Un vector N_1 perpendicular a esta superficie en P está dado por

$$N_1 = \operatorname{grad} f(P), \quad \text{donde} \quad \operatorname{grad} f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

Así, para $P = (1, 1, 2)$, hallamos

$$N_1 = (2, 2, 4).$$

La segunda superficie está dada por la ecuación $g(x, y, z) = 2$, y

$$\operatorname{grad} g(x, y, z) = (3x^2, -2y, 1).$$

Así, un vector N_2 perpendicular a la segunda superficie en P es

$$N_2 = \operatorname{grad} g(1, 1, 2) = (3, -2, 1).$$

Un vector $A = (a, b, c)$ en la dirección de la recta de intersección es perpendicular tanto a N_1 como a N_2. Para hallar A, tenemos entonces que resolver las ecuaciones

$$A \cdot N_1 = 0 \quad \text{y} \quad A \cdot N_2 = 0.$$

Esto equivale a resolver

$$2a + 2b + 4c = 0,$$
$$3a - 2b + c = 0.$$

Sea, por ejemplo, $a = 1$. Al despejar b y c se obtiene

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = -1.$$

De este modo, $A = (1, 1, -1)$. Finalmente, la representación paramétrica de la recta deseada es

$$P + tA = (1, 1, 2) + t(1, 1, -1).$$

XVIII, §2. EJERCICIOS

1. Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a cada una de las superficies siguientes en el punto específico.
   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ en $(6, 2, 3)$
   (b) $xy + yz + zx - 1 = 0$ en $(1, 1, 0)$
   (c) $x^2 + xy^2 + y^3 + z + 1 = 0$ en $(2, -3, 4)$
   (d) $2y - z^3 - 3xz = 0$ en $(1, 7, 2)$
   (e) $x^2y^2 + xz - 2y^3 = 10$ en $(2, 1, 4)$
   (f) $\operatorname{sen} xy + \operatorname{sen} yz + \operatorname{sen} xz = 1$ en $(1, \pi/2, 0)$

2. Sean $f(x,y,z) = z - e^x \operatorname{sen} y$, y $P = (\log 3, 3\pi/2, -3)$. Hallar:
   (a) grad $f(P)$,
   (b) la recta normal en P a la superficie de nivel para f que pasa por P,
   (c) el plano tangente a esta superficie en P.

3. Hallar una representación paramétrica de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies siguientes en el punto indicado.
   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ y $x^2 + y^2 = 13$ en $(3, 2, -6)$
   (b) $xy + z = 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en $(2, 1, -2)$
   (c) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ y $x^2 - y^2 + z^2 = 9$ en $(3, 2, 2)$
   [*Nota:* La recta tangente anterior se puede definir como la recta de intersección de los planos tangentes en el punto dado.]

4. Sea $f(X) = 0$ una superficie diferenciable. Sea Q un punto que no esté en la superficie. Dada una curva diferenciable $C(t)$ sobre la superficie, definida en un intervalo abierto, dar la fórmula para la distancia entre Q y un punto $C(t)$. Suponer que esta distancia alcanza un mínimo para $t = t_0$. Sea $P = C(t_0)$. Mostrar que la recta que une a Q con P es perpendicular a la curva en P.

5. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto dado P cuando f es la función siguiente:
   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $P = (3, 4, 25)$
   (b) $f(x,y) = x/(x^2+y^2)^{1/2}$, $P = (3, -4, \frac{3}{5})$
   (c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ en $P = (1, \pi, 0)$

6. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $x = e^{2y-z}$ en $(1, 1, 2)$.

7. Sea $f(x,y,z) = xy + yz + zx$. (a) Escribir la ecuación de la superficie de nivel de f que pasa por el punto $P = (1, 1, 0)$. (b) Hallar la ecuación del plano tangente a esta superficie en P.

8. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie
$$3x^2 - 2y + z^3 = 9$$
en el punto $(1, 1, 2)$.

9. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie
$$z = \operatorname{sen}(x + y)$$
en el punto donde $x = 1$ y $y = 2$.

10. Hallar el plano tangente a la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 18$ en el punto $(3, 5, -4)$.

11. (a) Hallar un vector unitario perpendicular a la superficie
$$x^3 + xz = 1$$
en el punto $(1, 2, -1)$.
   (b) Hallar la ecuación del plano tangente en ese punto.

12. Hallar el coseno del ángulo entre las superficies
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \text{y} \quad x - z^2 - y^2 = -3$$
en el punto $(-1, 1, -1)$. (Este ángulo es el ángulo entre los vectores normales en el punto.)

$\cos = \frac{A \cdot B}{|A||B|}$

13. (a) Una curva diferenciable $C(t)$ se encuentra sobre la superficie
$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14,$$
y está parametrizada de modo que $C(0) = (1, 1, 1)$. Sea
$$f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$$
y sea $h(t) = f(C(t))$. Hallar $h'(0)$.
   (b) Sea $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ y sea $k(t) = g(C(t))$. Suponiendo además que $C'(0) = (4, -1, 0)$, hallar $k'(0)$.

14. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel
$$(x + y + z)e^{xyz} = 3e$$
en el punto $(1, 1, 1)$.

XVIII, §3. DERIVADA DIRECCIONAL

Sea f definida en un conjunto abierto y supongamos que f es diferenciable. Sea P un punto del conjunto abierto y sea A un **vector unitario** (i.e. $\|A\| = 1$). Entonces, $P + tA$ es la representación paramétrica de una recta en la dirección de A y que pasa por P. Observamos que
$$\frac{d(P + tA)}{dt} = A.$$

Por ejemplo, si $n = 2$ y $P = (p, q)$, $A = (a, b)$, entonces
$$P + tA = (p + ta, q + tb),$$
o, en términos de coordenadas,
$$x = p + ta, \qquad y = q + tb.$$
Por lo tanto,
$$\frac{dx}{dt} = a \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = b$$
de modo que
$$\frac{d(P + tA)}{dt} = (a, b) = A.$$
El mismo argumento funciona en dimensiones superiores.

Queremos considerar la razón de cambio de f en la dirección de A. Es natural considerar los valores de f sobre la recta $P + tA$, esto es, considerar los valores
$$f(P + tA).$$
La razón de cambio de f a lo largo de esta recta estará dada entonces al tomar la derivada de esta expresión, lo cual sabemos hacer. Ilustramos la recta $P + tA$ en la figura 3.

Si f representa la temperatura en el punto P, vemos la variación de temperatura en la dirección de A, a partir del punto P. El valor $f(P+tA)$ da la temperatura en el punto $P+tA$. Ésta es una función de t, digamos

$$g(t) = f(P+tA).$$

La razón de cambio de esta función de temperatura es $g'(t)$, la derivada con respecto a t, y $g'(0)$ es la razón de cambio en el tiempo $t=0$, i.e., la razón de cambio de f en el punto P, en la dirección de A.

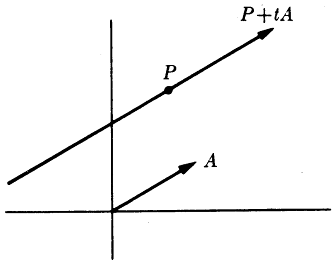


Figura 3

Por la regla de la cadena, si tomamos la derivada de la función

$$g(t) = f(P+tA),$$

que está definida para valores pequeños de t, obtenemos

$$\frac{df(P+tA)}{dt} = \operatorname{grad} f(P+tA)\cdot A.$$

Cuando t es igual a 0, esta derivada es igual a

$$\operatorname{grad} f(P)\cdot A.$$

Por razones obvias, damos ahora la

Definición. Sea A un vector unitario. La **derivada direccional de f en la dirección de A, en P**, es el número

$$D_A f(P) = \operatorname{grad} f(P)\cdot A.$$

Interpretamos esta derivada direccional como la razón de cambio de f a lo largo de la recta en la dirección de A, en el punto P. Así, si acordamos la notación $D_A f(P)$ para la derivada direccional de f en P, en la dirección del vector unitario A, entonces tenemos

$$\boxed{D_A f(P) = \left.\frac{df(P+tA)}{dt}\right|_{t=0} = \operatorname{grad} f(P)\cdot A.}$$

Al usar esta fórmula, el lector deberá recordar que A se toma como un **vector unitario.** Cuando se da una dirección en términos de un vector cuya norma no es 1, entonces debemos dividir primero este vector entre su norma antes de aplicar la fórmula.

Ejemplo 1. Sea $f(x,y) = x^2 + y^3$ y sea $B = (1,2)$. Hallar la derivada direccional de f en la dirección de B en el punto $(-1,3)$.

Notamos que B no es un vector unitario, pues su norma es $\sqrt{5}$. Sea

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}B.$$

Entonces A es un vector unitario que tiene la misma dirección que B. Sea

$$P = (-1,3).$$

Entonces $\operatorname{grad} f(P) = (-2,27)$. Por lo tanto, por nuestra fórmula, la derivada direccional es igual a:

$$\operatorname{grad} f(P)\cdot A = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2+54) = \frac{52}{\sqrt{5}}.$$

Consideren de nuevo una función diferenciable f en un conjunto abierto U. Sea P un punto de U. *Supongamos que* $\operatorname{grad} f(P) \neq O$, y sea A un vector unitario. Sabemos que

$$D_A f(P) = \operatorname{grad} f(P)\cdot A = \|\operatorname{grad} f(P)\|\,\|A\|\cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre $\operatorname{grad} f(P)$ y A. Como $\|A\| = 1$, vemos que la derivada direccional es igual a

$$\boxed{D_A f(P) = \|\operatorname{grad} f(P)\|\cos\theta.}$$

Recordamos al lector que esta fórmula vale sólo cuando A es un vector unitario.

El valor de $\cos\theta$ varía entre -1 y $+1$ cuando seleccionamos todos los posibles vectores unitarios A.

El valor máximo de $\cos\theta$ se obtiene cuando seleccionamos A tal que $\theta = 0$, i.e. cuando seleccionamos A con la misma dirección que $\operatorname{grad} f(P)$. En ese caso, la derivada direccional es igual a la norma del gradiente.

Así hemos obtenido otra interpretación para el gradiente:

> *La dirección del gradiente es la de máximo crecimiento de la función.*
>
> *La norma del gradiente es la razón de crecimiento de la función en esa dirección (i.e. en la dirección de crecimiento máximo).*

La derivada direccional en la dirección de A es un mínimo cuando $\cos\theta = -1$. Éste es el caso cuando seleccionamos A con la dirección opuesta a $\operatorname{grad} f(P)$. Esa dirección es entonces la dirección de máximo decrecimiento de la función.

Por ejemplo, f puede representar una distribución de temperatura en el espacio. En cualquier punto P, una partícula que sienta frío y quiera calentarse lo más rápido posible deberá moverse en la dirección de $\operatorname{grad} f(P)$. Otra partícula que tenga calor y quiera refrescarse lo más rápido posible deberá moverse en la dirección de $-\operatorname{grad} f(P)$.

Ejemplo 2. Sea de nuevo $f(x,y) = x^2 + y^3$, y sea $P = (-1,3)$. Hallar la derivada direccional de f en P, en la dirección de máximo crecimiento de f.

Ya hallamos que $\operatorname{grad} f(P) = (-2,27)$. La derivada direccional de f en la dirección de máximo crecimiento es precisamente la norma del gradiente, de modo que es igual a

$$\|\operatorname{grad} f(P)\| = \|(-2,27)\| = \sqrt{4+27^2} = \sqrt{733}.$$

XVIII, §3. EJERCICIOS

1. Sea $f(x,y,z) = z - e^x \operatorname{sen} y$, y sea $P = (\log 3, 3\pi/2, -3)$. Hallar:
   (a) la derivada direccional de f en P en la dirección de $(1,2,2)$,
   (b) los valores máximo y mínimo para la derivada direccional de f en P.
2. Hallar las derivadas direccionales de las funciones siguientes en los puntos especificados, en las direcciones especificadas.
   (a) $\log(x^2+y^2)^{1/2}$ en $(1,1)$, dirección $(2,1)$
   (b) $xy + yz + zx$ en $(-1,1,7)$, dirección $(3,4,-12)$
   (c) $4x^2 + 9y^2$ en $(2,1)$ en la dirección de la máxima derivada direccional.
3. Una distribución de temperatura en el espacio está dada por la función
   $$f(x,y) = 10 + 6\cos x \cos y + 3\cos 2x + 4\cos 3y.$$
   En el punto $(\pi/3, \pi/3)$, hallar la dirección del mayor incremento de temperatura y la dirección de mayor decrecimiento de temperatura.
4. ¿En qué dirección están creciendo más rápido las siguientes funciones de X, en el punto dado?
   (a) $x/\|X\|^{3/2}$ en $(1,-1,2)$ $\quad (X = (x,y,z))$
   (b) $\|X\|^5$ en $(1,2,-1,1)$ $\quad (X = (x,y,z,w))$
5. (a) Hallar la derivada direccional de la función
   $$f(x,y) = 4xy + 3y^2$$
   en la dirección de $(2,-1)$, en el punto $(1,1)$.
   (b) Hallar la derivada direccional en la dirección de máximo crecimiento de la función.
6. Sea $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$. ¿Cuál es la dirección de mayor crecimiento de la función en el punto $(2,-1,2)$? ¿Cuál es la derivada direccional de f en esta dirección en ese punto?
7. Sea $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$. ¿Cuál es la dirección en la cual f está creciendo más rápidamente en el punto $(-1,1)$? Hallar la derivada direccional de f en esta dirección.
8. Suponer que la temperatura en el (x,y,z)-espacio está dada por
   $$f(x,y,z) = x^2y + yz - e^{xy}.$$
   Calcular la razón de cambio de la temperatura en el punto $P = (1,1,1)$ en la dirección de $\overrightarrow{PO}$.

9. (a) Hallar la derivada direccional de la función
   $$f(x,y,z) = \operatorname{sen}(xyz)$$
   en el punto $P = (\pi,1,1)$ en la dirección de $\overrightarrow{OA}$, donde A es el vector unitario $(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.
   (b) Sea U un vector unitario cuya dirección es *opuesta* a la de
   $$(\operatorname{grad} f)(P).$$
   ¿Cuál es el valor de la derivada direccional de f en P en la dirección de U?
10. Sea f una función diferenciable definida en un conjunto abierto U. Supongamos que P es un punto de U tal que $f(P)$ es un máximo, i.e. suponer que tenemos
    $$f(P) \geq f(X) \quad \text{para todo} \quad X \text{ en } U.$$
    Mostrar que $\operatorname{grad} f(P) = O$.

XVIII, §4. FUNCIONES QUE DEPENDEN SÓLO DE LA DISTANCIA AL ORIGEN

La primera de dichas funciones en la que pensamos es la función de distancia, que en el 2-espacio está dada por

$$r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

En el 3-espacio está dada por

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

En el n-espacio está dada por

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Hallemos su gradiente. Por ejemplo, en el 2-espacio,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} 2x$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}.$$

Al diferenciar con respecto a y en lugar de x, se hallará que

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\operatorname{grad} r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right).}$$

Esto también se puede escribir como

$$\boxed{\operatorname{grad} r = \frac{X}{r}.}$$

Así, el gradiente de r es el vector unitario en la dirección del vector de posición. Apunta hacia afuera, desde el origen.

Si tratamos con funciones en el 3-espacio, de modo que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

entonces la regla de la cadena da

$$\boxed{\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}}$$

de modo que, nuevamente,

$$\boxed{\operatorname{grad} r = \frac{X}{r}.}$$

Advertencia. No se debe escribir $\partial r/\partial X$. Esto sugiere la división entre un vector X y es, por lo tanto, una mala notación. La notación $\partial r/\partial x$ era una notación buena y correcta, pues diferenciamos sólo respecto a la única variable x. La información que proviene de diferenciar respecto a todas las variables se expresa correctamente mediante la fórmula $\operatorname{grad} r = X/r$ del recuadro.

En el n-espacio, sea

$$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Entonces

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-1/2} 2x_i,$$

de modo que

$$\boxed{\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}.}$$

Por la definición de gradiente, se sigue que

$$\boxed{\operatorname{grad} r = \frac{X}{r}.}$$

Pasemos ahora a otras funciones que dependen de la distancia, y que surgen con frecuencia. Por ejemplo, una función de temperatura puede ser inversamente proporcional a la distancia a la fuente de calor. Una función potencial puede ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a cierto punto. El gradiente de dichas funciones tiene propiedades particulares que analizaremos posteriormente.

Ejemplo 1. Sea

$$f(x,y) = \operatorname{sen} r = \operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Entonces $f(x,y)$ depende sólo de la distancia r de (x,y) a partir del origen. Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{d \operatorname{sen} r}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}\\ &= (\cos r)\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2x\\ &= (\cos r)\frac{x}{r}.\end{aligned}$$

De manera análoga, $\partial f/\partial y = (\cos r)y/r$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x,y) &= \left((\cos r)\frac{x}{r}, (\cos r)\frac{y}{r}\right)\\ &= \frac{\cos r}{r}(x,y)\\ &= \frac{\cos r}{r}X.\end{aligned}$$

El mismo uso de la regla de la cadena que se dio al caso particular

$$f(x,y) = \operatorname{sen} r,$$

que trabajamos en el ejemplo 1, muestra:

Sea g una función diferenciable de una variable, y sea $f(X) = g(r)$. Entonces

$$\boxed{\operatorname{grad} f(X) = \frac{g'(r)}{r}X.}$$

Resuelvan todos los ejemplos dados en el ejercicio 2. Deberán memorizar y tener en mente esta expresión sencilla para el gradiente de una función que depende sólo de la distancia. Dicha dependencia se expresa por medio de la función g.

Los ejercicios 9 y 10 dan información importante acerca de las funciones que dependen sólo de la distancia al origen, y deberán verse como complemento esencial de esta sección. Ahí se probará el resultado siguiente.

Una función diferenciable $f(X)$ depende sólo de la distancia de X al origen si, y sólo si, $\operatorname{grad} f(X)$ es paralelo a X o a O.

En esta situación, el gradiente $\operatorname{grad} f(X)$ puede apuntar hacia el origen o en la dirección opuesta, dependiendo si la función es decreciente o creciente conforme el punto se mueve alejándose del origen.

Ejemplo 2. Suponer que se coloca un calentador en el origen y que la temperatura en un punto decrece como función de la distancia al origen: digamos que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al origen. Entonces la temperatura está dada como

$$h(X) = g(r) = k/r^2$$

para alguna constante $k > 0$. Entonces, el gradiente de la temperatura es

$$\operatorname{grad} h(X) = -2k\frac{1}{r^3}\frac{X}{r} = -\frac{2k}{r^4}X.$$

El factor $2k/r^4$ es positivo, y vemos que el $\operatorname{grad} h(X)$ apunta en la dirección de $-X$. Cada círculo centrado en el origen es una curva de nivel para la temperatura. Así, el gradiente se puede trazar como en la figura siguiente. El gradiente es paralelo a X, pero en la dirección opuesta. Un insecto que viaje a lo largo del círculo estará a temperatura constante; si quiere calentarse lo más rápido posible, deberá moverse hacia el origen.

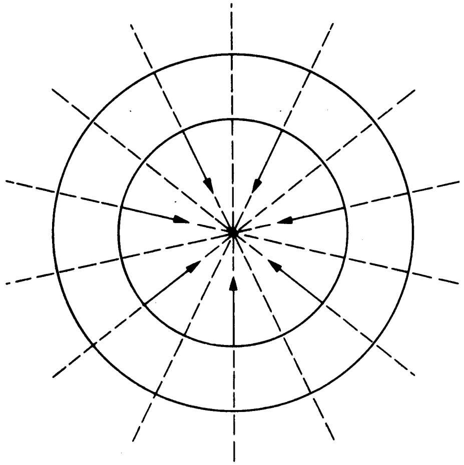


Figura 4

Las líneas punteadas indican la trayectoria del insecto cuando se mueve en la dirección de máximo crecimiento de la función. Estas líneas son perpendiculares a los círculos de temperatura constante.

XVIII, §4. EJERCICIOS

1. Sea g una función de r, sean $r = \|X\|$ y $X = (x, y, z)$. Sea $f(X) = g(r)$. Mostrar que
$$\left(\frac{dg}{dr}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.$$

2. Sean g una función de r, y $r = \|X\|$. Sea $f(X) = g(r)$. Hallar el $\operatorname{grad} f(X)$ para las funciones siguientes.
(a) $g(r) = 1/r$ (b) $g(r) = r^2$ (c) $g(r) = 1/r^3$
(d) $g(r) = e^{-r^2}$ (e) $g(r) = \log 1/r$ (f) $g(r) = 4/r^m$
(g) $g(r) = \cos r$

Quizá quieran resolver cada ejercicio por separado escribiendo

$$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

y usar la regla de la cadena, hallando $\partial f/\partial x_i$ en cada caso, o pueden aplicar la fórmula general obtenida en el ejemplo 1, con la cual si $f(X) = g(r)$, tenemos

$$\operatorname{grad} f(X) = \frac{g'(r)}{r}X.$$

Sin duda, sería conveniente hacerlo de las dos maneras para acostumbrarse a las varias notaciones y situaciones que puedan surgir.

Los siguientes cinco ejercicios tratan sobre parametrizaciones y algunos de los resultados se usarán en el ejercicio 9.

3. Sean A y B dos vectores unitarios tales que $A \cdot B = 0$. Sea
$$F(t) = (\cos t)A + (\operatorname{sen} t)B.$$
Mostrar que $F(t)$ está en la esfera de radio 1 con centro en el origen, para cada valor de t. [*Idea:* ¿Qué es $F(t) \cdot F(t)$?]

4. Sean P y Q dos puntos sobre la esfera de radio 1 con centro en el origen. Sea $L(t) = P + t(Q - P)$, con $0 \leq t \leq 1$. Si existe un valor de t en $[0, 1]$ tal que $L(t) = O$, mostrar que $t = \frac{1}{2}$ y que $P = -Q$.

5. Sean P y Q dos puntos sobre la esfera de radio 1. Suponer que $P \neq -Q$. Mostrar que existe una curva que une a P y Q sobre la esfera de radio 1 con centro en el origen. Con esto queremos decir que existe una curva $C(t)$ tal que $C(t)^2 = 1$, o, si lo desean, $\|C(t)\| = 1$ para todo t, y hay dos números t_1 y t_2, tales que $C(t_1) = P$ y $C(t_2) = Q$. [*Idea:* Dividir $L(t)$ en el ejercicio 4 entre su norma.]

6. Si P y Q son dos vectores unitarios tales que $P = -Q$, mostrar que existe una curva diferenciable que une a P y Q sobre la esfera de radio 1, con centro en el origen. Puede suponerse que existe un vector unitario A que es perpendicular a P. Después usar el ejercicio 3.

7. Parametrizar la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ mediante una curva diferenciable.

8. Sea f una función diferenciable (en dos variables) tal que $\operatorname{grad} f(X) = cX$ para alguna constante c y todo X en el 2-espacio. Mostrar que f es constante en cualquier círculo de radio $a > 0$, con centro en el origen. [*Idea:* Hacer $x = a\cos t$ y $y = a \operatorname{sen} t$, y hallar df/dt.]

El ejercicio 8 es un caso particular de un fenómeno general, enunciado en el ejercicio 9.

9. Sea f una función diferenciable en n variables, y suponer que existe una función h tal que $\operatorname{grad} f(X) = h(X)X$. Mostrar que f es constante sobre la esfera de radio $a > 0$ con centro en el origen.

[Que f sea constante en la esfera de radio a significa que, dados dos puntos P y Q cualesquiera sobre esta esfera, debemos tener $f(P) = f(Q)$. Para probar esto usamos el hecho, probado en los ejercicios 5 y 6, de que dados dos de dichos puntos, existe una curva $C(t)$ que une a los dos puntos, i.e. $C(t_1) = P$, $C(t_2) = Q$ y $C(t)$ está sobre la esfera para todo t en el intervalo de definición, de modo que

$$C(t) \cdot C(t) = a^2.$$

La hipótesis de que $\operatorname{grad} f(X)$ se puede escribir en la forma $h(X)X$ para alguna función h, significa que $\operatorname{grad} f(X)$ es *paralelo* a X (o a O). En efecto, sabemos que $\operatorname{grad} f(X)$ paralelo a X significa que $\operatorname{grad} f(X)$ es igual a un múltiplo escalar de X, y que este escalar puede depender de X, de modo que tenemos que escribirlo como una función $h(X)$.]

10. Sea $r = \|X\|$. Sea g una función diferenciable de una variable cuya derivada nunca es igual a 0. Sea $f(X) = g(r)$. Mostrar que el $\operatorname{grad} f(X)$ es paralelo a X para $X \neq O$.

[Este enunciado es el recíproco del ejercicio 9. La demostración es bastante fácil: ver el ejemplo 1. Se advierte entonces que la función $h(X)$ del ejercicio 9 es igual a $g'(r)/r$.]

XVIII, §5. LEY DE CONSERVACIÓN

Definición. Sea U un conjunto abierto. Un **campo vectorial** sobre U es una asociación que a todo punto de U asocia un vector de la misma dimensión.

Si F es un campo vectorial sobre U, y X un punto de U, entonces denotamos por $F(X)$ el vector asociado a X mediante F y le llamamos **valor de F en X**, como es usual.

Ejemplo 1. Sea $F(x,y) = (x^2y, \operatorname{sen} xy)$. Entonces F es un campo vectorial que al punto (x,y) asocia $(x^2y, \operatorname{sen} xy)$, con el mismo número de coordenadas, a saber, en este caso, dos.

En física a menudo se interpreta un campo vectorial como un campo de fuerza. Un campo vectorial se puede visualizar como un campo de flechas que a cada punto asocia una flecha, como se muestra en la figura.

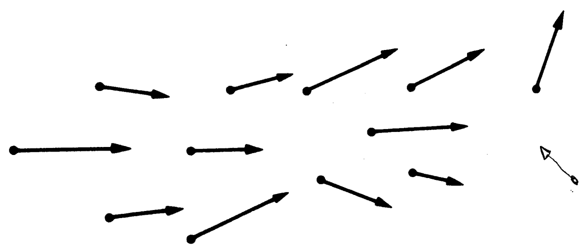


Figura 5

Cada flecha apunta en la dirección de la fuerza, y la longitud de la flecha representa la magnitud de la fuerza.

Si f es una función diferenciable sobre U, entonces observamos que $\operatorname{grad} f$ es un campo vectorial que asocia el vector $\operatorname{grad} f(P)$ al punto P de U.

Si F es un campo vectorial, y si existe una función diferenciable f tal que $F = \operatorname{grad} f$, entonces el campo vectorial se llama **conservativo**. Como

$$-\operatorname{grad} f = \operatorname{grad}(-f)$$

no importa si usamos f o $-f$ en la definición de conservativo.

Supongamos que F es un campo conservativo sobre U, y sea ψ una función diferenciable tal que para todos los puntos X en U se tenga

$$F(X) = -\operatorname{grad}(\psi)$$

En física, ψ se interpreta como **energía potencial.** Supongamos que una partícula de masa m se mueve sobre una curva diferenciable $C(t)$ en U. **La ley de Newton** dice que

$$\boxed{F(C(t)) = mC''(t)}$$

para todo t donde $C(t)$ esté definida. La ley de Newton dice que la fuerza es igual a la masa por la aceleración.

Los físicos definen la **energía cinética** como

$$\tfrac{1}{2}mC'(t)^2 = \tfrac{1}{2}mv(t)^2.$$

Ley de conservación. *Suponer que el campo vectorial F es conservativo, esto es, que $F = -\operatorname{grad}\psi$, donde ψ es la energía potencial. Suponer que una partícula se mueve sobre una curva que satisface la ley de Newton. Entonces la suma de la energía potencial y la energía cinética es constante.*

Demostración. Tenemos que probar que

$$\psi(C(t)) + \tfrac{1}{2}mC'(t)^2$$

es constante. Para ver esto diferenciamos la suma. Por la regla de la cadena vemos que la derivada es igual a

$$\operatorname{grad}\psi(C(t)) \cdot C'(t) + mC'(t) \cdot C''(t).$$

Por la ley de Newton, $mC''(t) = F(C(t)) = -\operatorname{grad}\psi(C(t))$. Por lo tanto, esta derivada es igual a

$$\operatorname{grad}\psi(C(t)) \cdot C'(t) - \operatorname{grad}\psi(C(t)) \cdot C'(t) = 0.$$

Esto prueba lo que queríamos.

No es cierto que todos los campos vectoriales son conservativos. En el siguiente libro estudiaremos el problema de determinar cuáles lo son.

Los campos en la física clásica son en su mayoría conservativos.

Ejemplo 2. Considerar una fuerza $F(X)$ que sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del punto X al origen, y en la dirección de X. Entonces existe una constante k tal que, para $X \neq O$, tenemos

$$F(X) = k\frac{1}{\|X\|^2}\frac{1}{\|X\|},$$

pues $X/\|X\|$ es el vector unitario en la dirección de X. Así,

$$F(X) = k\frac{1}{r^3}X,$$

donde $r = \|X\|$. Una energía potencial para F está dada por

$$\psi(X) = \frac{k}{r}.$$

Esto se verifica inmediatamente al tomar las derivadas parciales de esta función.

Si existe una función $\varphi(X)$ tal que

$$F(X) = (\operatorname{grad}\varphi)(X), \quad \text{esto es,} \quad F = \operatorname{grad}\varphi,$$

entonces llamaremos a dicha función φ, **función de potencial** para F. Nuestras convenciones son tales, que una función de potencial es igual a *menos* la energía potencial.

XVIII, §5. EJERCICIOS

1. Hallar una función de potencial para un campo de fuerza $F(X)$ que es inversamente proporcional a la distancia del punto X al origen y está en la dirección de X.
2. La misma pregunta, reemplazando "distancia" por "cubo de la distancia."
3. Sea k un entero ≥ 1. Hallar una función de potencial para el campo vectorial F dado por
$$F(X) = \frac{1}{r^k}X, \quad \text{donde} \quad r = \|X\|.$$
[*Idea:* Recordar la fórmula según la cual si $\varphi(X) = g(r)$, entonces
$$\operatorname{grad}\varphi(X) = \frac{g'(r)}{r}X.$$
Hacer $F(X)$ igual al lado derecho y despejar g.]

Respuestas a los ejercicios

Mi gran reconocimiento para Anthony Petrello por la mayoría de las respuestas a los ejercicios.

I, §2, p. 12

1. $-3 < x < 3$ **2.** $-1 \leq x \leq 0$ **3.** $-\sqrt{3} \leq x \leq -1$ ó $1 \leq x \leq \sqrt{3}$
4. $x < 3$ o $x > 7$ **5.** $-1 < x < 2$ **6.** $x < -1$ o $x > 1$ **7.** $-5 < x < 5$
8. $-1 \leq x \leq 0$ **9.** $x \geq 1$ o $x = 0$ **10.** $x \leq -10$ o $x = 5$
11. $x \leq -10$ o $x = 5$ **12.** $x \geq 1$ o $x = -\frac{1}{2}$ **13.** $x < -4$
14. $-5 < x < -3$ **15.** $-3 < x < -2$ y $-2 < x < -1$ **16.** $-2 < x < 2$
17. $-2 < x < 8$ **18.** $2 < x < 4$ **19.** $-4 < x < 10$ **20.** $x < -4$ y $x > 10$
21. $x < -10$ y $x > 4$

I, §3, p. 15

1. $\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}$ **2.** $\frac{1}{(2x+1)}$ **3.** $0, 2, 108$ **4.** $2z - z^2, 2w - w^2$
5. $x \neq \sqrt{2}$ o $-\sqrt{2}$. $f(5) = \frac{1}{23}$ **6.** Para todo x. $f(27) = 3$
7. (a) 1 (b) 1 (c) -1 (d) -1 **8.** (a) 1 (b) 4 (c) 0 (d) 0
9. (a) -2 (b) -6 (c) $x^2 + 4x - 2$ **10.** $x \geq 0, 2$
11. (a) impar (b) par (c) impar (d) impar

I, §4, p. 17

1. 8 y 9 **2.** $\frac{1}{5}$ y -1 **3.** $\frac{1}{16}$ y 2 **4.** $\frac{1}{9}$ y $2^{1/3}$ **5.** $\frac{1}{16}$ y $\frac{1}{2}$ **6.** 9 y 8
7. $-\frac{1}{3}$ y -1 **8.** $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4}$ **9.** 1 y $-\frac{1}{4}$ **10.** $-\frac{1}{512}$ y $\frac{1}{3}$
11. Sí. Suponer que a es negativo; escribir entonces $a = -b$, donde b es positivo. Sea c un número positivo tal que $c^n = b$. Entonces $(-c)^n = a$, pues $(-1)^n = -1$ porque n es impar.

II, §1, p. 22

3. x negativo, y positivo **4.** x negativo, y negativo

II, §3, p. 31

5. $y = -\frac{8}{3}x - \frac{5}{3}$ **6.** $y = -\frac{3}{2}x + 5$ **7.** $x = \sqrt{2}$
8. $y = \dfrac{9}{\sqrt{3}+3}x + 4 - \dfrac{9\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3}$ **9.** $y = 4x - 3$ **10.** $y = -2x + 2$
11. $y = -\frac{1}{2}x + 3 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **12.** $y = \sqrt{3}x + 5 + \sqrt{3}$ **19.** $-\frac{1}{4}$ **20.** -8
21. $2 + \sqrt{2}$ **22.** $\frac{1}{6}(3 + \sqrt{3})$ **23.** $y = (x - \pi)\left(\dfrac{2}{\sqrt{2} - \pi}\right) + 1$
24. $y = (x - \sqrt{2})\left(\dfrac{\pi - 2}{1 - \sqrt{2}}\right) + 2$ **25.** $y = -(x + 1)\left(\dfrac{3}{\sqrt{2} + 1}\right) + 2$
26. $y = (x + 1)(3 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}$ **29.** (a) $x = -4, y = -7$ (b) $x = \frac{3}{2}, y = \frac{5}{2}$ (c) $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{7}{3}$ (d) $x = -6, y = -5$

II, §4, p. 33

1. $\sqrt{97}$ **2.** $\sqrt{2}$ **3.** $\sqrt{52}$ **4.** $\sqrt{13}$ **5.** $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ **6.** $(4, -3)$ **7.** 5 y 5
8. $(-2, 5)$ **9.** 5 y 7

II, §8, p. 47

5. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ **6.** $x^2 + (y - 1)^2 = 9$ **7.** $(x + 1)^2 + y^2 = 3$
8. $y + \frac{25}{8} = 2(x + \frac{1}{4})^2$ **9.** $y - 1 = (x + 2)^2$ **10.** $y + 4 = (x - 1)^2$
11. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$ **12.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$
13. $x + \frac{25}{8} = 2(y + \frac{1}{4})^2$ **14.** $x - 1 = (y + 2)^2$

III, §1, p. 57

1. 4 **2.** -2 **3.** 2 **4.** $\frac{3}{4}$ **5.** $-\frac{1}{4}$ **6.** 0 **7.** 4 **8.** 6 **9.** 3 **10.** 12 **11.** 2
12. 3 **13.** a

III, §2, p. 63

	Recta tangente en $x = 2$	Pendiente en $x = 2$
1. $2x$	$y = 4x - 3$	4
2. $3x^2$	$y = 12x - 16$	12
3. $6x^2$	$y = 24x - 32$	24
4. $6x$	$y = 12x - 12$	12
5. $2x$	$y = 4x - 9$	4
6. $4x + 1$	$y = 9x - 8$	9
7. $4x - 3$	$y = 5x - 8$	5
8. $\dfrac{3x^2}{2} + 2$	$y = 8x - 8$	8
9. $-\dfrac{1}{(x + 1)^2}$	$y = -\frac{1}{9}x + \frac{5}{9}$	$-\frac{1}{9}$
10. $-\dfrac{2}{(x + 1)^2}$	$y = -\frac{2}{9}x + \frac{10}{9}$	$-\frac{2}{9}$

III, §3, p. 68

1. $4x + 3$ **2.** $-\dfrac{2}{(2x + 1)^2}$ **3.** $\dfrac{1}{(x + 1)^2}$ **4.** $2x + 1$ **5.** $-\dfrac{1}{(2x - 1)^2}$ **6.** $9x^2$
7. $4x^3$ **8.** $5x^4$ **9.** $6x^2$ **10.** $\dfrac{3x^2}{2} + 1$ **11.** $-2/x^2$ **12.** $-3/x^2$
13. $-2/(2x - 3)^2$ **14.** $-3/(3x + 1)^2$ **15.** $-1/(x + 5)^2$ **16.** $-1/(x - 2)^2$
17. $-2x^{-3}$ **18.** $-2(x + 1)^{-3}$

III, §4, p. 71

1. $x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$ **2.** $4x^3$
3. (a) $\frac{2}{3}x^{-1/3}$ (b) $-\frac{3}{2}x^{-5/2}$ (c) $\frac{7}{6}x^{1/6}$ **4.** $y = 9x - 8$ **5.** $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$, pendiente $\frac{1}{3}$
6. $y = \dfrac{-3}{2^9}x + \dfrac{7}{32}$, pendiente $\dfrac{-3}{2^9}$ **7.** $y = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, pendiente $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$
8. (a) $\frac{1}{4}5^{-3/4}$ (b) $-\frac{1}{4}7^{-5/4}$ (c) $\sqrt{2}(10^{\sqrt{2}-1})$ (d) $\pi 7^{\pi-1}$

III, §5, p. 80

1. (a) $\frac{2}{3}x^{-2/3}$ (b) $\frac{9}{4}x^{-1/4}$ (c) x (d) $\frac{9}{4}x^2$
2. (a) $55x^{10}$ (b) $-8x^{-3}$ (c) $\frac{4}{3}x^3 - 15x^2 + 2x$
3. (a) $-\frac{3}{8}x^{-7/4}$ (b) $3 - 6x^2$ (c) $20x^4 - 21x^2 + 2$
4. (a) $21x^2 + 8x$ (b) $\frac{8}{3}x^{-1/3} + 20x^3 - 3x^2 + 3$
5. (a) $-25x^{-2} + 6x^{-1/2}$ (b) $6x^2 + 35x^6$ (c) $16x^3 - 21x^2 + 1$
6. (a) $\frac{6}{5}x - 16x^7$ (b) $12x^3 - 4x + 1$ (c) $7\pi x^6 - 40x^4 + 1$

7. $(x^3+x)+(3x^2+1)(x-1)$ **8.** $(2x^2-1)4x^3+4x(x^4+1)$

9. $(x+1)(2x+\frac{15}{2}x^{1/2})+(x^2+5x^{3/2})$

10. $(2x-5)(12x^3+5)+2(3x^4+5x+2)$

11. $(x^{-2/3}+x^2)\left(3x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)+(-\frac{2}{3}x^{-5/3}+2x)\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)$

12. $(2x+3)(-2x^{-3}-x^{-2})+2(x^{-2}+x^{-1})$ **13.** $\dfrac{9}{(x+5)^2}$ **14.** $\dfrac{(-2x^2+2)}{(x^2+3x+1)^2}$

15. $\dfrac{(t+1)(t-1)(2t+2)-(t^2+2t-1)2t}{(t^2-1)^2}$

16. $\dfrac{(t^2+t-1)(-5/4)t^{-9/4}-t^{-5/4}(2t+1)}{(t^2+t-1)^2}$

17. $\frac{5}{49}, y=\frac{5}{49}t+\frac{4}{49}$ **18.** $\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}t$

III, §5, Ejercicios suplementarios, p. 80

1. $9x^2-4$ **3.** $2x+1$ **5.** $\frac{5}{2}x^{3/2}-\frac{5}{2}x^{-7/2}$ **7.** $x^2-1+(x+5)(2x)$

9. $(\frac{3}{2}x^{1/2}+2x)(x^4-99)+(x^{3/2}+x^2)(4x^3)$

11. $(4x)\left(\dfrac{1}{x^2}+4x+8\right)+(2x^2+1)\left(\dfrac{-2}{x^3}+4\right)$

13. $(x+2)(x+3)+(x+1)(x+3)+(x+1)(x+2)$

15. $3x^2(x^2+1)(x+1)+x^3(2x)(x+1)+(x^3)(x^2+1)$

17. $\dfrac{-2}{(2x+3)^2}$ **19.** $\dfrac{5(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2)^2}$ **21.** $\dfrac{-2(x+1)+2x}{(x+1)^2}$

23. $\dfrac{(x+1)(x-1)3(\frac{1}{2}x^{-1/2})-3x^{1/2}[(x-1)+(x+1)]}{(x+1)^2(x-1)^2}$

25. $\dfrac{(x^2+1)(x+7)(5x^4)-(x^5+1)\big((x^2+1)+(2x)(x+7)\big)}{(x^2+1)^2(x+7)^2}$

27. $\dfrac{(1-x^2)(3x^2)-x^3(-2x)}{(1-x^2)^2}$ **29.** $\dfrac{(x^2+1)(2x-1)-(x^2-x)(2x)}{(x^2+1)^2}$

31. $\dfrac{(x^2+x-4)(2)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x-4)^2}$

33. $\dfrac{(x^2+2)(4-3x^2)-(4x-x^3)(2x)}{(x^2+2)^2}$ **35.** $\dfrac{-5x-(1-5x)}{x^2}$

37. $\dfrac{(x+1)(x-2)(2x)-x^2\big((x-2)+(x+1)\big)}{(x+1)^2(x-2)^2}$

39. $\dfrac{(4x^3-x^5+1)(12x^3+\frac{5}{4}x^{1/4})-(3x^4+x^{5/4})(12x^2-5x^4)}{(4x^3-x^5+1)^2}$

41. $(y-18)=\frac{25}{32}(x-16)$ **43.** $(y+12)=19x$ **45.** $(y-10)=14(x-1)$

47. $y-\dfrac{4}{9}=\dfrac{-12}{81}(x-2)$ **49.** $y-\dfrac{4}{3}=\dfrac{-4}{9}(x-2)$

51. Punto de tangencia: $(3,-3)$. Ambas curvas se intersecan aquí y tienen pendiente -1.

53. Ambas curvas tienen el punto $(1,3)$ en común y tienen pendiente 6 en este punto.

55. Recta tang. te $(y-7)=16x$ en $(0,7)$; recta tangente $(y-19)=16(x-1)$ en $(1,19)$; recta tangente $(y+13)=16(x+1)$ en $(-1,-13)$.

III, §6, p. 88

1. $8(x+1)^7$ **2.** $\frac{1}{2}(2x-5)^{-1/2}\cdot 2$ **3.** $3(\operatorname{sen} x)^2\cos x$ **4.** $5(\log x)^4\left(\dfrac{1}{x}\right)$

5. $(\cos 2x)2$ **6.** $\dfrac{1}{x^2+1}(2x)$ **7.** $e^{\cos x}(-\operatorname{sen} x)$ **8.** $\dfrac{1}{e^x+\operatorname{sen} x}(e^x+\cos x)$

9. $\cos\left[\log x+\dfrac{1}{x}\right]\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ **10.** $\dfrac{\operatorname{sen} 2x-(x+1)(\cos 2x)2}{(\operatorname{sen} 2x)^2}$

11. $3(2x^2+3)^2(4x)$ **12.** $-[\operatorname{sen}(\operatorname{sen} 5x)](\cos 5x)5$ **13.** $\dfrac{1}{\cos 2x}(-\operatorname{sen} 2x)2$

14. $[\cos(2x+5)^2]\big(2(2x+5)\big)(2)$. **15.** $[\cos\big(\cos(x+1)\big)]\big(-\operatorname{sen}(x+1)\big)$

16. $(\cos e^x)e^x$ **17.** $-\dfrac{1}{(3x-1)^8}[4(3x-1)^3]\cdot 3$ **18.** $-\dfrac{1}{(4x)^6}\cdot 3(4x)^2\cdot 4$

19. $-\dfrac{1}{(\operatorname{sen} 2x)^4}2(\operatorname{sen} 2x)(\cos 2x)\cdot 2$ **20.** $-\dfrac{1}{(\cos 2x)^4}2(\cos 2x)(-\operatorname{sen} 2x)2$

21. $-\dfrac{1}{(\operatorname{sen} 3x)^2}(\cos 3x)\cdot 3$ **22.** $-\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x$ **23.** $(x^2+1)e^x+2xe^x$

24. $(x^3+2x)(\cos 3x)\cdot 3+(3x^2+2)\operatorname{sen} 3x$

25. $-\dfrac{1}{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}(\cos x-\operatorname{sen} x)$ **26.** $\dfrac{2e^x\cos 2x-(\operatorname{sen} 2x)e^x}{e^{2x}}$

27. $\dfrac{(x^2+3)/x-(\log x)(2x)}{(x^2+3)^2}$ **28.** $\dfrac{\cos 2x-(x+1)(-\operatorname{sen} 2x)\cdot 2}{\cos^2 2x}$

29. $(2x-3)(e^x+1)+2(e^x+x)$ **30.** $(x^3-1)(e^{3x}\cdot 3+5)+3x^2(e^{3x}+5x)$

31. $\dfrac{(x-1)3x^2-(x^3+1)}{(x-1)^2}$ **32.** $\dfrac{(2x+3)2x-(x^2-1)2}{(2x+3)^2}$

33. $2(x^{4/3}-e^x)+(\frac{4}{3}x^{1/3}-e^x)(2x+1)$

34. $(\operatorname{sen} 3x)\frac{1}{4}x^{-3/4}+3(\cos 3x)(x^{1/4}-1)$ **35.** $[\cos(x^2+5x)](2x+5)$

36. $e^{3x^2+8}(6x)$ **37.** $\dfrac{-1}{[\log(x^4+1)]^2}\cdot\dfrac{1}{x^4+1}\cdot 4x^3$

38. $\dfrac{-1}{[\log(x^{1/2}+2x)]^2}\dfrac{1}{(x^{1/2}+2x)}(\frac{1}{2}x^{-1/2}+2)$ **39.** $\dfrac{2e^x-2xe^x}{e^{2x}}$

40. $\dfrac{2x}{1+x^6}$; $\frac{4}{65}$

III, §6, Ejercicios suplementarios, p. 89

1. $2(2x+1)2$ **3.** $7(5x+3)^6 5$ **5.** $3(2x^2+x-5)^2(4x+1)$

7. $\frac{1}{2}(3x+1)^{-1/2}(3)$ **9.** $-2(x^2+x-1)^{-3}(2x+1)$ **11.** $-\frac{5}{3}(x+5)^{-8/3}$

13. $(x-1)3(x-5)^2+(x-5)^3$ **15.** $4(x^3+x^2-2x-1)^3(3x^2+2x-2)$

17. $\dfrac{(x-1)^{1/2}(\frac{3}{4})(x+1)^{-1/4}-(x+1)^{3/4}(\frac{1}{2})(x-1)^{-1/2}}{x-1}$

19. $\dfrac{(3x+2)^9(\frac{5}{2})(2x^2+x-1)^{3/2}(4x+1)-(2x^2+x-1)^{5/2}(9)(3x+2)^8(3)}{(3x+2)^{18}}$

21. $\frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2}(2)$ **23.** $\frac{1}{2}(x^2+x+5)^{-1/2}(2x+1)$

25. $3x^2\cos(x^3+1)$ **27.** $(e^{x^3+1})(3x^2)$ **29.** $\big(\cos(\cos x)\big)(-\operatorname{sen} x)$

31. $(e^{\operatorname{sen}(x^3+1)})\big(3x^2\cos(x^3+1)\big)$

33. $[\cos\big((x+1)(x^2+2)\big)][(x+1)(2x)+(x^2+2)]$

35. $(e^{(x+1)(x-3)})\big((x+1)+(x-3)\big)$ **37.** $2\cos(2x+5)$

39. $\dfrac{2}{2x+1}$ **41.** $\left(\cos\dfrac{x-5}{2x+4}\right)\left(\dfrac{(2x+4)-(x-5)2}{(2x+4)^2}\right)$

43. $(e^{2x^2+3x+1})(4x+3)$ **45.** $\dfrac{1}{2x+1}[\cos(\log 2x+1)]2$

47. $-(6x-2)\operatorname{sen}(3x^2-2x+1)$ **49.** $80(2x+1)^{79}(2)$

51. $49(\log x)^{48}(x^{-1})$ **53.** $5(e^{2x+1}-x)^4(2e^{2x+1}-1)$

55. $\frac{1}{2}\left(3\log(x^2+1)-x^3\right)^{-1/2}\left(\dfrac{3}{x^2+1}(2x)-3x^2\right)$

57. $\dfrac{2(\cos 3x)(\cos 2x)-3(\operatorname{sen} 2x)(-\operatorname{sen} 3x)}{(\cos 3x)^2}$

59. $\dfrac{(\operatorname{sen} x^3)(1/2x^2)4x-(\log 2x^2)(\cos x^3)3x^2}{(\operatorname{sen} x^3)^2}$

61. $\dfrac{(\cos 2x)(4x^3)-2(x^4+4)(-\operatorname{sen} 2x)}{(\cos 2x)^2}$

63. $\dfrac{(\cos x^3)(4)(2x^2+1)^3(4x)+(2x^2+1)^4(\operatorname{sen} x^3)(3x^2)}{\cos^2 x^3}$

65. $-3e^{-3x}$ **67.** $(e^{-4x^2+x})(-8x+1)$

69. $\dfrac{e^{-x}[2x/(x^2+2)]-[\log(x^2+2)](e^{-x})(-1)}{e^{-2x}}$

III, §7, p. 91

1. $18x$ **2.** $5(x^2+1)^4\cdot 2+20(x^2+1)^3 4x^2$ **3.** 0 **4.** 7! **5.** 0 **6.** 6

7. $-\cos x$ **8.** $\cos x$ **9.** $-\operatorname{sen} x$ **10.** $-\cos x$ **11.** $\operatorname{sen} x$ **12.** $\cos x$

Hay un patrón en los problemas 7 a 12. Nótese que las derivadas de $\operatorname{sen} x$ son:

$$f(x)=\operatorname{sen} x;$$
$$f^{(1)}(x)=\cos x;$$
$$f^{(2)}(x)=-\operatorname{sen} x;$$
$$f^{(3)}(x)=-\cos x;$$
$$f^{(4)}(x)=\operatorname{sen} x.$$

Entonces las derivadas se repiten. Así, cada cuarta derivada es igual. Por lo tanto, para hallar la n-ésima, basta dividir n entre 4, y si r es el residuo, de modo que $n=4q+r$, entonces

$$f^{(n)}(x)=f^{(r)}(x).$$

13. (a) 5! (b) 7! (c) 13! **14.** (a) $k!$ (b) $k!$ (c) 0 (d) 0

III, §8, p. 94

1. $-(2x+y)/x$ **2.** $\dfrac{3-x}{y+1}$ **3.** $\dfrac{y-3x^2}{3y^2-x}$ **4.** $\dfrac{6x^2}{3y^2+1}$ **5.** $\dfrac{1-2y}{2x+2y-1}$

6. $-y^2/x^2$ **7.** $-\dfrac{1+4xy}{2(y+x^2)}$ **8.** $\dfrac{x(y^2-1)}{y(1-x^2)}$ **9.** $(y-3)=3(x+1)$

10. $y+1=4(x-3)$ **11.** $(y-2)=\frac{3}{4}(x-6)$ **12.** $y+2=-\frac{3}{4}(x-1)$

13. $(y+4)=\frac{3}{4}(x-3)$ **14.** $y-2=-\frac{1}{8}(x+4)$ **15.** $y-3=\frac{7}{4}(x-2)$

III, §9, p. 101

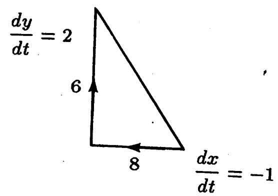
1. (a) 1/6 (b) 0 (c) Imposible **2.** 0 **3.** $320\,\mathrm{m/seg}^2$ **4.** 0

5. $240\,\mathrm{m}^3/\mathrm{seg}$ **6.** $36\pi\,\mathrm{cm/seg}$ **7.** $2\pi r, \dfrac{\pi d}{2}, \dfrac{c}{2\pi}$ **8.** $\frac{3}{16}$ unids/seg

9. (a) 0.41 m/seg (b) 0.3 m/seg **10.** (a) 0.51 m/seg (b) 0.61 m/seg

11. $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

12. La figura es como sigue.



Tenemos dado que $dx/dt=-1$ y que $dy/dt=2$. El área es $A=\frac{1}{2}xy$, de modo que

$$\frac{dA}{dt}+\frac{1}{2}\left[x\frac{dy}{dt}+y\frac{dx}{dt}\right]=\frac{1}{2}[2x-y].$$

Tenemos dado que para algún tiempo, $x=8$. Como la velocidad es uniforme hacia el origen, después de 2 min hallamos que $x=8-2=6$. Además, después de 2 min hallamos que $y=6+4=10$. Por lo tanto, después de 2 min obtenemos

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}[12-10]=1\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{min}.$$

13. $90\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{seg}$ **14.** 0.49 m/seg **15.** 4.6×10^{-3} m/min

16. $0.49/\pi$ m/min **17.** $t=\frac{1}{4}$, ac. = 4

18. Tanto x como y son funciones del tiempo t. Al diferenciar cada lado de

$$y=x^2-6x$$

con respecto a t, hallamos que

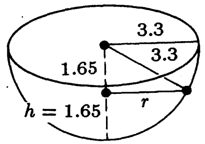
$$\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}-6\frac{dx}{dt}.$$

Cuando $dy/dt=4dx/dt$, se obtiene

$$4\frac{dx}{dt}=2x\frac{dx}{dt}-6\frac{dx}{dt}.$$

Al cancelar dx/dt se tiene $4 = 2x - 6$, de modo que $x = 5$ y $y = -5$.

19. $\frac{0.012}{\pi}$ m/min. Trazar la figura.



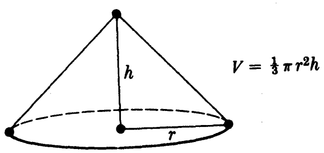
Cuando $h = 1.65$, la distancia de la parte superior del agua a la parte superior del hemisferio también es 1.65, de modo que, por Pitágoras,

$$1.65^2 + r^2 = 3.3^2.$$

Entonces se puede despejar r. Usar $dV/dt = 0.1$ para hallar dh/dt.

20. $\frac{1}{2}(50^2 \cdot 7 + 60^2 \cdot 1.5)(50^2 \cdot 3.5^2 + 60^2 \cdot 1.5^2)^{-1/2}$ km/hr

21. $0.03/\pi$ m/min



La hipótesis acerca del diámetro implica que $r = 3h/2$, de modo que $V = \frac{3}{4}\pi h^3$. Entonces

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt} = 0.1.$$

Cuando $h = 1.22$, esto da la respuesta.

22. $-3/400$ cm/min, $-6\pi/5$ cm^2/min **23.** $1/32$ m/min **24.** 100π pies^3/seg

IV, §1, p. 118

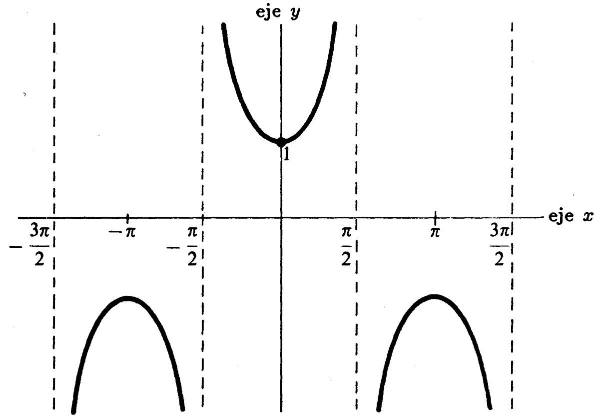
1. $\sqrt{2}/2$ **2.** $\sqrt{3}/2$ **3.** $\sqrt{3}/2$ **4.** $\frac{1}{2}$ **5.** $-\sqrt{3}/2$ **6.** $-\frac{1}{2}$ **7.** $\sqrt{3}/2$

8. $-\sqrt{2}/2$ **9.** 1 **10.** $\sqrt{3}$ **11.** 1 **12.** -1 **13.** $-\frac{1}{2}$ **14.** $-\sqrt{3}/2$ **15.** $-1/2$

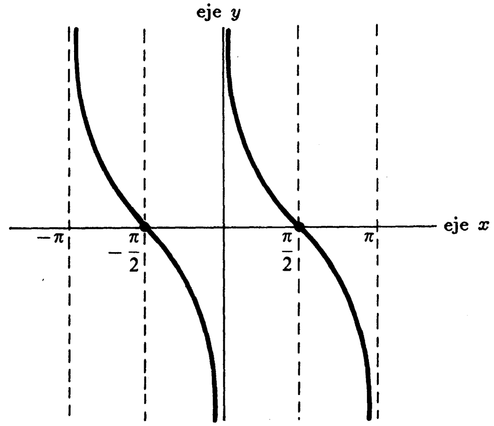
16. $\sqrt{3}/2$ **17.** $-\sqrt{3}/2$ **18.** $\frac{1}{2}$

IV, §2, p. 122

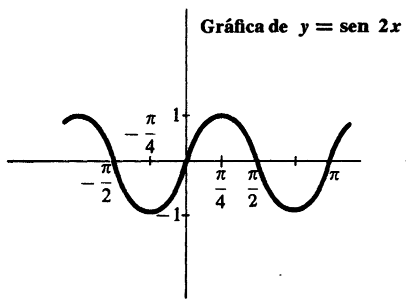
2.



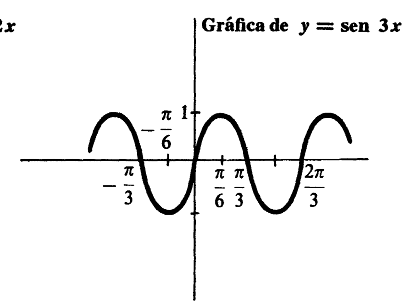
3.



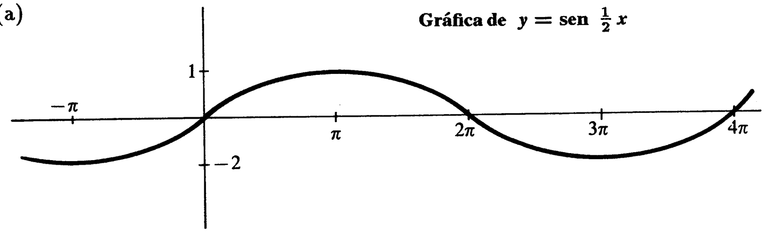
4. (a)



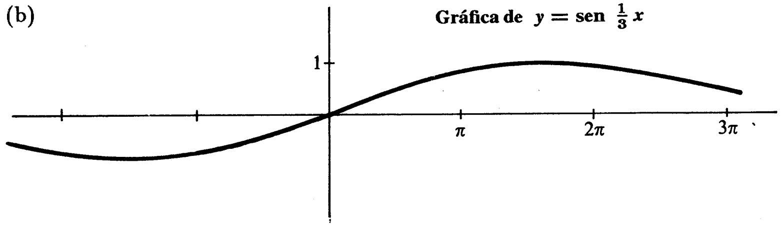
(b)



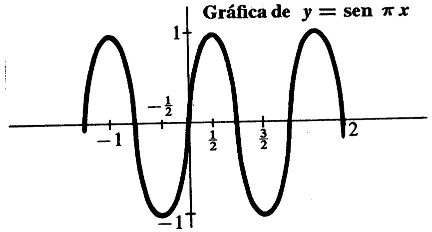
5. (a)



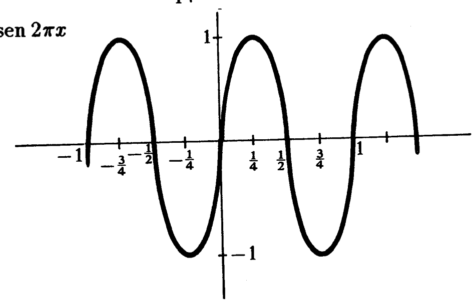
(b)



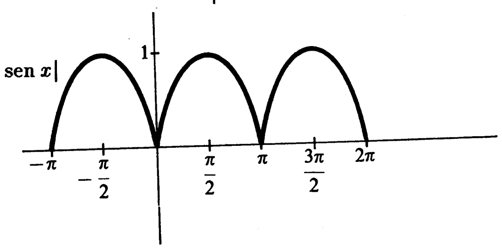
6. (a)



(c) $y = \operatorname{sen} 2\pi x$



7. (a) $y = |\operatorname{sen} x|$



IV, §3, p. 126

1. $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ **2.** $\frac{-\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$

3. (a) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$
(e) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ (f) $\frac{-\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ (g) $\frac{1}{2}$ (h) $-\sqrt{3}/2$

5. $\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x, \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

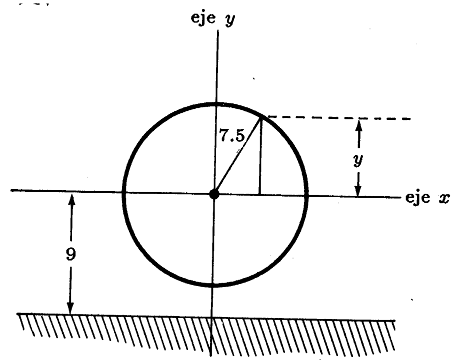
IV, §4, p. 130

1. $-\csc^2 x$ **2.** $3\cos 3x$ **3.** $-5 \operatorname{sen} 5x$
4. $(8x+1)\cos(4x^2+x)$ **5.** $(3x^2)\sec^2(x^3-5)$ **6.** $(4x^3-3x^2)\sec^2(x^4-x^3)$
7. $\cos x \sec^2(\operatorname{sen} x)$ **8.** $\sec^2 x \cos(\tan x)$ **9.** $-\sec^2 x \operatorname{sen}(\tan x)$ **10.** -1
11. 0 **12.** $\sqrt{3}/2$ **13.** $-\sqrt{2}$ **14.** 2 **15.** $-2/\sqrt{3}$

16. (a) $y = 1$ (b) $\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
(c) $y = 1$ (d) $(y+1) = 6\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
(e) $y = 1$ (f) $(y - \sqrt{2}) = -\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
(g) $(y-1) = -2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (h) $y - 1 = x - \frac{\pi}{4}$
(i) $(y - \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ (j) $(y - \frac{1}{2}) = \frac{-\pi\sqrt{3}}{6}(x-1)$
(k) $y = 1$ (l) $\left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$

17. (a) -1.6 (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\sqrt{3}/30$

18.



Una revolución cada dos minutos es media revolución por minuto. Por lo tanto, $d\theta/dt = \pi$ (en radianes por minuto). Pero

$$y = 7.5 \operatorname{sen} \theta$$

de modo que

$$\frac{dy}{dt} = 7.5 \frac{d \operatorname{sen} \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = 7.5(\cos\theta)\pi.$$

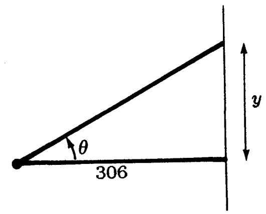
Cuando la altura de un punto sobre la rueda es de 12.75, entonces $y = 12.75 - 9 = 3.75$. Entonces, $\operatorname{sen}\theta = 3.75/7.5 = \frac{1}{2}$ y $\theta = \pi/6$. Por lo tanto,

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\theta=\pi/6} = 7.5\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\pi = \tfrac{7.5}{2}\sqrt{3}\pi \text{ m/min}.$$

19. (a) 54.6 m/seg (b) 109.2 m/seg (c) 682.5 m/seg (d) 30 m/seg (e) 464 m/seg

20. 25 rad/hr

21.



Tenemos dado que $d\theta/dt = 4\pi$ (dos revoluciones$= 4\pi$ radianes). Entonces

$$\tan\theta = \frac{y}{306}, \text{ de modo que } y = 306\tan\theta.$$

Usando la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dt} = 306(1+\tan^2\theta)\frac{d\theta}{dt}.$$

(a) El punto sobre el muro más cercano a la luz es cuando $\theta = 0$. Entonces $\tan 0 = 0$, de modo que

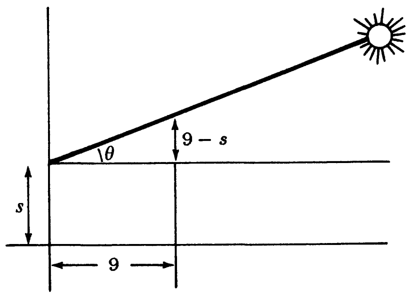
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\theta=0} = 306\cdot 4\pi = 1224\pi \text{ m/min}.$$

(b) Cuando $y = 153$, entonces $\tan\theta = \frac{1}{2}$, de modo que sustituimos $\tan\theta$ por $\frac{1}{2}$ y obtenemos

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=153} = 306(\tfrac{5}{4})4\pi = 1530\pi \text{ m/min}.$$

22. $12{,}232\pi/135$ m/seg

23. Sea s la longitud de la sombra.



Tenemos dado que $d\theta/dt = \pi/10$. Tenemos además que

$$\tan\theta = \frac{9-s}{9} = 1 - \frac{s}{9}.$$

Al diferenciar respecto a t y usar la regla de la cadena obtenemos:

$$(1+\tan^2\theta)\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{9}\frac{ds}{dt}.$$

Si $\theta = \pi/6$, entonces $\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$. Al sustituir se tiene:

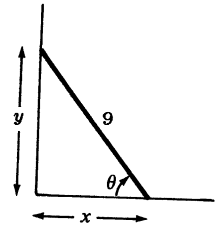
$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{10} = -\frac{1}{9}\left.\frac{ds}{dt}\right|_{\theta=\pi/6}.$$

Podemos despejar ds/dt, a saber,

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{\theta=\pi/6} = -9\left(\frac{4}{3}\right)\frac{\pi}{10} = -\frac{6}{5}\pi \text{ m/hr}.$$

24. $10.74/\pi$ grad/min

25. Tenemos dado que $dx/dt = 0.9$. Hallar $d\theta/dt$ cuando $x = 4.5$.



Tenemos

$$\cos\theta = \frac{x}{9}.$$

Entonces, por la regla de la cadena,

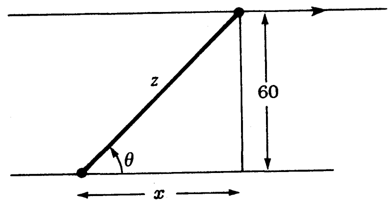
$$-\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{9}\frac{dx}{dt}.$$

Cuando $x = 4.5$, tenemos que $\cos\theta = 1/2$, y entonces $\theta = \pi/3$. Por lo tanto, $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2$. Entonces

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=15} = -\frac{1}{\sqrt{3}/2}\frac{1}{9}0.9$$
$$= \frac{-1}{5\sqrt{3}} \text{ rad/seg}.$$

26. $9/2\pi$ grad/seg

27.



Tenemos dado que $dx/dt = 6$. Queremos hallar $d\theta/dt$ cuando $z = 120$. Tenemos

$$\tan\theta = \frac{60}{x},$$

de modo que, al diferenciar respecto a t y usar la regla de la cadena,

$$(1+\tan^2\theta)\frac{d\theta}{dt} = 60\left(\frac{-1}{x^2}\right)\frac{dx}{dt}.$$

Cuando $z = 120$, entonces $\operatorname{sen}\theta = 60/120 = 1/2$. Por lo tanto, $\theta = \pi/6$ y entonces $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$. Además, $x = 60\sqrt{3}$. Esto da

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{z=120} = 60\cdot\frac{-1}{60^2\cdot 3}6$$
$$= \frac{-1}{30}.$$

Entonces, finalmente,

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{z=120} = -\frac{1}{30}\frac{3}{4} = -\frac{1}{40}\ \text{rad/seg}.$$

28. $-1/25$ rad/seg

IV, §6, p. 144

3. (a) $(\sqrt{2},\pi/4)$ (b) $(\sqrt{2},5\pi/4)$ (c) $(6,\pi/3)$ (d) $(1,\pi)$

4. (a) $(y-1)^2+x^2=1$ (b) $(x-\frac{3}{2})^2+y^2=\frac{9}{4}$

5. (a) $\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+x^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ (b) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$

(c) $x^2+(y-a)^2=a^2$ (d) $(x-a)^2+y^2=a^2$

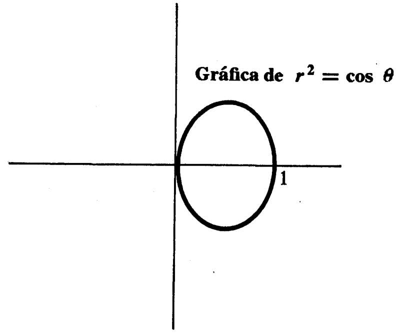
6. $r^2 = \cos\theta$. Esto es equivalente a $r = \sqrt{\cos\theta}$. Sólo los valores de θ tales que $\cos\theta \geq 0$ contribuirán a r. Además, como $\cos(-\theta) = \cos\theta$, la curva es simétrica respecto al eje x. Hacemos una tabla

θ	r
0 a $\pi/2$	decr. de 1 a 0
$-\pi/2$ a 0	crec. de 0 a 1

En estos intervalos tenemos que $0 \leq \cos\theta \leq 1$, y, por lo tanto,

$$\sqrt{\cos\theta} \geq \cos\theta, \quad (\text{¡cuidado!})$$

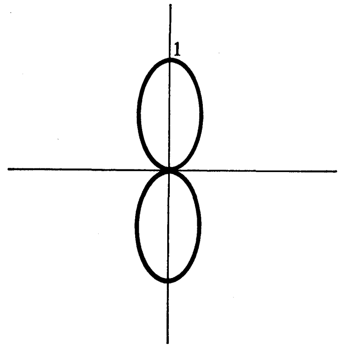
donde la igualdad se da sólo en los puntos extremos. Como $r = \cos\theta$ es la ecuación de un círculo (de manera análoga para $r = \operatorname{sen}\theta$, ver el problema 5), la gráfica se ve así:



8. (a) $r = \operatorname{sen}^2\theta$. El lado derecho siempre es ≥ 0, de modo que existe un valor de r para cada valor de θ. Como

$$-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1,$$

se sigue que $\operatorname{sen}^2\theta \leq |\operatorname{sen}\theta|$. Además, las regiones de crecimiento y de decrecimiento son en intervalos de longitud $\pi/2$. Se deberán hacer unas tablas de éstas y advertir entonces que la gráfica se ve así:



Los óvalos son más delgados que círculos, al revés que en el problema 6, donde son más extendidos que círculos.

9. $r = 4\operatorname{sen}^2\theta$. Nótese que el lado derecho siempre es ≥ 0, y así, existe un valor de r para cada valor de θ. Además

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2(-\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$$

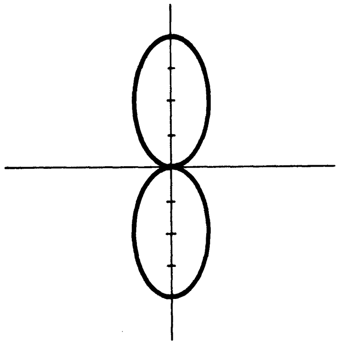
r para cada valor de θ. Además

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2(-\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$$

de manera que la gráfica es simétrica respecto al eje x. Hacemos una tabla.

θ	r
0 a $\pi/2$	crec. de 0 a 4
$\pi/2$ a π	decr. de 4 a 0.

Observamos también que $\operatorname{sen}^2\theta \leq |\operatorname{sen}\theta|$ porque $|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$. Por lo tanto, la gráfica es algo así:



10. $x^2 + y^2 = 25$ (círculo) **11.** $x^2 + y^2 = 16$ (círculo)

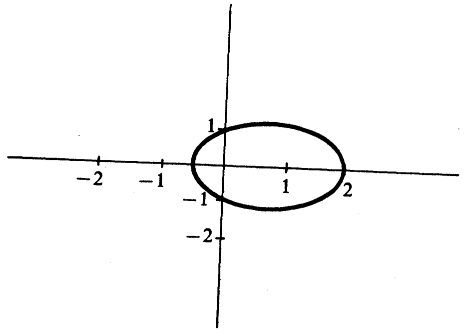
12. (a) $r\cos\theta = 1$ es equivalente a $x = 1$, ¡que es una recta vertical!

13. $r = 3/\cos\theta$. Ésta está definida para $\cos\theta \neq 0$. En este caso, la ecuación es equivalente a $r\cos\theta = 3$, y $x = r\cos\theta$, de modo que la ecuación en coordenadas rectangulares es $x = 3$, que es una recta vertical.

16. $(x^2 + x + y^2)^2 = x^2 + y^2$ **17.** $(x^2 + y^2 + 2y)^2 = x^2 + y^2$ **27.** $y^2 = 2x + 1$

28. $r = \dfrac{2}{2 - \cos\theta}$. Hacemos una tabla:

θ	$\cos\theta$	$2 - \cos\theta$	r
crec. de 0 a $\pi/2$	decr. de 1 a 0	crec. de 1 a 2	decr. de 2 a 1
crec. de $\pi/2$ a π	decr. de 0 a -1	crec. de 2 a 3	decr. de 1 a 2/3
crec. de π a $3\pi/2$	crec. de -1 a 0	decr. de 3 a 2	crec. de 2/3 a 1
crec. de $5\pi/2$ a 2π	crec. de 0 a 1	decr. de 2 a 1	crec. de 1 a 2



Se puede ver que esta ecuación es una elipse al convertir a coordenadas (x, y). La ecuación es equivalente a

$$r(2 - \cos\theta) = 2, \quad \text{esto es,} \quad 2\sqrt{x^2 + y^2} - x = 2.$$

Por álgebra, esto es equivalente a $4(x^2 + y^2) = (x + 2)^2$, esto es,

$$3x^2 - 4x + 4y^2 = 4.$$

Al completar el cuadrado, ésta es la ecuación de una elipse

$$3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 4y^2 = \frac{16}{3}.$$

29. $\sqrt{x^2 + y^2} = 4 - 2x$. Como, por hipótesis, $r \geq 0$, debemos tener $4 - 2x \geq 0$, o, de manera equivalente $x \leq 2$. Recíprocamente, para $x \leq 2$, la relación es equivalente a la que se obtuvo cuando elevamos al cuadrado ambos lados, y la ecuación se convierte en

$$x^2 + y^2 = 16 - 16x + 4x^2,$$

o, de manera equivalente,

$$3x^2 - 16x - y^2 = -16.$$

Ésta es la ecuación de una hipérbola. Así, la ecuación en coordenadas polares es equivalente a la ecuación de una hipérbola, junto con la condición adicional $x \leq 2$.

30. $r = \tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$. Multiplicar ambos lados por $\cos\theta$ para ver que esta ecuación es equivalente a $r\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$, esto es

$$x = \operatorname{sen}\theta.$$

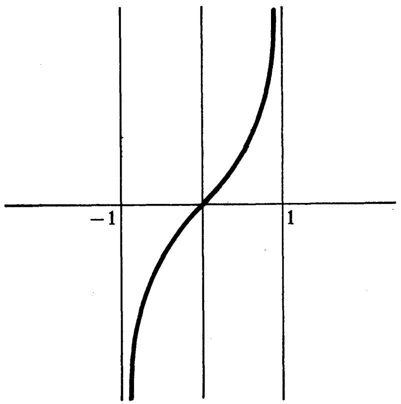
Por supuesto, la función no está definida cuando $\cos\theta = 0$. Como

$$-1 < \operatorname{sen}\theta < 1,$$

se sigue que $-1 < x < 1$. Hacemos una pequeña tabla:

θ	x
0	0
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$
crec. 0 a $\pi/2$	crec. 0 a 1

Cuando θ tiende a $\pi/2$, x tiende a 1. Pero $\cos\theta$ tiende a 0, y así $r = \tan\theta$ se vuelve positivo muy grande. Por lo tanto, la gráfica se ve como en la figura siguiente para $0 \leq x < 1$.



La gráfica también tiene simetría. Como $r = y/x$ y $r \geq 0$, tanto y como x deben tener el mismo signo, esto es, x, $y > 0$ o x, $y < 0$, a menos que $x = 0$. El siguiente intervalo de θ para el cual $\tan\theta$ es positivo es, entonces,

$$\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

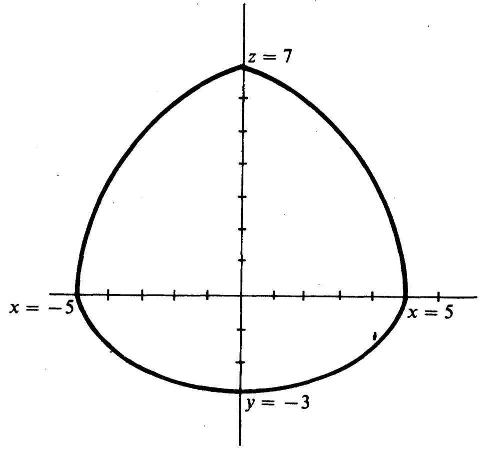
Ya sea haciendo una tabla, o por simetría, al usar

$$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$$

se ve que la gráfica es como se muestra para $-1 < x \leq 0$.

31. $r = 5 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta$. Hacemos una tabla:

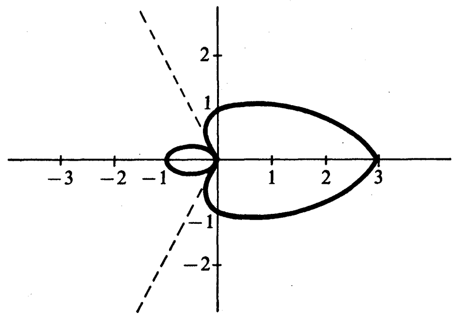
θ	$\mathrm{sen}\,\theta$	r
0 a $\pi/2$	crec. de 0 a 1	crec. de 5 a 7
$\pi/2$ a π	decr. de 1 a 0	decr. de 7 a 5
π a $3\pi/2$	decr. de 0 a -1	decr. de 5 a 3
$3\pi/2$ a 2π	crec. de -1 a 0	crec. de 3 a 5



32. $r = |1 + 2\cos\theta|$. De nuevo hacemos una tabla. El signo de valor absoluto hace que el lado derecho sea positivo, de modo que obtenemos un valor de r para cada valor de θ. Sin embargo, queremos escoger intervalos que tomen en cuenta los cambios de signo de $1 + 2\cos\theta$, esto es, cuando $\cos\theta = -1/2$. Hacemos la tabla de acuerdo con esto, cuando $\theta = 2\pi/3$ o $\theta = 4\pi/3$.

θ	$\cos\theta$	r
0 a $\pi/2$	decr. de 1 a 0	decr. de 3 a 1
$\pi/2$ a $2\pi/3$	decr. de 0 a $-1/2$	decr. de 1 a 0
$2\pi/3$ a π	decr. de $-1/2$ a -1	crec. de 0 a 1

Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$, la gráfica es simétrica con respecto al eje x y se ve así:

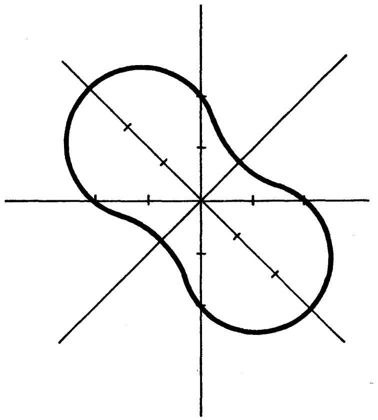


33. (a) $r = 2 + \mathrm{sen}\,2\theta$. Como $\mathrm{sen}\,2\theta$ está entre -1 y $+1$, se sigue que el lado derecho es positivo para todo θ, y así, existe un r que corresponde a cada valor de θ.

Hacemos una tabla, escogiendo los intervalos que reflejen las regiones de crecimiento de sen 2θ, es decir, intervalos de longitud $\pi/4$.

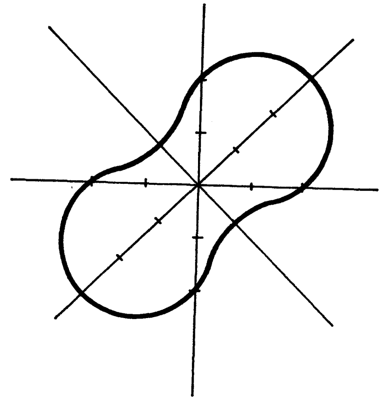
θ	2θ	sen 2θ	r
0 a $\pi/4$	0 a $\pi/2$	crec. de 0 a 1	crec. de 2 a 3
$\pi/4$ a $\pi/2$	$\pi/2$ a π	decr. de 1 a 0	decr. de 3 a 2
$\pi/2$ a $3\pi/4$	π a $3\pi/2$	decr. de 0 a -1	decr. de 2 a 1
$3\pi/4$ a π	$3\pi/2$ a 2π	crec. de -1 a 0	crec. de 1 a 2

La gráfica se ve así.



33. (b) Hacer una tabla. Usamos intervalos de longitud $\pi/4$ porque sen θ cambia su comportamiento en intervalos de longitud $\pi/2$, de modo que sen 2θ cambia su comportamiento en intervalos de longitud $\pi/4$.

θ	2θ	sen 2θ	$r = 2 - \text{sen}\, 2\theta$
crec. de 0 a $\pi/4$	crec. de 0 a $\pi/2$	crec. de 0 a 1	decr. de 2 a 1
crec. de $\pi/4$ a $\pi/2$	crec. de $\pi/2$ a π	decr. de 1 a 0	crec. de 1 a 2
crec. de $\pi/2$ a $3\pi/4$	crec. de π a $3\pi/2$	decr. de 0 a -1	crec. de 2 a 3
crec. de $3\pi/4$ a π	crec. de $3\pi/2$ a 2π	crec. de -1 a 0	decr. de 3 a 2



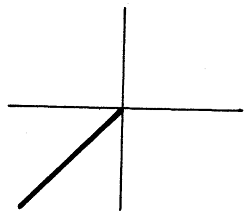
La parte para $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ se obtiene de manera similar, o por simetría.

34. $x \leq 0$, $y = 0$ (eje x negativo)

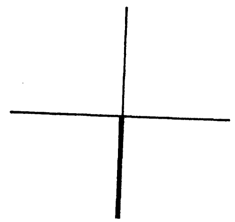
35. $x = 0$, $y \geq 0$ (eje y positivo)

36. $x = 0$, $y \leq 0$ (eje y negativo)

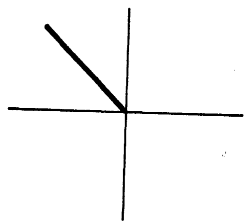
37.



38.



39.



V, §1, p. 149

1. 1 **2.** $\frac{3}{4}$ **3.** $\frac{1}{6}$ **4.** 1 **5.** $\frac{3}{4}$ **6.** 0 **7.** ± 1

8. $\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$ y $\dfrac{5\pi}{4} + 2n\pi$, $n =$ entero. **9.** $n\pi, n =$ entero

10. $\frac{\pi}{2} + n\pi, n = \text{entero}$

V, §2, p. 157

1. Creciente para todo x.
2. Decreciente para $x \leq \frac{1}{2}$, creciente para $x \geq \frac{1}{2}$.
3. Creciente todo x.
4. Decreciente $x \leq -\sqrt{2/3}$ y $x \geq \sqrt{2/3}$. Creciente $-\sqrt{2/3} \leq x \leq \sqrt{2/3}$.
5. Creciente todo x.
6. Decreciente para $x \leq 0$. Creciente para $x \geq 0$.
17. Mín: 1; máx: 4
19. Máx: -1; mín: 4
21. Mín: -1; máx: $-2, 1$
24. Sea $f(x) = \tan x - x$. Entonces $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$. Pero $\tan^2 x$ es un cuadrado, y es entonces > 0 para $0 < x < \pi/2$. Por lo tanto, f es estrictamente creciente. Como $f(0) = 0$, se sigue que $f(x) > 0$ para todo x con $0 < x < \pi/2$.
26. Base$= \sqrt{C/3}$, altura$= \sqrt{C/12}$ **27.** Radio$= \sqrt{C/3\pi}$, altura$= \sqrt{C/3\pi}$
28. Base$= \sqrt{C/6}$, altura$= \sqrt{C/6}$; Radio $= \sqrt{C/6\pi}$, altura$= 2\sqrt{C/6\pi}$
30. (a) $f(t) = -3t + C$ (b) $f(t) = 2t + C$ **31.** $f(t) = -3t + 1$
32. $f(t) = 2t - 5$ **33.** $x(t) = 7t - 61$ **34.** $H(t) = -0.6t + 9$

VI, §1, p. 168

1. $0, 0$ **2.** $0, 0$ **3.** $0, 0$ **4.** $\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}$ **5.** $0, 0$ **6.** $\infty, -\infty$ **7.** $-\infty, \infty$
8. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ **9.** $-\infty, +\infty$ **10.** $0, 0$ **11.** $\infty, -\infty$ **12.** $-\infty, \infty$
13. ∞, ∞ **14.** $-\infty, -\infty$ **15.** $\infty, -\infty$ **16.** $-\infty, \infty$
17. ∞, ∞ **18.** $-\infty, -\infty$

19.

n	a_n	$x \to \infty$	$x \to -\infty$
Impar	> 0	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to -\infty$
Impar	< 0	$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to \infty$
Par	> 0	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to \infty$
Par	< 0	$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to -\infty$

20. Suponer que un polinomio tiene grado impar, digamos que

$$f(x) = ax^n + \text{términos de orden menor},$$

y $a \neq 0$. Suponer primero que $a > 0$. Si $x \to \infty$, entonces $f(x) \to \infty$ y en particular, $f(x) > 0$ para algún x. Si $x \to -\infty$, entonces $f(x) \to -\infty$, y, en particular, $f(x) < 0$ para algún x. Por el teorema del valor intermedio existe algún número c tal que $f(c) = 0$. El mismo argumento funciona si $a < 0$.

VI, §2, p. 172

1. Para $\operatorname{sen} x$: 0, π y añadir $2n\pi$ con cualquier entero n.

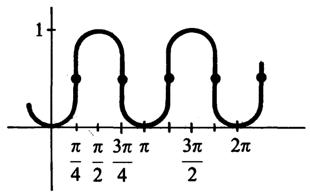
2. Para $\cos x$: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, y añadir $2n\pi$.

3. Sea $f(x) = \tan x$. Entonces $f'(x) = 1 + \tan^2 x$, y

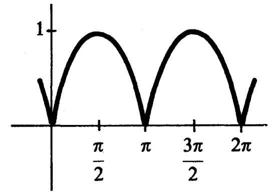
$$f''(x) = \frac{d}{dx}(1 + \tan^2 x) = 2(\tan x)(1 + \tan^2 x).$$

La expresión $1 + \tan^2 x$ es siempre > 0, y $f''(x) = 0$ si, y sólo si, $x = 0$ (en el intervalo dado). Si $x > 0$, entonces $\tan x > 0$, y si $x < 0$, entonces $\tan x < 0$. Por lo tanto, $x = 0$ es el punto de inflexión.

4. Trazar las gráficas de $\operatorname{sen}^2 x$ y $|\operatorname{sen} x|$.



$\operatorname{sen}^2 x$



$|\operatorname{sen} x|$

Observar que la función $\operatorname{sen}^2 x$ es diferenciable, y su derivada es 0 en $x = 0$, $\pi/2$, π, etc., de modo que la curva es plana en estos puntos. Por otro lado, $|\operatorname{sen} x|$ no es diferenciable en 0, π, 2π, etc., donde tiene "picos." Por ejemplo, la gráfica de $|\operatorname{sen} x|$ para $\pi \leq x \leq 2\pi$ se obtiene al reflejar la gráfica de $\operatorname{sen} x$ respecto al eje x.

Sea $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$. Entonces $f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$. Además, $f''(x) = 2\cos 2x$. Esto permitirá hallar fácilmente las regiones de crecimiento y de decrecimiento y los puntos de inflexión, donde $f''(x) = 0$. Los puntos de inflexión son cuando $\cos 2x = 0$, esto es, $2x = \pi/2 + n\pi$ con un entero n, de modo que $x = \pi/4 + n\pi/2$ con un entero n.

6. Se dobla hacia arriba para $x > 0$; hacia abajo para $x < 0$.

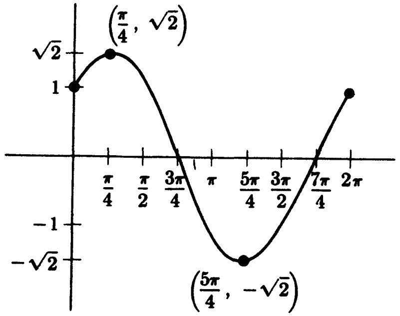
7. Se dobla hacia arriba para $x > \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} < x \leq 0$. Hacia abajo para $x < -\sqrt{3}$, $0 \leq x < \sqrt{3}$.

8. Se dobla hacia arriba para $x > 1$, $-1 < x \leq 0$. Hacia abajo para $x < -1$ y $0 \leq x < 1$.

9. Máx en $x = \pi/4$. Mín en $x = 5\pi/4$.
Estrictamente creciente para $0 \leq x \leq \pi/4$, $5\pi/4 \leq x \leq 8\pi/4$. Decreciente para

$$\pi/4 \leq x \leq 5\pi/4.$$

Puntos de inflexión: $3\pi/4$ y $7\pi/4$.
Trazar la curva $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.



VI, §3, p. 177

1. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Entonces

$$f''(x) = 6ax + 2b.$$

Existe una solución única $x = -b/3a$. Más aún, si $a > 0$:

$$f''(x) = 6ax + 2b > 0 \iff x > -b/3a,$$
$$f''(x) = 6ax + 2b < 0 \iff x < -b/3a.$$

Por lo tanto, $x = -b/3a$ es un punto de inflexión, y es el único. Si $a < 0$, al dividir una desigualdad entre a cambia la dirección de la desigualdad, pero el argumento es el mismo.

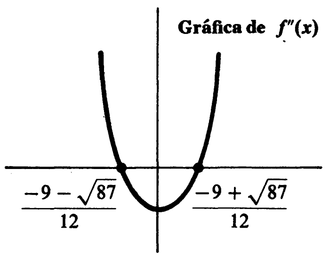
17. (a), (e) **18.** (c)

19. $f''(x) = 12x^2 + 18x - 2$. De modo que $\frac{1}{2}f''(x) = 6x^2 + 9x - 1$, y $f''(x) = 0$ si, y sólo si,

$$x = \frac{-9 - \sqrt{87}}{12} \quad \text{o} \quad x = \frac{-9 + \sqrt{87}}{12}$$

Más aún, la gráfica de f'' es una parábola que se dobla hacia arriba (pues el coeficiente 12 de x^2 es positivo) y así

$$f''(x) > 0 \text{ si, y sólo si, } \frac{-9 - \sqrt{87}}{12} < x < \frac{-9 + \sqrt{87}}{12}.$$



Entonces $f''(x)$ cambia de signo en las dos raíces de $f''(x)$, por lo que estas dos

raíces son puntos de inflexión de f.

Tenemos que $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 2x = x(4x^2 + 9x - 2)$. Los puntos críticos de f son las raíces de f', esto es

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{-9 - \sqrt{113}}{8}, \quad x_3 = \frac{-9 + \sqrt{113}}{8}.$$

Nótese que $f(-2) < 0$ (por cálculo directo), de modo que $f(x)$ es negativo en algún $x < 0$. Además

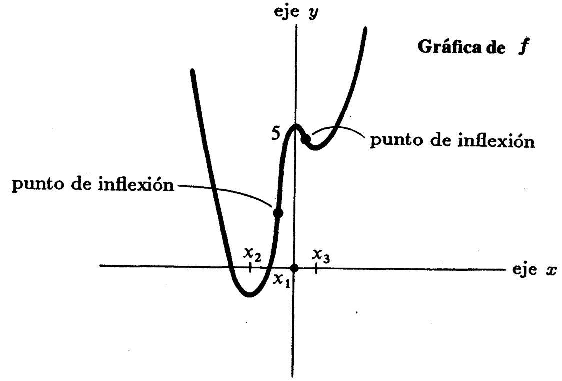
$$\text{si } x \to -\infty, \text{ entonces } f(x) \to \infty,$$
$$\text{si } x \to \infty, \text{ entonces } f(x) \to \infty.$$

Si $x \geq 0$, entonces $f(x) > 0$. En efecto, si $0 < x \leq 1$, entonces $-x^2 + 5 > 0$ y los otros dos términos $x^4 + 3x^3$ son ambos positivos, de modo que $f(x) > 0$. Si $x \geq 1$, entonces

$$x^4 - x^2 > 0,$$

y $3x^3 + 5 > 0$, así que, de nuevo, $f(x) > 0$.

Podemos ahora trazar la gráfica de f.



21. Tenemos $f'(x) = 6x^5 - 6x^3 + \frac{9}{8}x = 3x(2x^4 - 2x^2 + \frac{3}{8})$. Sea $u = x^2$. Entonces las raíces de $f'(x)$ (que son los puntos críticos de f) son $x = 0$ y aquellos valores obtenidos mediante la fórmula cuadrática aplicada a u, a saber,

$$2u^2 - 2u + \tfrac{3}{8} = 0.$$

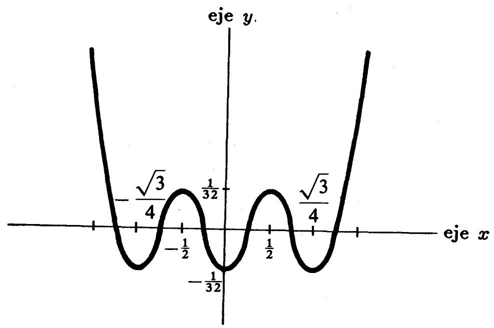
De aquí se obtiene $u = 1/4$ o $u = 3/4$, o, en términos de x,

$$x = \pm 1/2 \quad \text{y} \quad x = \pm\sqrt{3}/2.$$

Observar que $f(x)$ también se puede escribir en términos de $u = x^2$, a saber,

$$f(x) = u^3 - \tfrac{3}{2}u^2 + \tfrac{9}{16}u - \tfrac{1}{32}.$$

Entonces se hallará que los valores de f en los puntos críticos son todos iguales a $1/32$ o $-1/32$. (¿Bonito?) La gráfica se ve como se muestra en la página siguiente.



Los puntos de inflexión también se pueden hallar fácilmente. Tenemos

$$f''(x) = 30x^4 - 18x^2 + \tfrac{9}{8} = 30u^2 - 18u + \tfrac{9}{8}.$$

Por lo tanto, $f''(x) = 0$ si, y sólo si,

$$u = \frac{-18 \pm \sqrt{189}}{60}.$$

Esto da dos valores para u, y entonces $x = \pm\sqrt{u}$ son los puntos de inflexión.

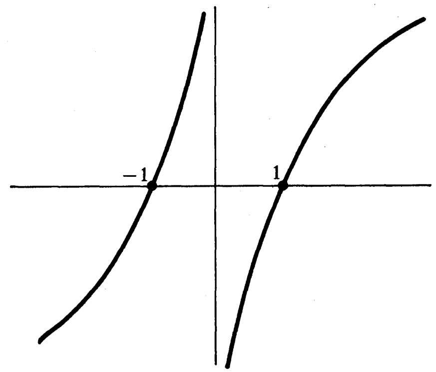
VI, §4, p. 182

Ver también las gráficas que se muestran a continuación.

	p.c.	Crece	Decrece
1.	$3 \pm \sqrt{11}$	$x \leq 3 - \sqrt{11}$ y $x \geq 3 + \sqrt{11}$	$3 - \sqrt{11} \leq x < 3$ y $3 < x < 3 + \sqrt{11}$
2.	$3 \pm \sqrt{10}$	$3 - \sqrt{10} \leq x \leq 3 + \sqrt{10}$	$3 + \sqrt{10} \leq x$ y $x \leq 3 - \sqrt{10}$
3.	$-1 \pm \sqrt{2}$	$-1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2}$	$x \leq -1 - \sqrt{2}$ y $x \geq -1 + \sqrt{2}$
Para **4** y **5**, ver las gráficas que siguen.			
6.	0	$x \leq 0$	$\sqrt{2} < x$ y $0 \leq x < \sqrt{2}$
7.	Ninguno	$x < -\frac{1}{3}, x > -\frac{1}{3}$	

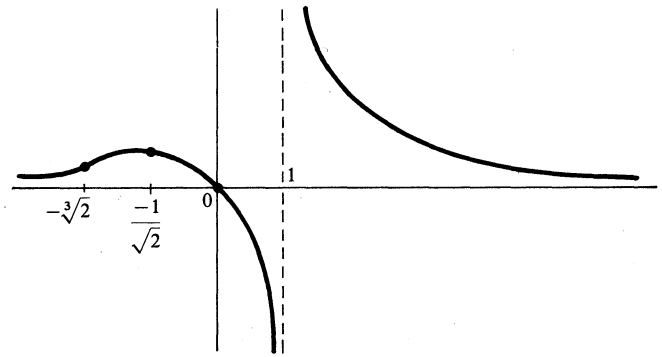
	Máx. rel.	Mín. rel.	Crece	Decrece
9.	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$x < -\sqrt{3}, x > \sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$, $0 < x < \sqrt{3}$
12.	Ninguno	Ninguno	En ninguna parte	$x < 5/3, x > 5/3$
14.	Ninguno	0	$x > 0$	$-1 < x < 0$
16.	Ninguno	Ninguno	En ninguna parte	$x < -\sqrt{5}$, $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$, $x > \sqrt{5}$
18.	0	Ninguno	$x < -2$ $-2 < x < 0$	$0 < x < 2, x > 2$

4. $y = f(x) = x - 1/x$; no hay punto crítico. La función es estrictamente creciente en todo intervalo donde está definida.



5. $y = f(x) = x/(x^3 - 1)$; $f'(x) = -(2x^3 + 1)/(x^3 - 1)^2$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x^2(x^3 - 1)(x^3 + 2)/(x^3 - 1)^6 \\ &= (x^3 - 1)(x^3 + 2) \cdot \text{un cuadrado.} \end{aligned}$$

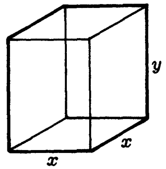


Punto crítico en $x = -1/\sqrt{2}$. Punto de inflexión en $x = -\sqrt[3]{2}$. Máximo local en el punto crítico.

VI, §5, p. 193

1. $r\sqrt{2}$ por $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$, donde r es el radio del semicírculo.

2. Sea x el lado de la base y y el otro lado, según se muestra en la figura.



Sea $A(x)$ el área combinada. Entonces

$$A(x) = x^2 + 4xy = 4.5, \quad \text{de donde } y = \frac{4.5 - x^2}{4x}.$$

Si el volumen es V, entonces

$$V = x^2y = 1.125x - \frac{x^3}{4}.$$

Entonces $V'(x) = 1.125 - 3x^2/4$ y $V'(x) = 0$ si, y sólo si, $x = 1.22$, y $y = 0.61$ al sustituir en la expresión para y en términos de x. Tenemos, para $x > 0$:

$$V'(x) > 0 \iff 1.125 - 3x^2/4 > 0 \iff x < 1.22,$$
$$V'(x) < 0 \iff 1.125 - 3x^2/4 < 0 \iff x > 1.22.$$

Por lo tanto, $x = 1.22$ es un punto máximo.

4. El costo total $f(x)$ está dado por

$$f(x) = \frac{300}{x}\left(2 + \frac{x^2}{600}\right)\frac{30}{100} + D\frac{300}{x} = \frac{300D + 180}{x} + \frac{3x}{20}.$$

Entonces $f'(x) = 0$ si, y sólo si, $x^2 = 20(300D+180)/3$. Respuestas: (a) $x = 20\sqrt{3}$ (b) $x = 40\sqrt{2}$ (c), (d), (e) $x = 60$, pues los puntos críticos son más grandes que 60, a saber, $20\sqrt{13}$, $60\sqrt{2}$ y $20\sqrt{23}$ en los casos respectivos.

5. $4\sqrt{2}$ por $8\sqrt{2}$

6. Respuesta: $x = 8/3$. Para x, $y \geq 0$, requerimos que $x + y = 4$, y queremos minimizar $x^2 + y^3$. Como $y = 4 - x$, debemos minimizar

$$f(x) = x^2 + (4 - x)^3.$$

Entonces $f'(x) = 2x - 3(4 - x)^2$, y $f'(x) = 0$ si, y sólo si, $x = (26 \pm 10)/6$. La solución $36/6$ está fuera del margen $0 \leq x \leq 4$. El punto crítico en este margen es, pues, $x = 16/6 = 8/3$. Mediante un cálculo directo puede verse que $f(8/3)$ es menor que $f(0)$ o $f(4)$. Como hay un solo punto crítico en el intervalo dado, debe ser el mínimo requerido. También se puede graficar $f'(x)$ (parábola) para ver

que $f'(x) < 0$ si $0 < x < 8/3$ y $f'(x) > 0$ si $8/3 < x < 4$, de modo que $f(x)$ es decreciente a la izquierda del punto crítico, y es creciente a la derecha del punto crítico, de donde el punto crítico es un mínimo en el intervalo dado.

7. Mínimo: usar $24\pi/(4+\pi)$ cm para el círculo; $96/(4+\pi)$ cm para el cuadrado.

Máximo: usar todo el alambre para el círculo.

Mostramos cómo hacer el ejercicio 7. Sea x el lado del cuadrado. Entonces $4x$ es el perímetro del cuadrado, y $0 \leq 4x \leq 24$, de modo que $0 \leq x \leq 6$. Además, $24 - 4x$ es la longitud del círculo, i.e. la circunferencia. Pero

$$24 - 4x = 2\pi r, \quad \text{donde } r \text{ es el radio,}$$

y πr^2 es el área del círculo. La suma de las áreas es

$$\pi r^2 + x^2.$$

Esto se expresa en términos de dos variables, x y r, pero tenemos la relación

$$r = \frac{24 - 4x}{2\pi},$$

de modo que la suma de las áreas se puede expresar en términos de una variable,

$$f(x) = \pi\left(\frac{24 - 4x}{2\pi}\right)^2 + x^2.$$

Ahora se puede minimizar o maximizar al hallar primero los puntos críticos y después investigar si son máximos o mínimos, o si dichos extremos suceden cuando $4x = 24$ o $4x = 0$. Notar que la gráfica de f es una parábola, doblada hacia arriba. ¿Qué es $f(0)$? ¿Qué es $f(6)$? Los valores posibles para x están en el intervalo $0 \leq x \leq 6$. El máximo o mínimo de f en este intervalo está en $f(0)$, $f(6)$ o bien en el punto crítico x tal que $f'(x) = 0$. Trazar la gráfica de f para tener idea de lo que sucede.

8. Respuesta: $(1, 2)$. El cuadrado de la distancia de (x, y) a $(2, 1)$ es

$$(x-2)^2 + (y-1)^2.$$

Como $y^2 = 4x$, obtenemos $x = y^2/4$, de modo que tenemos que minimizar

$$f(y) = \left(\frac{y^2}{4} - 2\right)^2 + (y-1)^2.$$

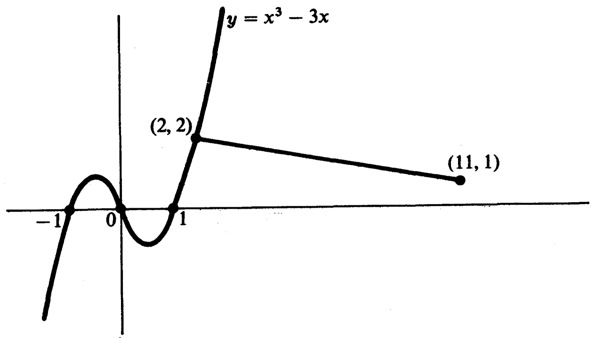
Pero $f'(y) = (y^3/4) - 2$ y $f'(y) = 0$ si, y sólo si, $y = 2$, de modo que $x = 1$. Se puede verificar que $f'(y) > 0$ si $y > 2$ y $f'(y) < 0$ si $y < 2$, de modo que $y = 2$ es un mínimo para $f(y)$.

9. $(\sqrt{5}/2, \frac{1}{2}), (-\sqrt{5}, \frac{1}{2})$

10. El cuadrado de la distancia entre $(11, 1)$ y (x, y) es

$$(x-11)^2 + (y-1)^2 = (x-11)^2 + (x^3 - 3x - 1)^2 = f(x),$$

que es una función sólo de x. La figura lo muestra.



Tenemos que minimizar $f(x)$. Cuando x se vuelve positivo o negativo grande, $f(x)$ se vuelve positivo grande, pues

$$f(x) = x^6 + \text{términos de grado menor.}$$

Por lo tanto, ocurre un mínimo en el punto crítico. Tenemos

$$f'(x) = 2(x-11) + 2(x^3 - 3x - 1)(3x^2 - 3)$$

de modo que

$$\tfrac{1}{2}f'(x) = 3x^5 - 12x^3 - 3x^2 + 10x - 8.$$

Sustituyendo directamente x por 2 se muestra que $f'(2) = 0$, y entonces 2 es un punto crítico. Si pudiéramos mostrar que 2 es el único punto crítico de f, entonces terminaríamos. Obtengamos más información acerca de $f'(x)$. Por división, obtenemos un factor

$$\tfrac{1}{2}f'(x) = (x-2)g(x) \text{ donde } g(x) = 3x^4 + 6x^3 - 3x + 4.$$

La función $g(x)$ aún es complicada. Si $g(x) \neq 0$ para todo x, terminaríamos, pero se ve difícil, aunque sea cierto. Tratemos de evitar complicaciones técnicas y simplifiquemos nuestro problema original por inspección. La figura sugiere que todos los puntos (x, y) sobre la curva $y = x^3 - 3x$ tal que $x \leq 1$ estarán a mayor distancia de $(11, 1)$ que de $(2, 2)$. En realidad esto se prueba fácilmente, pues $f(2) = 82$, y, si $x \leq 1$, entonces

$$f(x) \geq (x-11)^2 \geq 100 > 82.$$

Por lo tanto, basta probar que $f(2)$ es un mínimo para $f(x)$ cuando $x > 1$, y basta probar que 2 es el único punto crítico de $f(x)$ para $x > 1$. Así, basta probar que $g(x) \neq 0$ para $x > 1$. Esto es fácil, pues $3x^4 + 4$ es positivo y

$$6x^3 - 3x = 3(2x^3 - 1) > 0 \text{ para } x > 1.$$

Esto prueba que $g(x) > 0$ para $x > 1$. Entonces, $x = 2$ es el único punto crítico de f para $x > 1$, y finalmente hemos probado que el mínimo de $f(x)$ está en $x = 2$.

11. $(5,3), (-5,3)$ **12.** $(-1/2, 1\sqrt{2})$ **13.** $(-1,0)$

14. Respuesta: $(1,2)$. El cuadrado de la distancia entre (x,y) y $(9,0)$ es $(x-9)^2 + y^2$. Como $y = 2x^2$, tenemos que minimizar

$$f(x) = (x-9)^2 + (2x^2)^2 = (x-9)^2 + 4x^4.$$

Entonces $f'(x) = 16x^3 + 2x - 18$, y $f'(1) = 0$. Se puede graficar $f'(x)$ de la manera usual. Como $f''(x) = 48x^2 + 2 > 0$ para todo x, vemos que $f'(x)$ es estrictamente creciente, de modo que $f'(x) = 0$ sólo para $x = 1$, que es el único punto crítico de f. Pero $f(x)$ se vuelve grande cuando x se vuelve negativo o positivo grande, y por ello $f(x)$ tiene un mínimo. Como sólo hay un punto crítico para f, el mínimo es igual al punto crítico, lo cual da la respuesta.

15. $F = 2\sqrt{3}Q/9b^2$

16. Respuesta: $y = 2h/3$. Tenemos $F'(y) = y\frac{1}{2}(h-y)^{-1/2}(-1) + (h-y)^{1/2}$, de modo que

$$F'(y) = \frac{2h - 3y}{2(h-y)^{1/2}}.$$

Así, $F'(y) = 0$ si, y sólo si, $y = 2h/3$. Pero $F(0) = F(h) = 0$ y $F(y) > 0$ para todo y en el intervalo $0 < y < h$. Por lo tanto, el punto crítico debe ser el máximo.

17. $(2,0)$

18. $\text{máx}\, x = 0$ (ningún triángulo); $\text{mín}\, x = \dfrac{L}{2\pi\left(\frac{1}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{2\pi}\right)}$. Cortar el alambre dedicando x al triángulo y $L - x$ al círculo. Sea s el lado del triángulo de modo que $3s = x$; sea h la altura del triángulo, y r el radio del círculo. Entonces

$$L = x + 2\pi r \quad \text{y} \quad A = \tfrac{1}{2}sh + \pi r^2.$$

Necesitamos otras relaciones para hacer de A una función de una variable x, a saber,

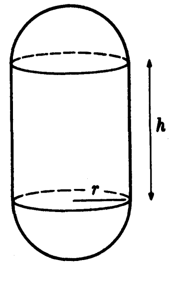
$$h = s\sqrt{3}/2 = x\sqrt{3}/6 \quad \text{y} \quad r = (L-x)/2\pi.$$

Entonces $A(x) = x^2\sqrt{3}/36 + \left((L-x)/2\pi\right)^2$ y $A'(x) = x\sqrt{3}/18 - (L-x)/2\pi$. Así, el punto crítico es como se dio en la respuesta. Como la gráfica de $A(x)$ es una parábola doblada hacia arriba, el punto crítico es un mínimo. El máximo ocurre en un punto extremo del intervalo $0 \leq x \leq L$. Para averiguar cuál extremo, evaluar $A(0)$ y $A(L)$ y comparar los dos valores para ver que $A(0)$ es mayor.

19. $4\left[1 + \left(\frac{13.5}{4}\right)^{2/3}\right]^{3/2}$

20. Lo acabamos de armar. Sea r el radio de la base del cilindro y h la altura. Entonces el volumen total, que es constante, es

$$V\pi r^2 h + \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$



Esto nos permite despejar h, a saber

$$h = \frac{V - 4\pi r^3/3}{\pi r^2}.$$

El costo del material es una constante por:

(área del cilindro) + (el doble del área de la esfera).

Podemos expresar este costo como función de r y h, a saber

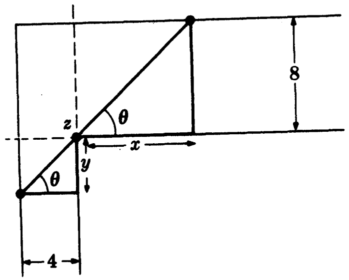
$$2\pi r h + 2 \cdot 4\pi r^2.$$

Como h está expresado como función de r, obtenemos el costo total expresado sólo como función de r, a saber,

$$f(r) = C\left[2\pi r\left(\frac{V - 4\pi r^3/3}{\pi r^2}\right) + 8\pi r^2\right] = C\left[\frac{2V}{r} + \frac{16}{3}\pi r^2\right].$$

De aquí en adelante se puede hallar $f'(r)$ y proceder de la manera usual para hallar cuándo $f'(r) = 0$. Hay un solo punto crítico, y $f(r)$ se vuelve grande cuando r tiende a 0 o r se vuelve grande. Por lo tanto, el punto crítico es un mínimo.

21. La figura es como sigue:



La varilla más larga será la que quepa en la distancia mínima denominada z en la figura. Sean x y y como se muestra en la figura. Tenemos

$$z = \sqrt{4^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + 8^2}.$$

Esto depende de las dos variables x y y, pero podemos hallar una relación entre ellas usando triángulos semejantes, a saber,

$$\frac{8}{x} = \frac{y}{4},$$

de manera que

$$y = \frac{32}{x}.$$

Por lo tanto,

$$z = f(x) = \sqrt{16 + \left(\frac{32}{x}\right)^2} + \sqrt{x^2 + 64}.$$

Entonces hay que minimizar $f(x)$. La respuesta surge como

$$x = 4, \quad z = 8\sqrt{5}.$$

22. De la figura que aparece en el texto tenemos $0 \le x \le a$, y

$$\operatorname{dist}(P, R) = \sqrt{x^2 + y_1^2},$$
$$\operatorname{dist}(R, Q) = \sqrt{(a - x)^2 + y_2^2}.$$

Por lo tanto, la suma de las distancias es

$$f(x) = \sqrt{x^2 + y_1^2} + \sqrt{(a - x)^2 + y_2^2}.$$

Entonces

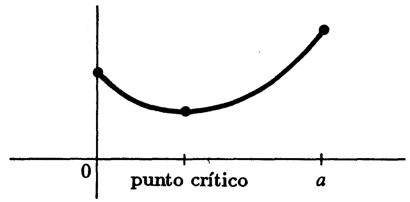
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{(a - x)}{\sqrt{(a - x)^2 + y_2^2}}.$$

Tenemos que $f'(x) = 0$ si, y sólo si,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} = \frac{a - x}{\sqrt{(a - x)^2 + y_2^2}},$$

que es la relación entre cosenos deseada.

En particular, vemos que hay un solo punto crítico. Por lo tanto, el mínimo de f está o bien en los puntos extremos $x = 0$ o $x = a$, o bien en el punto crítico. Probaremos ahora que el punto crítico es el mínimo. Tratamos de probar que la gráfica de f se ve más o menos como ésta.



Cuando x está cerca de 0 y $x > 0$, entonces el primer término en $f'(x)$ es pequeño y el segundo término está cerca de

$$-\frac{a}{\sqrt{a^2 + y_2^2}},$$

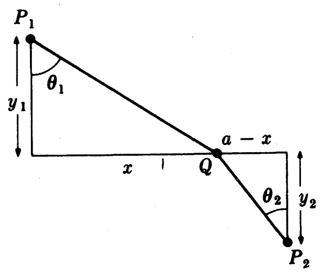
que es negativo. Por lo tanto, $f'(x) < 0$ cuando x está cerca de 0, y la función decrece cuando x está cerca de 0.

Por otro lado, suponer que x está cerca de a. Entonces el segundo término en $f'(x)$ está cerca de 0 y el primer término está cerca de

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + y_1^2}} > 0.$$

En consecuencia, $f'(x) > 0$ cuando x está cerca de a. Por lo tanto, f es creciente cuando x está cerca de a. Como $f(x)$ es decreciente para x cerca de 0 y creciente para x cerca de a, se sigue que el mínimo no puede estar en los puntos extremos, y entonces ha de estar enmedio. Por lo tanto, el mínimo es un punto crítico, y hemos visto que hay sólo un punto crítico, por lo cual el mínimo está en el punto crítico. Esto prueba lo que queríamos.

23. Sean x y $a - x$ como en la figura que se muestra en la página siguiente. Entonces $0 \le x \le a$.



Sean t_1 el tiempo necesario para viajar de P_1 a Q, y t_2 el tiempo necesario para viajar de Q a P_2. Entonces

$$t_1 = \frac{\text{dist}(P_1, Q)}{v_1} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{\text{dist}(Q, P_2)}{v_2}.$$

Entonces,

$$t_1 + t_2 = f(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{x^2 + y_1^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(a-x)^2 + y_2^2}.$$

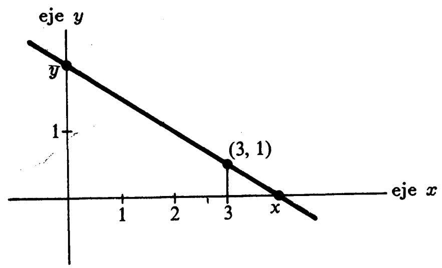
Tanto v_1 como v_2 están dados como constantes, por lo que de nuevo tenemos que tomar $f'(x)$ y hacerlo igual a 0. Esto es análogo al ejercicio 22, y hallamos exactamente la relación que ha de probarse.

24. $p = s/n$. Como $L(0) = L(1) = 0$ y $L(p) > 0$ para $0 < p < 1$, se sigue que el máximo está en el punto crítico. Pero

$$\begin{aligned} L'(p) &= p^s(n-s)(1-p)^{n-s-1}(-1) + sp^{s-1}(1-p)^{n-s} \\ &= p^{s-1}(1-p)^{n-s-1}[p(s-n) + s(1-p)] \\ &= p^{s-1}(1-p)^{n-s-1}(-np + s). \end{aligned}$$

Para $0 < p < 1$, el factor $p^{s-1}(1-p)^{n-s-1}$ no es 0, de modo que $L'(p) = 0$ si, y sólo si, $-np + s = 0$, esto es, $p = s/n$. Por lo tanto, hay un solo punto crítico, de manera que el máximo está en el punto crítico.

25. (a)



Sean x y y los cruces de la recta con los ejes. Entonces el área del triángulo es igual a

$$A = \tfrac{1}{2}xy.$$

Queremos minimizar el área. Por triángulos semejantes sabemos que

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{x-3}, \quad \text{de modo que} \quad y\frac{x}{x-3}.$$

Entonces el área está dada por

$$A(x) = \tfrac{1}{2}x\frac{x}{x-3} = \frac{1}{2}\frac{x^2}{x-3}.$$

Por consideraciones físicas, estamos limitados al intervalo $x > 3$. Cuando x tiende a 3 y $x > 3$, el denominador tiende a 0 y es positivo. Como x^2 tiende a 9, se sigue que $A(x)$ se vuelve positivo grande. Además, cuando $x \to \infty$, $A(x) \to \infty$. Por lo tanto, el mínimo de a ocurrirá en un punto crítico.

Hallamos los puntos críticos. Tenemos

$$2A'(x) = \frac{(x-3)2x - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}.$$

Entonces $A'(x) = 0$ si, y sólo si, $x = 6$ (se excluye $x = 0$ porque $x > 3$). Por consiguiente, la recta deseada pasa por el punto $(6, 0)$. La ecuación es entonces

$$y - 0 = \frac{1-0}{3-6}(x-6) = -\tfrac{1}{3}(x-6).$$

o también

$$y - 2 = -\tfrac{1}{3}x.$$

25. (b) $3y = -2x + 12$

26. $x = (a_1 + \cdots + a_n)/n$. Tenemos dado

$$f(x) = (x - a_1)^2 + \cdots + (x - a_n)^2.$$

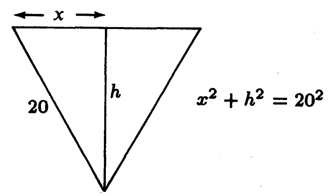
Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x - a_1) + \cdots + 2(x - a_n) \\ &= 2x - 2a_1 + 2x - 2a_2 + \cdots + 2x - 2a_n \\ &= n2x - 2(a_1 + \cdots + a_n). \end{aligned}$$

De este modo, $f'(x) = 0$ si, y sólo si, $nx = a_1 + \cdots + a_n$. Dividir entre n para obtener el punto crítico de f. Como $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \pm\infty$, ya que, por ejemplo, sólo un término cuadrado $(x - a_1)^2$ se vuelve grande cuando x se vuelve positivo o negativo grande, se sigue que el mínimo debe estar en un punto crítico, y hay sólo un punto crítico. Por lo tanto, el punto crítico es el mínimo.

27. $25/\sqrt{2}$

28. Respuesta: $\theta = \pi/2$. Sea h la altura del triángulo, según se muestra en la figura.



Basta maximizar el área dada por

$$A(x) = \tfrac{1}{2}xh = \tfrac{1}{2}x\sqrt{20^2 - x^2} \quad \text{para} \quad 0 < x < 20.$$

Entonces $A'(x) = (-2x^2+20^2)/2(20^2-x^2)^{1/2}$ y $A'(x) = 0$ si, y sólo si, $x = 20/\sqrt{2}$. Pero $A(x) \geq 0$ y $A(0) = A(20) = 0$. Por lo tanto el punto crítico es el máximo. El valor anterior para x implica que $\theta = \pi/2$, porque el triángulo es semejante al triángulo con lados 1, 1, $\sqrt{2}$.

29. $\pi/3$. Resolvámoslo. Sea y la profundidad. Entonces $\operatorname{sen}\theta = y/30$. La capacidad máxima ocurre cuando el área de la sección transversal es máxima. Esta área es igual a

$$A = 30y + 2(\tfrac{1}{2}y\, 30\cos\theta).$$

Se puede escoger entre expresar A completamente en términos de y o completamente en términos de θ. Supongamos que lo hacemos en términos de θ. Entonces

$$A(\theta) = 30^2 \operatorname{sen}\theta + 30^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 30^2[\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta].$$

De modo que $A'(\theta) = 30^2[\cos\theta + \cos 2\theta]$, y $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Pero en este intervalo, $\cos\theta$ y $\cos 2\theta$ son estrictamente decrecientes, por lo que $A'(\theta)$ es estrictamente decreciente. Tenemos que $A'(\theta) = 0$ precisamente cuando $\cos\theta + \cos 2\theta = 0$, lo que ocurre cuando $\theta = \pi/3$. Así, $A'(\theta) > 0$ si $0 < \theta < \pi/3$ y $A'(\theta) < 0$ si $\pi/3 < \theta < \pi/2$. Por lo tanto, $A(\theta)$ crece para $0 \leq \theta \leq \pi/3$ y decrece para $\pi/3 \leq \theta \leq \pi/2$. Por consiguiente, el máximo ocurre cuando $\theta = \pi/3$.

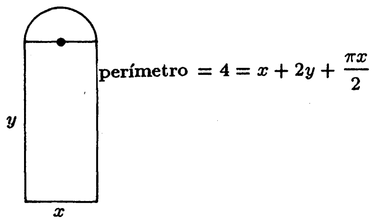
30. (a) $a = 16$ (b) $a = -54$. Para ver esto, nótese que

$$f'(x) = 2x - a/x^2,$$

y $f'(x) = 0$ si, y sólo si, $a = 2x^3$. Para $x = 2$ y $x = -3$, esto da el valor deseado para a. Se puede verificar directamente que éste es un mínimo al determinar en dónde $f'(x) > 0$ o $f'(x) < 0$. Como para la parte (c), éste es uno de los casos raros en que es útil tomar la segunda derivada. La segunda derivada es $f''(x) = 2+2a/x^3$, y el punto crítico se ha determinado para cuando $a = 2x^3$; de modo que, si x es el punto crítico, obtenemos $f''(x) = 6 > 0$. Por lo tanto, el punto crítico debe ser un mínimo local.

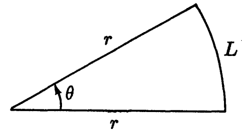
31. Dista $\dfrac{c}{1+\sqrt[3]{a/b}}$ de b

32. base$= 8/(4+\pi)$ y altura$= 4/(4+\pi)$. La figura es así.



Área$= xy + \frac{1}{2}\pi r^2 = xy + \frac{1}{2}\pi(x/2)^2$. Se puede despejar y en términos de x mediante la ecuación del perímetro, de modo que el área está dada como una función de x, $A(x)$. Al hallar $A'(x) = 0$ se produce el valor deseado para x, que es un punto crítico, el único punto crítico, y $A(x)$ es una parábola que se dobla hacia abajo, de modo que el punto crítico es un máximo.

33. (a) Hallar el radio y el ángulo de un sector circular de área máxima si el perímetro es de 20 cm.



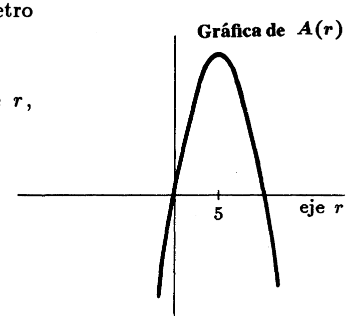
Sean r el radio del sector y L la longitud del arco circular. Entonces $L = (\theta/2\pi)2\pi r = \theta r$. El perímetro es

$$P = 2r + L = 2r + \theta r = 20.$$

Por lo tanto, podemos despejar θ en términos de r, esto es

$$\theta = \frac{20}{r} - 2.$$

El área del sector es



$$A = \frac{\theta}{2\pi}\pi r^2 = \frac{\theta r^2}{2}$$

de modo que, en términos sólo de r:

$$A(r) = \left(\frac{20}{r} - 2\right) = \frac{r^2}{2} = 10r - r^2.$$

La gráfica de $A(r)$ es una parábola que se dobla hacia abajo, de modo que el máximo está en el punto crítico. Pero

$$A'(r) = 10 - 2r$$

de modo que el máximo es cuando $2r = 10$, así que $r = 5$. Entonces

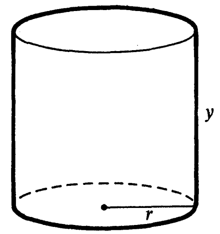
$$\theta = \frac{20}{5} - 2 = 2.$$

33. (b) radio$=$ 4 cm, ángulo$=$ 2 radianes.

34. No hay que hacer las cosas más complicadas de lo necesario. Observar que $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}2\theta$. Esto es un máximo cuando $\theta = \pi/4$.

35. $2(1+\sqrt[3]{36})^{3/2}$

36. $r = (V/\pi)^{1/3} = y$. Nótese que $V = \pi r^2 y$, de modo que $y = V/\pi r^2$.



Sea S =superficie del área, de modo que $S = \pi r^2 + 2\pi r y$. Entonces

$$S(r) = \pi r^2 + 2V/r.$$

Tenemos $S'(r) = 2\pi r - 2V/r^2 = 0$ si, y sólo si, $r = (V/\pi)^{1/3}$. Hay un solo punto crítico. Pero $S(r)$ se vuelve grande cuando r tiende a 0 o también cuando r se vuelve grande. Hay un mínimo porque $S(r) > 0$ para $r > 0$, de modo que el mínimo es igual al único punto crítico.

37. $$P = 2r + L = 2r + r\theta.$$

De $A = \theta r^2/2$ obtenemos $\theta = 2A/r^2$, de modo que P puede expresarse en términos sólo de r mediante

$$P(r) = 2r + 2A/r.$$

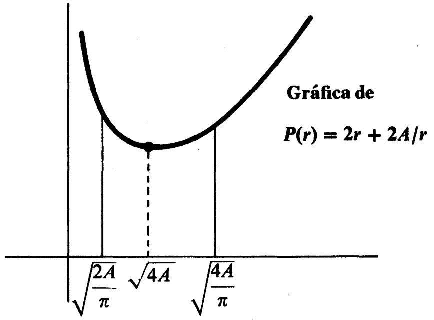
Tenemos $P'(r) = 2 - 2A/r^2$, y $P'(r) = 0$ si, y sólo si, $r = A^{1/2}$. De modo que P tiene un solo punto crítico y $P(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$ y cuando $r \to 0$. Por lo tanto, P tiene un mínimo y ese mínimo está en el punto crítico. Éste es un mínimo para todos los valores de $r > 0$. En la parte (a), tenemos que $\theta \leq \pi$, de modo que $r^2 \geq 2A/\pi$, y los datos nos limitan al intervalo

$$\sqrt{2A/\pi} \leq r.$$

Por lo tanto, en la parte (a) el mínimo está en el punto crítico. En la parte (b), tenemos $\theta \leq \pi/2$, de modo que $r^2 \geq 4A/\pi$, que nos limita al intervalo

$$\sqrt{4A/\pi} \leq r.$$

Como $\sqrt{4A/\pi} > \sqrt{A}$, el mínimo está en el punto extremo $r = \sqrt{4A/\pi}$.



38. $x = 20$. Las ganancias están dadas por

$$P(x) = 50x - f(x).$$

Entonces $P'(x) = -3x^2 + 90x - 600$. Por la fórmula cuadrática, $P'(x) = 0$ si, y sólo si, $x = 20$ o $x = 10$. Pero la gráfica de $P(x)$ es la de una cúbica, y deben saber cómo se hace. Además, $P(10)$ es negativo, y $P(0)$ también es negativo. Así, el máximo está en $x = 20$.

39. 18 unidades, ganancia diaria \$266

40. $(50 + 5\sqrt{94})/3$. El mismo método que en los problemas 38 y 39.

41. 30 unidades; \$8900

42. 20. Sean $g(x)$ las ganancias. Como $p = 1000 - 10x$, obtenemos

$$g(x) = x(1000 - 10x) - f(x) = -20x^2 + 800x - 6000.$$

La gráfica de $g(x)$ es una parábola doblada hacia abajo, y $g'(x) = 0$ si, y sólo si, $x = 20$, que da el máximo para $g(x)$.

VII, §1, p. 201

1. Sí; todos los números reales **3.** Sí; todos los números reales **5.** Sí; para $y < 1$
7. Sí; para $y \geq 1$ **9.** Sí; para $y \leq -1$ **11.** Sí; para $y \geq 2$
13. Sí; para $-1 \leq y \leq 1$

VII, §2, p. 203

0. Sea $f(x) = -x^3 + 2x + 1$. Entonces

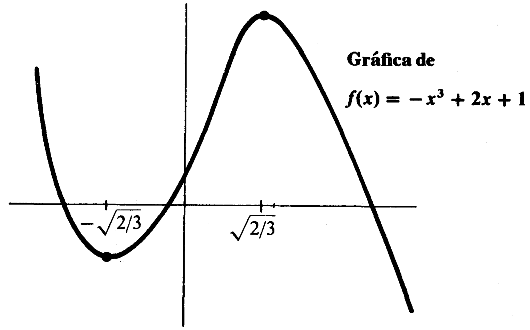
$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 2 \\ &= 0 \text{ si, y sólo si, } 3x^2 = 2 \\ &\text{si, y sólo si, } x = \sqrt{2/3} \text{ y } x = -\sqrt{2/3}. \end{aligned}$$

Éstos son los puntos críticos de f. Además,

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad &\iff \quad -3x^2 + 2 > 0 \\ &\iff \quad 3x^2 < 2 \\ &\iff \quad |x| < \sqrt{2/3}, \\ f'(x) < 0 \quad &\iff \quad x^2 > 2/3, \\ &\iff \quad x > \sqrt{2/3} \text{ y } x < -\sqrt{2/3}. \end{aligned}$$

Hay tres intervalos máximos donde puede definirse una función inversa de f (excluyendo los puntos extremos):

$$x < -\sqrt{2/3}, \quad -\sqrt{2/3} < x < \sqrt{2/3}, \quad x > \sqrt{2/3}.$$



Sobre cada uno de dichos intervalos existe una función inversa de f cuyo valor en 2 es algún punto del intervalo. Resolvemos los tres casos, pero será suficiente que el lector escoja uno de ellos.

Caso 1. Observar que $f(1) = 2$, y que $1 > \sqrt{2/3}$. De ahí que, en este caso, si g es la función inversa, entonces

$$g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{-3+2} = -1.$$

Caso 2. Tomar el intervalo $-\sqrt{2/3} < x < \sqrt{2/3}$. Queremos resolver $f(x) = 2$, esto es

$$-x^3 + 2x + 1 = 2, \quad \text{o} \quad x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Al factorizar, esto es igual que

$$(x-1)(x^2+x-1) = 0.$$

En el intervalo dado, $x = 1$ no es solución. Hay otras dos soluciones posibles:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Pero $(-1-\sqrt{5})/2$ no está en el presente intervalo de definición. Por lo tanto, en este caso hay un solo x posible, a saber, $x_1 = (-1+\sqrt{5})/2$. Si g es la función inversa para el intervalo dado, entonces

$$g'(2) = \frac{1}{f'(x_1)} = \frac{1}{-3x_1^2+2}.$$

(Respuestas alternativas dependen de la selección de los intervalos.)

1. $\frac{1}{3}$ **2.** $\frac{1}{11}$ **3.** $\frac{1}{3}$ ó $-\frac{1}{3}$ **4.** -1 **5.** 1 ó -1 **6.** $-\frac{1}{2}$ ó $-\frac{1}{10}$, o $\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

7. $\frac{1}{4}$ **8.** -1 o $\frac{1}{2} \pm \frac{3}{10}\sqrt{5}$ **9.** $\frac{1}{24}$ **10.** $\dfrac{1}{10\sqrt{2}}$ o $\dfrac{-1}{10\sqrt{2}}$

11. $$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\big(g(y)\big)},$$

$$g''(y) = \frac{-1}{f'\big(g(y)\big)^2} f''\big(g(y)\big) g'(y) = \frac{-1}{f'(x)^2} f''(x) g'(y).$$

Si $f'(x) > 0$, entonces $g'(y) > 0$ por la primera fórmula, y $g''(y) < 0$ por la segunda.

VII, §3, p. 207

1 y 2. Considerar el coseno como definido en el intervalo

$$0 \leq x \leq \pi.$$

En este intervalo el coseno es estrictamente decreciente, y para $0 < x < \pi$ tenemos

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\operatorname{sen} x < 0.$$

Por lo tanto, la función inversa $x = g(y)$ existe y se llama **arcocoseno**. Como $y = \cos x$ decrece de 1 a -1, el arcocoseno está definido en el intervalo $[-1, 1]$. Su derivada está dada por $g'(y) = 1/f'(x)$, de modo que

$$\frac{d \arccos y}{dy} = g'(y) = \frac{1}{-\operatorname{sen} x}.$$

Pero tenemos la relación

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

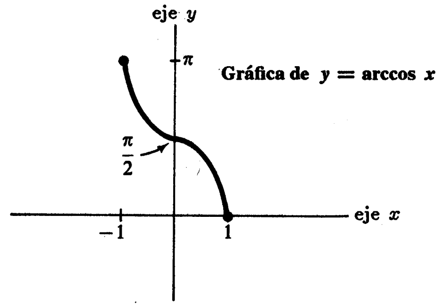
y para $0 < x < \pi$ tenemos que $\operatorname{sen} x > 0$, de modo que

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-y^2}.$$

En consecuencia,

$$g'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

La gráfica del arcocoseno se ve así.



3. (a) $2/\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) $\pi/6$ (d) $\pi/4$ (e) 2 (f) $\pi/3$
4. $-2/\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, $\pi/3$, $\pi/4$
5. Sea $y = \sec x$ en el intervalo $0 < x < \pi/2$. Entonces $x = \operatorname{arcsec} y$ está definido en $1 < y$, y $dx/dy = \dfrac{1}{y\sqrt{y^2-1}}$.

6. $-\pi/2$ **7.** 0 **8.** $\pi/2$ **9.** $\pi/2$ **10.** $-\pi/4$ **11.** $\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}2x$

12. $\dfrac{-1}{\sqrt{-(x^2+5x+6)}}$ **13.** $\dfrac{-1}{(\operatorname{arcsen} x)^2\sqrt{1-x^2}}$ **14.** $\dfrac{4}{\sqrt{1-4x^2}(\arccos 2x)^2}$

VII, §4, p. 215

1. $\pi/4, \pi/6, -\pi/4, \pi/3$ **2.** $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ **3.** $1/(1+y^2)$

4. (a) $-\pi/4$ (b) 0 (c) $-\pi/6$ (d) $\pi/6$ **5.** $\dfrac{3}{1+9x^2}$ **7.** 0 **9.** $\dfrac{2\cos 2x}{1+\operatorname{sen}^2 2x}$

11. $\dfrac{(\cos x)(\operatorname{arcsen} x) - (\operatorname{sen} x)/\sqrt{1-x^2}}{(\operatorname{arcsen} x)^2}$ **13.** $\dfrac{-1}{1+x^2}$

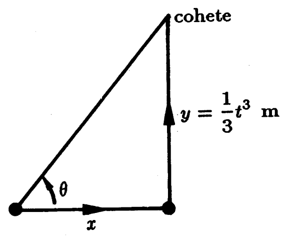
15. $\frac{9}{\sqrt{1-9x^2}}(1+\operatorname{arcsen} 3x)^2$ **17.** $\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

19. $\left(y-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **21.** $\left(y+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ **22.** $2/25$

23. 140 m/seg **24.** $3/25$ **25.** 0.02 rad/seg **27.** $\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{6}\operatorname{sen}\theta\tan\theta$

28. $\frac{2}{25\sqrt{21}}$ **29.** $\frac{1}{82}$ rad/seg **31.** (a) $\frac{135}{(120)^2+(\frac{405}{24})^2}$ rad/seg
(b) $\frac{135}{(180)^2+(\frac{675}{24})^2}$ rad/seg

33. Figura:



Tenemos dado que $dx/dt=-15$. Cuando $t=0$, tenemos que $x(0)=90$, de modo que, en general,

$$x(t)=90-15t.$$

Más aún, $dy/dt=t^2$. Queremos hallar $d\theta/dt$. Tenemos

$$\tan\theta=y/x,\quad \text{de modo que}\quad \theta=\arctan y/x.$$

Entonces

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{x\,dy/dt-y\,dx/dt}{x^2}.$$

Pero $y(5)=\frac{125}{3}$ y $x(5)=90-75=15$. Por lo tanto,

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=5}=\frac{1}{1+\left(\frac{25}{9}\right)^2}\frac{15\cdot 25-\frac{125}{3}\cdot(-15)}{15^2}=\frac{180}{353}\text{ rad/seg.}$$

VIII, §1, p. 221

1. (a) $y=2e^2x-e^2$ (b) $y=2e^{-4}x+5e^{-4}$ (c) $y=2x+1$

2. (a) $y=\frac{1}{2}e^{-2}x+3e^{-2}$ (b) $y=\frac{1}{2}e^{1/2}x+\frac{1}{2}e^{1/2}$ (c) $y=\frac{1}{2}x+1$

3. $y=3e^2x-4e^e$ **4.** (a) $e^{\operatorname{sen}3x}(\cos 3x)3$ (b) $\cos(e^x+\operatorname{sen}x)(e^x+\cos x)$
(c) $\cos(e^{x+2})e^{x+2}$ (d) $4\cos(e^{4x-5})e^{4x-5}$

5. (a) $\frac{1}{1+e^{2x}}e^x$ (b) $e^x\big(-\operatorname{sen}(3x+5)\big)3+e^x\cos(3x+5)$

(c) $2(\cos 2x)e^{\operatorname{sen}2x}$ (d) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arccos x}$ (e) $-e^{-x}$

(h) $e^{-\operatorname{arcsen}x}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ (i) $e^x\sec^2 e^x$ (j) $\frac{1}{1+e^{4x}}2e^{2x}$ (k) $\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 e^x}(\cos e^x)e^x$

(l) $\frac{1}{\sqrt{1-(e^x+x)^2}}(e^x+1)$ (m) $\sec^2(xe^{\tan x})$ (n) $(1+\tan^2 e^x)e^x$

6. (c) Sea $f(x)=xe^x$. Suponer que ya se ha probado que

$$f^{(n)}(x)=(x+n)e^x.$$

Entonces

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x)&=\frac{d}{dx}[(x+n)e^x]\\&=(x+n)e^x+e^x\quad\text{(derivada de un poducto)}\\&=(x+n+1)e^x.\end{aligned}$$

Esto prueba la fórmula para la $(n+1)$-ésima derivada.

8. (c) Diferenciar $f(x)/e^{h(x)}$ por medio de la regla para cocientes y la regla de la cadena. Obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{e^{h(x)}}\right)&=\frac{e^{h(x)}f'(x)-f(x)e^{h(x)}h'(x)}{e^{2h(x)}}\\&=\frac{e^{h(x)}h'(x)f(x)-f(x)e^{h(x)}h'(x)}{e^{2h(x)}}\\&=0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x)/e^{h(x)}$ es constante, de modo que existe una constante C tal que

$$\frac{f(x)}{e^{h(x)}}=C.$$

Hacemos el producto cruzado para obtener $f(x)=Ce^{h(x)}$.

9. $(y-e^2)=2e^2(x-1)$ **10.** $y-2e^2=3e^2(x-2)$ **11.** $y-5e^5=6e^5(x-5)$

12. $y=x$ **13.** $(y-1)=-x$ **14.** $y-e^{-1}=e^{-1}(x-1)$

15. Sea $f(x)=e^x+x$. Entonces $f'(x)=e^x+1>0$ para todo x. Por lo tanto, f es estrictamente creciente. Tenemos $f(0)=1$, y $f(-1)=1/e-1<0$, pues $1/e<1$. Por el teorema del valor intermedio, existe algún x tal que $f(x)=0$, y este valor de x es único, pues f es estrictamente creciente.

16. Ver la demostración del teorema 5.1.

17. Si $x=1$ en el ejercicio 16(b), obtenemos $2<e$. Si $x=1$ en el ejercicio 16(c), obtenemos $2.5<e$.

18. Ver el teorema 5.2.

19. (a) Sea $f_1(x)=e^{-x}-(1-x)$. Entonces $f_1'(x)=-e^{-x}+1$, y como $e^x>1$ para $x>0$, obtenemos

$$f_1'(x)=-\frac{1}{e^x}+1>0\quad\text{para}\quad x>0.$$

Así pues, f es estrictamente creciente para $x \geq 0$. Como $f_1(0) = 0$, concluimos que $f_1(x) > 0$ para $x > 0$; en otras palabras,

$$e^{-x} - (1 - x) > 0 \quad \text{para} \quad x > 0,$$

y entonces $e^{-x} > 1 - x$ para $x > 0$, como se deseaba.

(b) Sea $f_2(x) = 1 - x + x^2/2 - e^{-x}$. Entonces

$$f_2'(x) = -1 + x + e^{-x} = f_1(x).$$

Por la parte (*a*) sabemos que $f_1(x) > 0$ para $x > 0$. Por lo tanto, f_2 es estrictamente creciente para $x \geq 0$. Como $f_2(0) = 0$, concluimos que $f_2(x) > 0$, para $x > 0$, de donde se sigue inmediatamente (b).

(c) Sea $f_3(x) = e^{-x} - \left(1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3 \cdot 2}\right)$. Entonces $f_3'(x) = f_2(x)$. Usar la parte (b) y argumentos similares a los anteriores para concluir que $f_3(x) > 0$ para $x > 0$, de donde se sigue (c).

(d) Se deja al lector.

20. Si ponemos $x = 1/2$ en el ejercicio 19(a), entonces hallamos que $\frac{1}{2} < e^{-1/2}$ o, en otras palabras, $\frac{1}{2} < 1/e^{1/2}$. Por lo tanto, $e^{1/2} < 2$ y $e < 4$. Si ponemos $x = 1$ en el ejercicio 19(c), hallamos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} < e^{-1} = \frac{1}{e}, \quad \text{esto es} \quad \frac{1}{3} < \frac{1}{e},$$

de donde $e < 3$.

21. $\cosh^2(t) = \frac{1}{4}(e^t + e^{-t})^2 = \frac{1}{4}(e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t})$
$= \frac{1}{4}(e^{2t} + 2 + e^{-2t})$.

De manera análoga,

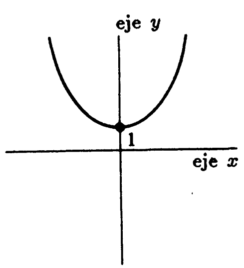
$$\operatorname{senh}^2(t) = \tfrac{1}{4}(e^{2t} - 2 + e^{-2t}).$$

Al restar se obtiene $\cosh^2 - \operatorname{senh}^2 = 1$.

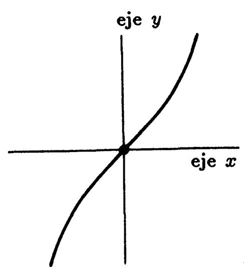
Como para la derivada, $\cosh'(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$; no se olvide usar la regla de la cadena: sea $u = -t$. Entonces

$$\frac{de^{-t}}{dt} = \frac{de^u}{du}\frac{du}{dt} = -e^{-t}.$$

22.



$y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$



$y = \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

VIII, §2, p. 230

1. (a) $(y - \log 2) = \frac{1}{2}(x - 2)$
(b) $(y - \log 5) = \frac{1}{5}(x - 5)$
(c) $(y - \log \frac{1}{2}) = 2(x - \frac{1}{2})$

2. (a) $(y - \log 2) = -(x + 1)$
(b) $(y - \log 5) = \frac{4}{5}(x - 2)$
(c) $(y - \log 10) = \dfrac{-3}{5}(x + 3)$

3. (a) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ (b) $\cos(\log 2x + 3))\dfrac{1}{2x + 3} \cdot 2$ (c) $\dfrac{1}{x^2 + 5} \cdot 2x$
(d) $\dfrac{(\operatorname{sen} x)/x - (\log 2x)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

4. $(y - \log 4) = \frac{1}{4}(x - 3)$ **5.** $(y - \log 3) = \frac{2}{3}(x - 4)$ **7.** $(y - 1) = \dfrac{1}{e}(x - e)$

8. $(y - e) = 2(x - e)$ **9.** $(y - 2\log 2) = (1 + \log 2)(x - 2)$

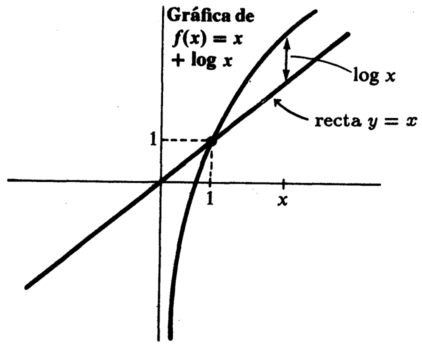
10. $(y - 3) = \dfrac{3}{e}(x - e)$ **11.** $(y - 1) = \dfrac{-1}{e}(x - e)$

12. $\left(y - \dfrac{1}{\log 2}\right) = \dfrac{-1}{2(\log 2)^2}(x - 2)$

14. $\dfrac{2x}{x^2 + 3}$ **15.** $\dfrac{-1}{x(\log x)^2}$ **16.** $\dfrac{\log x - 1}{(\log x)^2}$ **17.** $\frac{1}{3}(\log x)^{-2/3} + (\log x)^{1/3}$

18. $\dfrac{-x}{1 - x^2}$

19. Sea $f(x) = x + \log x$. Entonces $f'(x) = 1 + 1/x > 0$ para $x > 0$. Por lo tanto, f es estrictamente creciente. Además $f''(x) = -1/x^2$, de modo que f se dobla hacia abajo. Nótese que $f(1) = 1$. Si $x \to \infty$, entonces $f(x) \to \infty$, pues tanto x como $\log x$ se vuelven grandes. De hecho, $f(x)$ está a una distancia $\log x$ sobre la recta $y = x$. Cuando $x \to 0$, $\log x \to -\infty$ (pensar que $x = 1/e^z = e^{-z}$, donde $z \to \infty$). Por lo tanto, la gráfica se ve así:



VIII, §3, p. 235

1. $10^x \log 10, 7^x \log 7$ **2.** $3^x \log 3, \pi^x \log \pi$

5. $(y - 1) = (\log 10)x$ **6.** $y - \pi^2 = \pi^2 \log \pi(x - 2)$

7. (a) $e^{x\log x}[\log x + 1]$ (b) $x^{(x^x)}[x^{x-1} + (\log x)x^x(1+\log x)]$ En (b) escribimos

$$x^{(x^x)} = e^{(x^x)\log x}$$

y usamos la regla de la cadena. La derivada de $(x^x)\log x$ se halla por medio de la regla para diferenciar un producto, y tenemos

$$\frac{d}{dx}e^{(x^x)\log x} = e^{(x^x)\log x}\left[x^x\cdot\frac{1}{x} + \frac{d(x^x)}{dx}\log x\right].$$

La derivada de x^x se halló en (a), y la respuesta cae por su propio peso.

8. (a) $y - 1 = x - 1$ (b) $y - 4 = 2(1+\log 2)(x-2)$
(c) $y - 27 = 27(1+\log 3)(x-3)$

9. (a) Sea $f(x) = x^{x^{1/2}} = e^{x^{1/2}\log x}$. Entonces

$$f'(x) = x^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\log x\right],$$

de modo que

$$f'(2) = 2^{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2\right].$$

La recta tangente en $x = 2$ es

$$y - 2^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2\right](x-2).$$

(b) $y - 5^{\sqrt{5}} = 5^{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\log 5\right](x-5)$

10. Sea $f(x) = x^{1/3} = e^{x^{1/3}\log x}$. Entonces

$$f'(x) = x^{1/3}\left[x^{1/3}\frac{1}{x} + \tfrac{1}{3}x^{-2/3}\log x\right].$$

(a) La recta tangente en $x = 2$ es

$$y - 2^{1/3} = 2^{2^{1/3}}[2^{-2/3} + \tfrac{1}{3}2^{-2/3}\log 2](x-2).$$

(b) La recta tangente en $x = 5$ es

$$y - 5^{1/3} = 5^{5^{1/3}}[5^{-2/3} + \tfrac{1}{3}5^{-2/3}\log 5](x-5).$$

11. Sea $f(x) = x^a - 1 - a(x-1)$. Entonces $f(1) = 0$, y

$$f'(x) = ax^{a-1} - a.$$

Si $x > 1$, entonces $f'(x) > 0$, de modo que $f(x)$ es estrictamente creciente. Si $x < 1$, entonces $f'(x) < 0$, de modo que $f(x)$ es estrictamente decreciente. Por lo tanto, $f(1)$ es un valor mínimo, de modo que para todo $x > 0$ y $x \neq 1$ obtenemos $f(x) > 0$.

12. $x = 0$ y $x = -2/\log a$

13. Tenemos $\left(1+\frac{r}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{y}\right)^{yr}$. Si $y \to \infty$, entonces $\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$ tiende a e, por el Límite 3, de modo que su potencia r-ésima tiende a e^r. Para esto se usa el hecho de que la función potencia r-ésima es continua. Si z tiende a z_0, entonces z^r tiende a z_0^r. Aquí

$$z = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y$$

y z tiende a e, por el Límite 3.

14. (a) Podemos escribir $\frac{a^h - 1}{1} = \frac{f(h) - f(0)}{h}$, donde $f(x) = a^x$. Por lo tanto, el límite es igual a $f'(0)$. Como $f'(x) = a^x\log a$, hallamos que $f'(0) = \log a$.

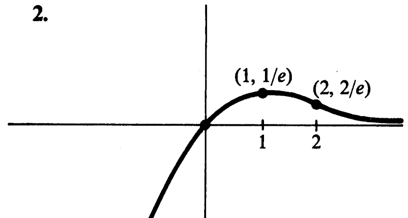
(b) Al hacer $h = 1/n$ tenemos que $n(a^{1/n} - 1) = \frac{a^h - 1}{h}$, de modo que el límite viene de la parte (a).

VIII, §4, p. 239

1. $-\log 25$ **2.** $5e^{-4}$ **3.** $e^{-(\log 10)10^{-6}t}$ **4.** $20/e$ **5.** $-(\log 2)/K$ **6.** $(\log 3)/4$
7. $12\log 10/\log 2$ **8.** $\frac{-3\log 2}{\log 9 - \log 10}$ **10.** $1984 : (50\,000)2^{84/50}; 2000 : 2 = 10^5$
11. $30[\frac{4}{5}]^{5/3}$ **12.** $4\left[\frac{\log\frac{1}{20}}{\log\frac{1}{3}}\right]$ **13.** $2\left[\frac{\log\frac{5}{8}}{\log\frac{1}{2}}\right]$
14. (a) $40\left[\frac{\log\frac{7}{10}}{\log\frac{2}{5}}\right]$ (b) $40\left[\frac{\log\frac{4}{25}}{\log\frac{2}{5}}\right]$ (c) $100[\frac{2}{5}]^{1/2}$ **15.** $\log 2$
16. (a) $\frac{1}{5568}\log\frac{1}{2}$ (b) $5568(\log 4/5)/(\log 1/2)$

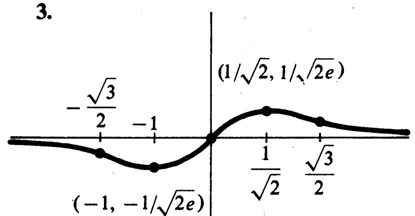
VIII, §5, p. 246

2.



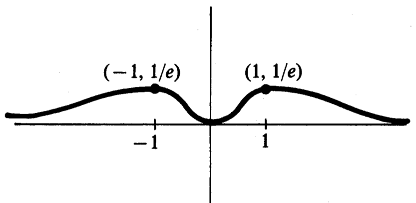
$f(x) = xe^{-x}$

3.



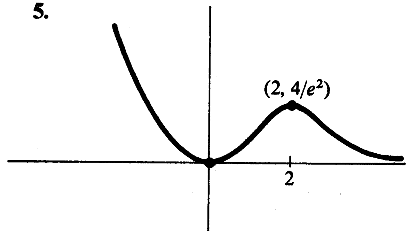
$f(x) = xe^{-x^2}$

4.



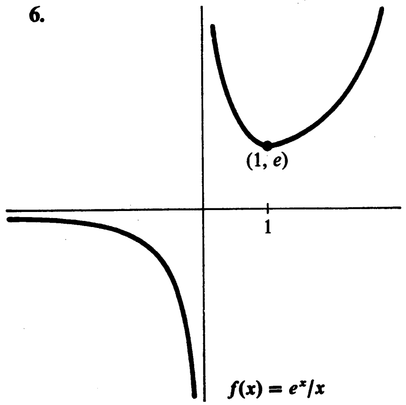
$f(x) = x^2e^{-x^2}$

5.

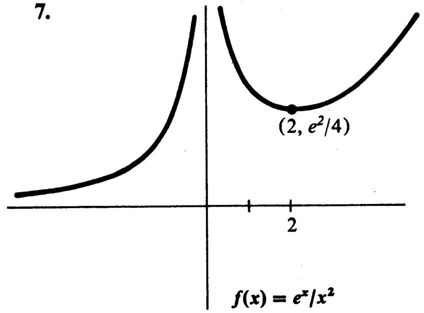


$f(x) = x^2e^{-x}$

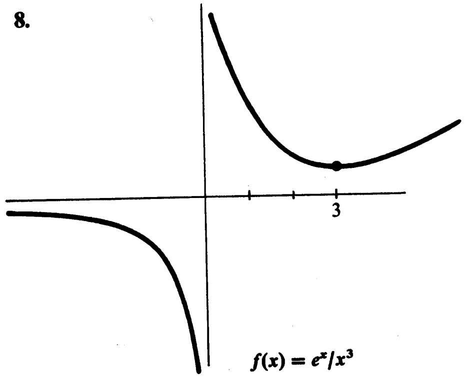
6.



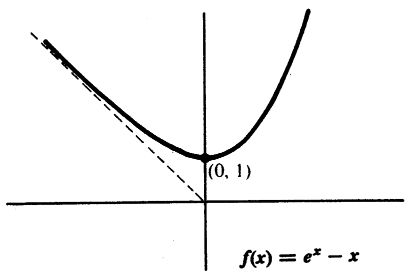
7.



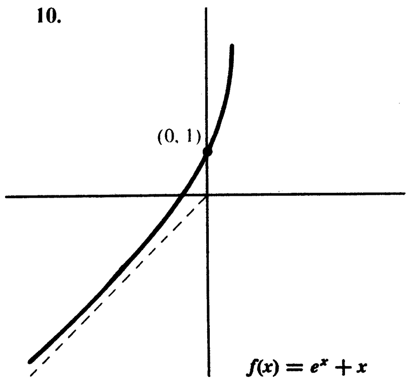
8.



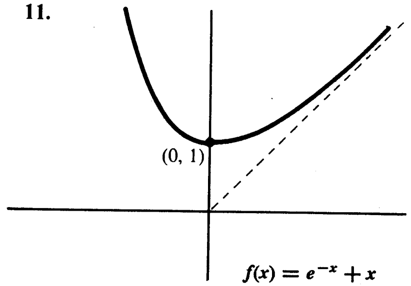
9.



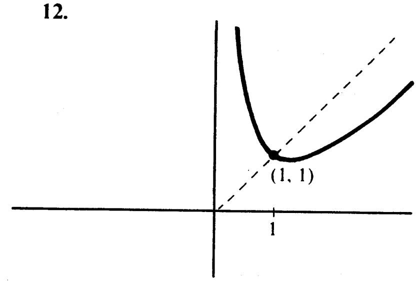
10.



11.



12.



13. Suponer primero que $a < 0$. Sea $f(x) = e^x - ax$. Cuando x es positivo grande, entonces

$$f(x) = e^x\left(1 - \frac{ax}{e^x}\right)$$

es positivo grande. Cuando x es negativo grande, entonces e^x está cerca de 0 y $-ax$ es negativo grande, de modo que $f(x)$ es negativo. Por el teorema del valor intermedio, la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución.

Suponer a continuación que $a \geq e$. Entonces $f(1) = e - a \leq 0$, y de nuevo $f(x)$ es grande cuando x es positivo grande. El teorema del valor intermedio otra vez proporciona la solución.

14. (a) $-\dfrac{n}{2^n}\log 2$

(b) El límite es 0 en ambos casos. Por ejemplo, sea $x = e^{-y}$. Cuando x tiende a 0, entonces y se vuelve grande, y

$$x \log x = -ye^{-y} = -\frac{y}{e^y},$$

que tiende a 0, por el teorema 4.1. Además, $x^2 \log x = x(x \log x)$, y el producto de los límites es el límite del producto de x y $x \log x$, de modo que es igual a 0.

15. Sea $x = e^{-y}$. Entonces $\log x = -y$ y

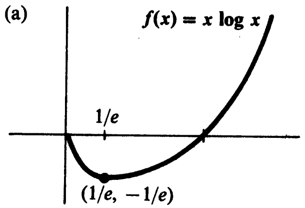
$$x(\log x)^n = e^{-y}y^n = \frac{y^n}{e^y}.$$

Cuando $x \to 0$, $y \to \infty$, de modo que $x(\log x)^n \to 0$, por el teorema 4.2.

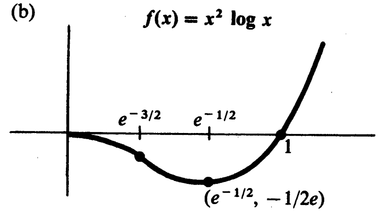
16. Sea $x = e^y$. Cuando $x \to \infty$, $y \to \infty$, de modo que

$$\frac{(\log x)^n}{x} = \frac{y^n}{e^y} \to 0 \quad \text{por el Teorema 4.2.}$$

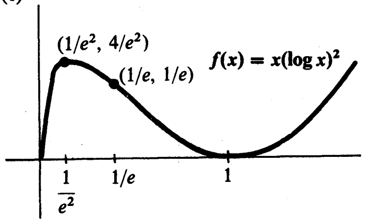
17. (a)



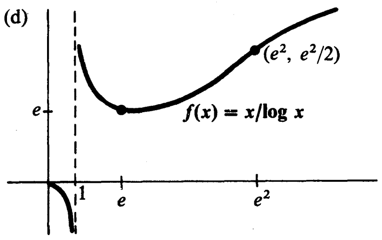
(b)



(c)



(d)



17. (a) $f(x) = x \log x$, definida para $x > 0$. Entonces:

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + \log x = 1 + \log x.$$

Tenemos:

$$f'(x) = 0 \iff \log x = -1 \iff x = e^{-1},$$
$$f'(x) > 0 \iff \log x > -1 \iff x > e^{-1},$$
$$f'(x) < 0 \iff \log x < -1 \iff x < e^{-1}.$$

De modo que hay un solo punto crítico, y las regiones de crecimiento y de decrecimiento están dadas por las regiones donde $f' > 0$ y $f' < 0$.

Obtenemos también que $f''(x) = 1/x > 0$ para todo $x > 0$, de modo que f se dobla hacia arriba.

Si $x \to \infty$, entonces también $\log x \to \infty$, de modo que $f(x) \to \infty$.

Si $x \to 0$, entonces $f(x) \to 0$, por el ejercicio 14(b).

Esto justifica todos los elementos de la gráfica.

17. (b) Damos los detalles para la gráfica de $f(x) = x^2 \log x$. Tenemos

$$f'(x) = x + 2x \log x = x(1 + 2\log x).$$

Como $x > 0$, se sigue que $f'(x) > 0$ si, y sólo si, $1 + 2\log x > 0$, y

$$1 + 2\log x > 0 \quad \text{si, y sólo si,} \quad \log x > -1/2$$
$$\text{si, y sólo si,} \quad x > e^{-1/2}.$$

Así, f es estrictamente creciente para $x \geq e^{-1/2}$ y es estrictamente decreciente para

$$0 < x \leq e^{-1/2}.$$

Del ejercicio 14 sabemos que $x \log x$ tiende a 0 cuando x tiende a 0. Por lo tanto, $f'(x)$ tiende a 0 cuando x tiende a 0, lo cual significa que la curva se ve plana cerca de 0. Tenemos

$$f''(x) = (1 + 2\log x) + 2 = 3 + 2\log x.$$

Entonces $f''(x) = 0$ si, y sólo si, $3 + 2\log x = 0$, o, en otras palabras, $\log x = -3/2$ y $x = e^{-3/2}$. Así, el punto de inflexión ocurre para $x = e^{-3/2}$. Esto explica todas las características indicadas en la gráfica.

17. (c) $f(x) = x(\log x)^2$ para $x > 0$. Entonces

$$f'(x) = x \cdot 2(\log x)\frac{1}{x} + (\log x)^2$$
$$= (\log x)(2 + \log x).$$

Los signos de los dos factores $\log x$ y $2 + \log x$ variarán de acuerdo con los intervalos cuando alguno de los factores sea 0. Tenemos

$$f'(x) = 0 \iff \log x = 0 \text{ ó } 2 + \log x = 0$$
$$\iff x = 1 \text{ o } \log x = -2$$
$$\iff x = 1 \text{ o } x = e^{-2}.$$

De modo que hay dos puntos críticos en $x = 1$ y $x = e^{-2}$. Hacemos una tabla de regiones de crecimiento y de decrecimiento correspondientes a los intervalos entre los puntos críticos.

intervalo	$\log x$	$2 + \log x$	$f'(x)$	f
$0 < x < e^{-2}$	neg.	neg.	pos.	s.i.
$e^{-2} < x < 1$	neg.	pos.	neg.	s.d.
$1 < x$	pos.	pos.	pos.	s.i.

La segunda derivada no está tan mal:

$$f''(x) = (\log x)\frac{1}{x} + \frac{1}{x}(2 + \log x) = \frac{2}{x}(1 + \log x).$$

Para $x > 0$, tenemos $2/x > 0$, de modo que $f''(x) = 0$ si, y sólo si, $x = e^{-1}$. Como

$$f''(x) > 0 \iff \log x > -1 \iff x > e^{-1},$$
$$f''(x) < 0 \iff \log x < -1 \iff x < e^{-1},$$

se sigue que $x = e^{-1}$ es un punto de inflexión. La gráfica se dobla hacia arriba si $x > e^{-1}$ y se dobla hacia abajo si $x < e^{-1}$.

Si $x \to \infty$, entonces $\log x \to \infty$, de modo que $f(x) \to \infty$.
Si $x \to 0$, entonces $f(x) \to 0$, por el ejercicio 15.

Esto justifica todas las características dibujadas en la gráfica.

17. (d) Veamos los detalles. Sea $f(x) = x/\log x$ para $x > 0$, y $x \neq 1$. Entonces

$$f'(x) = \left(\log x - x \cdot \frac{1}{x}\right)/(\log x)^2 = \frac{\log x - 1}{(\log x)^2}.$$

Para $x \neq 1$, el denominador es positivo (es un cuadrado). Por lo tanto,

$$f'(x) = 0 \iff \log x = 1 \iff x = e,$$
$$f'(x) > 0 \iff \log x > 1 \iff x > e,$$
$$f'(x) < 0 \iff \log x < 1 \iff x < e.$$

A continuación listamos el comportamiento cuando x se vuelve positivo grande, cuando x tiende a 0 y cuando x tiende a 1 (pues el denominador no está definido en $x = 1$).

$$\text{Si } x \to \infty, \text{ entonces } x/\log x \to \infty, \text{ por el teorema 4.3.}$$
$$\text{Si } x \to 0, \text{ entonces } x/\log x \to 0.$$

Esto es así porque $\log x$ se vuelve negativo grande, pero está en el denominador; así, al dividir entre un número negativo grande se contribuye a que la fracción tienda a 0.

Si $x \to 1$ y $x > 1$, entonces $x/\log x \to \infty$. *Demostración:* El numerador x tiende a 1. El denominador $\log x$ tiende a 0, y es positivo para $x > 1$. De modo que $x/\log x \to \infty$.

Si $x \to 1$ y $x < 1$, entonces $x/\log x \to -\infty$. *Demostración:* De nuevo, el numerador x tiende a 1 y el denominador $\log x$ tiende a 0, pero es negativo para $x < 1$, de modo que $x/\log x \to -\infty$.

Esto justifica la forma como se han trazado las gráficas, al menos en lo que respecta a las regiones de crecimiento y de decrecimiento, y al punto crítico (hay un solo punto crítico). Veamos ahora las regiones en que se dobla hacia arriba y en las que se dobla hacia abajo. Escribimos la primera derivada en la forma

$$f'(x) = \frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}.$$

Entonces

$$f''(x) = \frac{-1}{(\log x)^2}\frac{1}{x} - (-2)(\log x)^{-3}\frac{1}{x}$$
$$= \frac{-1}{(\log x)^3}\frac{1}{x}(\log x - 2).$$

Por lo tanto:

$$f''(x) = 0 \iff \log x = 2 \iff x = e^2.$$

Ahora analizaremos el signo de $f''(x)$ en varios intervalos, tomados entre los puntos 0, 1 y e^2, que son los puntos en donde los factores de $f''(x)$ cambian de signo. Nótese que el signo de $f''(x)$ (más o menos) se determinará por los signos de $\log x$, x, y $\log x - 2$, junto con el signo menos al frente.

Si $x > e^2$, entonces $f''(x) < 0$ y la gráfica se dobla hacia abajo, pues $\log x - 2 > 0$, tanto $\log x$ como x son positivos, y el signo menos al frente hace que $f''(x)$ sea negativo.

Si $1 < x < e^2$, entonces $f''(x) > 0$, pues $\log x - 2 < 0$, tanto $\log x$ como x son positivos, y el signo menos al frente, junto con el hecho de que $\log x - 2$ es negativo, hacen que $f''(x)$ sea positivo. Por lo tanto, la gráfica se dobla hacia arriba para $1 < x < e^2$.

Si $0 < x < 1$, entonces $f''(x) < 0$, pues x es positivo, $\log x$ es negativo, $\log x - 2$ es negativo, y el signo menos al frente combinado con los otros signos, hace que $f''(x)$ sea negativo. Por lo tanto, la gráfica se dobla hacia abajo para $0 < x < 1$.

18. Sea $f(x) = x^x = e^{x\log x}$. Entonces

$$f'(x) = e^{x\log x}\left(x \cdot \frac{1}{x} + \log x\right) = e^{x\log x}(1 + \log x).$$

Como $e^u > 0$ para todos los números u, tenemos $e^{x\log x} > 0$ para todo $x > 0$, de modo que

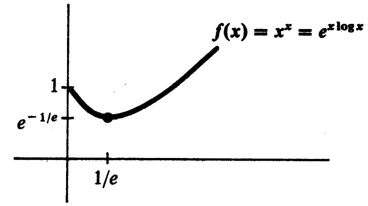
$$f'(x) = 0 \iff \log x = -1 \iff x = e^{-1},$$
$$f'(x) > 0 \iff \log x > -1 \iff x > e^{-1}.$$

Con esto queda listo el ejercicio 18.

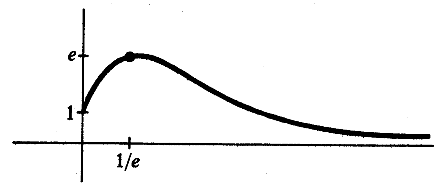
19. Nótese que $f(e^{-1}) = (e^{-1})^{1/e} = e^{-1/e} = 1/e^{1/e}$. Además,

$$f'(x) < 0 \iff \log x < -1 \iff x < e^{-1}.$$

Finalmente, $f''(x) = e^{x\log x}[1/x + (1 + \log x)^2] > 0$ para todo $x > 0$, de manera que la gráfica se dobla hacia arriba.



20. Nótese que $x^{-x} = 1/x^x$. Pero hay que pasar por todo el trabajo de tomar la derivada, etc., para ver la gráfica como sigue.



21. Sea $f(x) = 2^x x^x = e^{x\log 2}e^{x\log x} = e^{x(\log 2 + \log x)}$. Entonces

$$f'(x) = e^{x(\log 2+\log x)}\left[x \cdot \frac{1}{x} + \log 2 + \log x\right]$$
$$= 2^x x^x(1 + \log 2 + \log x).$$

Como $2^x x^x > 0$ para todo $x > 0$, obtenemos

$$f'(x) > 0 \iff 1 + \log 2 + \log x > 0$$
$$\iff \log x > -1 - \log 2$$
$$\iff x > e^{-1-\log 2}$$

y $e^{-1-\log 2} = e^{-1}e^{-\log 2} = 1/2e$, como había que mostrar.

IX, §1, p. 260

1. $-(\cos 2x)/2$ **2.** $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3}$ **3.** $\log(x+1), x > -1$ **4.** $\log(x+2), x > -2$

IX, §3, p. 264

1. 156 **2.** 2 **3.** 2 **4.** $\log 2$ **5.** $\log 3$ **6.** $\frac{2}{5}$ **7.** $e-1$

274

IX, §4, p. ~~3~~74

1. (a) $U_1^2 = \frac{9}{4}(\frac{3}{2}-1) + 4(2-\frac{3}{2})$

$L_1^2 = 1(\frac{3}{2}-1) + \frac{9}{4}(2-\frac{3}{2})$

(b) $U_1^2 = \frac{16}{9}(\frac{4}{3}-1) + \frac{25}{9}(\frac{5}{3}-\frac{4}{3}) + 4(2-\frac{5}{3})$

$L_1^2 = 1(\frac{4}{3}-1) + \frac{16}{9}(\frac{5}{3}-\frac{4}{3}) + \frac{25}{9}(2-\frac{5}{3})$

(c) $U_1^2 = \frac{25}{16}(\frac{5}{4}-1) + \frac{9}{4}(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}) + \frac{49}{16}(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}) + 4(2-\frac{7}{4})$

$L_1^2 = 1(\frac{5}{4}-1) + \frac{25}{16}(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}) + \frac{9}{4}(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}) + \frac{49}{16}(2-\frac{7}{4})$

(d) $$U_1^2 = \frac{1}{n}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right]$$

$$L_1^2 = \frac{1}{n}.\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

2. (a) $U_1^3 = 1(\frac{3}{2}-1) + \frac{2}{3}(2-\frac{3}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{5}{2}-2) + \frac{2}{5}(3-\frac{5}{2})$

$L_1^3 = \frac{2}{3}(\frac{3}{2}-1) + \frac{1}{2}(2-\frac{3}{2}) + \frac{2}{5}(\frac{5}{2}-2) + \frac{1}{3}(3-\frac{5}{2})$

(b) $U_1^3 = 1(\frac{4}{3}-1) + \frac{3}{4}(\frac{5}{3}-\frac{4}{3}) + \frac{3}{5}(\frac{6}{3}-\frac{5}{3}) + \frac{3}{6}(\frac{7}{3}-\frac{6}{3}) + \frac{3}{7}(\frac{8}{3}-\frac{7}{3})$
$+\frac{3}{8}(\frac{9}{3}-\frac{8}{3})$

$L_1^3 = \frac{3}{4}(\frac{4}{3}-1) + \frac{3}{5}(\frac{5}{3}-\frac{4}{3}) + \frac{3}{6}(\frac{6}{3}-\frac{5}{3}) + \frac{3}{7}(\frac{7}{3}-\frac{6}{3}) + \frac{3}{8}(\frac{8}{3}-\frac{7}{3}) + \frac{3}{9}(\frac{9}{3}-\frac{8}{3})$

(c) $U_1^3 = 1(\frac{5}{4}-\frac{4}{4}) + \frac{4}{5}(\frac{6}{4}-\frac{5}{4}) + \frac{4}{6}(\frac{7}{4}-\frac{6}{4}) + \frac{4}{7}(\frac{8}{4}-\frac{7}{4})$
$+\frac{4}{8}(\frac{9}{4}-\frac{8}{4}) + \frac{4}{9}(\frac{10}{4}-\frac{9}{4}) + \frac{4}{10}(\frac{11}{4}-\frac{10}{4}) + \frac{4}{11}(\frac{12}{4}-\frac{11}{4})$

$L_1^3 = \frac{4}{5}(\frac{5}{4}-\frac{4}{4}) + \frac{4}{6}(\frac{6}{4}-\frac{5}{4}) + \frac{4}{7}(\frac{7}{4}-\frac{6}{4}) + \frac{4}{8}(\frac{8}{4}-\frac{7}{4})$
$+\frac{4}{9}(\frac{9}{4}-\frac{8}{4}) + \frac{4}{10}(\frac{10}{4}-\frac{9}{4}) + \frac{4}{11}(\frac{11}{4}-\frac{10}{4}) + \frac{4}{12}(\frac{12}{4}-\frac{11}{4})$

(d) $$U_1^3 = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{(1+\frac{1}{n})} + \cdots + \frac{1}{(1+\frac{2n-1}{n})}\right]$$

$$+\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-1}\right]$$

$$L_1^3 = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{n})} + \cdots + \frac{1}{(1+\frac{2n}{n})}\right] = \left[\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n}\right]$$

3. (a) $U_0^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-0) + 1(1-\frac{1}{2}) + \frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1) + 2(2-\frac{3}{2})$

$L_0^2 = 0(\frac{1}{2}-0) + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) + 1(\frac{3}{2}-1) + \frac{3}{2}(2-\frac{3}{2})$

(b) $U_0^2 = \frac{1}{3}(\frac{1}{3}-0) + \frac{2}{3}(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}) + 1(\frac{3}{3}-\frac{2}{3}) + \frac{4}{3}(\frac{4}{3}-1)$
$+\frac{5}{3}(\frac{5}{3}-\frac{4}{3}) + 2(\frac{6}{3}-\frac{5}{3})$

$L_0^2 = 0(\frac{1}{3}-0) + \frac{1}{2}(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}) + \frac{2}{3}(\frac{3}{3}-\frac{2}{3}) + 1(\frac{4}{3}-1)$
$+\frac{4}{3}(\frac{5}{3}-\frac{4}{3}) + \frac{5}{3}(\frac{6}{3}-\frac{5}{3})$

(c) $U_0^2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{4}-0) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) + \frac{3}{4}(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}) + 1(1-\frac{3}{4})$
$+\frac{5}{4}(\frac{5}{4}-1) + \frac{3}{2}(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}) + \frac{7}{4}(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}) + 2(2-\frac{7}{4})$

$L_0^2 = 0(\frac{1}{4}-0) + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) + \frac{1}{2}(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}) + \frac{3}{4}(1-\frac{3}{4})$
$+1(\frac{5}{4}-1) + \frac{5}{4}(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}) + \frac{3}{2}(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}) + \frac{7}{4}(2-\frac{7}{4})$

(d) $U_0^2 = \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n} + \cdots + \dfrac{2n}{n}\right]$ $L_0^2 = \dfrac{1}{n}\left[0 + \dfrac{1}{n} + \cdots + \dfrac{2n-1}{n}\right]$

4. (a) $U_0^2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}-0) + 1(1-\frac{1}{2}) + \frac{9}{4}(\frac{3}{2}-1) + 4(2-\frac{3}{2})$

$L_0^2 = 0(\frac{1}{2}-0) + \frac{1}{4}(1-\frac{1}{2}) + 1(\frac{3}{2}-1) + \frac{9}{4}(2-\frac{3}{2})$

(b) $U_0^2 = \frac{1}{9}(\frac{1}{3}-0) + \frac{4}{9}(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}) + 1(1-\frac{2}{3}) + \frac{16}{9}(\frac{4}{3}-1)$
$+\frac{25}{9}(\frac{5}{3}-\frac{4}{3}) + 4(2-\frac{5}{3})$

$L_0^2 = 0(\frac{1}{3}-0) + \frac{1}{9}(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}) + \frac{4}{9}(1-\frac{2}{3}) + 1(\frac{4}{3}-1)$
$+\frac{16}{9}(\frac{5}{3}-\frac{4}{3}) + \frac{25}{9}(2-\frac{5}{3})$

(c) $U_0^2 = \frac{1}{16}(\frac{1}{4}-0) + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) + \frac{9}{16}(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}) + 1(1-\frac{3}{4})$
$+\frac{25}{16}(\frac{5}{4}-1) + \frac{9}{4}(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}) + \frac{49}{16}(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}) + 4(2-\frac{7}{4})$

$L_0^2 = 0(\frac{1}{4}-0) + \frac{1}{16}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) + \frac{1}{4}(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}) + \frac{9}{16}(1-\frac{3}{4})$
$+1(\frac{5}{4}-1) + \frac{25}{16}(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}) + \frac{9}{4}(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}) + \frac{49}{16}(2-\frac{7}{4})$

(d) $$U_0^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2n}{n}\right)^2\right]$$

$$L_0^2 = \frac{1}{n}\left[0 + \frac{1}{n^2} + \cdots + \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2\right]$$

5. $$U_1^2 = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{(1+\frac{1}{n})} + \cdots + \frac{1}{\left(1+\frac{n-1}{n}\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right]$$

$$L_1^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{n})} + \frac{1}{(1+\frac{2}{n})} + \cdots + \frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right]$$

6. El área bajo la curva $y = 1/x$ entre $x = 1$ y $x = 2$ es $\log 2 - \log 1 = \log 2$. Determinar que esta área es menor que una suma superior y mayor que una suma inferior, y usar el ejercicio 5 para obtener las desigualdades deseadas.

7. $U_1^n = [\log 2 + \log 3 + \cdots + \log n] = \log n!$
$L_1^n = [\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1)] = \log(n-1)!$

X, §1, p. 283

1. $\frac{63}{6}$ **2.** 0 **3.** 0 **4.** 0

5. (b) y (c) Sea $f(x) = x^{-1/2}$, y sea la partición $P = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ para el intervalo $[1, n]$. Después comparar la integral

$$\int_1^n f(x)\,dx = \frac{x^{1/2}}{1/2}\Big|_1^n = 2(\sqrt{n} - 1)$$

con las sumas superior e inferior.

6. (a) Usar $f(x) = x^2$ y $P = \{0, 2, \ldots, n\}$, con el intervalo $[0, n]$. La suma inferior pudo haber comenzado con 0, pero este 0 se pudo omitir porque $0 + A = A$ para todos los números A.
(b) Sea $f(x) = x^3$, intervalo $[0, n]$, partición $P = \{0, \ldots, n\}$.
(c) Sea $f(x) = x^{1/4}$, intervalo $[0, n]$, partición $P = \{0, \ldots, n\}$.

7. (d) Usar $f(x) = 1/x^4$ sobre el intervalo $[1, n]$ con la partición $\{1, \ldots, n\}$ que consta de los enteros positivos de 1 a n. Entonces

$$\int_1^n f(x)\,dx = \frac{x^{-3}}{-3}\Big|_1^n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^3} - 1\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3n^3}.$$

Al comparar con la suma inferior y superior se obtiene

$$\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{n^4} \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{3n^3} \leq 1 + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^4}.$$

8. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Entonces $\int_0^1 f(x)\,dx = \arctan x\Big|_0^1 = \pi/4$. En el intervalo $[0, 1]$, usar la partición $P = \left\{0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n}\right\}$. Dibujar la figura.

9. Sea $f(x) = x^2$. Entonces $\int_0^1 f(x)\,dx = \dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1/3$. En el intervalo $[0, 1]$, usar la partición $P = \{0, 1/n, \ldots, n/n\}$. Dibujar la figura.

10. $\int_1^n \log x\,dx = (x\log x - x)\Big|_1^n = n\log n - n + 1$.
La suma inferior es $\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) = \log(n-1)!$ y

$$e^{\text{suma inferior}} = (n-1)!, \quad \text{porque} \quad e^{\log u} = u.$$

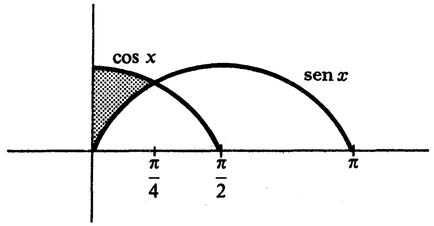
Por otro lado,

$$e^{n\log n - n + 1} = e^{n\log n}e^{-n}e^{1} = n^n e^{-n} e.$$

Como suma inferior $\leq$ integral, obtenemos $e^{\text{suma inferior}} \leq e^{\text{integral}}$, de modo que

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n} e.$$

15. $\sqrt{2} - 1$. En este problema la gráfica es como sigue.



El primer punto de intersección es cuando $x = \pi/4$. Por lo tanto, el área entre las curvas es

$$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx.$$

16. 9/2 **17.** $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$ **18.** 0 **19.** $\pi^2/2 - 2$ **20.** 4 **21.** 4 **22.** 1 **23.** 4
24. $-\pi^2$ **25.** 4 **26.** (a) 14 (b) 14 (c) $2n$

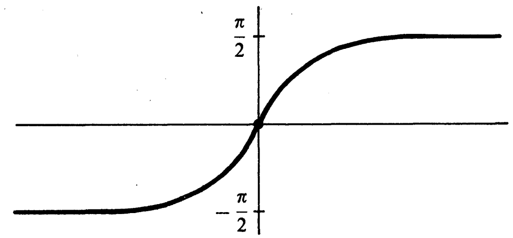
X, §4, p. 304

1. Sí, $\sqrt{2}$ **2.** No

3. Sí, $\pi/2$. Tenemos

$$\int_0^B \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x\Big|_0^B = \arctan B - \arctan 0 = \arctan B.$$

Cuando $B \to \infty$, $\arctan B \to \pi/2$. Recordar la gráfica del $\arctan x$, que es como sigue.



4. No. Sea $0 < b < 5$. Entonces

$$\int_0^b \frac{1}{5-x}\,dx = -\log(5-x)\Big|_0^b = -[\log(5-b) - \log 5] = \log 5 - \log(5-b).$$

Cuando b tiende a 5, $5-b$ tiende a 0 y $\log(5-b)$ se vuelve negativo grande. Por lo tanto, la integral de 0 a 5 no existe.

5. Sea $2 < a < 3$. Entonces

$$\int_a^3 \frac{1}{x-2}\,dx = \log(x-2)\Big|_a^3 = \log 1 - \log(a-2)$$
$$= -\log(a-2).$$

Cuando $a \to 2$, $\log(a-2) \to -\infty$, de modo que $-\log(a-2) \to \infty$ y no existe la integral de 2 a 3.

6. No

7. Aquí tenemos $0 \le x < 2$. Recordar que tenemos la integral indefinida

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log(-x) \quad \text{y} \quad x < 0.$$

Por lo tanto, si $x < 2$, entonces

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \log(2-x).$$

Se puede verificar esto mediante la regla de la cadena, diferenciando el lado derecho. No olvidar el -1. Nótese que, cuando $x < 2$, entonces $2 - x > 0$. El log no está definido en números negativos. Ahora se puede hallar la integral definida para $0 < a < 2$. Tenemos

$$\int_0^a \frac{1}{x-2}\,dx = \log(2-x)\Big|_0^a = \log(2-a) - \log 2.$$

El lado derecho tiende a $-\infty$ cuando $a \to 2$, de modo que la integral

$$\int_0^2 \frac{1}{x-2}\,dx = \lim_{a\to 2}\int_0^a \frac{1}{x-2}\,dx$$

no existe.

8. La integral impropia no existe. Sea $2 < c < 3$. Entonces

$$\int_c^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = \int_c^3 (x-2)^{-2}\,dx = -(x-2)^{-1}\Big|_c^3$$
$$= -\left[1 - \frac{1}{c-2}\right].$$

Cuando $c \to 2$, el cociente $1/(c-2)$ se vuelve arbitrariamente grande.

9. No existe.

10. Existe. Sea $1 < c < 4$. Entonces

$$\int_c^4 (x-1)^{-2/3}\,dx = 3(x-1)^{1/3}\Big|_c^4 = 3[3^{1/3} - (c-1)^{1/3}].$$

Cuando $c \to 1$, $(c-1)^{1/3} \to 0$, y así

$$\lim_{c\to 1}\int_c^4 (x-1)^{-2/3}\,dx = 3\cdot 3^{1/3}.$$

11. La integral existe para $s < 1$. Sea $0 < a < 1$. Entonces, para $s \ne 1$, obtenemos

$$\int_a^1 x^{-s}\,dx = \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Big|_a^1 = \frac{1}{1-s} - \frac{a^{1-s}}{1-s}.$$

Si $s < 1$, entonces $1 - s > 0$ y a^{1-s} tiende a 0 cuando a tiende a 0. Por lo tanto, el límite del lado derecho cuando $a \to 0$ existe y es igual a $1/(1-s)$. Por el otro lado, si $s > 1$, entonces

$$a^{1-s} = \frac{1}{a^{s-1}},$$

y $s - 1 > 0$, de modo que $a^{s-1} \to 0$ cuando $a \to 0$, y $1/a^{s-1} \to \infty$, de modo que la integral de 0 a 1 no existe. Cuando $s = 1$,

$$\int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = \log x\Big|_a^1 = \log 1 - \log a = -\log a.$$

Cuando $a \to 0$, $\log a \to -\infty$, de manera que la integral no existe.

12. La integral $\int_1^\infty x^{-s}\,dx$ existe para $s > 1$ y no existe para $s < 1$. Evaluar

$$\int_1^B x^{-s}\,dx = \frac{B^{-s+1}}{1-s} - \frac{1}{1-s}.$$

Si $s > 1$, entonces escribimos $B^{-s+1} = 1/B^{s-1}$ y $s-1 > 0$, de modo que $1/B^{s-1} \to 0$ cuando $B \to \infty$. El límite de la integral existe y es igual a $1/(s-1)$. Si $s < 1$, entonces $B^{-s+1} = B^{1-s}$ se vuelve arbitrariamente grande cuando B se vuelve grande.

13. Sí. Sea $B > 1$. Entonces

$$\int_1^B e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_1^B = -[e^{-B} - e^{-1}] = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^B}.$$

Cuando B se vuelve grande, $1/e^B$ tiende a 0, y la integral de 1 a B tiende a $1/e$. Existe.

14. No existe.

15. $-\frac{1}{2}e^{-2B} + \frac{1}{2}e^{-4}$. Sí, $\frac{1}{2}e^{-4}$.

XI, §1, p. 304

1. $e^{x^2}/2$ **2.** $-\frac{1}{4}e^{-x^4}$ **3.** $\frac{1}{6}(1+x^3)^2$ **4.** $(\log x)^2/2$

5. $\dfrac{(\log x)^{-n+1}}{1-n}$ si $n \ne 1$, y $\log(\log x)$ si $n = 1$. **6.** $\log(x^2+x+1)$

7. $x - \log(x+1)$ **8.** $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2}$ **9.** $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3}$ **10.** 0 **11.** $\frac{2}{5}$ **12.** $-\arctan(\cos x)$

13. $\frac{1}{2}(\arctan x)^2$ **14.** $2/15$. Sea $u = 1 - x^2$. **15.** $-\frac{1}{4}\cos(\pi^2/2) + \frac{1}{4}$

16. (a) $-(\cos 2x)/2$ (b) $(\operatorname{sen} 2x)/2$ (c) $-(\cos 3x)/3$ (d) $(\operatorname{sen} 3x)/3$ (d) $e^{4x}/4$ (f) $e^{5x}/5$ (g) $-e^{-5x}/5$ **17.** $-\frac{1}{2}e^{-B^2} + \frac{1}{2}$. Sí, $\frac{1}{2}$ **18.** $-\frac{1}{3}e^{-B^3} + \frac{1}{3}$. Sí, $\frac{1}{3}$

XI, §1, Ejercicios suplementarios, p. 305

1. $\frac{1}{4}\log(x^4+2)$ **3.** $\dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5}$ **5.** $\sqrt{x^2-1}$ **7.** $\dfrac{-1}{6(3x^2+5)}$ **9.** $\dfrac{-1}{2\operatorname{sen}^2 x}$

11. $\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{u^{17/5}}{17/5}-\dfrac{u^{12/5}}{12/5}\right]$ donde $u=x^3+1$. **13.** $\dfrac{-\cos 3x}{3}$ **15.** $-\cos e^x$

17. $\log(\log x)$ **19.** $\log(e^x+1)$ **21.** $\frac{1}{4}$ **23.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}-\dfrac{2}{3}$ **25.** $\dfrac{\pi}{4}$ **27.** $\dfrac{\pi^2}{72}$

29. $e-\dfrac{1}{e}$

XI, §2, p. 308

1. $x\operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}$. Sea

$$u=\operatorname{arcsen} x,\qquad dv=dx,$$
$$du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\qquad v=x.$$

Entonces

$$\int \operatorname{arcsen} x\,dx=\int u\,du=x\operatorname{arcsen} x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Ahora la integral $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ se puede hacer por sustitución, al hacer $u=1-x^2$ y $du=-2x\,dx$; así,

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{-1}{2}\int u^{-1/2}\,du.$$

2. $x\arctan x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)$. Sea $u=\arctan x$.

3. $\dfrac{e^{2x}}{13}(2\operatorname{sen} 3x-3\cos 3x)$. Sea $I=\int e^{2x}\operatorname{sen} 3x\,dx$. Sea

$$u=e^{2x},\qquad dv=\operatorname{sen} 3x\,dx,$$
$$du=2e^{2x}\,dx,\qquad v=-\tfrac{1}{3}\cos 3x.$$

Entonces

$$I=-\tfrac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx.$$

Aplicar el mismo procedimiento a esta segunda integral, con

$$u=e^{2x},\qquad dv=\cos 3x\,dx,$$
$$du=2e^{2x}\,dx,\qquad v=\tfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3x.$$

Entonces

$$I=-\tfrac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\tfrac{2}{3}[\tfrac{1}{3}e^{2x}\operatorname{sen} 3x-\tfrac{2}{3}I]$$
$$=-\tfrac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\tfrac{2}{9}e^{2x}\operatorname{sen} 3x-\tfrac{4}{9}I.$$

Así vemos que I aparece en el lado derecho con algún factor constante. Podemos despejar I para obtener

$$\tfrac{13}{9}I=\tfrac{2}{9}e^{2x}\operatorname{sen} 3x-\tfrac{1}{3}e^{2x}\cos 3x.$$

Multiplicar por 9 y dividir entre 13 para obtener la respuesta.

4. $\frac{1}{10}e^{-4x}\operatorname{sen} 2x-\frac{1}{5}e^{-4x}\cos 2x$

5. $x(\log x)^2-2x\log x+2x$. Sea $u=(\log x)^2$, de modo que $du=2(\log x)\frac{1}{x}\,dx$. Sea $dv=dx$, $v=x$. Entonces

$$\int(\log x)^2\,dx=x(\log x)^2-\int\frac{x}{x}\log x\,dx.$$

Entonces $x/x=1$, y nos vemos reducidos a $\int\log x\,dx=x\log x-x$.

6. $(\log x)^3x-3\int(\log x)^2\,dx$ **7.** $x^2e^x-2xe^x+2e^x$

8. $-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}$ **9.** $-x\cos x+\operatorname{sen} x$ **10.** $x\operatorname{sen} x+\cos x$

11. $-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx$ **12.** $x^2\operatorname{sen} x-2\int x\operatorname{sen} x\,dx$

13. $\frac{1}{2}[x^2\operatorname{sen} x^2+\cos x^2]$. Escribir

$$I=\int x^3\cos x^2\,dx=\int x^2(\cos x^2)x\,dx=\frac{1}{2}\int x^2(\cos x^2)2x\,dx.$$

Primero hacer $u=x^2$, $du=2x\,dx$ y, por medio de sustitución, obtener

$$I=\frac{1}{2}\int u\cos u\,du.$$

Después usar integración por partes.

14. $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+\frac{2}{5}(1-x^2)^{5/2}-\frac{1}{7}(1-x^2)^{7/2}$. Sea $u=1-x^2$:

$$\int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx=\int x^4\sqrt{1-x^2}\,x\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int(1-u)^2u^{1/2}\,du$$
$$=-\frac{1}{2}\int(u^{1/2}-2u^{3/2}+u^{5/2})\,du$$

15. $\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3$. Sean $u=\log x$ y $dv=x^2\,dx$. Entonces $du=(1/x)\,dx$ y $v=x^3/3$, de modo que

$$\int x^2\log x\,dx=\tfrac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{3}\int x^2\,dx.$$

16. $(\log x)\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^4}{16}$

17. $(\log x)^2\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{2}{3}\int x^2\log x\,dx$. Repetir el procedimiento para obtener la respuesta completa.

18. $-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. Primero sea $u=x^2$.

19. $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1-x^4}\right)+\frac{1}{4}\log(1-x^4)$

20. -4π

21. $-Be^{-B}-e^{-B}+1$. Sí, 1. Evaluar primero la integral indefinida $\int xe^{-x}\,dx$ por partes. Sea

$$u = x, \qquad dv = e^{-x}\,dx,$$
$$du = dx, \qquad v = -e^{-x}.$$

Entonces la integral es igual a

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x}.$$

Poner ahora los límites de integración:

$$\int_0^B xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^B - e^{-x}\Big|_0^B = -Be^{-B} - [e^{-B} - 1].$$

Cuando $B \to \infty$, los dos términos con B tienden a 0, con lo cual se obtiene la respuesta.

22. Sí, $5/e$ **23.** Sí, $16/e$

24. $-\dfrac{1}{\log B} + \dfrac{1}{\log 2}$. Sí, $1/\log 2$. Sea $u = \log x$. Cuando $x = 2$, $u = \log 2$. Cuando $x = B$, $u = \log B$. Entonces

$$\int_2^B \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int_{\log 2}^{\log B} u^{-2}\,du.$$

25. Sí, $1/3(\log 3)^3$

26. $2\log 2 - 2$. La integral indefinida es $x\log x - x$. Sea $0 < a < 2$. Entonces

$$\int_a^2 \log x\,dx = x\log x - x\Big|_a^2 = 2\log 2 - 2 - (a\log a - a).$$

Cuando $a \to 0$, sabemos del capítulo VIII, sección §5, ejercicio 14, que $a\log a$ tiende a 0. Por lo tanto, $a\log a - a$ tiende a 0 cuando a tiende a 0, lo cual da la respuesta.

XI, §2, Ejercicios suplementarios, p. 309

1. $\frac{1}{2}(x^2\arctan x + \arctan x - x)$. Usar $u = \arctan x$ y $dv = x\,dx$. Usar también el truco

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

2. (a) Si I es la integral, entonces

$$I = x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x - 1,$$

de modo que $2I = x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x$, y al dividir entre 2 se obtiene la respuesta.
(b) Al integrar por partes la integral se reduce a (a): $u = \operatorname{arcsen} x$, $dv = x\,dx$. Usar un truco como en el ejercicio 1.

3. $\frac{1}{4}(2x^2\arccos x - \arccos x - x\sqrt{1-x^2})$ **5.** $1 - \dfrac{\pi}{2}$ **7.** $\dfrac{\pi}{32}$ **9.** $\dfrac{2}{e}$

10.
$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 x^2(1-x^2)^{1/2}x\,dx.$$

Sea $u = 1-x^2$, $du = -2x\,dx$. Cuando $x = 0$, $u = 1$ y cuando $x = 1$, $u = 0$. Entonces

$$\int_0^1 x^2(1-x^2)^{1/2}\,dx = \frac{-1}{2}\int_1^0 (1-u)u^{1/2}\,du = \frac{-1}{2}\int_1^0 [u^{1/2} - u^{3/2}]\,du$$
$$= \frac{-1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{5/2}}{5/2}\right]\Bigg|_1^0$$
$$= \frac{-1}{2}\left[0 - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right)\right] = \frac{2}{15}.$$

11. $-2e^{-\sqrt{x}}(x^{3/2} + 3x + 6x^{1/2} + 6)$. Primero sea $x = u^2$. Entonces

$$\int xe^{-\sqrt{x}}\,dx = \int u^2e^{-u}2u\,du = 2\int u^3e^{-u}\,du.$$

13. Sean $u = (\log x)^n$ y $dv = dx$.

14. Sean $u = x^n$ y $dv = e^x\,dx$.

15. Sean $u = (\log x)^n$ y $dv = x^m\,dx$. Entonces

$$du = n(\log x)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx \quad \text{y} \quad v = x^{m+1}/(m+1).$$

16. Primero hallamos por partes la integral indefinida con $u = x^n$ y $dv = e^{-x}\,dx$, de modo que

$$\int x^ne^{-x}\,dx = -x^ne^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}\,dx.$$

Entonces tenemos la integral definida

$$\int_0^B x^ne^{-x}\,dx = -B^ne^{-B} + n\int_0^B x^{n-1}e^{-x}\,dx.$$

Al tomar el límite cuando $B \to \infty$ y usar que $B^ne^{-B} \to 0$, hallamos:

$$\int_0^\infty x^ne^{-x}\,dx = n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx.$$

Sea $I_n = \int_0^\infty x^ne^{-x}\,dx$. Esta última desigualdad se puede reescribir en la forma

$$I_n = nI_{n-1}.$$

Así hemos reducido la evaluación de la integral al paso siguiente. Por ejemplo, $I_{10} = 10I_9$; $I_9 = 9I_8$; $I_8 = 8I_7$, y así sucesivamente. Al continuar de esta manera, en n pasos se obtiene

$$I_n = n!I_0 = n!\int_0^\infty e^{-x}\,dx,$$

donde $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ es el producto de los primeros n enteros. Esta integral final se evalúa fácilmente, a saber,

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{B\to\infty}\int_0^B e^{-x}\,dx = \lim_{B\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^B$$
$$= \lim_{B\to\infty} -[e^{-B}-1] = 1.$$

XI, §3, p. 316

1. $-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x\cos x - \frac{3}{8}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{3}{8}x$ **2.** $\frac{1}{3}\cos^2 x\operatorname{sen} x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x$

3. $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5}$ **4.** 3π **5.** 8π **6.** πab (si $a,b>0$) **7.** πr^2

8. (a) $-2\sqrt{2}\cos\theta/2$ (b) $2\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta/2$ **13.** $-\log\cos x$ **14.** $\arcsin\dfrac{x}{3}$

15. $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ **16.** $\frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{2}x)$ **17.** $\dfrac{1}{b}\arcsin\dfrac{bx}{a}$. Sea $x = au/b$, $dx = (a/b)\,du$.

18. (a) $c_0 = a_n = 0$ para todo n, $b_n = -(2/n)\cos n\pi$.
(b) $c_0 = \pi^2/3, a_n = -(4/n^2)\cos n\pi, b_n = 0$ para todo n.
(c) $c_0 = \pi/2, a_n = 2(\cos n\pi - 1)/\pi n^2, b_n = 0$ para todo n.

19. (b) todo a_n y $c_0 = 0$

XI, §3, Ejercicios suplementarios, p. 318

1. $\log\operatorname{sen} x - \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2}$

2. Escribir $\tan^2 x = \tan^2 x + 1 - 1$ y nótese que $d\tan x/dx = \tan^2 x + 1$.

3. $-\cos e^x$ **4.** Sea $x = 2u$, $dx = 2du$ **5.** $\dfrac{\pi}{4}$ **7.** $\dfrac{\pi}{4}$ **9.** $\dfrac{\pi}{16}$

11. $\frac{1}{8}\arcsin x - \frac{1}{8}x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}$ **13.** $\dfrac{\pi}{2}$ **14.** $-\arcsin x - \dfrac{1}{x}\sqrt{1-x^2}$

15. $-16u^{1/2} + \frac{1}{3}u^{3/2}$ donde $u = 16 - x^2$

16. Sea $u = 1 + x^2$. Entonces

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{x^2 2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{u-1}{u^{1/2}}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{1/2}}{1/2}\right].$$

Para el resto de los ejercicios se pone $x = \operatorname{sen}\theta$ o $x = a\operatorname{sen}\theta$, $dx = a\cos\theta\,d\theta$. Damos las respuestas pero resolvemos por completo el ejercicio 19.

17. $\dfrac{-1}{a}\log\left[\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right]$ **18.** $\dfrac{a^2}{2}\arcsin(x/a) - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$

19. $\dfrac{-\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2} - \dfrac{1}{2a^3}\log\left[\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right]$. Podemos escoger entre hacer $x = a\cos\theta$ o $x = a\operatorname{sen}\theta$. El principio es el mismo. Hagámoslo como de costumbre,

$$x = a\operatorname{sen}\theta,\quad dx = a\cos\theta\,d\theta.$$

Entonces

$$\int\frac{1}{x^3\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int\frac{1}{a^3\operatorname{sen}^3\theta(a\cos\theta)}a\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{a^3}\int\frac{1}{\operatorname{sen}^3\theta}\,d\theta.$$

Es complicada, pero mostramos aquí cómo hacerla. Recordar que, para integrar potencias positivas del seno, usamos integración por partes. Usamos aquí un método similar. Sea

$$I = \int\frac{1}{\operatorname{sen}^3\theta}\,d\theta = \int\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\csc^2\theta\,d\theta.$$

En analogía con la tangente, tenemos

$$\frac{d\cot\theta}{d\theta} = -\csc^2\theta,$$

de modo que hacemos

$$u = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta},\qquad dv = \csc^2\theta\,d\theta,$$
$$du = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta\,d\theta\qquad v = -\cot\theta.$$

Entonces

$$I = -\frac{\cot\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \int\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = -\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} - \int\frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}\,d\theta,$$

de modo que

$$I = -\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} - I + \int\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta,$$

de donde

$$I = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} - \log(\csc\theta + \cot\theta)\right].$$

Se puede dejar la respuesta en términos de θ, que es como suele hacerse. Pero si se quiere la respuesta en términos de x, entonces usar:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a},\qquad \cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$
$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{a}{x},\qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

20. $-\dfrac{1}{a^2}\cot\theta$, donde $x = a\operatorname{sen}\theta, d\theta = a\cos\theta\,d\theta$.

21. $\sqrt{1-x^2} - \log\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$. El método es el mismo que en el ejercicio 19.

22. Sea $x = at$, $dx = a\,dt$ y reducir al ejercicio 14.

23. $\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin\dfrac{x}{a}$

XI, §4, p. 329

1. $-\frac{1}{8}\log(x-1)+\frac{17}{8}\log(x+7)$

2. $\dfrac{-1}{2(x^2-3)}$. No usar aquí fracciones parciales; usar la sustitución $u=x^2-3$ y $du=2x\,dx$

3. (a) $\frac{1}{5}[\log(x-3)-\log(x+2)]$ (b) $\log(x+1)-\log(x+2)$

4. $-\frac{1}{2}\log(x+1)+2\log(x+2)-\frac{3}{2}\log(x+3)$

5. $2\log-\log(x+1)$ **6.** $\log(x+1)+\dfrac{1}{x+1}$

7. $-\log(x+1)+\log(x+2)-\dfrac{2}{x+2}$

8. $\log(x-1)+\log(x-2)$ **9.** $\dfrac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan x$

10. (a) $\dfrac{1}{4}\dfrac{x}{(x^2+1)^2}+\dfrac{3}{8}\dfrac{x}{(x^2+1)}+\dfrac{3}{8}\arctan x$

11. $\dfrac{-1}{x^2+1}-3\left[\dfrac{x}{2(x^2+1)}+\dfrac{1}{2}\arctan x\right]$

12. $\dfrac{1}{2}\dfrac{-1}{x^2+9}+\dfrac{1}{18}\dfrac{x}{x^2+9}+\dfrac{1}{54}\arctan\dfrac{x}{3}$ **13.** $\dfrac{1}{8}\dfrac{x}{x^2+16}+\dfrac{1}{32}\arctan\dfrac{x}{4}$

14. $\frac{1}{4}\log\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}+\dfrac{1}{2}\arctan x$. Factorización:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)\quad\text{y}\quad x^4-1=(x+1)(x-1)(x^2+1).$$

15. $C_1=-\frac{33}{100}, C_2=-\frac{11}{100}, C_3=-\frac{130}{100}, C_4=-\frac{110}{100}, C_5=\frac{11}{100}$

16. (a) Sea $x=bt, dx=b\,dt$ (b) Sea $x+a=bt, dx=b\,dt$.

17. (a) $-\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\log\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ (b) $\frac{1}{4}[\log(x^2-1)-\log(x^2+1)]$

18. (a) $\frac{1}{3}\log(x-1)-\frac{1}{6}\log(x^2+x+1)$

(b) $\frac{1}{2}\log\dfrac{x^2}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$

19. $-\log(x-1)+\log(x^2+x+1)$

XI, §5, p. 334

1. $2\sqrt{1+e^x}-\log(\sqrt{1+e^x}+1)+\log(\sqrt{1+e^x}-1)$ **2.** $x-\log(1+e^x)$

3. $\arctan(e^x)$ **4.** $-\log(\sqrt{1+e^x}+1)+\log(\sqrt{1+e^x}-1)$

5. Sea $y=f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\operatorname{senh}x$. Entonces

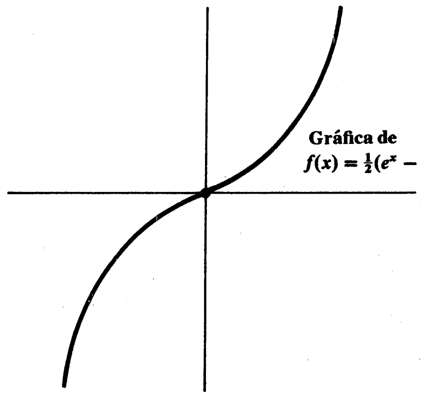
$$f'(x)=\tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh x.$$

Pero $\cosh x>0$ para todo x, de modo que f es estrictamente creciente para todo x. Si x es negativo grande, entonces e^x es pequeño y e^{-x} es positivo grande, de modo que $f(x)$ es positivo grande. Si x es positivo grande, entonces e^x es positivo grande, y e^{-x} es pequeño. Por lo tanto,

$$f(x)\to\infty\qquad\text{cuando } x\to\infty,$$
$$f(x)\to-\infty\qquad\text{cuando } x\to-\infty.$$

Por el teorema del valor intermedio, los valores de $f(x)$ están formados por todos los números. Por lo tanto, la función inversa $x=g(y)$ está definida para todos los números y. Tenemos

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\cosh x}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 x+1}}=\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$



Gráfica de
$f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\operatorname{senh}x$

6. Sea $y=f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh x$. Entonces

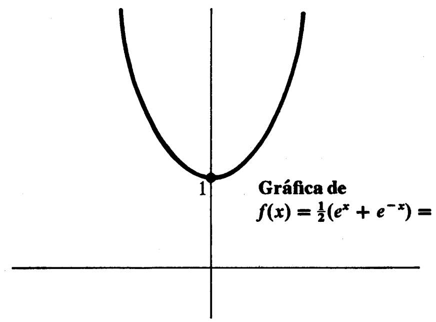
$$f'(x)=\tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\operatorname{senh}x.$$

Si $x>0$, entonces $e^x>1$ y $0<e^{-x}<1$, de modo que $f'(x)>0$ para todo $x>0$. Por lo tanto, f es estrictamente creciente, y la función inversa

$$x=g(y)=\operatorname{arccosh}y$$

existe. Tenemos $f(0)=1$. Cuando $x\to\infty$, $e^x\to\infty$ y $e^{-x}\to0$, de modo que $f(x)\to\infty$. Por consiguiente, los valores de $f(x)$ están formados por todos los números ≥1 cuando $x\geq0$, y así, la función inversa g está definida para todos los números ≥1. Tenemos

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\operatorname{senh}x}=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x-1}}=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$



Gráfica de
$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh x$

Por último, sea $u = e^x$. Entonces $y = \frac{1}{2}(u + 1/u)$. Multiplicar por $2u$ y resolver la ecuación cuadrática para obtener

$$e^x = u = y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{o} \quad e^x = u = y - \sqrt{y^2 - 1}.$$

La gráfica de $f(x) = \cosh x$ para todos los números x se dobla según se muestra en la figura, y hay dos funciones inversas posibles, dependiendo de dónde miremos en el intervalo

$$x \leq 0 \quad \text{o} \quad x \geq 0.$$

Al tomar

$$x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

se tiene la función inversa para $x \geq 0$, y al tomar

$$x = \log(y - \sqrt{y^2 - 1})$$

se tiene la función inversa para $x \leq 0$. En efecto, suponer que tomamos la solución con el signo menos. Entonces, por simple álgebra, se puede ver que

$$y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1.$$

[*Demostración:* se debe verificar que $y - 1 \leq \sqrt{y^2 - 1}$. Como $y \geq 1$, basta verificar que $(y-1)^2 \leq y^2 - 1$, lo cual equivale a

$$y^2 - 2y + 1 \leq y^2 - 1,$$

o $y \geq 1$, que es lo que se quiere.]

Así, $y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1$, de donde

$$\log(y - \sqrt{y^2 - 1}) \leq 0.$$

Para $x \geq 0$ se sigue que tenemos que usar la solución de la ecuación cuadrática para u en términos de y con el signo más, esto es

$$e^x = u = y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{y} \quad x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

7. Sea

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx.$$

Sea $x = 2\,\mathrm{senh}\, t$, $dx = 2\cosh t\, dt$. Entonces $x^2 + 4 = 4\cosh^2 t$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4\,\mathrm{senh}^2 t}{2\cosh t} 2\cosh t\, dt \\ &= 4\int \mathrm{senh}^2 t\, dt = \frac{4}{4}\int (e^{2t} - 1 + e^{-2t})\, dt \\ &= \tfrac{1}{2}e^{2t} - 2t - \tfrac{1}{2}e^{-2t}. \end{aligned}$$

8. $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

9. Sea

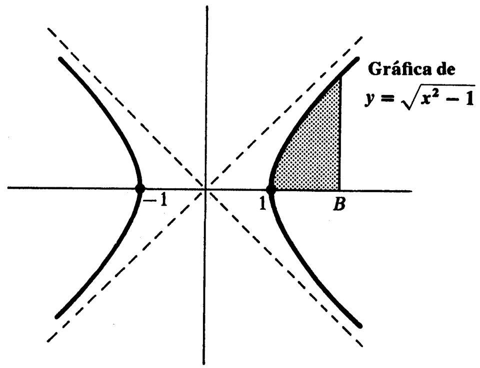
$$I = \int \frac{x^2 + 1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}\, dx.$$

Sea $x = \mathrm{senh}\, t$, $dx = \cosh t\, dt$. Entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cosh^2 t}{\mathrm{senh}\, t - \cosh t} \cosh t\, dt \\ &= \int \frac{\cosh^3 t}{\frac{e^t - e^{-t}}{2} - \frac{e^t + e^{-t}}{2}}\, dt \\ &= \int \frac{\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^3}{-e^{-t}}\, dt \\ &= -\frac{1}{8}\int e^t(e^{3t} + 3e^t + 3e^{-t} + e^{-3t})\, dt \\ &= -\frac{1}{8}\left(\frac{e^{4t}}{4} + \frac{3e^{2t}}{2} + 3t + \frac{e^{-2t}}{-2}\right). \end{aligned}$$

10. $-\frac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1}$ (ver el ejercicio 11)

11. $-\frac{1}{2}\log(B + \sqrt{B^2 - 1}) + \frac{1}{2}B\sqrt{B^2 - 1}$. La gráfica de la ecuación $x^2 - y^2 = 1$ es una hipérbola como la que se muestra a continuación.



La parte superior de la hipérbola en el primer cuadrante es la gráfica de la función

$$y = \sqrt{x^2 - 1},$$

con la raíz cuadrada positiva, y $x \geq 1$. Por lo tanto, el área bajo la gráfica entre 1 y B es

$$\text{Área} = \int_1^B \sqrt{x^2 - 1}\, dx.$$

Queremos hacer que la expresión bajo la raíz cuadrada sea un cuadrado perfecto. Usamos la sustitución

$$x = \cosh t \quad \text{y} \quad dx = \mathrm{senh}\, t\, dt.$$

Entonces obtenemos una integral formada por potencias de e^t y e^{-t} que es fácil de evaluar. Cambiar los límites de integración de la manera explicada en el último ejemplo de la sección. Hacer $u = e^t$ y despejar u en la ecuación cuadrática. Se hallará la respuesta dada.

12. $\log(B + \sqrt{B^2+1} + B\sqrt{B^2+1}$

13. Sea $y = a\cosh(x/a)$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = a\,\mathrm{senh}(x/a)\cdot\frac{1}{a} = \mathrm{senh}(x/a),$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \cosh(x/a)\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\cosh(x/a)\\ &= \frac{1}{a}\sqrt{1+\mathrm{senh}^2(x/a)}\\ &= \frac{1}{a}\sqrt{1+(dy/dx)^2}.\end{aligned}$$

14. Sea $x = az$, $dx = a\,dz$, y se reduce al caso resuelto.

XII, §1, p. 341

1. $\frac{4}{3}\pi r^3$ **2.** π **3.** $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}$ **4.** $\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}$ **5.** $\frac{2\cdot 5^4\pi}{3}$ **6.** $\pi(e-2)$ **7.** πe^2

8. $\pi[2(\log 2)^2 - 4\log 2 + 2]$. Integrar por partes $\int (\log x)^2\,dx$, $u = (\log x)^2$, $du = \frac{2\log x}{x}$, $dv = dx$

9. 16π **10.** (a) $\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^{2B}}\right)$; sí, $\frac{\pi}{2e^2}$
(b) $\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{e^4} - \frac{1}{e^{4B}}\right)$; sí, $\frac{\pi}{4e^4}$ (c) $\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^{2B^2}}\right)$; sí, $\frac{\pi}{4e^2}$

11. La ecuación de la recta es $y = \frac{r}{h}x$. El volumen es $\frac{\pi r^2 h}{3}$ **12.** $2\pi(1-\sqrt{a}), 2\pi$

13. $\frac{\pi}{24} - \frac{\pi}{3B^3}$; sí, $\frac{\pi}{24}$ **14.** Para todo $c > 1/2, \pi/(2c-1)$

15. Para todo $c < 1/2, \pi/(1-2c)$

XII, §1, Ejercicios suplementarios, p. 342

1. $f(x) = R + \sqrt{a^2 - x^2}$ y $g(x) = R - \sqrt{a^2-x^2}$. El volumen es

$$V = \pi\int_{-a}^{a} f(x)^2\,dx - \pi\int_{-a}^{a} g(x)^2\,dx$$

que, después de un poco de ágebra sencilla, resulta igual a

$$4\pi R\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2\pi^2 Ra^2.$$

2. $\frac{32\pi}{5}$ **3.** 12π **4.** 2π **5.** $\frac{2\pi}{3}$ **6.** $\frac{5\pi}{14}$ **7.** $\frac{\pi}{4}$ **8.** $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ **9.** $\frac{\pi}{2}(e^{-2} - e^{-10})$

10. $\pi[2(\log 2)^2 - 4\log 2 + 2]$ **11.** $\pi\left[\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right]$ **12.** $\pi\left(1 - \frac{1}{B}\right)$, π cuando $B\to\infty$

13. $\frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{B^3}\right)$, $\frac{\pi}{3}$ cuando $B\to\infty$ **14.** $\pi\log B$

15. $\pi\log\frac{1}{a}$. No hay límite cuando $a\to 0$. El volumen crece sin cota.

16. $\pi\left(\frac{1}{a} - 1\right)$. No hay límite cuando $a\to 0$. El volumen crece sin cota.

17. $\pi\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos a + \log(\sqrt{2}-1) - \log(\csc a - \cot a)\right]$
No hay límite cuando $a\to 0$. El volumen crece sin cota.

XII, §2, p. 346

1. 6π **2.** a^2 (al usar simetría y valores de θ tales que $\mathrm{sen}\,2\theta \ge 0$, el problema se reduce a $\int_0^{\pi/2} a^2\,\mathrm{sen}\,2\theta\,d\theta$)

3. πa^2 **4.** $\frac{\pi}{12}$ **5.** $3\pi/2$ **6.** $3\pi/2$ **7.** $9\pi/2$ **8.** $\pi/3$

XII, §2, Ejercicios suplementarios, p. 346

1. 25π **2.** $\frac{3\pi}{2}$ **3.** π **4.** $\frac{9\pi}{2}$ **5.** $\frac{3\pi}{8}$ **6.** $\frac{3\pi}{2}$ **7.** $2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ **8.** $\frac{3\pi}{2}$

9. $\frac{\pi}{4}$ **10.** $\frac{9\pi}{2}$ **11.** $10\frac{2}{3}$ **12.** $10\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{4}{3}$ **14.** $\frac{4}{3}$ **15.** $\frac{5\sqrt{5}}{6}$ **16.** 10

XII, §3, p. 352

1. $\frac{8}{27}(10^{3/2} - 1)$ **2.** $\frac{\sqrt{5}}{2} + \log\left(\frac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)$

3. $\sqrt{e^4+1} + 2 - \sqrt{2} + \log\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{e^4+1}}\right)$ **4.** $2\sqrt{17} + \log\left(\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}\right)^{1/4}$

5. $\sqrt{1+e^2} + \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1} - \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$

6. $\frac{1}{27}(31^{3/2} - 13^{3/2})$ **7.** $e - \frac{1}{e}$

8. Resolvemos el ejercicio 8 por completo.

$$\begin{aligned}\text{longitud} &= \int_0^{3/4}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx\\ &= \int_0^{3/4}\sqrt{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\,dx\\ &= \int_0^{3/4}\frac{\sqrt{1-2x^2+x^4+4x^2}}{1-x^2}\,dx\\ &= \int_0^{3/4}\frac{\sqrt{(1+x^2)^2}}{1-x^2}\,dx\end{aligned}$$

$$= \int_0^{3/4} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx$$

$$= \int_0^{3/4} \frac{2}{1-x^2}\,dx + \int_0^{3/4} \frac{x^2-1}{1-x^2}\,dx$$

$$= 2\int_0^{3/4} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx - \int_0^{3/4} dx$$

$$= -\log(1-x)+\log(1+x)\Big|_0^{3/4} - \frac{3}{4}$$

$$= \log\left(\frac{1+3/4}{1-3/4}\right) - \tfrac{3}{4} = \log 7 - 3/4$$

9. $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$ **10.** $\log(2+\sqrt{3})$

XII, §4, p. 361

2. $2\pi r$ **3.** $\sqrt{2}(e^2-e)$ **4.** (a) $\frac{3}{4}$ (b) 3 **5.** $2\sqrt{5}+\log(\sqrt{5}+2)$
6. $4\sqrt{2}+2\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ **7.** $2\sqrt{3}$ **8.** 5 **9.** 8 **10** $4a$ **12.** $\sqrt{2}(e^2-e)$
13. $\sqrt{2}(e^{\theta_2}-e^{\theta_1})$ **14.** $(8^{3/2}-5^{3/2})$ **15.** $\dfrac{\sqrt{17}}{4}(e^{-4}-e^{-8})$ **16.** $\dfrac{3\pi}{4}$
17. $\sqrt{5}-\dfrac{\sqrt{17}}{4}+\log\left[\dfrac{8+2\sqrt{17}}{1+\sqrt{5}}\right]$ **18.** $4\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{8} = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}$ **19.** 4 **20.** 2
21. 8 **22.** π **23.** $2\sqrt{3}$

XII, §5, p. 368

1. $12\pi a^2/5$ **2.** $\dfrac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)$ **3.** $\dfrac{2\pi}{3}(26\sqrt{26}-2\sqrt{2})$ **4.** $4\pi^2a^2$ **5.** $4\pi^2 aR$
6. $\dfrac{\pi}{6}(17-\sqrt{17}-1)$

XII, §6, p. 371

1. $2\,\mathrm{kg/cm}$; $200\,\mathrm{cm-kg}$ **2.** $\dfrac{10}{\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{9}}\,\mathrm{kg/cm}$; $\dfrac{180}{\pi}\left[\cot\dfrac{\pi}{9}-\dfrac{1}{2}\csc\dfrac{\pi}{9}\right]\mathrm{cm-kg}$
3. $c\left[\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r}\right]$ **4.** sí; $\dfrac{c}{r_1}$ **5.** $\dfrac{99c}{200}$ donde c es la constante de proporcionalidad
6. $\frac{3}{4}\times 10^9$ **7.** $\dfrac{E}{6}\,\mathrm{cm-kg}$
8. (a) $-90\,CmM$ dina − cm (b) $9\,CmM$ dina − cm **9.** $c\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)$
10. $1500\log 2$ pulg − lib. Si A es el área de la sección transversal del cilindro y $P(x)$ es la presión, entonces

$$P(x)\cdot Ax = C = \text{constante}.$$

Si a es la longitud del cilindro cuando el volumen es 75 pulg^3, entonces

$$\text{Trabajo} = \int_a^{2a} \text{Fuerza}\,dx = \int_a^{2a} P(x)A\,dx = \int_a^{2a} \frac{C}{x}\,dx = C\log 2.$$

Pero, de los datos iniciales, $C = 20\cdot 75 = 1{,}500$. Esto da la respuesta.

XII, §7, p. 376

1. $\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{15^4-5^4}{15^3-5^3}\right)$ **2.** 10 **3.** $10/\log 3$

XIII, §1, p. 385

1. (a) $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$
(b) $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$
(c) Como $(k-1)!/k! = 1/k$, obtenemos de (b)

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

y

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Esto prueba que, cuando $f(x) = \log(1+x)$, el n-ésimo polinomio de Taylor está dado por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k.$$

2. Para $f(x) = \cos x$, $f^{(n)}(x) = f^{(n+4)}(x)$. Usar esto y la fórmula para $P_n(x)$ para deducir $P_n(x)$ para la función $f(x) = \cos x$.

XIII, §3, p. 395

1. $1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$
2. $|f^{(n)}(c)| \le 1$ para todo n y todos los números c, de modo que el estimado se sigue del teorema 2.1.
3. $1-\dfrac{0.01}{2}+R_4(0.1) = 0.995+R_4(0.1)$ **4.** $|R_3| \le \dfrac{(0.1)^3}{3!} = \dfrac{1}{6}\times 10^{-3}$.
5. $|R_4| \le \frac{2}{3}10^{-4}$
6. $P_4(x) = x+\dfrac{x^3}{3}$. Sea $f(x) = \tan x$. Primero hay que hallar todas las derivadas $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$, y después $f^{(1)}(0),\dots,f^{(4)}(0)$. Después usar la fórmula general para el polinomio de Taylor

$$P_4(x) = f(0)+f^{(1)}(0)+\cdots+f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!}.$$

7. $|R_5| \le 10^{-4}$ mediante estimados burdos

8. (a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)+E$ y $|E|<10^{-3}$

(b) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)+E$

(c) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{180}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\pi}{180}\right)+E$

(d) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{180}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\pi}{180}\right)+E$

(e) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{180}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2\pi}{180}\right)+E$

(f) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{180}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{180}\right)+E$

Hagamos todos los pasos de la parte (e).

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 32^\circ = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{180}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{90}\right)=\operatorname{sen}(a+h)\\ &=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}+\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\frac{\pi}{90}+R_2(h)\\ &=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{90}+R_2\left(\frac{\pi}{90}\right),\end{aligned}$$

y

$$\left|R_2\left(\frac{\pi}{90}\right)\right| \le \left(\frac{\pi}{90}\right)^2\frac{1}{2} \le \left(\frac{3.15}{90}\right)^2\frac{1}{2} \le (3.5\times 10^{-2})^2\frac{1}{2} \le 10^{-3}.$$

9. $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)+E$

10. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)+E$

11. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)+E$

12. (a) $\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{R_5(x)}{x}$ de modo que

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = 1-\frac{1}{3\cdot 3!}+E \quad \text{donde} \quad |E|\le\frac{1}{5\cdot 5!}.$$

(b) $-\frac{(0.1)^2}{4}+E$ donde $|E|\le\frac{10^{-4}}{4\cdot 4!}$

(c) Escribir $\operatorname{sen} u = u-\frac{u^3}{3!}+R_5(u)$, de modo que, para $u=x^2$, obtenemos

$$\operatorname{sen} x^2 = x^2-\frac{x^6}{3!}+R_5(x^2).$$

Tenemos, para $u\ge 0$,

$$|R_5(u)|\le\frac{u^5}{5!}=\frac{x^{10}}{5!},$$

de donde

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{7\cdot 3!}+E,$$

donde

$$|E|\le\int_0^1\frac{x^{10}}{5!}\,dx=\frac{1}{11\cdot 5!}\le 10^{-3}.$$

(d) $\frac{1}{2}-\frac{1}{6\cdot 3!}+E,\quad$ y $\quad |E|\le\frac{1}{10\cdot 5!}$

(e) $1-\frac{1}{5\cdot 2!}+\frac{1}{9\cdot 4!}+E,\quad$ y $\quad |E|\le\frac{1}{13\cdot 6!}$

(f) $1-\frac{1}{5\cdot 3!}+E,\quad$ y $\quad |E|\le\frac{1}{9\cdot 5!}$

13.
$$\begin{aligned}\int_0^{1/2}\frac{\cos x-1}{x}\,dx &= \int_0^{1/2}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+R_6(x)-1}{x}\,dx\\ &=\int_0^{1/2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{4!}+\frac{R_6(x)}{x}\right)dx\\ &=-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{96}\Big|_0^{1/2}+E\\ &=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16\cdot 96}+E,\end{aligned}$$

y

$$|E|\le\frac{1}{6!}\int_0^{1/2}x^5\,dx=\frac{1}{6!}\frac{x^6}{6}\Big|_0^{1/2}=\frac{1}{6!\cdot 6\cdot 2^6}<10^{-5}.$$

XIII, §4, p. 397

1. $1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}$ **2.** $|R_3|\le e^{1/2}\frac{(\frac{1}{2})^3}{3!}\le\frac{2(\frac{1}{8})}{6}=\frac{1}{24}$

3. $|R_4|\le e^{10-2}\frac{(10^{-2})^4}{4!}\le\frac{2(10^{-8})}{4!}=\frac{10^{-8}}{12}$

4. $|R_3|\le e^{10-2}\frac{(10^{-2})^3}{3!}\le\frac{2(10^{-6})}{6}=\frac{10^{-6}}{3}$

6. $|R_7|\le e^{-1}\frac{|-1|^7}{7!}\le\frac{1}{7!}=\frac{1}{5040}$

7. (a) $|R_4|\le e^{-2}\frac{|2|^4}{4!}\le\frac{32}{3}$ (b) $|R_4|\le e^3\frac{|3|^4}{4!}\le 214$

8. (a) $|R_5|\le e^2\frac{|2|^5}{5!}\le\frac{64}{15}$ (b) $|R_5|\le e^3\frac{|3|^5}{5!}\le\frac{648}{5}$

9. (a) $|R_{13}|\le\frac{16\cdot 2^{12}}{12!}$ usando $e<4$ (b) $|R_{16}|\le\frac{16\cdot 2^{16}}{16!}$ usando $e<4$

10. $e=1+\sum_{n=1}^{13}\frac{1}{n!}+E$ **11.** $e^{-2}=\sum_{k=0}^{12}\frac{(-2)^k}{k!}+E$ y $|E|\le\frac{2^{13}}{13!}$

12. (a) $1+\frac{1}{2\cdot 2!}+\frac{1}{3\cdot 3!}+\cdots+\frac{1}{7\cdot 7!}+E$, donde $|E|\le\frac{e}{8\cdot 8!}$

(b) Escribir $e^u = 1 + u + \cdots + \frac{u^4}{4!} + R_5(u)$. Para $u \leq 0$, tenemos $e^u \leq 1$, y, por lo tanto, $|R_5(u)| \leq \frac{|u|^5}{5!}$. Ahora hacer $u = -x^2$. Entonces

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + R_5(-x^2).$$

Integrar término a término la primera parte formada por potencias de x. Obtenemos

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} + E,$$

y

$$|E| \leq \int_0^1 |R_5(-x^2)|\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^{10}}{5!}\,dx = \frac{1}{11\cdot 5!} \leq 10^{-3}.$$

(c) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} + \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} + \frac{1}{11\cdot 5!} + E$, donde $|E| \leq \frac{e}{13\cdot 6!} < \frac{1}{3}\times 10^{-3}$.

(d) $e^u = 1 + u + R_2(u)$ y hacemos $u = x^2$. Para $0 \leq x \leq 0.1$, hallamos $e^u \leq 2$ (estimado generoso). Por lo tanto,

$$|R_2(u)| \leq \frac{2u^2}{2!} = u^2.$$

Tenemos $e^{x^2} = 1 + x^2 + R_2(x^2)$, y $|R_2(x^2)| \leq x^4$. Por lo tanto,

$$\int_0^{0.1} e^{x^2}\,dx = 0.1 + \frac{(0.1)^3}{3} + E, \text{ donde } |E| \leq \int_0^{0.1} x^4\,dx \leq \frac{10^{-5}}{5}.$$

(e) $0.1 - (\frac{1}{3})10^{-3} + E$, donde $|E| \leq 10^{-6}$.

XIII, §5, p. 403

1. (a) $\log 1.2 = 0.2 - \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{(0.2)^3}{3} + R_4, |R_4| \leq 4\cdot 10^{-4}$

(b) $\log 0.9 = -\log 10/9 = -\log\left(1 + \frac{1}{9}\right)$

$$= -\left[\frac{1}{9} - \frac{(1/9)^2}{2}\right] - R_3(1/9) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{2\cdot 81} - R_3(1/9)$$

y $|-R_3(1/9)| < \frac{1}{2}\times 10^{-3}$

(c) $\log 1.05 = 0.05 - \frac{(0.05)^2}{2} + R_3$ y $|R_3| \leq \frac{5^3}{3}\cdot 10^{-6}$

(d) $\log 9/10 = -\log 10/9$ como en (b).

(e) $\log 24/25 = -\log 25/24 = -\log\left(1 + \frac{1}{24}\right)$

$$= \frac{-1}{24} + \frac{1}{2(24)^2} - R_3(1/24),$$

y $|R_3(1/24)| < 10^{-3}$.

(f) $\log 26/25 = 0.04 + R_2(1/25), |R_2| \leq 8\times 10^{-4}$

2. (a) Transformamos el lado derecho hasta que sea igual al lado izquierdo.

Tenemos

$$-7\log\frac{9}{10} + 2\log\frac{24}{25} + 3\log\frac{81}{80} = \log\left(\frac{10}{9}\right)^7\left(\frac{24}{25}\right)^2\left(\frac{81}{80}\right)^3$$
$$= \log\frac{2^7 5^7 (2^3\cdot 3)^2 (3^4)^3}{(3^2)^7 5^4 (2^4)^3 5^3}$$
$$= \log\frac{2^7 2^6 \cancel{3^2 3^{12} 5^7}}{2^{12}\cancel{3^{14} 5^7}}$$
$$= \log 2.$$

El caso de $\log 3$ se hace de la misma manera. Nótese que cada fracción $9/10$, $24/25$, $81/80$ está cerca de 1, y, por lo tanto, el valor del log está muy bien aproximado por unos cuantos términos de la fórmula de Taylor. Por ejemplo,

$$\log\frac{9}{10} = -\log 109 = -\log\left(1 + \frac{1}{9}\right).$$

Entonces

$$\log\left(1 + \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9} - \frac{(1/9)^2}{2} + \frac{(1/9)^3}{3} - \frac{(1/9)^4}{4} + \frac{(1/9)^5}{5} + R_6(1/9),$$

y

$$|R_6(1/9)| \leq \frac{(1/9)^6}{9} < \frac{1}{2}\times 10^{-6}.$$

Por lo tanto,

(1) $$7\log\frac{10}{9} = 7A_1 + E_1,$$

donde $E_1 = 7R_6(1/9)$ y

$$|E_1| = 7|R_6(1/9)| < 3.5\times 10^{-6}.$$

Observar el factor 7 que surge aquí.

A continuación, tenemos

$$\log\frac{25}{24} = \log\left(1 + \frac{1}{25}\right) = \frac{1}{25} - \frac{1}{25^2} + \frac{1}{25^3} + R_4(1/25)$$
$$= A_2 + R_4(1/25),$$

y

$$|R_4(1/25)| \leq \frac{(1/25)^4}{4} < 10^{-6}.$$

Por lo tanto,

(2) $$-2\log\frac{25}{24} = -2A_2 - 2R_4(1/25) = -2A_2 + E_2,$$

donde

$$|E_2| = |2R_4(1/25)| < 2\times 10^{-6}.$$

En tercer lugar tenemos

$$\log\frac{81}{80} = \log\left(1+\frac{1}{80}\right) = \frac{1}{80} - \frac{1}{80^2} + R_3(1/80)$$
$$= A_3 + R_3(1/80),$$

y

$$|R_3(1/80)| \le \frac{(1/80)^3}{3} < \frac{1}{1.5}\times 10^{-6}.$$

Por lo tanto,

$$(3) \qquad 3\log\frac{81}{80} = 3A_3 + E_3,$$

donde

$$|E_3| = 3|R_3(1/80)| < \frac{3}{1.5}\times 10^{-6} \le 2\times 10^{-6}.$$

Podemos ahora colocar juntos los cálculos de los tres términos y hallar:

$$\log 2 = 7A_1 - 2A_2 + 3A_3 + E, \quad \text{donde} \quad E = E_1 + E_2 + E_3$$

y

$$|E| \le |E_1| + |E_2| + |E_3| < 3.5\times 10^{-6} + 2\times 10^{-6} + 2\times 10^{-6}$$
$$< 10^{-5}.$$

Esto concluye el cálculo de $\log 2$.

El cálculo de $\log 3$ es similar. En cada caso, notar que los factores $7, -2, 3$ para $\log 2$ y $11, -3, 5$ para $\log 3$, se deben tomar en cuenta y contribuyen al término de error.

XIII, §6, p. 406

1. Usar $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$. Entonces

$$\tan(x+y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\operatorname{sen} x\cos y + \cos x \operatorname{sen} y}{\cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y}.$$

Después dividir el numerador y el denominador entre $\cos x\cos y$.

2. (a) Sean $u = 1/2$ y $v = 1/3$ en la fórmula para $\arctan u + \arctan v$.
(b) Sean $u = 1/5$ y $v = 1/8$ en esta misma fórmula.
(c) Tenemos que aplicar de manera repetida la fórmula de la suma. Comenzamos con

$$2\arctan\frac{1}{5} = \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{5} = \arctan\frac{1/5+1/5}{1-1/25}$$
$$= \arctan\frac{5}{12}.$$

A continuación,

$$\arctan\frac{5}{17} + \arctan\frac{1}{7} = \arctan\frac{5/12+1/7}{1-5/84} = \arctan\frac{47}{79}.$$

A continuación,

$$2\arctan\frac{1}{8} = \arctan\frac{1}{8} + \arctan\frac{1}{8} = \arctan\frac{1/8+1/8}{1-1/64}$$
$$= \arctan\frac{16}{63}.$$

Y, finalmente,

$$2\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{1}{8} = \arctan\frac{47}{79} + \arctan\frac{16}{63}$$
$$= \arctan\frac{47/79+16/63}{1-47\cdot 16/79\cdot 63}$$
$$= \arctan 1 = \pi/4.$$

3. Por la fórmula de Taylor tenemos

$$\arctan\frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + R_5\left(\frac{1}{5}\right)$$

de modo que

$$(1) \qquad 8\cdot\arctan\frac{1}{5} = \frac{8}{5} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + E_1,$$

donde

$$E_1 = 8R_5\left(\frac{1}{5}\right) \quad \text{y} \quad |E_1| \le 8\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{16}{3}\times 10^{-4}.$$

En segundo lugar tenemos

$$\arctan\frac{1}{7} = \frac{1}{7} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^3 + R_5\left(\frac{1}{7}\right)$$

de modo que

$$(2) \qquad 4\cdot\arctan\frac{1}{7} = \frac{4}{7} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^3 + E_2,$$

donde

$$E_2 = 4R_5\left(\frac{1}{7}\right) \quad \text{y} \quad |E_2| \le 4\frac{1}{5}\left(\frac{1}{7}\right)^5 < \frac{2}{5}\times 10^{-4}$$

En tercer lugar tenemos

$$\arctan\frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^3 + R_5\left(\frac{1}{8}\right)$$

de modo que

$$(3) \qquad 8\cdot\arctan\frac{1}{8} = 1 - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^3 + E_3,$$

donde

$$E_3 = 8R_5\left(\frac{1}{8}\right) \quad \text{y} \quad |E_3| \le 8\frac{1}{5}\left(\frac{1}{8}\right)^5 \times 10^{-4}.$$

Al sumar las tres expresiones hallamos, por el ejercicio 2(c), que

$$\begin{aligned}\pi &= 8\arctan\frac{1}{5} + 4\arctan\frac{1}{7} + 8\arctan\frac{1}{8}\\ &= \frac{8}{5} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{4}{7} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^3 + 1 - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^3 + E,\end{aligned}$$

donde

$$E = E_1 + E_2 + E_3 \quad \text{y} \quad |E| \le |E_1| + |E_2| + |E_3| < 10^{-3}.$$

4. $\arctan(1/5) + \arctan(1/5) = \arctan 5/12$ usando $u = v = 1/5$,
$\arctan(1/5) + \arctan(5/12) = \arctan(37/55)$ usando $u = 1/5$ y $v = 5/12$,
$\arctan(1/5) + \arctan(37/55) = \arctan(120/119)$.

Este último valor es igual a $4\arctan(1/5)$. Entonces

$$4\arctan(1/5) - \arctan(1/239) + \arctan(120/119) + \arctan(-2/239).$$

Sea $u = 120/119$ y $v = -1/239$ y usar aritmética para obtener $\arctan 1$.

XIII, §7, p. 413

En las respuestas damos sólo un valor aproximado, excepto en un par de casos a fin de ilustrar un estimado para el término de error. Pero el lector deberá incluir el término de error en su trabajo.

1. (a) $|R_2| \le \frac{3}{32}\cdot 10^{-4} < 10^{-5}$. Usamos $s = 1/4$ y

$$R_2(x) = \frac{1}{4}\left|-\frac{3}{4}\right|\frac{1}{2}(1+c)^{-7/4}|x|^2.$$

Como $(1+c)^{-7/4} \le 1$, obtenemos

$$|R_2(0.1)| \le \frac{3}{32}(0.1)^2 \le \frac{3}{32}10^{-4} < 10^{-5}.$$

(b) $|R_2| \le \frac{3}{8}\cdot 10^{-2}$ (c) $|R_2| \le \frac{3}{32}\cdot 10^{-2}$

2. (a) $|R_3| \le 5\cdot 10^{-4}$ (b) $|R_3| \le \frac{1}{16}(0.8)^{-5/2}(0.2)^3 \le \frac{1}{2\cdot 8^3} \le 10^{-3}$

(c) $|R_3| \le \frac{1}{16}\cdot 10^{-4}$

3. Estimar $R_2(x)$ para $(1+x)^{1/3}$ y $-0.1 \le x \le 0.1$. La expresión general para R_2 con $s = 1/3$ es

$$|R_2(x)| = \left|\frac{(1/3)(1/3-1)}{2}\right|(1+c)^{1/3-2}|x|^2$$

de modo que el término $(1+c)^{-5/3} = 1/(1+c)^{5/3}$ será mayor cuando $x = 0.1$. Además, $|x|^2$ es mayor cuando $x = 0.1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}|R_2(x)| &\le \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{2}(0.9)^{-5/3}(0.1)^2\\ &\le \frac{1}{9}\left(\frac{10}{9}\right)^{5/3}10^{-2}\\ &\le \frac{1}{9}\left(\frac{10}{9}\right)^2 10^{-2} = \frac{1}{729} < \frac{1}{7}\times 10^{-2}.\end{aligned}$$

4. (a) $|R_2| \le \frac{1}{2}\cdot(0.8)^{-3/2}\cdot 10^{-2} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(0.8)^2}\cdot 10^{-2} \le 10^{-2}$ (b) $|R_2| \le \frac{1}{8}\cdot 10^{-2}$

5. (a) $5\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{125}\right) + E$ (b) $5\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{625}\right) + E$

(c) $5\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{125} - \frac{1}{9}\cdot\frac{6^2}{125^2}\right) + E.$ $\sqrt[3]{131}$

En esta parte incluimos el estimado para el error. Escribimos

$$131 = 125 + 6 = 125\left(1 + \frac{6}{125}\right)$$

de modo que

$$(131)^{1/3} = 5\left(1 + \frac{6}{125}\right)^{1/3}.$$

Entonces

$$\left|R_3\left(\frac{6}{125}\right)\right| \le \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{5}{3}\frac{1}{3!}\left(\frac{6}{125}\right)^3 \le \frac{1}{9}\times 10^{-4}.$$

Por lo tanto,

$$(131)^{1/3} = 5\left(1 + \frac{1}{3}\frac{6}{125} - \frac{1}{9}\frac{6^2}{(125)^2}\right) + E,$$

donde

$$|E| = \left|5R_3\left(\frac{6}{125}\right)\right| \le \frac{5}{9}\times 10^{-4} < 10^{-4}.$$

(d) $6\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6^3}\right) + E$

6. (a) $10\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{100} - \frac{1}{8}\cdot\frac{3^2}{100^2}\right) + E$ (b) $10\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{100}\right) + E$

(c) $10\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100} - \frac{1}{8}\cdot\frac{5^2}{100^2}\right) + E$

(d) $5\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{25} - \frac{1}{8}\cdot\frac{3^2}{25^2} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3^3}{25^3}\right) + E$

Al escribir $28 = 25 + 3 = 25(1 + 3/25)$ se puede aplicar el mismo método que en los ejemplos, y $E = 5R_4(3/25)$, de modo que tenemos que estimar $R_4(3/25)$. Tenemos:

$$\left|R_4\left(\frac{3}{25}\right)\right| \le \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{1}{4!}\left(\frac{3}{25}\right)^4 \le \frac{1}{8}\times 10^{-4}$$

de modo que $|E| \le (5/8)\times 10^{-4}$, que está dentro de la precisión deseada.

XIII, §8, p. 416

1. 0 **2.** 1/4! **3.** 2 **4.** 0 **5.** 1 **6.** 1 **7.** 1 **8.** 1 **9.** 1 **10.** 2 **11.** $\frac{1}{2}$
12. 0 **13.** $-\frac{1}{2}$ **14.** 1 **15.** 1 **16.** 1 **17.** $-\frac{1}{2}$ **18.** -1 **19.** 2 **20.** $\frac{1}{2}$ **21.** 1
22. 1 **23.** -1 **24.** 1 **25.** 1 **26.** 0 **27.** $-\frac{1}{6}$ **28.** 0 **29.** $\frac{1}{2}$ **30.** 1
31. $-\frac{1}{8}$ **32.** $-\frac{1}{9}$ **33.** (a) 0 (b) 0 (c) 0 **34.** 1 **35.** $-\frac{1}{2}$ **36.** 0 **37.** $\frac{1}{5!}$
38. 0 **39.** -1

XIV, §2, p. 424

3. No **4.** Sí **5.** No **6.** No **7.** No **8.** Sí **9.** Sí

XIV, §3, p. 425

1. Sí **2.** Sí **3.** No **4.** Sí **5.** No **6.** Sí **7.** No **8.** Sí **9.** No
10. Sí **11.** No **12.** Sí **13.** No **14.** Sí **15.** Sí **16.** Sí **17.** Sí
18. Sí

XIV, §4, p. 428

3. Sí **4.** Sí **5.** Sí **6.** Sí **7.** Sí **8.** Sí **9.** Sí **10.** Sí

XIV, §5, p. 430

1. Sí **2.** Sí **3.** Sí **4.** Sí **5.** Sí
6. Converge, pero no absolutamente **7.** Sí **8.** No
9. Converge, pero no absolutamente **11.** Converge, pero no absolutamente
12. Converge, pero no absolutamente
13. No converge; no converge absolutamente
14. No converge **15.** Converge, pero no absolutamente
17. Converge, pero no absolutamente **18.** Sí
19. Converge, pero no absolutamente **20.** Converge, pero no absolutamente

XIV, §6, p. 435

2. (a) $4/e^2$ (b) $2^2 5^5 e^{-4}/3^3$ **3.** (a) 0 (b) ∞ **4.** 1 **5.** 1 **6.** 1 **7.** 1 **8.** $\frac{1}{2}$
9. 2 **10.** 0 **11.** 1 **12.** 1 **13.** $\frac{1}{2}$ **14.** $\frac{1}{2}$ **15.** $\frac{1}{4}$ **16.** $\dfrac{1}{e}$ **17.** 27 **18.** $\dfrac{4}{e^2}$ **19.** 0
20. ∞ **21.** 2 **22.** 3 **23.** 1 **24.** ∞ **25.** 1 **26.** ∞ **27.** 1 **28.** ∞ **29.** e
30. ∞

Ap., §1, p. 444

1. (a) la mci es 2; no existe mcs. (b) la mci es 1; no existe mcs.
(c) no existe mci; no existe mcs.
2. (a) la mci es 0; la mcs es $\sqrt[3]{5}$. (b) la mci es 0; la mcs es $\sqrt[3]{5}$. (c) la mci es -2; la mcs es 2.
(d) no existe mci; la mcs es $\frac{11}{2}$.

App., §2, p. 451

4. $f(x)$ existe para todo x; $f(x) = 1$, $|x| \geq 1$; $f(x) = 0$, $|x| < 1$
5. (a) $f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = -1, f(2) = 1$
(b) No existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ (c) No existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$
6. (a) $f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = -1, f(2) = 1$
(b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ (c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1$

7. (a) 0 (b) 0 (c) 0 (d) 0 **8.** (a) 0 (b) 0 (c) 0

XV, §1, p. 466

	$A+B$	$A-B$	$3A$	$-2B$
1.	$(1,0)$	$(3,-2)$	$(6,-3)$	$(2,-2)$
2.	$(-1,7)$	$(-1,-1)$	$(-3,9)$	$(0,-8)$
3.	$(1,0,6)$	$(3,-2,4)$	$(6,-3,15)$	$(2,-2,-2)$
4.	$(-2,1,-1)$	$(0,-5,7)$	$(-3,-6,9)$	$(2,-6,8)$
5.	$(3\pi,0,6)$	$(-\pi,6,-8)$	$(3\pi,9,-3)$	$(-4\pi,6,-14)$
6.	$(15+\pi,1,3)$	$(15-\pi,-5,5)$	$(45,-6,12)$	$(-2\pi,-6,2)$

XV, §2, p. 469

1. No **2.** Sí **3.** No **4.** Sí **5.** No **6.** Sí **7.** Sí **8.** No

XV, §3, p. 472

1. (a) 5 (b) 10 (c) 30 (d) 14 (e) $\pi^2 + 10$ (f) 245
2. (a) -3 (b) 12 (c) 2 (d) -17 (e) $2\pi^2 - 16$ (f) $15\pi - 10$
4. (b) y (d)

XV, §4, p. 485

1. (a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{10}$ (c) $\sqrt{30}$ (d) $\sqrt{14}$ (e) $\sqrt{10+\pi^2}$ (f) $\sqrt{245}$
2. (a) $\sqrt{2}$ (b) 4 (c) $\sqrt{3}$ (d) $\sqrt{26}$ (e) $\sqrt{58+4\pi^2}$ (f) $\sqrt{10+\pi^2}$
3. (a) $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ (b) $(0,3)$ (c) $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ (d) $(\frac{17}{26}, -\frac{51}{26}, \frac{34}{13})$
(e) $\dfrac{\pi^2 - 8}{2\pi^2 + 29}(2\pi, -3, 7)$ (f) $\dfrac{15\pi - 10}{10 + \pi^2}(\pi, 3, -1)$
4. (a) $(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$ (b) $(-\frac{6}{5}, \frac{18}{5})$ (c) $(\frac{2}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{3})$ (d) $-\frac{17}{14}(-1,-2,3)$
(e) $\dfrac{2\pi^2 - 16}{\pi^2 + 10}(\pi, 3, -1)$ (f) $\dfrac{3\pi - 2}{49}(15, -2, 4)$
5. (a) $\dfrac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{34}}$ (b) $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$ (c) $\dfrac{10}{\sqrt{14}\sqrt{35}}$ (d) $\dfrac{13}{\sqrt{21}\sqrt{11}}$ (e) $\dfrac{-1}{\sqrt{12}}$
6. (a) $\dfrac{35}{\sqrt{41 \cdot 35}}, \dfrac{6}{\sqrt{41 \cdot 6}}, 0$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{17 \cdot 26}}, \dfrac{16}{\sqrt{41 \cdot 17}}, \dfrac{25}{\sqrt{26 \cdot 41}}$
7. Multipliquemos con producto punto la suma

$$c_1 A_1 + \cdots + c_r A_r = O$$

por A_i. Hallamos

$$c_1 A_1 \cdot A_i + \cdots + c_i A_i \cdot A_i + \cdots + c_r A_r \cdot A_i = 0 \cdot A_i = 0.$$

Como $A_j \cdot A_i = 0$ si $j \neq i$, hallamos

$$c_i A_i \cdot A_i = 0.$$

Pero, por hipótesis, $A_i \cdot A_i \neq 0$. Por lo tanto, $c_i = 0$, como había que demostrar.

8. (a) $\|A+B\|^2 + \|A-B\|^2 = (A+B)\cdot(A+B) + (A-B)\cdot(A-B)$
$= A^2 + 2A\cdot B + B^2 + A^2 - 2A\cdot B + B^2$
$= 2A^2 + 2B^2 = 2\|A\|^2 + 2\|B\|^2$

9. $\|A-B\|^2 = A^2 - 2A\cdot B + B^2 = \|A\|^2 - 2\|A\|\,\|B\|\cos\theta + \|B\|^2$

XV, §5, p. 489

1. (a) Sea $A = P_2 - P_1 = (-5,-2,3)$. La representación paramétrica de la recta es $X(t) = P_1 + tA = (1,3,-1) + t(-5,-2,3)$.
(b) $(-1,5,3) + t(-1,-1,4)$

2. $X = (1,1,-1) + t(3,0,-4)$ **3.** $X = (-1,5,2) + t(-4,9,1)$

4. (a) $(-\frac{3}{2}, 4, \frac{1}{2})$ (b) $(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, 0), (-\frac{7}{3}, \frac{13}{3}, 1)$ (c) $(0, \frac{17}{5}, -\frac{2}{5})$ (d) $(-1, \frac{19}{5}, \frac{1}{5})$

5. $P + \frac{1}{2}(Q-P) = \dfrac{P+Q}{2}$

XV, §6, p. 495

1. Los vectores normales $(2,3)$ y $(5,-5)$ no son perpendiculares porque su producto punto $10-15=-5$ no es 0.

2. Los vectores normales son $(-m,1)$ y $(-m',1)$, y su producto punto es $mm'+1$. Los vectores son perpendiculares si, y sólo si, este producto punto es 0, lo cual es equivalente a $mm' = -1$.

3. $y = x+8$ **4.** $4y = 5x-7$ **6.** (c) y (d)

7. (a) $x - y + 3z = -1$ (b) $3x + 2y - 4z = 2\pi + 26$ (c) $x - 5z = -33$

8. (a) $2x + y + 2z = 7$ (b) $7x - 8y - 9z = -29$ (c) $y + z = 1$

9. $(3,-9,-5)$, $(1,5,-7)$ (Otros serán múltiplos de éstos.)

10. $(-2,1,5)$ **11.** $(11,13,-7)$

12. (a) $X = (1,0,-1) + t(-2,1,5)$
(b) $X = (-10,-13,7) + t(11,13,-7)$ o también $(1,0,0) + t(11,13,-7)$

13. (a) $-\frac{1}{3}$ (b) $-\dfrac{2}{\sqrt{42}}$ (c) $\dfrac{4}{\sqrt{66}}$ (d) $-\dfrac{2}{\sqrt{18}}$

14. (a) $(-4, \frac{11}{2}, \frac{15}{2})$ (b) $(\frac{25}{13}, \frac{10}{13}, -\frac{9}{13})$ **15.** $(1,3,-2)$

16. (a) $\dfrac{8}{\sqrt{35}}$ (b) $\dfrac{13}{\sqrt{21}}$

17. (a) $-2/\sqrt{40}$ (b) $(41/17, 23/17)$ **18.** (a) $x + 2y = 3$ (c) $6/\sqrt{5}$

19. $-12/7\sqrt{6}$

XVI, §1, p. 506

1. $(e^t, -\operatorname{sen} t, \cos t)$ **2.** $\left(2\cos 2t, \dfrac{1}{1+t}, 1\right)$ **3.** $(-\operatorname{sen} t, \cos t)$

4. $(-3\operatorname{sen} 3t, 3\cos 3t)$ **6.** B

7. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(-1,0) + t(-1,0)$, o $y = \sqrt{3}x$, $y = 0$

8. (a) $ex + y + 2z = e^2 + 3$ (b) $x + y = 1$

11. $\sqrt{(X(t)-Q)\cdot(X(t)-Q)}$

Si t_0 es un valor de t que minimiza la distancia, entonces también minimiza el cuadrado de la distancia, que es más fácil de trabajar porque no incluye el signo de la raíz cuadrada. Sea $f(t)$ el cuadrado de la distancia, de modo que

$$f(t) = (X(t)-Q)^2 = (X(t)-Q)\cdot(X(t)-Q).$$

En un mínimo, la derivada debe ser 0, y la derivada es

$$f'(t) = 2(X(t)-Q)\cdot X'(t).$$

Por lo tanto, en un mínimo tenemos $(X(t_0)-Q)\cdot X'(t_0) = 0$, y entonces $X(t_0)-Q$ es perpendicular a $X'(t_0)$, i.e. es perpendicular a la curva. Si $X(t) = P + tA$ es la representación paramétrica de una recta, entonces $X'(t) = A$, de modo que hallamos

$$(P + t_0 A - Q)\cdot A = 0.$$

Al despejar t_0 se obtiene $(P-Q)\cdot A + t_0 A\cdot A = 0$, de donde

$$t_0 = \frac{(Q-P)\cdot A}{A\cdot A}.$$

13. Diferenciar $X'(t)^2 =$constante para obtener

$$2X'(t)\cdot X''(t) = 0.$$

14. Sea $v(t) = \|X'(t)\|$. Para mostrar que $v(t)$ es constante basta probar que $v(t)^2$ es constante, y que $v(t)^2 = X'(t)\cdot X'(t)$. Para mostrar que una función es constante basta probar que su derivada es 0, y tenemos

$$\frac{d}{dt}v(t)^2 = 2X'(t)\cdot X''(t).$$

Por hipótesis, $X'(t)$ es perpendicular a $X''(t)$, de modo que el lado derecho es 0, como se deseaba.

15. Al diferenciar la relación $X(t)\cdot B = t$, se obtiene

$$X'(t)\cdot B = 1,$$

de modo que $\|X'(t)\|\,\|B\|\cos\theta = 1$. Por lo tanto, $\|X'(t)\| = 1/\|B\|\cos\theta$ es constante. Así, el cuadrado $X'(t)^2$ es constante. Al diferenciar se obtiene

$$2X'(t)\cdot X''(t) = 0,$$

de modo que $X'(t)\cdot X''(t) = 0$, y $X'(t)$ es perpendicular a $X''(t)$, según se deseaba.

16. (a) $(0,1,\pi/8) + t(-4,0,1)$ (b) $(1,2,1) + t(1,2,2)$
(c) $(e^3, e^{-3}, 3\sqrt{2}) + t(3e^{-3}, -3e^{-3}, 3\sqrt{2})$ (d) $(1,1,1) + t(1,3,4)$

18. Sea $X(t) = (e^t, e^{2t}, 1-e^{-t})$ y $Y(\theta) = (1-\theta, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Por lo tanto, las dos curvas se intersecan cuando $t = 0$ y $\theta = 0$. Además

$$X'(t) = (e^t, 2e^{2t}, e^{-t}) \quad \text{y} \quad Y'(\theta) = (-1, -\operatorname{sen}\theta, \cos\theta),$$

de modo que

$$X'(0) = (1,2,1) \quad \text{y} \quad Y'(0) = (-1,0,1).$$

El ángulo entre sus tangentes en el punto de intersección es el ángulo entre $X'(0)$ y $Y'(0)$, que es $\pi/2$, pues

$$\text{coseno del ángulo} = \frac{X'(0)\cdot Y'(0)}{\|X'(0)\|\,\|Y'(0)\|} = 0.$$

19. $(18,4,12)$ cuando $t=-3$ y $(2,0,4)$ cuando $t=1$.
Por definición, un punto $X(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ está en el plano si, y sólo si,

$$3x(t) - 14y(t) + z(t) - 10 = 0.$$

En el caso presente, eso significa que

$$3(2t^2) - 14(1-t) + (3+t^2) - 10 = 0.$$

Ésta es una ecuación cuadrática para t, que se debe resolver mediante la fórmula cuadrática. Se obtendrán los dos valores $t=-3$ o $t=1$, los cuales se pueden sustituir en la curva paramétrica $(2t^2, 1-t, 3+t^2)$ para obtener los dos puntos.

20. (a) Cada coordenada de $X(t)$ tiene derivada igual a 0, de modo que cada coordenada es constante, y así $X(t) = A$ para alguna constante A.
(b) $X(t) = tA + B$ para vectores constantes $A \neq O$ y B.

21. Sea $E = (0,0,1)$ el vector unitario en la dirección del eje z. Entonces $X'(t) = (-a\,\text{sen}\,t, a\cos t, b)$ y

$$\cos\theta(t) = \frac{X'(t)\cdot E}{\|X'(t)\|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

23. Al diferenciar la relación $X(t)\cdot B = e^{2t}$, se obtiene

$$X'(t)\cdot B = 2e^{2t} = \|X'(t)\|\,\|B\|\cos\theta.$$

Tanto B como $\cos\theta$ son constantes; dividir para obtener (a). Entonces $\|X'(t)\| = 2e^{2t}/\|B\|\cos\theta$. Elevar esto al cuadrado y diferenciar. Se hallará

$$X'(t)\cdot X''(t) = \frac{8e^{4t}}{\cos^2\theta}.$$

25. (a) Decir que $B(t)$ está sobre la superficie significa que las coordenadas de $B(t)$ satisfacen la ecuación de la superficie, esto es

$$z(t)^2 = 1 + x(t)^2 - y(t)^2.$$

Diferenciar. Se obtiene

$$2z(t)z'(t) = 2x(t)x'(t) - 2y(t)y'(t),$$

que, después de dividir entre 2, produce

$$(*) \qquad z(t)z'(t) = x(t)x'(t) - Y(t)y'(t),$$

Ahora

$$\begin{aligned} B(t)\cdot B'(t) &= x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t).\\ &= 2x(t)x'(t) \quad \text{por el } (*) \end{aligned}$$

(b) Dado cualquier punto (x,y,z), la distancia de este punto al plano yz es precisamente $|x|$. De modo que, si x es positivo, la distancia es x mismo. Usamos el criterio de la derivada: si $x'(t) \geq 0$ para todo t, entonces x es creciente. Tenemos:

$$\begin{aligned} 2x(t)x'(t) &= B(t)\cdot B'(t) \quad \text{por (a)}\\ &= \|B(t)\|\,\|B'(t)\|\cos\theta(t). \end{aligned}$$

Por hipótesis, $\cos\theta(t)$ es positivo, y las normas $\|B(t)\|$, $\|B'(t)\|$ son ≥ 0, de modo que, si $x(t) > 0$, al dividir entre $2x(t)$ se ve que $x'(t) \geq 0$, de donde $x(t)$ es creciente, como se quería demostrar.

26. (a) $(1,1,\frac{2}{3}) + t(1,2,2)$ (b) $x + 2y + 2z = 1$

27. Tenemos $C'(t) = (-e^t\,\text{sen}\,t + e^t\cos t, e^t\cos t + e^t\,\text{sen}\,t)$. Sea θ el ángulo entre $C(t)$ y $C'(t)$ (el vector de posición). Entonces

$$\cos\theta = \frac{C(t)\cdot C'(t)}{\|C(t)\|\,\|C'(t)\|}$$

y un poco de álgebra mostrará que es independiente de t.

XVI, §2, p. 510

1. $\sqrt{2}$ **2.** (a) $2\sqrt{13}$ (b) $\frac{\pi}{8}\sqrt{17}$

3. (a) $\frac{3}{2}(\sqrt{41}-1) + \frac{5}{4}\left(\log\frac{6+\sqrt{41}}{5}\right)$ (b) $e - \frac{1}{e}$

4. (a) 8 (b) $4 - 2\sqrt{2}$

La integral para la longitud es $L(t) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt$. Usar la fórmula

$$\text{sen}^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2},$$

con $t = 2u$.

5. (a) $\sqrt{5} - \sqrt{2} + \log\dfrac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}$

La velocidad es $\|X'(t)\| = \sqrt{1+(1/t)^2}$, de modo que la longitud es

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \frac{1}{t}\sqrt{1+t^2}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{u^2}{u^2-1}\,du\\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{u^2-1+1}{u^2-1}\,du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} du + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{u^2-1}\,du. \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right).$$

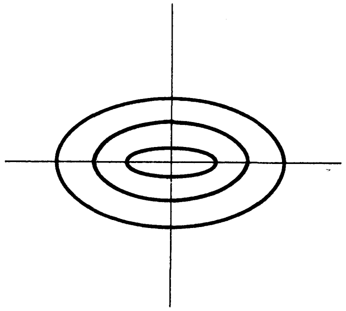
Estas últimas integrales dan logs, con un número apropiado al frente.

(b) $\sqrt{26} - \sqrt{10} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{26}-1}{\sqrt{26}+1}\cdot\frac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{10}-1}\right) = \sqrt{26} - \sqrt{10} + \log\frac{5}{3}\left(\frac{1+\sqrt{10}}{1+\sqrt{26}}\right)$

6. $\log(\sqrt{2}+1)$ **7.** $5/3$ **8.** 8

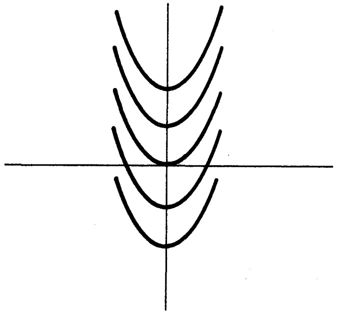
XVII, §1, p. 531

1.



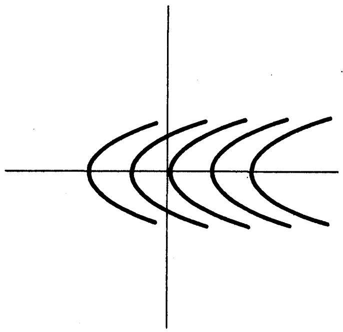
Elipses

2.



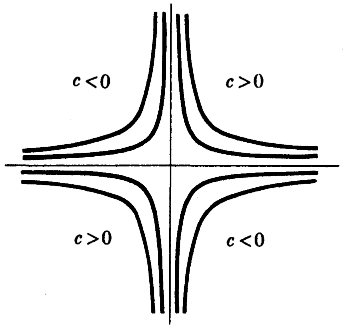
Parábolas

4.



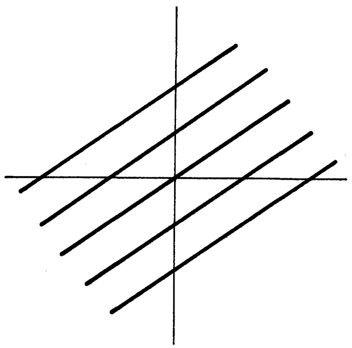
Parábolas

6.



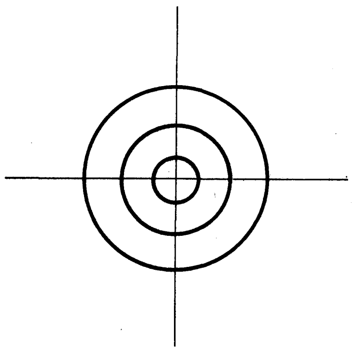
Hipérbolas

10.



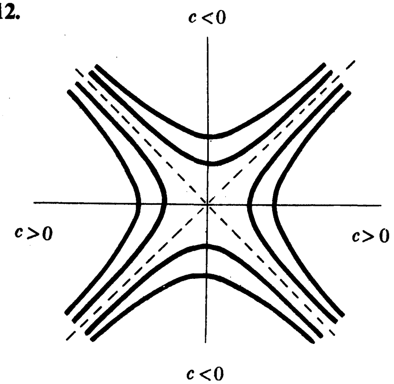
Rectas

11.



Círculos

12.



Hipérbolas

XVII, §2, p. 537

	$\partial f/\partial x$	$\partial f/\partial y$	$\partial f/\partial z$
1.	y	x	1
2.	$2xy^5$	$5x^2y^4$	0
3.	$y\cos(xy)$	$x\cos(xy)$	$-\operatorname{sen}(z)$
4.	$-y\operatorname{sen}(xy)$	$-x\operatorname{sen}(xy)$	0
5.	$yz\cos(xyz)$	$xz\cos(xyz)$	$xy\cos(xyz)$
6.	yze^{xyz}	xze^{xyz}	xye^{xyz}
7.	$2x\operatorname{sen}(yz)$	$x^2z\cos(yz)$	$x^2y\cos(yz)$
8.	yz	xz	xy
9.	$z+y$	$z+x$	$x+y$
10.	$\cos(y-3z)+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$	$-x\operatorname{sen}(y-3z)+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$	$3x\operatorname{sen}(y-3z)$

11. (1) $(2,1,1)$ (2) $(64,80,0)$ (6) $(6e^6,3e^6,2e^6)$ (8) $(6,3,2)$ (9) $(5,4,3)$
12. (4) $(0,0,0)$ (5) $(\pi^2\cos\pi^2, \pi\cos\pi^2, \pi\cos\pi^2)$
(7) $(2\operatorname{sen}\pi^2, \pi\cos\pi^2, \pi\cos\pi^2)$
13. $(-1,-2,1)$ **14.** $\dfrac{\partial x^y}{\partial x} = yx^{y-1}\ \dfrac{\partial x^y}{\partial y} = x^y\log x$
15. $(-2e^{-2}\cos\pi^2, -\pi e^{-2}\operatorname{sen}\pi^2, -\pi e^{-2})$ **16.** $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

XVII, §3, p. 541

1. $2,-3$ **2.** a,b **3.** a,b,c
5. Seleccionar primero $H=(h,0)=hE_1$. Entonces $A\cdot H = ha_1$ si $A=(a_1,a_2)$.

Dividir ambos lados de la relación

$$f(X+H)-f(X)=a_1h+|h|g(H)$$

entre $h \neq 0$ y tomar el límite para ver que $a_1 = D_1f(X)$. De manera análoga, usar $H=(0,h)=hE_2$ para ver que $a_2 = D_2f(x,y)$. El argumento es similar para tres variables.

XVIII, §1, p. 530

1. $\dfrac{d}{dt}(P+tA)=A$, de modo que esto se sigue directamente de la regla de la cadena.

2. 5. En efecto, $C'(t)=(2t,-3t^{-4},1)$ y $C'(1)=(2,-3,1)$. Hacer el producto punto de esto con el grad $f(1,1,1)$ dado, para obtener 5.

3. $C'(0)=(0,1)$
Sea $C'(0)=(a,b)$. Ahora, $\operatorname{grad} f(C(0))=(9,2)$ y $\operatorname{grad} g(C(0))=(4,1)$, de modo que, al usar la regla de la cadena en las funciones f y g, respectivamente, obtenemos

$$2=\frac{d}{dt}f(C(t))\Big|_{t=0}=(9,2)\cdot(a,b)=9a+2b,$$

$$1=\frac{d}{dt}g(C(t))\Big|_{t=0}=(4,1)\cdot(a,b)=4a+b.$$

Al resolver las ecuaciones simultáneas se obtiene $C'(0)=(0,1)$.

4. (a) $\operatorname{grad} f(tP)\cdot P$.
(b) Usar 4(a) y hacer $t=0$.

5. Contemplando x y y como constantes, hacer $P=(x,y)$ y usar el ejercicio 4(a). Después hacer $t=1$. Si se desarrolla, se hallará la respuesta enunciada.

7. (a) $\partial f/\partial x = x/r$ y $\partial f/\partial y = y/r$ si $r=\sqrt{x^2+y^2}$.
(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}=$ ¿adivinen a qué?

8. $\dfrac{\partial r}{\partial x_i}=\dfrac{x_1}{r}$

9. (a) $\partial f/\partial x=(3x^2y+4x)\cos(x^3y+2x^2)$
$\partial f/\partial y = x^3\cos(x^3y+2x^2)$
(b) $\partial f/\partial x = -(6xy-4)\operatorname{sen}(3x^2y-4x)$
$\partial f/\partial y = -3x^2\operatorname{sen}(3x^2y-4x)$
(c) $\partial f/\partial x=\dfrac{2xy}{(x^2y+5y)}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x^2+5}{x^2y+5y}=\dfrac{1}{y}$
(d) $\partial f/\partial x=\frac{1}{2}(2xy+4)(x^2y+4x)^{-1/2}$
$\partial f/\partial y=\frac{1}{2}x^2(x^2y+4x)^{-1/2}$

XVIII, §2, p. 535

	Plano	Recta
(a)	$6x+2y+3z=49$	$X=(6,2,3)+t(12,4,6)$
(b)	$x+y+2z=2$	$X=(1,1,0)+t(1,1,2)$
(c)	$13x+15y+z=-15$	$X=(2,-3,4)+t(13,15,1)$
(d)	$6x-2y+15z=22$	$X=(1,7,2)+t(-6,2,-15)$
(e)	$4x+y+z=13$	$X=(2,1,4)+t(8,2,2)$
(f)	$z=0$	$X=(1,\pi/2,0)+t(0,0,\pi/2+1)$

2. (a) $(3,0,1)$ (b) $X=\left(\log 3,\dfrac{3\pi}{2},-3\right)+t(3,0,1)$
(c) $3x+z=3\log 3-3$

3. (a) $X=(3,2,-6)+t(2,-3,0)$ (b) $X=(2,1,-2)+t(-5,4,-3)$
(c) $X=(3,2,2)+t(2,3,0)$

4. $\|C(t)-Q\|$ y ver el ejercicio 11 del capítulo II, sección §1.

5. (a) $6x+8y-z=25$ (b) $16x+12y-125z=-75$
(c) $\pi x+y+z=2\pi$ **6.** $x-2y+z=1$

7. (b) $x+y+2z=2$ **8.** $3x-y+6z=14$

9. $(\cos 3)x+(\cos 3)y-z=3\cos 3-\operatorname{sen} 3$.

10. $3x+5y+4z=18$ **11.** (a) $\dfrac{1}{\sqrt{27}}(5,1,1)$ (b) $5x+y+z-6=0$

12. $\dfrac{-10}{3\sqrt{12}}$ **13.** (a) 0 (b) 6 **14.** $4ex+4ey+4ez=12e$

XVIII, §3, p. 540

1. (a) $\frac{5}{3}$ (b) máx $=\sqrt{10}$, mín $=-\sqrt{10}$

2. (a) $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$ (b) $\frac{48}{13}$ (c) $2\sqrt{145}$

3. Creciente $\left(-\dfrac{9\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, decreciente $\left(\dfrac{9\sqrt{32}}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

4. (a) $\left(\dfrac{9}{2\cdot 6^{7/4}},\dfrac{3}{2\cdot 6^{7/4}},-\dfrac{6}{2\cdot 6^{7/4}}\right)$ (b) $(1,2,-1,1)$

5. (a) $-2/\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{116}$ **6.** $\dfrac{1}{\sqrt{54}}(5,2,5), 6\sqrt{6}$ **7.** $\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\sqrt{2}$

8. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(2e-5)$ **9.** (a) 0 (b) $-\sqrt{1+2\pi^2}$

10. Para cualquier vector unitario A, la función de t dada por $f(P+tA)$ tiene un máximo en $t=0$ (para valores pequeños de t), y, por lo tanto, su derivada es 0 en $t=0$. Pero su derivada es $\operatorname{grad} f(P+tA)\cdot A$, que en $t=0$ es $\operatorname{grad} f(P)\cdot A$. Esto es cierto para todo A, de donde $\operatorname{grad} f(P)=O$. (Por ejemplo, sea A cualquiera de los vectores unitarios comunes en las direcciones de los ejes coordenados.)

Aunque el razonamiento anterior es el que funcionará en el problema 11, hay una manera más fácilde ver la afirmación. Fijar todas las variables excepto una, y digamos que x_1 es la variable. Sea

$$g(x) = f(x, a_2, \ldots, a_n), \quad \text{donde} \quad P = (a_1, \ldots, a_n).$$

Entonces g es una función de una variable, que tiene un máximo en $x = a_1$. Por lo tanto, $g'(a_1) = 0$ por el último año de cálculo. Pero

$$g'(a_1) = D_1 f(a_1, \ldots, a_n).$$

De manera análoga $D_i f(P) = 0$ para todo i, como se afirmó.

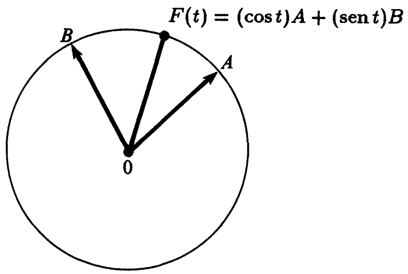
XVIII, §4, p. 561

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{dg}{dr}\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{dg}{dr}\dfrac{x}{r}$. Reemplazar x con y y z. Elevar al cuadrado cada término y sumar. Se puede factorizar

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1.$$

2. (a) $-X/r^3$ (b) $2X$ (c) $-3X/r^5$ (d) $-2e^{-r^2}X$ (e) $-Xr^2$
(f) $-4mX/r^{m+2}$ (g) $-(\operatorname{sen} r)X/r$

3. $F(t)^2 = (\cos t)^2 A^2 + 2(\cos t)(\operatorname{sen} t)^2 B^2 = 1$
pues $A^2 = B^2 = 1$, ya que A y B son vectores unitarios y, por hipótesis, $A \cdot B = 0$
Por lo tanto, $\|F(t)\| = 1$, de modo que $F(t)$ está sobre la esfera de radio 1.



4. Nótese que $L(t) = (1-t)P + tQ$. Si $L(t) = 0$ para algún valor de t, entonces

$$(1-t)P = -tQ.$$

Elevando al cuadrado ambos lados, usar $P^2 = Q^2 = 1$ para obtener $(1-t)^2 = t^2$. Se sigue que $t = 1/2$, de modo que $\frac{1}{2}P = \frac{-1}{2}Q$, de donde $P = -Q$.

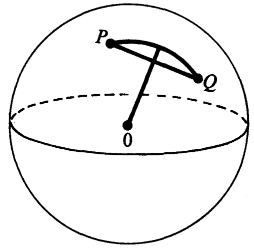
5. Por el ejercicio 4, $L(t) \neq O$ si $0 \leq t \leq 1$. Entonces $L(t)/\|L(t)\|$ es un vector unitario, y esta expresión se compone de expresiones diferenciables, luego es diferenciable. Más aún, tenemos

$$L(0) = P \quad \text{y} \quad L(1) = Q.$$

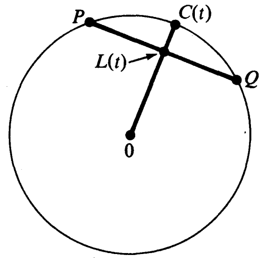
Así, si hacemos $C(t) = L(t)/\|L(t)\|$, entonces $\|C(t)\| = 1$ para todo t, y la curva $C(t)$ está sobre la esfera. Además,

$$C(0) = P \quad \text{y} \quad C(1) = Q.$$

Por lo tanto, $C(t)$ es una curva sobre la esfera, que une a P y Q.
La figura se ve así



Sobre la esfera



sección transversal

Nótese que $C(t)$ es el vector unitario en la dirección de $L(t)$.

6. Suponer que P y Q son dos puntos sobre la esfera, pero que $P = -Q$. En este caso no podemos aplicar el ejercicio 5, pero podemos aplicar el ejercicio 3. Sea

$$C(t) = (\cos t)P + (\operatorname{sen} t)A,$$

donde A es un vector unitario perpendicular a P. Entonces $C(t)^2 = 1$, de modo que $C(t)$ está sobre la esfera, y tenemos

$$C(0) = P, \quad C(\pi) = -P.$$

Así, $C(t)$ es una curva sobre la esfera, que une a P y a $-P$.

7. Sea $x = a\cos t$ y $y = b\operatorname{sen} t$.

9. Sean P y Q dos puntos sobre la esfera de radio a. Basta probar que $f(P) = f(Q)$. Por los ejercicios 5 y 6, existe sobre la esfera una curva $C(t)$ que une a P y Q, esto es, $C(t)$ está definida en un intervalo, y hay dos números t_1 y t_2 tales que $C(t_1) = P$ y $C(t_2) = Q$. En esos ejercicios lo hicimos sólo para la esfera de radio 1, pero se puede hacer para una esfera de radio arbitrario a al considerar $aC(t)$, en lugar de $C(t)$ como se usó en el ejercicio 5 o 6. Ahora bien, basta probar que la función $f\big(C(t)\big)$ es constante (como función de t). Al tomar su derivada se obtiene, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt}f\big(C(t)\big) = \operatorname{grad} f\big(C(t)\big) \cdot C'(t) = h\big(C(t)\big)C(t) \cdot C'(t).$$

Pero $C(t)^2 = a^2$, pues $C(t)$ está sobre la esfera de radio a. Al diferenciar esto respecto a t se obtiene $2C(t) \cdot C'(t) = 0$, de modo que $C(t) \cdot C'(t) = 0$, lo cual se sustituye arriba para ver que la derivada de $f\big(C(t)\big) = 0$. Por lo tanto, $f\big(C(t_1)\big) = f\big(C(t_2)\big)$, de modo que $f(P) = f(Q)$.

10. $\operatorname{grad} f(X) = \left(g'(r)\dfrac{x}{r}, g'(r)\dfrac{y}{r}, g'(r)\dfrac{z}{r}\right) = \dfrac{g'(r)}{r}X$ (digamos en tres variables), y $g'(r)/r$ es un factor escalar de X, de modo que $\operatorname{grad} f(X)$ y X son paralelos.

XVIII, §5, p. 548

1. $k\log\|X\|$ **2.** $-\dfrac{k}{2r^2}$ **3.** $\begin{cases} \log r, & k=2 \\ \dfrac{1}{(2-k)r^{k-2}}, & k\neq 2 \end{cases}$

Los ejercicios 1 y 2 son casos particulares del 3. Sea

$$f(X)=\frac{1}{r^k}X.$$

Tenemos que hallar una función $g(r)$ tal que, si hacemos $f(X)=g(r)$, entonces $F(X)=\operatorname{grad} f(X)$. Esto significa que debemos resolver la ecuación

$$\frac{1}{r^k}X=\frac{g'(r)}{r}X,$$

o, en otras palabras,

$$g'(r)=r^{1-k}.$$

Entonces

$$g(r)=\int r^{1-k}\,dr,$$

que es una integral en una variable. Han de saber cómo hallarla.

Tabla de integrales

1. $\displaystyle\int u\,dv = uv-\int v\,du$ 2. $\displaystyle\int a^u\,du=\frac{a^u}{\ln a}+C,\quad a\neq 1,\quad a>0$

3. $\displaystyle\int \cos u\,du=\operatorname{sen} u+C$ 4. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du=-\cos u+C$

5. $\displaystyle\int (ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C,\quad n\neq -1$

6. $\displaystyle\int (ax+b)^{-1}\,dx=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

7. $\displaystyle\int x(ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left[\frac{ax+b}{n+2}-\frac{b}{n+1}\right]+C,\quad n\neq -1,-2$

8. $\displaystyle\int x(ax+b)^{-1}\,dx=\frac{x}{a}-\frac{b}{a^2}\ln|ax+b|+C$

9. $\displaystyle\int x(ax+b)^{-2}\,dx=\frac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b|+\frac{b}{ax+b}\right]+C$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(ax+b)}=\frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right|+C$

11. $\displaystyle\int (\sqrt{ax+b})^n\,dx=\frac{2}{a}\frac{(\sqrt{ax+b})^{n+2}}{n+2}+C,\quad n\neq -2$

12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx=2\sqrt{ax+b}+b\int\frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

13. (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}=\frac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}+C,\quad \text{si}\ b<0$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|+C,\quad \text{si}\ b>0$

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,dx=-\frac{\sqrt{ax+b}}{x}+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}+C$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}}=-\frac{\sqrt{ax+b}}{bx}-\frac{a}{2b}\int\frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}+C$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{a^2-x^2}$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} + C = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C$

21. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^4}{2}\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} + C$

22. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} + C$

23. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\operatorname{senh}^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C$

24. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\,dx = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C$

25. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = -\frac{a^2}{2}\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + C$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$

29. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$

30. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{8}x\sqrt{a^2-x^2}(a^2-2x^2) + C$

31. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$

33. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

37. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a} + C$

38. $\displaystyle\int (\sqrt{x^2-a^2})^n\,dx = \frac{x(\sqrt{x^2-a^2})^n}{n+1} - \frac{na^2}{n+1}\int(\sqrt{x^2-a^2})^{n-2}\,dx,\quad n\neq -1$

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2-a^2})^n} = \frac{x(\sqrt{x^2-a^2})^{2-n}}{(2-n)a^2} - \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int\frac{dx}{(\sqrt{x^2-a^2})^{n-2}},\quad n\neq 2$

40. $\displaystyle\int x(\sqrt{x^2-a^2})^n\,dx = \frac{(\sqrt{x^2-a^2})^{n+2}}{n+2} + C,\quad n\neq -2$

41. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\cosh^{-1}\frac{x}{a} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,dx = \cosh^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + C$

44. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + C$

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C$

46. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$

47. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

48. $\displaystyle\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

49. $\displaystyle\int (\sqrt{2ax-x^2})^n\,dx = \frac{(x-a)(\sqrt{2ax-x^2})^n}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int(\sqrt{2ax-x^2})^{n-2}\,dx$

50. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt{2ax-x^2})^n} = \frac{(x-a)(\sqrt{2ax-x^2})^{2-n}}{(n-2)a^2} + \frac{(n-3)}{(n-2)a^2}\int\frac{dx}{(\sqrt{2ax-x^2})^{n-2}}$

51. $\displaystyle\int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{(x+a)(2x-3a)\sqrt{2ax-x^2}}{6} + \frac{a^3}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x-a}{a} + C$

52. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{2ax-x^2} + a\operatorname{sen}^{-1}\frac{x-a}{a} + C$

53. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2}\,dx = -2\sqrt{\frac{2a-x}{x}} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$

54. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = a\operatorname{sen}^{-1}\frac{x-a}{a} - \sqrt{2ax-x^2} + C$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C$

56. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$ 57. $\displaystyle\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax + C$

58. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$ 59. $\displaystyle\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$

60. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax\, dx = \frac{-\operatorname{sen}^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} ax\, dx$

61. $\displaystyle\int \cos^n ax\, dx = \frac{\cos^{n-1} ax \operatorname{sen} ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\, dx$

62. (a) $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C,\ a^2 \neq b^2$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)},\ a^2 \neq b^2$

(c) $\displaystyle\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)},\ a^2 \neq b^2$

63. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax \cos ax\, dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C$

64. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax \cos ax\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} ax}{(n+1)a} + C,\ n \neq -1$

65. $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{\operatorname{sen} ax}\, dx = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{sen} ax| + C$

66. $\displaystyle\int \cos^n ax \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a} + C,\ n \neq -1$

67. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} ax}{\cos ax}\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C$

68. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax \cos^m ax\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{n-2} ax \cos^m ax\, dx,$

$n \neq -m$ (Si $n = -m$, usar No. 86.)

69. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax \cos^m ax\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^n ax \cos^{m-2} ax\, dx,$

$m \neq -n$ (Si $m = -n$, usar No. 87.)

70. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \operatorname{sen} ax} = \frac{-2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right] + C,\ b^2 > c^2$

71. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \operatorname{sen} ax} = \frac{-1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\left|\frac{c + b\operatorname{sen} ax + \sqrt{c^2-b^2}\cos ax}{b + c\operatorname{sen} ax}\right| + C,\ b^2 < c^2$

72. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} ax} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C$

73. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$

74. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\frac{ax}{2}\right] + C,\ b^2 > c^2$

75. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\left|\frac{c + b\cos ax + \sqrt{c^2-b^2}\operatorname{sen} ax}{b + c\cos ax}\right| + C,\ b^2 < c^2$

76. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2} + C$ 77. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2} + C$

78. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} ax\, dx = \frac{1}{a^2}\operatorname{sen} ax - \frac{x}{a}\cos ax + C$ 79. $\displaystyle\int x\cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\operatorname{sen} ax + C$

80. $\displaystyle\int x^n \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\, dx$

81. $\displaystyle\int x^n \cos ax\, dx = \frac{x^n}{a}\operatorname{sen} ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{sen} ax\, dx$

82. $\displaystyle\int \tan ax\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C$ 83. $\displaystyle\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{sen} ax| + C$

84. $\displaystyle\int \tan^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax - x + C$ 85. $\displaystyle\int \cot^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax - x + C$

86. $\displaystyle\int \tan^n ax\, dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax\, dx,\ n \neq 1$

87. $\displaystyle\int \cot^n ax\, dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2} ax\, dx,\ n \neq 1$

88. $\displaystyle\int \sec ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax + \tan ax| + C$ 89. $\displaystyle\int \csc ax\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\csc ax + \cot ax| + C$

90. $\displaystyle\int \sec^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$ 91. $\displaystyle\int \csc^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$

92. $\displaystyle\int \sec^n ax\, dx = \frac{\sec^{n-2} ax \tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax\, dx,\ n \neq 1$

93. $\displaystyle\int \csc^n ax\, dx = -\frac{\csc^{n-2} ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} ax\, dx,\ n \neq 1$

94. $\displaystyle\int \sec^n ax \tan ax\, dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C,\ n \neq 0$

95. $\displaystyle\int \csc^n ax \cot ax\, dx = -\frac{\csc^n ax}{na} + C,\ n \neq 0$

96. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1} ax\, dx = x\operatorname{sen}^{-1} ax + \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2} + C$

97. $\displaystyle\int \cos^{-1} ax\,dx = x\cos^{-1} ax - \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2} + C$

98. $\displaystyle\int \tan^{-1} ax\,dx = x\tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\ln(1+a^2x^2) + C$

99. $\displaystyle\int x^n \operatorname{sen}^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{sen}^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1-a^2x^2}},\quad n \neq -1$

100. $\displaystyle\int x^n \cos^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1-a^2x^2}},\quad n \neq -1$

101. $\displaystyle\int x^n \tan^{-1} ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,dx}{1+a^2x^2},\quad n \neq -1$

102. $\displaystyle\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

103. $\displaystyle\int b^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\frac{b^{ax}}{\ln b} + C,\quad b>0,\ b\neq 1$

104. $\displaystyle\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$

105. $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$

106. $\displaystyle\int x^n b^{ax}\,dx = \frac{x^n b^{ax}}{a\ln b} - \frac{n}{a\ln b}\int x^{n-1}b^{ax}\,dx \quad b>0,\ b\neq 1$

107. $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx) + C$

108. $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx) + C$

109. $\displaystyle\int \ln ax\,dx = x\ln ax - x + C$

110. $\displaystyle\int x^n \ln ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln ax - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C,\quad n\neq -1$

111. $\displaystyle\int x^{-1}\ln ax\,dx = \frac{1}{2}(\ln ax)^2 + C$

112. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln ax} = \ln|\ln ax| + C$

113. $\displaystyle\int \operatorname{senh} ax\,dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$

114. $\displaystyle\int \cosh ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{senh} ax + C$

115. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{senh} 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C$

116. $\displaystyle\int \cosh^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{senh} 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C$

117. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{senh}^{n-1} ax\cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{senh}^{n-2} ax\,dx,\quad n\neq 0$

118. $\displaystyle\int \cosh^n ax\,dx = \frac{\cosh^{n-1} ax\operatorname{senh} ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} ax\,dx,\quad n\neq 0$

119. $\displaystyle\int x\operatorname{senh} ax\,dx = \frac{x}{a}\cosh ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{senh} ax + C$

120. $\displaystyle\int x\cosh ax\,dx = \frac{x}{a}\operatorname{senh} ax - \frac{1}{a^2}\cosh ax + C$

121. $\displaystyle\int x^n\operatorname{senh} ax\,dx = \frac{x^n}{a}\cosh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cosh ax\,dx$

122. $\displaystyle\int x^n\cosh ax\,dx = \frac{x^n}{a}\operatorname{senh} ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{senh} ax\,dx$

123. $\displaystyle\int \tanh ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\cosh ax) + C$

124. $\displaystyle\int \coth ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{senh} ax| + C$

125. $\displaystyle\int \tanh^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\tanh ax + C$

126. $\displaystyle\int \coth^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\coth ax + C$

127. $\displaystyle\int \tanh^n ax\,dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2} ax\,dx,\quad n\neq 1$

128. $\displaystyle\int \coth^n ax\,dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \coth^{n-2} ax\,dx,\quad n\neq 1$

129. $\displaystyle\int \operatorname{sech} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}^{-1}(\tanh ax) + C$

130. $\displaystyle\int \operatorname{csch} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right| + C$

131. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tanh ax + C$

132. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\coth ax + C$

133. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax\tanh ax}{(n-1)a} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} ax\,dx,\quad n\neq 1$

134. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^{n-2} ax\coth ax}{(n-1)a} - \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{csch}^{n-2} ax\,dx,\quad n\neq 1$

135. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^n ax\tanh ax\,dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C,\quad n\neq 0$

136. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^n ax\coth ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C,\quad n\neq 0$

137. $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{senh} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C,\quad a^2\neq b^2$

138. $\displaystyle\int e^{ax}\cosh bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C,\quad a^2\neq b^2$

139. $\displaystyle\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(n) = (n-1)!,\quad n>0.$

140. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\quad a>0$

141. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{si } n \text{ es un entero par} \geq 2,\\[2ex] \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n}, & \text{si } n \text{ es un entero impar} \geq 3\end{cases}$

Índice

T

V